Álgebra y Trigonometría

Séptima edición



SULLIVAN

Preparación para que la clase
"Lea el libro"

Característica	Descripción	Recompensa	Página
	Cada capítulo comienza con....		
NUEVO **Artículo y proyecto de apertura del capítulo**	Cada capítulo comienza con un artículo de actualidad y termina con un proyecto relacionado.	El artículo describe una situación real. El proyecto le permite aplicar lo aprendido para resolver un problema relacionado.	391 y 488
	Cada sección comienza con…		
NUEVO **Preparación para esta sección**	Las secciones comienzan con una lista de los conceptos que resulta clave repasar, con números de página	¿Olvidó lo aprendido? Esta característica señala el material previamente estudiado que se utilizará en esta sección. Repáselo, y siempre estará preparado para seguir adelante.	412
NUEVO **Ahora resuelva los problemas "¿Está preparado?"**	Problemas especiales respaldan la característica Preparación para esta sección.	¿No está seguro de necesitar el repaso Preparación para esta sección? Resuelva los problemas "¿Está preparado?" Si resuelve alguno de ellos mal, sabrá exactamente lo que necesita repasar y dónde encontrarlo.	412 y 423
Objetivos de aprendizaje 1	Cada sección comienza con una lista de objetivos. El número del objetivo aparece al margen del lugar donde se estudia.	Esto se enfoca en su estudio, haciendo hincapié en lo más importante y señalando donde se encuentra.	412
	La mayoría de las secciones contienen…		
Icono de Cálculo	Aparece junto a la información esencial para el estudio de cálculo.	Ponga atención: si le dedica más tiempo ahora, después lo realizará mejor.	412
Problemas "Ahora resuelva"	Esto se encuentra después de la mayoría de los problemas, y lo dirige hacia un ejercicio relacionado.	Aprendemos mejor haciendo las cosas. Usted solidificará su comprensión de los ejemplos, si aborda de inmediato problema similar, para cerciorarse de haber comprendido lo que acaba de leer.	413
Precauciones	En el texto se encuentran advertencias.	Éstas señalan los errores comunes y le ayudan a evitarlos.	413
Visión del concepto y exploraciones	Estas características opcionales que sugieren actividades con una utilidad de graficación.	Usted obtendrá un conocimiento más profundo e intuitivo de los teoremas y las definiciones.	414
NUEVO **En palabras**	Le indican las descripciones alternativas de las definiciones y teoremas seleccionados	¿Las matemáticas siempre parecen incomprensibles? Esta característica traduce el lenguaje matemático al lenguaje común.	414
Ejemplos descritos paso a paso	Los ejemplos contienen pasos intermedios descritos de manera detallada. Muchos incluyen anotaciones adicionales.	Resuelva los ejemplos por su cuenta, descubriendo la solución paso a paso a medida que avanza. Podrá verificar su desarrollo en cada línea. Como ayuda adicional, consulte las anotaciones en azul, que explican la razón por la que el enunciado de la izquierda es válido.	421

Practique
"Resuelva el/los problema(s)"

Característica	Descripción	Recompensa	Página
"Evalúe su comprensión" contiene una variedad de problemas al final de cada sección.			
NUEVO **Problemas "¿Está preparado?"**	Éstos determinan su retención del material previo que usted necesitará. Las respuestas se encuentran al final de los ejercicios para la sección. Esta propiedad se relaciona con la característica Preparación para esta sección.	¿Siempre recuerda lo que aprendió? Resolver estos problemas es la mejor forma de descubrirlo. Si resuelve mal alguno de ellos, sabrá exactamente lo que necesita repasar y dónde encontrarlo.	423
NUEVO **Conceptos y vocabulario**	Estos problemas de respuesta corta; es decir, reactivos de completar la frase y de cierto o falso, evalúan su comprensión de las definiciones y los conceptos clave de la sección en curso.	Aprender matemáticas es más que sólo memorizar; se trata de descubrir conexiones. Estos problemas le ayudan a captar las "ideas importantes" antes de empezar a construir habilidades matemáticas.	423
Desarrollo de habilidades	Estos problemas, correlacionados con los ejemplos de la sección, le brindan una práctica directa y organizada por nivel de dificultad.	Es importante profundizar y desarrollar sus capacidades para resolver problemas. Estos problemas le dan la práctica necesaria para lograrlo.	423-5
Gráficos	Estos problemas utilizan las gráficas de muchas formas.	Aumentará su capacidad analítica con la comprensión gráfica.	424
Ahora resuelva problemas	Muchos ejemplos lo remiten a un problema relacionado como tarea. Estos problemas están marcados con la imagen de un lápiz y con números	Si se atora al resolverlos, busque el problema "Ahora resuelva..." más cercano y consulte el ejemplo relacionado, para ver si le resulta de ayuda.	425
Aplicaciones	Los problemas de aplicación ("problemas expresados con palabras") se encuentran después de los problemas de desarrollo de habilidades básicas.	Las matemáticas están en todas partes, y estos problemas lo demuestran. Usted aprenderá a abordar problemas reales, y cómo dividirlos en partes más manejables. Esto puede resultar desafiante, pero vale la pena el esfuerzo.	425-8
Calculadora gráfica	Estos problemas opcionales requieren del uso de una utilidad de graficación, y están marcados con un icono especial y números resaltados.	Por lo general, el profesor le dará instrucciones sobre si resolver o no estos problemas. De hacerlo, le ayudarán a verificar y visualizar sus resultados analíticos.	426
"DEI"	Los problemas "Discusión, escritura e investigación" están marcados con un icono especial y números resaltados. Son para respaldar el análisis en clase, la verbalización de ideas matemáticas, y los escritos y proyectos de investigación.	Verbalizar una idea, o describirla con claridad por escrito, muestra una comprensión verdadera. Estos problemas consolidan dicha comprensión. Son desafiantes, pero usted obtendrá a lo que ponga en ellos.	428 (#99)

Repaso

“Estudio para exámenes”

	Característica	Descripción	Recompensa	Página
	El Repaso del capítulo se encuentra al final de cada capítulo y contiene…			
	“Temas para recordar”	Es una lista detallada de los teoremas, fórmulas, identidades, definiciones y funciones importantes que se encuentran en el capítulo.	Repáselos y sabrá cuál es el material más importante del capítulo.	482-3
NUEVO	**“Usted deberá ser capaz de...”**	Contiene una lista completa de los objetivos por sección, con sus ejercicios de práctica correspondientes.	Resuelva los ejercicios recomendados y dominará el material más importante. Si obtiene alguna respuesta equivocada, repase los números de página sugeridos e inténtelo de nuevo.	483-4
	Ejercicios de repaso	Éstos le brindan un repaso y práctica minuciosos de las habilidades fundamentales, relacionados con los objetivos de aprendizaje de cada sección.	La práctica hace al maestro. Estos problemas combinan ejercicios de todas las secciones, brindándole un repaso exhaustivo en un solo lugar	484-8
	Prueba de práctica	Los ejercicios de repaso contienen problemas numerados en color azul. En conjunto, estos problemas constituyen una prueba de práctica del capítulo.	Prepárese. Resuelva la prueba de práctica. Ésta le mostrará si está listo para su examen real.	484-8
NUEVO	**Proyectos del capítulo**	El Proyecto del capítulo exige la aplicación del aprendido en ese capítulo. En un sitio Web se encuentran disponibles proyectos adicionales.	El proyecto le brinda la oportunidad de aplicar lo aprendido en el capítulo para resolver un problema relacionado con el artículo de apertura. Si su profesor lo avala, constituye una magnífica oportunidad para trabajar en equipo, que con frecuencia es la mejor forma de aprender matemáticas.	488-9
NUEVO	**Repaso acumulativo**	Estos conjuntos de problemas aparecen al final de los capítulos 2 al 13. Combinan los problemas de los capítulos anteriores, ofreciendo un repaso acumulativo continuo.	Son verdaderamente importantes. Sirven para asegurarse de que no se olvida nada a medida de que avanza. Son bastante útiles para mantenerlo preparado de manera constante para pruebas y exámenes.	489-490

PARA EL ESTUDIANTE

Cuando comience, quizá sienta algo de ansiedad debido al número de teoremas, definiciones, procedimientos y ecuaciones. Es probable que se pregunte si puede aprenderlo todo a tiempo. No se preocupe, a veces la ansiedad es normal. El texto se escribió tomándolo a usted en cuenta. Si asiste a clases, trabaja con empeño, y lee y estudia este libro, edificará los conocimientos y las habilidades necesarias para tener éxito. A continuación se describe cómo utilizar el libro en su provecho.

Lea con cuidado

Cuando se está muy ocupado, es muy fácil omitir la lectura y pasar directamente a los problemas. No lo haga..., este libro tiene gran cantidad de ejemplos y explicaciones claras que le ayudarán a dividir las matemáticas en pasos fáciles de entender. La lectura le proporcionará una comprensión más clara, más allá de la simple memorización. Lea antes de la clases (no después), de manera que pueda formular preguntas relacionadas con lo que no entienda. Si lo hace, quedará sorprendido por lo mucho que obtiene de sus clases.

Utilice las características

Para comunicarme, yo utilizo diversos métodos. Al incorporar tales métodos a este libro, los denominé "características", las cuales responden a varios propósitos, desde ofrecer un repaso oportuno del material estudiado (sólo cuando usted lo necesite), hasta brindarle sesiones de repaso organizadas para ayudarlo a preparar sus exámenes. Aproveche estas características y dominará el material.

Para hacerlo más sencillo, incluí una breve guía para lograr el máximo provecho de éste libro (sólo revise las páginas anteriores). Dedique quince minutos al repaso de esta guía y familiarícese con las características revisando las páginas cuyos números se indican. Luego utilícelas conforme lea. Es la mejor forma de aprovechar al máximo su libro de texto.

No dude en ponerse en contacto conmigo, a través de Pearson Educación, para informarme de cualesquiera dudas, sugerencias o comentarios que pudiesen mejorar este texto. Espero saber de usted más adelante, y le deseo la mejor de las suertes con sus estudios.

Con mis mejores deseos,
Michael Sullivan

Recursos para ayudarle con sus estudios

Paquete de apoyo para el alumno

Es un sencillo paquete fácil usar, disponible para su adquisición con su libro o por separado.
Este invaluable paquete de estudios contiene lo siguiente:

➢ **Manual de soluciones para el estudiante**
Es un manual impreso que contiene las soluciones completas de todos los ejercicios impares del libro.

➢ **Centro tutorial de Pearson**
Los tutores proporcionan supervisión para cualquier problema con la respuesta en la parte posterior del libro. Puede contactar al Centro Tutorial mediante una línea telefónica gratuita, fax o correo electrónico.

➢ **Serie de exposiciones en CD-ROM**
Es un completo sistema de CD-ROM específicos para el libro, que contiene pequeños video-clips donde se explican los objetivos del capítulo y se resuelven problemas fundamentales. Estos videos ofrecen un excelente respaldo para quienes necesitan ayuda extra, o para quines están tomando un curso a distancia y/o materias en sistema abierto.

➢ **Repaso del álgebra**
Son cuatro capítulos con un repaso del álgebra intermedia, escritos con el mismo estilo que su libro.

Opciones de tutorial y tarea

➢**MathXL®**

MathXL® es un sistema de tareas, supervisión y evaluación *on line* que acompaña a su libro de texto. Los profesores pueden crear y asignar tareas y exámenes *on line*, utilizando ejercicios generados de manera algorítmica correlacionados con el libro. Se da seguimiento a su trabajo en una lista de evaluaciones *on line*. Usted podría responder exámenes del capítulo y recibir planes de estudio personalizados con base en los resultados. El plan de estudios determina sus debilidades y lo enlaza con los ejercicios tutoriales que necesita estudiar. También pueden tener acceso a video-clips de los ejercicios seleccionados. Para mayor información, visite www.mathxl.com.
(El profesor puede activar y configurar a MathXL)

➢ **MyMathLab (Internet)**

MyMathLab® es un curso completo *on line* que le ayudará a tener éxito en su aprendizaje. Contiene una versión *on line* de su libro de texto, con vínculos a recursos multimedia, como video-clips y ejercicios de práctica, relacionados con los ejemplos y ejercicios del texto. MyMathLab le sugieren tarea y exámenes *on line*, y genera un plan de estudio personalizado con base en sus resultados. Este plan lo enlaza con un gran número de ejercicios tutoriales para que los estudie, de manera que practique hasta dominar las disciplinas. La libreta de calificaciones de MyMathLab lleva un seguimiento de todo el trabajo de tarea, exámenes y tutoriales que usted realice.
(El profesor puede activar y configurar a MyMathLab)

SÉPTIMA EDICIÓN

ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

Michael Sullivan
Chicago State University

TRADUCCIÓN
Marcia González Osuna
Sergio Durán Reyes
Traductores profesionales

REVISIÓN TÉCNICA
Carlos Hernández Garciadiego
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México



México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

SULLIVAN, MICHAEL

Álgebra y trigonometría
Séptima edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2006

ISBN: 970-26-0736-1
Área: Bachillerato

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 1192

ISBN 0-13-143073-4

Edición en español
Editor: Enrique Quintanar Duarte
e-mail: enrique.quintanar@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

Edición en inglés
Editor-in-Chief: Sally Yagan
Senior Acquisitions Editor: Eric Frank
Project Manager/Print Supplements Editor: Dawn Murrin
Vice President/Director of Production and Manufacturing: David W. Riccardi
Executive Managing Editor: Kathleen Schiaparelli
Senior Managing Editor: Linda Mihatov Behrens
Production Editor: Bob Walters, Prepress Management, Inc.
Assistant Manufacturing Manager/Buyer: Michael Bell
Manufacturing Manager: Trudy Pisciotti
Marketing Manager: Halee Dinsey
Marketing Assistant: Rachel Beckman
Assistant Managing Editor, Math Media Production: John Matthews
Editorial Assistant: Tina Magrabi
Art Director: Jon Boylan
Interior Designers: Judy Matz-Coniglio, Jonathan Boylan
Cover Designer: Geoffrey Cassar
Creative Director: Carole Anson
Art Editor: Thomas Benfatti
Director of Creative Services: Paul Belfanti
Director, Image Resource Center: Melinda Reo
Manager, Rights and Permissions: Zina Arabia
Interior Image Specialist: Beth Brenzel
Cover Image Specialist: Karen Sanatar
Image Permission Coordinator: Cynthia Vincenti
Art Studio: Artworks:
Manager Editor, Audio/Video Assets: Patricia Burns
Production Manager: Ronda Whitson
Manager, Production Technologies: Matt Haas
Illustrators: Stacy Smith, Audrey Simonetti, Mark Landis, Nathan Storck, Ryan Currier, Scott Wieber, Royce Copenheaver, Dan Knopsnyder
Art Quality Assurance: Timothy Nguyen, Stacy Smith, Pamela Taylor

SÉPTIMA EDICIÓN 2006

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031



ISBN 970-26-0736-1

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 09 08 07 06

Para la familia

Katy (Murphy) y Pat	Shannon, Patrick, Ryan
Mike y Yola	Michael, Kevin, Marissa
Dan y Sheila	Maeve
Colleen (O'Hara) y Bill	Kaleigh, Billy

Contenido

Prólogo para el maestro xiv
Lista de aplicaciones xix
Créditos de fotografías e ilustraciones xxiii

CAPÍTULO R **Repaso** 1

R.1 Números reales 2
R.2 Repaso de álgebra 17
R.3 Repaso de geometría 29
R.4 Polinomios 35
R.5 Factorización de polinomios 43
R.6 División de polinomios; división sintética 52
R.7 Expresiones racionales 58
R.8 Raíces *n*-ésimas; exponentes racionales 70
Repaso del capítulo 77

CAPÍTULO 1 **Ecuaciones y desigualdades** 83

1.1 Ecuaciones lineales 84
1.2 Ecuaciones cuadráticas 96
1.3 Ecuaciones cuadráticas en el sistema de números complejos 109
1.4 Ecuaciones radicales; ecuaciones de forma cuadrática; ecuaciones que se factorizan 118
1.5 Solución de desigualdades 125
1.6 Ecuaciones y desigualdades que incluyen valor absoluto 136
1.7 Aplicaciones: interés, mezcla, movimiento uniforme, tareas de tasa constante 141
Repaso del capítulo 151
Proyectos del capítulo 155

CAPÍTULO 2 **Gráficas** 157

2.1 Coordenadas rectangulares 158
2.2 Gráficas de ecuaciones 165
2.3 Círculos 175
2.4 Rectas 181
2.5 Rectas paralelas y perpendiculares 194

2.6 Diagramas de dispersión; ajuste lineal de curvas 199
2.7 Variación 206
Repaso del capítulo 212
Proyectos del capítulo 216
Repaso acumulativo 216

CAPÍTULO 3 Funciones y sus gráficas 217

3.1 Funciones 218
3.2 Gráfica de una función 231
3.3 Propiedades de las funciones 240
3.4 Biblioteca de las funciones; funciones definidas por partes 251
3.5 Técnicas para graficar: transformaciones 262
3.6 Modelos matemáticos: construcción de funciones 275
Repaso del capítulo 283
Proyectos del capítulo 289
Repaso acumulativo 290

CAPÍTULO 4 Polinomios y funciones racionales 291

4.1 Funciones y modelos cuadráticos 292
4.2 Funciones polinomiales 312
4.3 Funciones racionales I 330
4.4 Funciones racionales II: análisis de gráficas 341
4.5 Desigualdades de polinomios y racionales 356
4.6 Ceros reales de una función polinomial 362
4.7 Ceros complejos; teorema fundamental del álgebra 377
Repaso del capítulo 383
Proyectos del capítulo 388
Repaso acumulativo 389

CAPÍTULO 5 Funciones exponenciales logarítmicas 391

5.1 Funciones compuestas 392
5.2 Funciones inversas 399
5.3 Funciones exponenciales 412
5.4 Funciones logarítmicas 428
5.5 Propiedades de los logaritmos 441
5.6 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales 450
5.7 Interés compuesto 455
5.8 Crecimiento y decaimiento exponencial; ley de Newton; modelos logísticos 465

5.9 Ajuste de datos a funciones exponencial, logarítmica y logística 474
Repaso del capítulo 482
Proyectos del capítulo 488
Repaso acumulativo 489

CAPÍTULO 6 Funciones trigonométricas 491

6.1 Ángulos y su medida 492
6.2 Trigonometría del triángulo rectángulo 506
6.3 Cálculo de valores de funciones trigonométricas de ángulos agudos 518
6.4 Funciones trigonométricas de ángulos generales 526
6.5 Enfoque de círculo unitario; propiedades de las funciones trigonométricas 536
6.6 Gráficas de las funciones seno y coseno 547
6.7 Gráficas de las funciones tangente, cotangente, cosecante y secante 564
6.8 Corrimiento de fase; ajuste con curvas senoidales 571
Repaso del capítulo 583
Proyectos del capítulo 589
Repaso acumulativo 590

CAPÍTULO 7 Trigonometría analítica 591

7.1 Funciones inversas de seno, coseno y tangente 592
7.2 Funciones trigonométricas inversas [continuación] 603
7.3 Identidades trigonométricas 608
7.4 Fórmulas de suma y resta 615
7.5 Fórmulas para ángulo doble y medio ángulo 626
7.6 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto 635
7.7 Ecuaciones trigonométricas I 639
7.8 Ecuaciones trigonométricas II 645
Repaso del capítulo 653
Proyectos del capítulo 657
Repaso acumulativo 658

CAPÍTULO 8 Aplicaciones de las funciones trigonométricas 659

8.1 Aplicaciones que involucran triángulos rectángulos 660
8.2 Ley de los senos 669
8.3 Ley de los cosenos 681
8.4 Área de un triángulo 687
8.5 Movimiento armónico simple; movimiento amortiguado; combinación de ondas 693

Repaso del capítulo 702
Proyectos del capítulo 707
Repaso acumulativo 708

CAPÍTULO 9 Coordenadas polares y vectores 709

9.1 Coordenadas polares 710
9.2 Ecuaciones polares y gráficas 719
9.3 El plano complejo; teorema de De Moivre 736
9.4 Vectores 744
9.5 Producto punto 756
Repaso del capítulo 764
Proyectos del capítulo 767
Repaso acumulativo 768

CAPÍTULO 10 Geometría analítica 769

10.1 Cónicas 770
10.2 Parábola 771
10.3 Elipse 781
10.4 La hipérbola 791
10.5 Rotación de ejes, forma general de una cónica 805
10.6 Ecuaciones polares de cónicas 814
10.7 Curvas planas y ecuaciones paramétricas 820
Repaso del capítulo 834
Proyectos del capítulo 837
Repaso acumulativo 838

CAPÍTULO 11 Sistemas de ecuaciones y desigualdades 839

11.1 Sistemas de ecuaciones lineales: Sustitución y eliminación 840
11.2 Sistemas de ecuaciones lineales: Matrices 856
11.3 Sistemas de ecuaciones lineales: Determinantes 872
11.4 Álgebra matricial 882
11.5 Descomposición en fracciones parciales 899
11.6 Sistemas de ecuaciones no lineales 907
11.7 Sistemas de desigualdades 916
11.8 Programación lineal 925
Repaso del capítulo 933
Proyectos del capítulo 937
Repaso acumulativo 938

CAPÍTULO 12 Secuencias; inducción; teorema del binomio 939

12.1 Sucesiones 940
12.2 Sucesiones aritméticas 949
12.3 Sucesiones geométricas; series geométricas 955
12.4 Inducción matemática 967
12.5 Teorema del binomio 971
Repaso del capítulo 978
Proyectos del capítulo 981
Repaso acumulativo 982

CAPÍTULO 13 Conteos y probabilidad 983

13.1 Conjuntos y conteos 984
13.2 Permutaciones y combinaciones 990
13.3 Probabilidad 1001
Repaso del capítulo 1012
Proyectos del capítulo 1015
Repaso acumulativo 1016

Apéndice Calculadoras gráficas 1017

1 El rectángulo de visualización 1017
2 Uso de una calculadora gráfica para representar ecuaciones 1019
3 Uso de una calculadora gráfica para localizar intersecciones y verificar la simetría 1023
4 Uso de una calculadora gráfica para resolver ecuaciones 1025
5 Pantallas cuadradas 1027
6 Uso de una calculadora gráfica para representar desigualdades 1028
7 Uso de una calculadora gráfica para resolver sistemas de ecuaciones lineales 1030
8 Uso de una calculadora gráfica para representar una ecuación polar 1031
9 Uso de una calculadora gráfica para graficar ecuaciones paramétricas 1032

Respuestas R1

Índice I1

Prólogo para el maestro

Como profesor de matemáticas en una universidad pública urbana durante 35 años, entiendo las diversas necesidades de los estudiantes de álgebra y trigonometría. Los estudiantes varían desde los de escasa preparación, con poco respaldo matemático y miedo a las matemáticas, hasta los que cuentan con una estupenda preparación y motivación. Para algunos, es su último curso de matemáticas. Para otros, es de preparación para futuros cursos de matemáticas. Escribí este texto con ambos grupos en mente.

Una gran ventaja de haber escrito una serie muy utilizada radica en la amplia base de retroalimentación que recibo de maestros y estudiantes que utilizaron las ediciones anteriores. Les estoy sinceramente agradecido por su apoyo. Casi todos los cambios de esta edición son resultado de sus minuciosos comentarios y sugerencias. Espero haber sido capaz de captar sus ideas y, construyendo sobre los cimientos de la exitosa sexta edición, hacer de esta serie una herramienta de enseñanza y aprendizaje aun mejor para estudiantes y maestros.

Nuevas características de la séptima edición

En lugar de colocar aquí una lista con las nuevas características, esta información se encuentra en las páginas: segunda de forros, I, II, III y IV. Las nuevas características son fáciles de localizar, gracias a la palabra "Nuevo" que se encuentra en la columna izquierda.

Esta edición coloca las nuevas características en su propio contexto, como los ladrillos de un sistema general de aprendizaje que se ha pulido cuidadosamente con los años, a fin de ayudar a que los estudiantes obtengan más del tiempo que dedican a estudiar. Por favor, tómese su tiempo para revisar esto, y analícelo con sus estudiantes al principio del curso. Mi experiencia muestra que cuando los estudiantes utilizan dichas características, tienen más éxito en el curso.

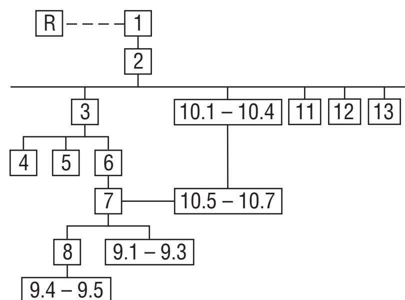
Cambios de la organización en la séptima edición

- La "división sintética" se pasó del anterior capítulo 5: "Ceros de una función de polinomios" al capítulo R, y se combinó con la "división de polinomios" en una sola sección.
- "Exponentes enteros y raíces cuadradas" ahora aparece en la sección R.2 del capítulo R; "Radicales" ahora se combina con "Expresiones racionales" en el capítulo R.
- "Preparación de ecuaciones: Aplicaciones" (antes en la sección 1.2) ahora aparece como sección 1.7, al final del capítulo 1. Algunas de sus aplicaciones más sencillas están ahora en la sección 1.1.
- "Ecuaciones cuadráticas en el sistema de números complejos" se movió del antiguo capítulo 5: "Ceros de una función polinomial" a la sección 1.3 del capítulo 1. Esta sección continúa siendo opcional, lo que permite el estudio anticipado o posterior de los números complejos y las ecuaciones cuadráticas con discriminante negativa.
- "Círculos" aparece ahora como sección individual en el capítulo 2.
- "Funciones compuestas" antes en el capítulo 3: "Funciones y su gráfica" ahora aparece en la sección 5.1 del capítulo 5: "Funciones exponenciales y logarítmicas"
- Los anteriores capítulo 4: "Funciones polinomiales irracionales", y capítulo 5: "Ceros de una función polinomial" se combinaron en un solo capítulo, capítulo 4: "Polinomios y funciones racionales"
- "Sistemas de ecuaciones lineales: Dos ecuaciones con dos variables" y "Sistemas de ecuaciones lineales: Tres ecuaciones con tres variables" se combinaron en una sola sección llamada "Sistemas de ecuaciones lineales: Sustitución y eliminación".

Uso eficaz de la séptima edición en su programa de estudios

Con el fin de satisfacer las diversas necesidades que existen en los variados programas de estudios, este libro comprende más contenido del que es probable abarcar en un curso de *álgebra y trigonometría*. Como se ilustra en el diagrama, este libro se organizó tomando en cuenta la flexibilidad. Dentro de cada capítulo,

algunas secciones son opcionales (vea los detalles en el siguiente diagrama de flujo) y se pueden omitir sin perder la continuidad.



Capítulo R Repaso
Este capítulo se compone de material de repaso. Se puede utilizar como primera parte del curso o para después, como un repaso de momento cuando sea necesario utilizarlo. A lo largo del libro se hacen referencias concretas a este capítulo, con el fin de apoyar el proceso de repaso.

Capítulo 1 Ecuaciones y desigualdades
Es principalmente un repaso de los temas de álgebra intermedia; este material es un prerrequisito para temas posteriores. El estudio de números complejos y ecuaciones cuadráticas con discriminante negativa es opcional, aunque puede posponerse u omitirse por completo sin perder la continuidad.

Capítulo 2 Gráficas
Este capítulo incluye los fundamentos de la funciones. Las secciones 2.6 y 2.7 son opcionales.

Capítulo 3 Funciones y sus gráficas
Es quizá el capítulo más importante. La sección 3.6 es opcional.

Capítulo 4 Polinomios y funciones racionales
La sección de temas depende de su programa de estudios.

Capítulo 5 Funciones exponenciales logarítmicas
Las secciones 5.1 a 5.6 son secuenciales. Las secciones 5.7 y 5.9 son opcionales.

Capítulo 6 Funciones trigonométricas
La sección 6.8 es opcional.

Capítulo 7 Trigonometría analítica
En un curso abreviado, se pueden omitir las secciones 7.2, 7.6, y 7.8.

Capítulo 8 Aplicaciones de las funciones trigonométricas
En un curso abreviado, se pueden omitir las secciones 8.4 y 8.5.

Capítulo 9 Coordenadas polares y vectores
Las secciones 9.1 a 9.3 y las secciones 9.4 y 9.5, son independientes y se pueden abordar por separado.

Capítulo 10 Geometría analítica
Las secciones 10.1 a 10.4 son secuenciales. Las secciones 10.5, 10.6 y 10.7 son independientes entre sí, pero todas necesitan de las secciones 10.1 a 10.4.

Capítulo 11 Sistemas de ecuaciones y desigualdades
Las secciones 11.2 a 11.7 se pueden abordar en cualquier orden, pero todas necesitan de la sección 11.1. La sección 11.8 necesita de la sección 11.7.

Capítulo 12 Secuencias; inducción; teorema del binomio
Existen tres partes independientes: las secciones 12.1 a 12.3; la sección 12.4; y la sección 12.5.

Capítulo 13 Conteos y probabilidad
Las secciones son secuenciales.

Agradecimientos

Son los autores quienes escriben los libros, pero éstos evolucionan desde una idea hasta su forma final gracias a los esfuerzos de muchas personas. Fue Don Dellen quien primero me sugirió este libro y la serie. A Don se le recuerda por sus grandes contribuciones editoriales y respecto a las matemáticas.

También quisiera extender mi gratitud por su importante apoyo y estímulo en la preparación de esta edición a las siguientes personas: De Prentice Hall: Halee Dinsey por sus novedosas habilidades de mercadotecnia; Eric Frank por sus sustanciales contribuciones, ideas y entusiasmo; Patrice Jones, que continúa siendo un gran admirador y respaldo; Dawn Murrin por su talento y capacidad para eliminar a lo superfluo; Bob Walters, que me sigue sorprendiendo con su capacidad de organización y como editor de producción; Sally Yagan por su apoyo continuo y sincero interés; y al equipo de ventas de Prentice Hall por su continuo apoyo y confianza en mis libros. También quiero agradecer a Tracey Hoy y Anna Maria Mendiola por su minuciosa revisión de todo el manuscrito; Teri Lovelace, Kurt Norlin, demás personas de Laurel Technical Services, por su dedicación al revisar la exactitud del manuscrito y las respuestas. Un agradecimiento muy especial a Jill McGowan, Kathleen Miranda, Karla Neal, Philip Pina y Phoebe Rouse, por sus muy detalladas y útiles revisiones en la preparación de esta edición.

Por último, ofrezco mi más profundo agradecimiento a los dedicados usuarios y revisores de mis libros, cuyas indicaciones colectivas conforman el punto medular de cada revisión del libro de texto. Una disculpa por cualquier omisión:

James Africh, *College of DuPage*
Steve Agronsky, *Cal Poly State University*
Grant Alexander, *Joliet Junior College*
Dave Anderson, *South Suburban College*
Joby Milo Anthony, *University of Central Florida*
James E.Arnold, *University of Wisconsin-Milwaukee*
Carolyn Autray, *University of West Georgia*
Agnes Azzolino, *Middlesex County College*
Wilson P Banks, *Illinois State University*
Sudeshna Basu, *Howard University*
Dale R. Bedgood, *East Texas State University*
Beth Beno, *South Suburban College*
Carolyn Bernath, *Tallahassee Community College*
William H. Beyer, *University of Akron*
Annette Blackwelder, *Florida State University*
Richelle Blair, *Lakeland Community College*
Trudy Bratten, *Grossmont College*
Tim Bremer, *Broome Community College*
Joanne Brunner, *Joliet Junior College*
Warren Burch, *Brevard Community College*
Mary Butler, *Lincoln Public Schools*
Jim Butterbach, *Joliet Junior College*
William J. Cable, *University of Wisconsin-Stevens Point*
Lois Calamia, *Brookdale Community College*
Jim Campbell, *Lincoln Public Schools*
Roger Carlsen, *Moraine Valley Community College*
Elena Catoiu, *Joliet Junior College*
Mathews Chakkanakuzhi, *Palomar College*
John Collado, *South Suburban College*
Nelson Collins, *Joliet Junior College*
Jim Cooper, *Joliet Junior College*
Denise Corbett, *East Carolina University*
Theodore C. Coskey, *South Seattle Community College*
Paul Crittenden, *University of Nebraska at Lincoln*
John Davenport, *East Texas State University*
Faye Dang, *Joliet Junior College*
Antonio David, *Del Mar College*
Duane E. Deal, *Ball State University*
Timothy Deis, *University of Wisconsin-Platteville*
Vivian Dennis, *Eastfield College*
Guesna Dohrman, *Tallahassee Community College*
Karen R. Dougan, *University of Florida*
Louise Dyson, *Clark College*
Paul D. East, *Lexington Community College*
Don Edmondson, *University of Texas-Austin*
Erica Egizio, *Joliet Junior College*
Christopher Ennis, *University of Minnesota*
Ralph Esparza, Jr., *Richland College*
Garret J. Etgen, *University of Houston*
Pete Falzone, *Pensacola Junior College*
W.A. Ferguson, *University of Illinois-Urbana/Champaign*
Iris B. Fetta, *Clemson University*
Mason Flake, *student at Edison Community College*
Timothy W. Flood, *Pittsburg State University*
Merle Friel, *Humboldt State University*
Richard A. Fritz, *Moraine Valley Community College*
Carolyn Funk, *South Suburban College*
Dewey Furness, *Ricke College*
Tina Garn, *University of Arizona*
Dawit Getachew, *Chicago State University*
Wayne Gibson, *Rancho Santiago College*
Robert Gill, *University of Minnesota Duluth*
Sudhir Kumar Goel, *Valdosta State University*
Joan Goliday, *Sante Fe Community College*
Frederic Gooding, *Goucher College*
Sue Graupner, *Lincoln Public Schools*
Jennifer L. Grimsley, *University of Charleston*
Ken Gurganus, *University of North Carolina*
James E. Hall, *University of Wisconsin-Madison*
Judy Hall, *West Virginia University*
Edward R. Hancock, *DeVry Institute of Technology*
Julia Hassett, *DeVry Institute-Dupage*
Christopher Hay-Jahans, *University of South Dakota*
Michah Heibel, *Lincoln Public Schools*
LaRae Helliwell, *San Jose City College*
Brother Herron, *Brother Rice High School*
Robert Hoburg, *Western Connecticut State University*
Lynda Hollingsworth, *Northwest Missouri State University*
Lee Hruby, *Naperville North High School*
Kim Hughes, *California State College-San Bernardino*
Ron Jamison, *Brigham Young University*
Richard A. Jensen, *Manatee Community College*
Sandra G. Johnson, *St. Cloud State University*
Tuesday Johnson, *New Mexico State University*
Moana H. Karsteter, *Tallahassee Community College*
Donna Katula, *Joliet Junior College*
Arthur Kaufman, *College of Staten Island*
Thomas Kearns, *North Kentucky University*
Shelia Kellenbarger, *Lincoln Public Schools*
Lynne Kowski, *Raritan Valley Community College*
Keith Kuchar, *Manatee Community College*
Tor Kwembe, *Chicago State University*
Linda J. Kyle, *Tarrant Country Jr. College*
H.E. Lacey, *Texas A & M University*
Harriet Lamm, *Coastal Bend College*
James Lapp, *Fort Lewis College*
Matt Larson, *Lincoln Public Schools*
Christopher Lattin, *Oakton Community College*
Adele LeGere, *Oakton Community College*
Kevin Leith, *University of Houston*
JoAnn Lewin, *Edison College*
Jeff Lewis, *Johnson County Community College*
Stanley Lukawecki, *Clemson University*
Janice C. Lyon, *Tallahassee Community College*
Virginia McCarthy, *Iowa State University*
Jean McArthur, *Joliet Junior College*
Karla McCavit, *Albion College*
Tom McCollow, *DeVry Institute of Technology*
Will McGowant, *Howard University*
Laurence Maher, *North Texas State University*
Jay A. Malmstrom, *Oklahoma City Community College*
Sherry Martina, *Naperville North High School*
Alec Matheson, *Lamar University*
Nancy Matthews, *University of Oklahoma*
James Maxwell, *Oklahoma State University-Stillwater*
Marsha May, *Midwestern State University*
Judy Meckley, *Joliet Junior College*
David Meel, *Bowling Green State University*
Carolyn Meitler, *Concordia University*
Samia Metwali, *Erie Community College*
Rich Meyers, *Joliet Junior College*
Eldon Miller, *University of Mississippi*
James Miller, *West Virginia University*
Michael Miller, *Iowa State University*
Kathleen Miranda, *SUNY at Old Westbury*
Thomas Monaghan, *Naperville North High School*
Craig Morse, *Naperville North High School*
Samad Mortabit, *Metropolitan State University*
Pat Mower, *Washburn University*
A. Muhundan, *Manatee Community College*
Jane Murphy, *Middlesex Community College*
Richard Nadel, *Florida International University*
Gabriel Nagy, *Kansas State University*
Bill Naegele, *South Suburban College*
Lawrence E. Newman, *Holyoke Community College*
James Nymann, *University of Texas-El Paso*
Sharon O'Donnell, *Chicago State University*
Seth F. Oppenheimer, *Mississippi State University*
Linda Padilla, *Joliet Junior College*
E. James Peake, *Iowa State University*
Kelly Pearson, *Murray State University*
Philip Pina, *Florida Atlantic University*
Michael Prophet, *University of Northern Iowa*
Neal C. Raber, *University of Akron*
Thomas Radin, *San Joaquin Delta College*
Ken A. Rager, *Metropolitan State College*
Kenneth D. Reeves, *San Antonio College*
Elsi Reinhardt, *Truckee Meadows Community College*
Jane Ringwald, *Iowa State University*
Stephen Rodi, *Austin Community College*
William Rogge, *Lincoln Northeast High School*
Howard L. Rolf, *Baylor University*
Phoebe Rouse, *Lousiana State University*
Edward Rozema, *University of Tennessee at Chattanooga*
Dennis C. Runde, *Manatee Community College*
Alan Saleski, *Loyola University of Chicago*
John Sanders, *Chicago State University*
Susan Sandmeyer, *Jamestown Community College*
Linda Schmidt, *Greenville Technical College*
A.K. Shamma, *University of West Florida*
Martin Sherry, *Lower Columbia College*

Tatrana Shubin, *San Jose State University*
Anita Sikes, *Delgado Community College*
Timothy Sipka, *Alma College*
Lori Smellegar, *Manatee Community College*
John Spellman, *Southwest Texas State University*
Rajalakshmi Sriram, *Okaloosa-Walton Community College*
Becky Stamper, *Western Kentucky University*
Judy Staver, *Florida Community College-South*
Neil Stephens, *Hinsdale South High School*
Patrick Stevens, *Joliet Junior College*
Christopher Terry, *Augusta State University*
Diane Tesar, *South Suburban College*
Tommy Thompson, *Brookhaven College*
Richard J. Tondra, *Iowa State University*
Marvel Townsend, *University of Florida*
Jim Trudnowski, *Carroll College*
Robert Tuskey, *Joliet Junior College*
Richard G. Vinson, *University of South Alabama*
Mary Voxman, *University of Idaho*
Jennifer Walsh, *Daytona Beach Community College*
Donna Wandke, *Naperville North High School*
Darlene Whitkenack, *Northern Illinois University*
Christine Wilson, *West Virginia University*
Brad Wind, *Florida International University*
Mary Wolyniak, *Broome Community College*
Canton Woods, *Auburn University*
Tamara S. Worner, *Wayne State College*
Terri Wright, *New Hampshire Community*
Technical College, *Manchester*
George Zazi, *Chicago State University*

Michael Sullivan

RECURSOS PARA EL ESTUDIANTE	RECURSOS PARA EL MAESTRO
Paquete de estudios para el estudiante Todo lo necesario para que un estudiante tenga éxito, en un solo bloque. Incluido gratuitamente con el libro, o disponible para su venta por separado. El Paquete de estudios para el estudiante contiene: • ***Manual de soluciones para el estudiante*** Soluciones minuciosamente desarrolladas de todos los ejercicios impares. • ***Centro tutor de Pearson*** Los tutores proporcionan supervisión para cualquier problema con la respuesta en la parte final del libro. Los estudiantes tienen acceso al Centro tutor mediante una línea telefónica gratuita, fax o correo electrónico. • ***Serie de exposiciones en CD*** Un completo juego de CD-Roms, relacionados con el texto, que contienen breves videos de un instructor exponiendo ejemplos clave del libro. • ***Repaso del álgebra*** Cuatro capítulos de repaso del álgebra intermedia. Ideales para un curso moderado o repaso individual.	**Distribución de los recursos para el maestro** Todos los recursos para el maestro se pueden descargar desde un solo sitio web (puede obtener la dirección y contraseña con su representante de PE), o solicitarlos de manera individual: • ***TestGen*** Es para elaborar exámenes con facilidad, a partir de los objetivos de la sección. Las preguntas se generan de manera algorítmica, lo que permite versiones sin límite. Edite los problemas o construya los suyos. • ***Archivo de reactivos de prueba*** Es un banco de pruebas impreso, derivado de TestGen. • ***Láminas de PowerPoint para exposición en clase*** Láminas que se pueden editar que siguen el contenido del libro. Preséntelas en clase o colóquelas en un sitio web para un curso en línea. • ***Manual de soluciones para el maestro*** Soluciones minuciosamente desarrolladas de todos los ejercicios. **Edición para los maestros** Contiene al final del libro las respuestas a todos los ejercicios del texto

MathXL®

MathXL® es un poderoso sistema de tareas, supervisión y evaluación en línea que acompaña a su libro de texto. Los instructores pueden crear, editar y designar tarea y exámenes en línea, utilizando ejercicios generados de manera algorítmica y correlacionados con el nivel del objetivo del libro. Se da seguimiento al trabajo de los estudiantes en una lista de calificaciones en línea. Los estudiantes pueden hacer exámenes del capítulo y, con base en los resultados, recibir planes de estudio personalizados. El plan de estudios especifica sus debilidades y los enlaza con los ejercicios de tutoría correspondientes a los objetivos que necesitan estudiar. También pueden tener acceso a videos de los ejercicios seleccionados. MathXL está a disposición de los maestros que adopten el libro. Para mayor información visite nuestro sitio **www.mathxl.com**, o póngase en contacto con su representante de ventas de Prentice Hall para recibir una demostración.

MyMathLab®

MyMathLab® es un texto específico, un curso en línea que se puede hacer personal para sus libros de texto. MyMathLab es accionado por CourseCom-pass™ —el entorno de enseñanza y aprendizaje en línea de Pearson Education— y por MathXL® —nuestro sistema de tareas, tutorial y evaluación. MyMathLab le brinda las herramientas necesarias para impartir todo o una parte de su curso en línea, ya sea que sus estudiantes se encuentren en las instalaciones de laboratorio de cómputo escolar o trabajando desde casa.

MyMathLab le proporciona un amplio y flexible conjunto de materiales para el curso, ofrece ejercicios generados de manera algorítmica para practicar sin límite. Para mejorar su desempeño, los estudiantes pueden emplear herramientas en línea como exposiciones en video y un libro multimedia. Los maestros pueden usar los administradores de tareas y exámenes de MyMathLab's y asignar ejercicios en línea relacionados con el libro, e importar pruebas de TesGen para mayor flexibilidad. La lista de calificaciones en línea —diseñada en especial para matemáticas— lleva un seguimiento automático de los resultados obtenidos por los estudiantes en tareas y exámenes, permitiendo que el maestro controle la manera de calcular las calificaciones finales. MyMathLab está a disposición de los maestros que adopten el libro. Para mayor información visite nuestro sitio **www.mymathlab.com**, o póngase en contacto con su representante de ventas de Prentice Hall para recibir una demostración.

WebCT o BlackBoard Premium

Una colección de recursos específicos para el texto, disponibles para su uso en los sistemas WebCT o BlackBoard. Entre dichos recursos se encuentran un libro multimedia, videos por sección, manual de respuestas para el estudiante y el maestro, tareas de práctica con retroalimentación inmediata, bancos de preguntas para elaboración de tareas, cuestionarios o exámenes, manuales de calculadoras gráficas en línea, láminas de PowerPoint para exposición de clase y más.

Lista de aplicaciones

Acústica
amplificación del sonido, 486
intensidad del sonido, 440

Aeronáutica
antena satelital, 777-78, 779
satélites de vigilancia, 668
superficie y volumen de un globo, 398

Agricultura
administración de una granja, 931
área de pastoreo para una vaca, 692
cercado de una granja, 915
demanda de maíz, 411
regado de un campo, 108
ubicación de cultivos, 936

Alimentos. *Vea también* **Nutrición**
humedad relativa, 427
rayo y trueno, 153
satélites, 181
sensación térmica, 261

Combinatoria
candados de combinación, 1000
códigos aeroportuarios, 992
combinación
  de blusas y faldas, 999
  de camisas y corbatas, 999
comités del senado, 1000
estibado de cajas, 999
formación
  de código, 992, 993, 999
  de número, 999
  de personas, 993-94, 999
  de un comité, 997, 999, 1000, 1014
  de una palabra, 997-98, 1000, 1014
números telefónicos, 1014
opciones para el hogar, 1014
orden
  de banderas, 998, 1014
  de libros, 999, 1014
permutaciones de la fecha de nacimiento, 995, 1000, 1007-8, 1012, 1015
posibilidades de número de matrícula, 1000, 1014
respuestas posibles en un examen de cierto o falso, 999
selección de objetos, 1000

Computadoras
penetración de mercado del coprocesador Intel, 473

Comunicaciones
carta de primera clase, 259-60
esparcimiento de rumores, 426, 440
teléfono de tonos, 638, 702
teléfonos móviles, 156, 217, 259, 289

Construcción
área del canal, 82
carpintería, 194
costo del material de una tienda de campaña, 691
de cajas, 105-6, 108, 914
  cerradas, 289
  incrementar el volumen al máximo, 250
  reducir al mínimo el material necesario para, 250
de canales para lluvia, 309, 522, 652
de cenefa
  alrededor de un jardín, 108
  alrededor de una piscina, 108
de lata, 150, 387
de recintos
  para jardín, 149
  para un estanque, 149
  para un campo rectangular, 280, 302, 309
de un estadio, 310, 955
de un fanal, 779
de un mosaico, 955
de un parque, 278-79
de un tubo cilíndrico, 914
de una antena parabólica, 779
de una carretera, 668, 679, 705
de una cerca
  para maximizar el área, 280, 302, 309, 386
de una escalera de ladrillos, 955, 980
de una linterna, 779
de una piscina, 34-35, 82
de una rampa de carga, 680
de una rampa para sillas de ruedas, 668
dimensiones de un patio, 108
diseño de piso, 953-54, 980
grado del camino, 194
inclinación del techo, 667
instalación de televisión por cable, 282
material necesario para hacer un tambor, 288-89, 355
minimizar el área, 355
pintura de una casa, 855
resistencia de una viga, 288
sección transversal de una viga, 231

Delitos
hombres víctimas de asesinato, 310
robo de automóviles, 329
total cometidos al año, 231
violentos, 387

Demografía. *Vea también* **Población**
estado civil de hombres y mujeres, 990
expectativas de vida de la población, 134-35
población estadounidense, 81

Deportes
básquetbol, 667-68, 1000-1001
béisbol, 164, 1000, 1014
  ligas menores, 164-65, 686
campos de béisbol, 685, 686
  Wrigley Field, 686
carreras, 149, 155, 914
  larga distancia, 911-12
  la liebre y la tortuga, 914
caza, 310
fútbol americano, 149, 1000
golf, movimiento de una pelota en el, 238
héroes olímpicos, 150

Derecho
funcionarios encargados de hacer cumplir la ley, 988

Dirección
de la aguja de una brújula, 763
de un nadador, 767
de una aeronave, 758-59, 763, 767
de una embarcación de motor, 763, 767
para cruzar un río, 763

Distancia. *Vea también* **Física**
a través de un estanque, 666
a una meseta, 666
alcance de un aeroplano, 150
alcance de una escalerilla, 666
alto/altura/altitud
  de la cara de Lincoln en el monte Rushmore, 667
  de la pirámide de Keops, 679
  de la torre Eiffel, 666
  de un árbol, 680
  de un edificio, 666, 704
  de un helicóptero, 680
  de un puente, 678
  de una aeronave, 486, 678, 679
  de una estatua sobre un edificio, 663
  de una montaña, 29, 486, 674, 678
  de una nube, 662-63
  de una pelota, 250
  de una torre, 667
  del monumento a Washington, 667
anchura
  de un cañón, 666
  de un río, 661, 704
cálculo de, 679
de un barco que va a la estatua de la libertad, 666
de un globo aerostático, 165
de una isla a la ciudad, 282-83
de una tormenta, 153
del apuntalamiento, 666, 704
del sonido a medir, 124
en el mar, 679, 705
entre dos objetos, 666
entre la Tierra y Mercurio, 680
entre la Tierra y Venus, 680
entre las ciudades, 499-500, 504-5
entre vehículos en movimiento, 165, 282
longitud
  de la elevación del ski, 677
  de un lago, 704
  del cable del sujeto, 667, 686
  del camino a la montaña, 667

millas náutica, 506
patrón de participación de un aeroplano, 644
rescate en el mar, 674-75, 677
separación de casas, 685, 705
visual, 34
  desde el faro, 35
  viga del faro de la colina de Gibb, 664, 668

Economía

demanda de la PC de IBM, 480-81
ecuaciones de demanda, 275-76, 280, 308, 390
nivel de estudios e ingresos, 839
tasa de participación, 231

Editorial

composición de páginas, 288

Educación

curva de aprendizaje, 426-27, 440
financiamiento de educación universitaria, 487
ingresos y, 839
nivel de estudios, 95, 135
niveles de estudio avanzados, 310
respuestas posibles en un examen
  de cierto o falso, 999
  de opción múltiple, 999

Electricidad

carga de un condensador, 701
circuitos, 69
corriente
  alterna, 563, 581, 588
  en un circuito _RL_ 427, 440
costo de, 257-58
índices para, 135, 192
reglas de Kirchhoff, 854-55, 871-72
resistencia
  causada por un conductor, 215
  del cable, 211
voltaje
  alterno, 588
  de un conductor, 473
  doméstica, 140
  en Estados Unidos, 29
  externo, 29

Encuestas

datos de, 987, 989
televisores en casa, 1012

Energía

calor solar, 780
suministro de energía para un satélite, 425-26

Entomología

aumento en la población de insectos, 471-72

Entretenimiento

propiedad de un DVD, 473
tiempo en fila para la *montaña rusa Demon*, 426

Epidemiología

casos de sida en Estados Unidos, 387

Estadística

en telecomunicaciones a teléfono celular, 217

Evaluación psicológica

pruebas de coeficiente intelectual (IQ), 135

Farmacología

recetas, 854, 872
  de medicamentos, 426, 440

Finanzas. ***Vea también*** **Bancos**

balance en chequera, 28-29
cálculo del reembolso, 854
comisión, 135
costo(s)
  de comida rápida, 853, 854
  de la electricidad, 257-58
  de la entrega del periódico a domicilio en domingo, 192
  de un viaje trasatlántico, 231
  de la tierra, 706
  de lata, 352-53, 355
  de operación de un automóvil, 190
  de un automóvil nuevo, 95
  de un terreno triangular, 691
  de una pizza, compartiendo, 95
  del gas natural, 260
  promedio, 354-55
cuentas del agua, 135
depreciación, 426, 441
división de dinero entre las partes, 95
financiamiento de educación universitaria, 487
fractales, 709
hipotecas, 155-56
  calificación para, 205
  intereses sobre, 83
  pago de, 207, 210, 214
impuesto sobre la renta, 231, 260
ingreso de consumo y disponible, 204
ingresos, hipótesis del ciclo de vida, 310-11
intereses
  sobre hipoteca, 83
  sobre una cuenta bancaria, 463, 464
  sobre una cuenta corriente, 463
  sobre un préstamo, 142-43
inversión, 91-92, 143, 148, 153, 855, 871, 925-26
  401(k), 966, 981
  acciones, 463, 999, 1000
  análisis accionario, 216
  bonos *cero*, 461, 464
  comparación, 458-59
  duplicado de tiempo para, 461-62, 463, 464
  en CD, 95, 463-64, 853
  fideicomisos, 464
  financiamiento de plan de retiro, 487
  fondo de amortización, 966
  interés compuesto sobre, 463
  plan de retiro, 966, 981
  precio de acciones, 967
  rendimiento del, 480, 931-32
  tiempo para lograr la meta de inversión, 464
  títulos de rendimiento fijo, 932
  triplicado del tiempo para, 462, 464
  ubicación de activos, 871, 872, 921-22, 924, 925-26
    bonos, 853
  valor del plan de retiro, 460-61
moneda extranjera, 399
precios de comida rápida, 855
préstamos
  para automóvil, 948
  para casa, 464, 966
promesa del millonario, 966
retención de impuestos, 135
revaluación de un anillo de diamantes, 463
tarjetas de crédito, 948
  pago de intereses por, 261
  pagos mínimos por, 261
utilidades, 887-88

Física

alargamiento de un resorte, 210
ángulo de refracción, 644
botando pelotas, 966, 980-81
caballos de potencia, 211
caída libre, 210
carga de frenado, 763
cuerda en vibración, 210
diámetro atómico, 29
distancia del sonido a medir, 124
efectos de la gravedad, 341
  en la Tierra, 230
  en Júpiter, 230-31
elevación y peso, 238
energía cinética, 148, 211
equilibrio estático, 752-53, 755, 767
fuerza, 148
  del viento sobre una ventana, 209, 211
  resultante, 755
índice de refracción, 644
intensidad de la luz, 153
lanzamiento de un objeto, 154, 361
ley de Newton, 210
  del enfriamiento, 469-70, 473
  del calor, 473
leyes del movimiento planetario de Kepler, 211, 214
longitud de onda de la luz visible, 29
movimiento de una pelota de golf, 238
movimiento pendular, 210, 504, 961, 965
  periodo del, 77, 274, 411
movimiento uniforme, 145-46, 148, 154
objeto impulsado directamente hacia arriba, 108
pérdida de calor a través de un muro, 208-9
peso de un cuerpo, 211, 214
peso de una pelota, 250, 311
poleas, 505, 506
presión, 148
  atmosférica, 425, 440
tensión de materiales, 211
tiro parabólico, 302-3, 309, 388, 524, 536, 629, 635, 644, 652, 653, 824-26, 831-32, 833, 837
trabajo, 148, 763-64, 767
transferencia de calor, 652
velocidad al bajar por planos inclinados, 77

Geografía

encuestas, 677

Geología

terremotos, 441

Geometría

ángulo entre dos retas, 625
área superficial
  de un cubo, 28
  de una esfera, 28
área
  del círculo, 148, 226
  comprendida por un cable, 281
  de un segmento, 691, 706
  de un cuadrado, 148
cilindro
  inscrito en un cono, 282
  inscrito en una esfera, 282
  volumen de, 211, 280, 282, 399
círculo
  área de, 148, 226
  área de un sector, 500, 504
  cuerda, 686

circunferencia del, 28, 148
inscrito, 692-93
cono
dentro de una esfera, 525
volumen de, 211, 280, 282, 399
hipotenusa de un triángulo recto, 154
perímetro
de un triángulo equilátero, 28
de un rectángulo, 28, 95, 210, 281
de un cuadrado, 148
polígono, 108
punto medio, 164
rectángulo
área del, 28, 230, 275, 278, 634, 668, 691
dimensiones de, 108, 154
perímetro de, 28, 95, 210, 281
triángulo
área del, 28, 34, 230, 281, 634, 668, 688-89, 690, 691
circunscrito, 680
isósceles, 634, 668, 691
perímetro de, 28
volumen
de un globo, 398-99
de un cono, 280, 282, 399
de un cubo, 28
de un cilindro, 280, 282, 399
de un cono circular recto, 211
de un cilindro circular recto, 211
de una esfera, 28, 288

Índice/Tasa. *Vea también* Velocidad

agua vertida en un cono circular recto, 283
de vaciado
buque tanques petroleros, 150
charca, 150
cubeta, 150
tanque, 154
llenado de un tanque, 154
millas por galón, 311-12
velocidad
en función del tiempo, 288
promedio, 150

Ingeniería

arco semielíptico, 790
barras y pistones, 686
caballos de potencia, 211
carga segura de una viga, 211
diseño de un rociador de agua, 504
galerías de susurros, 790
inclinación de la torre de Pisa, 678
longitud de la correa de una polea, 706
motor más chico, 29
peso máximo soportado por madera, 208
puentes
arco parabólico, 780, 836
arco semielíptico. 790, 836
Puente Golden Gate, 304
suspensión, 304, 309, 780
rodamiento de precisión, 29
tensión de materiales, 211

Jardinería ornamental

altura de un árbol, 680
canal de riego, 504
cercado de un estanque rectangular, 386

Juegos

granos de trigo en el tablero de ajedrez, 966
lotería, 1012

Lenguaje

formación de una palabra, 997-98, 1000, 1014

Matemáticas

Regla de Simpson, 312

Mecánica

cicloide invertida, 830

Medicina

casos de sida en Estados Unidos, 387
curación de heridas, 426, 440
propagación de una enfermedad, 488
receta de medicamentos, 426, 440
tipos de sangre, 989

Medio ambiente

control ambiental, 948
fuga de petróleo de un buque tanque, 399

Mercadotecnia *Vea también* Negocios

demanda de la PC de IBM, 480-81

Meteorología

factor de sensación térmica, 488
presión atmosférica, 425, 440, 486

Mezclas

de ácidos, 154
de agua y anticongelante, 149
de café, 144, 148, 154, 924, 936
de cemento, 150
de dulces, 148
de semillas, 148, 853, 924, 937
de té, 148

Movimiento

amortiguado, 696-98
armónico simple, 693-96, 702
circular, 501, 504
balanceado de llantas, 505
del minutero, 504
poleas y, 505, 506
rotación de llantas, 644
rueda de automóvil, 504
rueda de bicicleta, 504
ruedas de la fortuna, 505, 643-44
de un objeto, 696
ondas, 657
péndulo, 504, 702
simulación, 826-27
uniforme, 832, 837

Navegación

aeroplano, 678, 685, 704
revisión del plan de vuelo, 685
distancia visual del piloto, 82
distancias en el mar, 679
error
corregir el, 683, 704-5
pérdida de tiempo causada por un, 678
evitando una tormenta tropical, 685
LORAN, 801-2, 804, 837
rumbo, 664
de una aeronave, 65, 667
de un barco, 667, 706

Negocios

administración
mercado de carne, 931
restaurante, 854
asistencia al teatro, 95
comisión de venta, 135
copiadoras, 155
costo(s)
de impresión, 329-30
de manufactura, 28, 81, 148, 235-36, 329
de producción, 399, 898-99, 937
de renta de automóvil, 260
de transportación de bienes, 260
de un charter, 154-55
de una lata, 352-53, 355
de una mercancía, 399
marginal, 387
minimización, 932, 937
promedio mínimo, 250
demanda de maíz, 411
depósito de café caliente, 488-89
depreciación, 965
desempleo, 1015
diseño de producto, 932
ecuaciones de demanda, 280, 308, 390
fabricación de camiones, 924
filas en las cajas, 1012
gastos, 149
ingreso(s)
maximización, 929-30, 931, 932, 937
compañía de cigarros, 274-75
computación, 899
ingresos corporativos, 81
marcación de precios
en libros, 95
en un automóvil nuevo, 135
mezcla de café, 148, 154
mezcla de dulces, 148
mezcla de semillas, 148
pedidos de galletas, 936-37
penetración de mercado del coprocesador Intel, 473
precio de descuento, 95
sobre pedidos grandes, 150
precio de venta, 150
producción automotriz, 399, 871
producción de jugo, 871
productividad contra ingresos, 290
programa de producción, 931
promedio de servicio en el auto de McDonald's, 426,
promoción de producto, 192
reducción del tamaño de una barra de dulce, 108
renta de camiones, 192
salario, 955, 966
aumentos, 965, 966, 981
sueldo
por hora, 92-93, 95
por vendedor, 192
tarifas eléctricas, 135
tasa
de flujo del cliente Jiffy Lube, 426, 440
de rendimiento sobre la venta de, 463
transporte de bienes, 924
utilidades, 148, 214
computación, 887-88
línea aérea, 932
mensuales, 361
minimización, 301, 308
teatro, 855
valor de salvamento, 487
venta
de automóviles, 330
de boletos para el cine, 840, 846, 846, 853

Nutrición. *Vea también* Alimentos
animal, 932
necesidades dietéticas, 931
plan de alimentación de un paciente, 855, 867-68, 871

Oceanografía
mareas, 491, 582, 589-90
tsunamis, 591

Óptica
ángulo de refracción, 644
índice de refracción, 644
límite de la magnitud de un telescopio, 486
luz a través de cristales, 425
telescopio de reflexión, 780

Pediatría
Peso contra circunferencia de la cabeza, 411

Población. *Vea también* Demografía
bacterial, 428, 474
crecimiento
de la población de conejos, 949
de la población de mosquitos, 472
de una ciudad sureña, 472
de especies en peligro, 474
de Estados Unidos, 481, 981
de Illinois, 481-82
de insectos, 341
de Pennsylvania, 482
de truchas, 948
decadencia en la ciudad de Midwestern, 472
diversidad de, 439
insecto, 471-72
mundial, 481, 487, 939

Química
concentración de medicamentos, 354
decadencia radiactiva, 468, 472, 473, 479-80, 487
desintegración de la sal en agua, 473
leyes de los gases, 211
mezcla de ácidos, 154
pH, 439
pureza del oro, 149
radiactividad de Chernobyl, 473
reacciones, 312
soluciones salinas, 149, 154
volumen de los gases, 135

Salud
gastos en cuidado de la salud, 231, 310
propagación de una enfermedad, 488
tasas de mortalidad, 1015

Secuencias. *Vea también* Combinatoria
diseño de piso, 980
estadio de fútbol, 955
Teatro Drury Lane, 955

Sismología
calibración de instrumentos, 804-05

Temperatura
conversión, 288
de Celsius a Fahrenheit, 90
de Fahrenheit a Celsius, 90
corporal, 29, 140
factor de sensación térmica, 488
habitación, 205-06
ley
del calentamiento de Newton, 473
del enfriamiento de Newton, 469-70, 473
medición, 192, 274
mensual, 576-78, 581-82, 588-89

Termodinámica
transferencia de calor, 652

Tiempo/Hora/Duración
de un viaje variando la velocidad, 516, 524-25
del amanecer, 505
extravío por error de navegación, 678
horas de luz diurna, 579-80, 582-83, 589, 602
para que un bloque se deslice por un plano inclinado, 524
primero en ver la salida del Sol, 602

Topografía
área de un lago, 691, 705
longitud de un lago, 704

Trabajo, 148
desempleo, 1015
haciendo juntos un trabajo, 149, 154
labores con razón constante, 146-47, 937

Varios
ángulo de elevación
del Sol, 667, 679
de un rayo láser, 667
ángulo de depresión de una cámara de seguridad, 667
cantidad de gasolina en un tanque, 77
capacidad de búsqueda y rescate, 153
curva dentada, 635, 701
diámetro de un cable de cobre, 29
dimensiones del piso, 853
diseño de un toldo, 679
doblado de cable, 915
escalerilla a la vuelta de la esquina, 516-17, 571, 652
espejos, 836
flujo de una corriente, 854
grado (inclinación) del camino a la montaña, 662, 704
llenado de una piscina, 277
reflector, 780
rescate en el mar, 153

Vehículos de motor
alcohol y manejo, 435-36, 441
balanceo de llantas, 505, 588
carga de frenado, 763
cigüeñales, 678-79
compra de un automóvil usado, 463
con sistema de posicionamiento global (GPS), 487
depreciación, 441
de un Honda Civic DX, 426
fabricación de camiones, 924
marcación de un automóvil nuevo, 135
motores de pistones, 524
porcentaje de conductores detenidos por la policía, conforme a la edad, 490
producción automotriz, 399, 871
rotación de llantas, 644
velocidad angular de un automóvil de carreras, 588

Velocidad
angular, 501
de un automóvil de carreras, 588
como función del tiempo, 288
de la corriente de un río, 505
de la corriente del río Aguarico, 937,
de la luna, 505
de la Tierra, 505
de los carruseles, 588
de los fanales de un faro, 588
de teleféricos, 505
de un camión, 667
de un nadador, 767
de un planeador, 704
de una aeronave, 758-59, 763, 767
de una embarcación de motor, 763, 767
del plano, 150
del viento para un avión, 937
del viento, 854
lineal, 501-2
en la tierra, 505
para alcanzar el autobús, 831
para alcanzar el tren, 831
para levantarse al salir el Sol, 505
promedio, 150

Créditos de fotografías e ilustraciones

Capítulo R Página 1, Gary Conner/PhotoEdit; Página 82, Charles O'Rear/CORBIS BETTMANN

Capítulo 1 Páginas 83 y155, Steve Cole/Masterfile Corporation; Página 95, Bill Aron/PhotoEdit; Página 108, David Young-Wolff/PhotoEdit; Página 140, Getty Images; Page 153, Kent Wood/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 2 Páginas 157 y 216, Najlah Feanny/Stock Boston; Página 192, Kathy McLaughlin/The Image Works; Página 194, Tony Freeman/PhotoEdit.

Capítulo 3 Páginas 217 y 289, Doug Menuez/Getty Images; Página 231, NASA/Jet Propulsion Laboratory; Página 238, Jamie Squire/Getty Images; Página 274, Tony Freeman/PhotoEdit.

Capítulo 4 Páginas 291 y 388, John Whalen/Northrop Grumman Newport News; Página 310, Erin Garvey/Index Stock Imagery, Inc.; Página 355, Oliver Drum Band/Getty Images/Stone Allstock.

Capítulo 5 Páginas 391 y 488, Amy C. Etra/PhotoEdit; Página 448, The Granger Collection; Página 460, Jim Pickerell/The Image Works; Página 474, Theo Allofs/CORBIS BETTMANN.

Capítulo 6 Páginas 491 y 589, Ned Haines/Photo Researchers, Inc.; Página 504, Doug Pensinger/Getty Images; Página 563, P. Berndt/Custom Medical Stock Photo, Inc.

Capítulo 7 Páginas 591 y 657, Steve Starr/Stock Boston.

Capítulo 8 Páginas 659 y 706, Fred Maroon/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 9 Páginas 709 y 767, Art Matrix/Visuals Unlimited; Páginas 733 y 742, CORBIS BETTMANN; Página 753, Library of Congress.

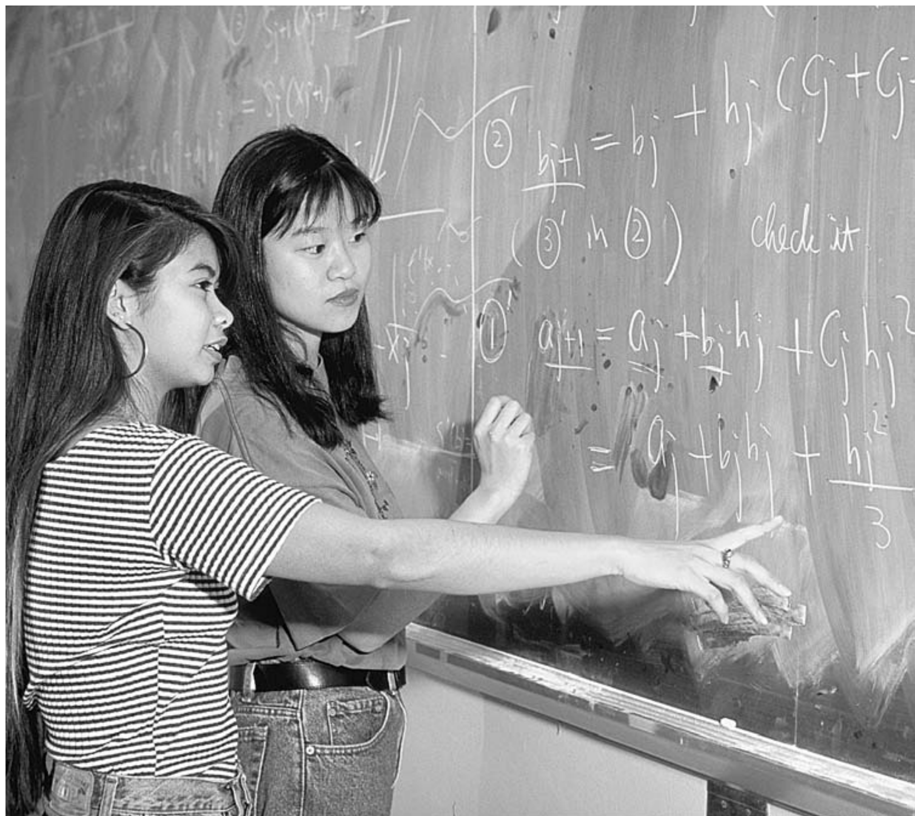
Capítulo 10 Páginas 769 y 837, CORBIS BETTMANN.

Capítulo 11 Páginas 839 y 937, Elena Rooraid/PhotoEdit; Página 897, CORBIS BETTMAN.

Capítulo 12 Páginas 939 y 981, NASA/GFSC/Tom Stack & Associates, Inc.; Página 964, The Granger Collection.

Capítulo 13 Páginas 983 y 1015, Myrleen Ferguson/PhotoEdit; Página 1009, The Granger Collection.

R Repaso



C O N T E N I D O

R.1 Números reales

R.2 Repaso de álgebra

R.3 Repaso de geometría

R.4 Polinomios

R.5 Factorización de polinomios

R.6 División de polinomios; división sintética

R.7 Expresiones racionales

R.8 Raíces *n*-ésimas; exponentes racionales

Repaso del capítulo



R.1 Números reales

PREPARACIÓN PARA ESTE LIBRO *Antes de comenzar, lea "para el estudiante" al inicio de este libro.*

OBJETIVOS
1 Clasificar los números
2 Evaluar expresiones numéricas
3 Trabajar con las propiedades de los números reales

Conjuntos

Cuando se quiere manejar una colección de objetos similares pero diferentes como un todo, se usa la idea de **conjunto**. Por ejemplo, el conjunto de *dígitos* consiste en la colección de números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Si se usa el símbolo D para denotar el conjunto de dígitos, entonces se escribe

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

En esta notación, los corchetes { } se usan para encerrar los objetos, o **elementos**, en el conjunto. Este método para denotar un conjunto se llama **método de enumeración**. Otra manera de denotar un conjunto es usar la **notación de construcción del conjunto**, donde el conjunto D de dígitos se escribe como

$$D = \{\quad x \quad | \quad x \text{ es un dígito}\}$$

Se lee "D es el conjunto de todas las x tales que x es un dígito".

EJEMPLO 1

Uso de la notación de construcción del conjunto y el método de enumeración

a) $E = \{x | x \text{ es un dígito par}\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

b) $O = \{x | x \text{ es un dígito impar}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ◀

Al enumerar los elementos de un conjunto, no se lista un elemento más de una vez porque los elementos de un conjunto son diferentes. Además, el orden en que se enumeran no es relevante. Por ejemplo, $\{2, 3\}$ y $\{3, 2\}$ representan el mismo conjunto.

Si todo elemento de un conjunto A también es un elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es **subconjunto** de B. Si dos conjuntos A y B tienen los mismos elementos, entonces se dice que A es **igual** a B. Por ejemplo, $\{1, 2, 3\}$ es subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\{1, 2, 3\}$ es igual a $\{2, 3, 1\}$.

Por último, si un conjunto no tiene elementos, se conoce como **conjunto vacío**, o **conjunto nulo**, y se denota por el símbolo Ø.

Clasificación de números

1 Es útil clasificar los diferentes tipos de números que manejamos como conjuntos. Los **números para contar**, o **números naturales**, son los números en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. (Los tres puntos, llamados **elipsis**, indican que el patrón continúa indefinidamente). Como su nombre lo indica, estos números con frecuencia se usan para contar cosas. Por ejemplo, hay 27 letras en el alfabeto; hay 100 centavos en un dólar. Los **números enteros no negativos** son los números en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, es decir, los números naturales junto con el 0.

Los **enteros** son el conjunto de números $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Estos números son útiles en muchas situaciones. Por ejemplo, si tiene \$10 en su cuenta de cheques y hace un cheque por \$15, se representa el saldo actual como $-\$5$.

Observe que el conjunto de números naturales es un subconjunto del conjunto números enteros no negativos. Cada vez que se expande un sistema de números, como de los números enteros no negativos a los enteros, se hace con el fin de poder manejar problemas nuevos y, en general, más complicados. Los enteros nos permiten resolver problemas que requieren números naturales positivos y negativos, como en ganancia/pérdida, altitud arriba/abajo del nivel del mar, temperatura arriba/abajo de 0°F, etcétera.

Pero los enteros no son suficientes para *todos* los problemas. Por ejemplo, no contestan la pregunta "¿qué parte de un dólar son 38 centavos?" Para responder esta pregunta debemos extender el sistema de números para incluir a los *números racionales*. Por ejemplo, $\frac{38}{100}$, contesta la pregunta anterior.

Un **número racional** es un número que se podría expresar como un cociente $\frac{a}{b}$ de dos enteros. El entero a se llama **numerador**, y el entero b, que no puede ser 0, se llama **denominador**. Los números racionales son los números en el conjunto $\{x | x = \frac{a}{b}$, donde a, b son enteros y $b \neq 0.\}$.

Ejemplos de números racionales son $\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{0}{4}, -\frac{2}{3}$, y $\frac{100}{3}$. Como $\frac{a}{1} = a$ para cualquier entero a, resulta que el conjunto de enteros es un subconjunto de los números racionales.

En ocasiones los números racionales se representan como **decimales**. Por ejemplo, los números racionales $\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{2}{3}$, y $\frac{7}{66}$ se pueden representar como decimales simplemente realizando la división que se indica:

$$\frac{3}{4} = 0.75 \qquad \frac{5}{2} = 2.5 \qquad -\frac{2}{3} = -0.666\ldots = -0.\overline{6} \qquad \frac{7}{66} = 0.1060606\ldots = 0.1\overline{06}$$

Observe que la representación decimal de $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{2}$ termina o tiene fin. La representación decimal de $-\frac{3}{4}$, y $\frac{7}{66}$ no termina, pero se ve un patrón de repetición. Para $-\frac{2}{3}$, el 6 se repite indefinidamente, como lo indica la barra sobre el 6; para $\frac{7}{66}$, el bloque 06 se repite en forma indefinida, como lo indica la barra sobre 06. Es posible demostrar que cada número racional se puede representar por un decimal que termina o que no termina y tiene un bloque de dígitos que se repiten, y viceversa.

Por otro lado, algunos decimales no entran en una de estas dos categorías. Estos decimales representan a los **números irracionales**. Todo número irracional se puede representar por un decimal que no se repite y no termina. En otras palabras, los números irracionales no se pueden escribir en la forma $\frac{a}{b}$, donde a, b son enteros y $b \neq 0$.

Figura 1

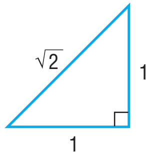
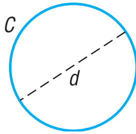


Figura 2

$\pi = \frac{C}{d}$



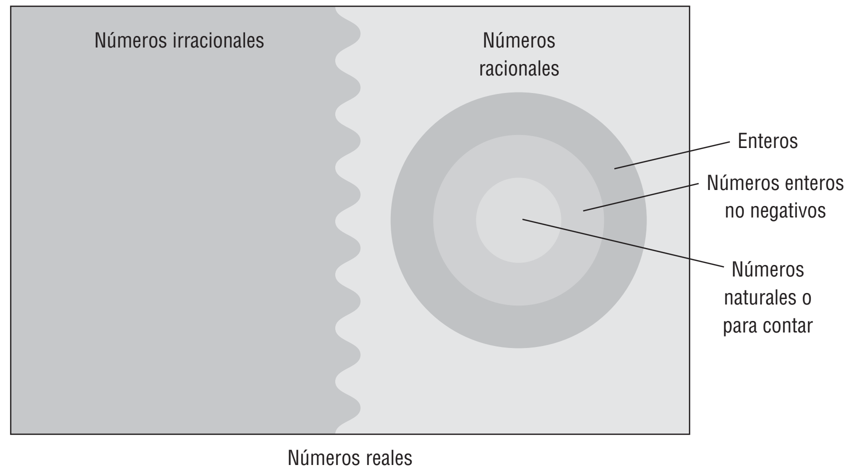
Los números irracionales ocurren de manera natural. Por ejemplo, considere el triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos tienen longitud 1. Vea la figura 1. La longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$, un número irracional.

Además, el número que es igual a la razón de la circunferencia C al diámetro d de cualquier círculo, denotado por π (la letra griega pi), es un número irracional. Vea la figura 2.

Juntos, los números racionales y los números irracionales forman el conjunto de **números reales**.

La figura 3 muestra la relación de varios tipos de números.*

Figura 3



EJEMPLO 2 Clasificación de los números en un conjunto

Liste los números en el conjunto

$$\left\{-3, \frac{4}{3}, 0.12, \sqrt{2}, \pi, 2.151515\ldots \text{(donde el bloque 15 se repite)}, 10\right\}$$

que son:

a) números naturales b) enteros c) números racionales
d) números irracionales e) números reales

Solución

a) 10 es sólo un número natural.

b) -3 y 10 son enteros.

c) $-3, \frac{4}{3}, 0.12, 2.151515\ldots$, y 10 son números racionales.

d) $\sqrt{2}$ y π son números irracionales.

e) Todos los números de la lista son números reales. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

*El conjunto de números reales es un subconjunto del conjunto de números complejos. Se estudian los números complejos en la sección 1.3.

Aproximaciones

Todo decimal se puede representar por un número real (ya sea racional o irracional), y todo número real se puede representar por un decimal.

En la práctica, la representación decimal de un número irracional está dada como aproximación. Por ejemplo, si se usa el símbolo ≈ (leído "aproximadamente igual a"), se escribe

$$\sqrt{2} \approx 1.4142 \qquad \pi \approx 3.1416$$

Al aproximar decimales, se *redondea* o se *trunca* a un número especificado de lugares decimales.* El número de lugares establece la localización del *dígito final* en la aproximación decimal.

Truncado: elimine todos los dígitos que siguen al dígito final en los decimales.
Redondeo: identifique el dígito final en el decimal. Si el siguiente dígito es 5 o más, sume 1 al dígito final; si el siguiente dígito es 4 o menos, deje el dígito final como está. Después trunque lo que sigue al dígito final.

EJEMPLO 3 Aproximación de un decimal a dos lugares

Aproxime 20.98752 a dos lugares decimales

a) Truncando b) Redondeando

Solución Para 20.98752, el dígito final es 8, ya que está a dos lugares del punto decimal.

a) Para truncar, se eliminan todos los dígitos que siguen al dígito final 8. El truncado de 20.98752 a dos lugares decimales es 20.98.

b) El dígito que sigue al dígito final 8 es el dígito 7. Como 7 es mayor o igual que 5, se suma 1 al dígito final 8 y se trunca. La forma redondeada de 20.98752 a dos lugares decimales es 20.99. ◀

EJEMPLO 4 Aproximación de un decimal a dos y cuatro lugares

Número	Redondeo a dos lugares decimales	Redondeo a cuatro lugares decimales	Truncado a dos lugares decimales	Truncado a cuatro lugares decimales
a) 3.14159	3.14	3.1416	3.14	3.1415
b) 0.056128	0.06	0.0561	0.05	0.0561
c) 893.46125	893.46	893.4613	893.46	893.4612 ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 15.

Calculadoras

Las calculadoras son máquinas finitas. En consecuencia, son incapaces de desplegar decimales que contienen un número grande de dígitos. Por ejem-

*En ocasiones se dice "correcto a un número dado de lugares decimales" en lugar de "truncado".

plo, algunas calculadoras despliegan sólo ocho dígitos. Cuando un número requiere más de ocho dígitos, la calculadora trunca o redondea. Para ver la manera en que su calculadora maneja los decimales, divida 2 entre 3. ¿Cuántos dígitos ve? ¿El último dígito es 6 o 7? Si es un 6, su calculadora trunca; si es 7, redondea.

Existen diferentes tipos de calculadoras. Una calculadora **aritmética** sólo puede sumar, restar, multiplicar y dividir números; por lo tanto, este tipo no es adecuado para este curso. Las calculadoras **científicas** tienen todas las capacidades de las calculadoras aritméticas y contienen **teclas de funciones** con etiquetas ln, log, sin (sen), cos, tan, x^y, inv, etcétera. Conforme avance en este libro descubrirá cómo usar muchas de las teclas de funciones. Las calculadoras **graficas** tienen todas las capacidades de las calculadoras científicas y tienen una pantalla donde despliegan gráficas.

Para quienes tienen acceso a una calculadora gráfica, se han incluido comentarios, ejemplos y ejercicios marcados con , para indicar que se requiere una calculadora gráfica. También se incluyó un apéndice que explica algunas características de una calculadora gráfica. Los comentarios, ejemplos y ejercicios con se podrían omitir sin pérdida de continuidad, si así lo desea.

Operaciones

En álgebra, se usan letras como x, y, a, b y c para representar números. Los símbolos usados en álgebra para las operaciones de suma, resta, multiplicación y división son $+$, $-$, $\cdot$ y $/$. Las palabras usadas para describir los resultados de estas operaciones son **suma**, **diferencia**, **producto** y **cociente**. La tabla 1 resume estas ideas.

Tabla 1

Operación	Símbolo	Palabras
Suma	$a + b$	Suma: a más b
Resta	$a - b$	Diferencia: a menos b
Multiplicación	$a \cdot b$, $(a) \cdot b$, $a \cdot (b)$, $(a) \cdot (b)$, ab, $(a)b$, $a(b)$, $(a)(b)$	Producto: a por b
División	a/b o $\frac{a}{b}$	Cociente: a entre b

En álgebra, casi siempre se evita usar el signo $\times$ de multiplicación y el signo $\div$ tan familiares en aritmética. Observe que cuando dos expresiones se colocan una al lado de la otra sin símbolo de operación, como en ab, o entre paréntesis, como en $(a)(b)$, se entiende que las expresiones, llamadas **factores**, se multiplican.

También es preferible no usar números mixtos en álgebra. Cuando se usan números mixtos, una suma está implícita; por ejemplo, $2\frac{3}{4}$ significa $2 + \frac{3}{4}$. En álgebra, el uso de números mixtos puede ser confuso porque la ausencia de un símbolo de operación entre dos términos en general se toma como multiplicación. Entonces, la expresión $2\frac{3}{4}$ más bien se escribe como 2.75 o como $\frac{11}{4}$.

El símbolo $=$, llamado **signo igual** y leído "igual a" o "es" se usa para expresar la idea de que el número o expresión a la izquierda del signo igual es equivalente al número o expresión a la derecha.

EJEMPLO 5

Escritura de proposiciones usando símbolos

a) La suma de 2 y 7 es igual a 9. En símbolos esta proposición se escribe como $2 + 7 = 9$.

b) El producto de 3 y 5 es 15. En símbolos esta proposición se escribe como $3 \cdot 5 = 15$. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

Orden de operaciones

2 Considere la expresión $2 + 3 \cdot 6$. No está claro si debemos sumar 2 y 3 para obtener 5 y luego multiplicar por 6 para obtener 30, o primero multiplicar 3 y 6 para obtener 18 y luego sumar 2 para obtener 20. A fin de evitar esta ambigüedad, se tiene el siguiente acuerdo.

En palabras
Primero se multiplica, luego se suma.

Siempre que dos operaciones de suma y multiplicación separen tres números la operación de multiplicación se realiza primero, seguida de la operación de suma.

Para $2 + 3 \cdot 6$, se tiene

$$2 + 3 \cdot 6 = 2 + 18 = 20$$

EJEMPLO 6

Valor de una expresión

Evalúe cada expresión.

a) $3 + 4 \cdot 5$ b) $8 \cdot 2 + 1$ c) $2 + 2 \cdot 2$

Solución a) $3 + 4 \cdot 5 = 3 + 20 = 23$ (↑ multiplicar primero) b) $8 \cdot 2 + 1 = 16 + 1 = 17$ (↑ multiplicar primero)

c) $2 + 2 \cdot 2 = 2 + 4 = 6$ ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

Para poder primero sumar 3 y 4 y luego multiplicar por 5, se usan paréntesis y se escribe $(3 + 4) \cdot 5$. La aparición de paréntesis en una expresión, siempre significa "¡realice primero las operaciones dentro del paréntesis!".

EJEMPLO 7

Valor de una expresión

a) $(5 + 3) \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$

b) $(4 + 5) \cdot (8 - 2) = 9 \cdot 6 = 54$ ◀

Cuando se dividen dos expresiones, como en

$$\frac{2 + 3}{4 + 8}$$

se entiende que la barra de división actúa como paréntesis; es decir,

$$\frac{2+3}{4+8} = \frac{(2+3)}{(4+8)}$$

La siguiente lista da las reglas para el orden de las operaciones.

Reglas para el orden de las operaciones

1. Comience con el paréntesis que está más adentro y trabaje hacia afuera. Recuerde que al dividir dos expresiones el numerador y el denominador se manejan como si estuvieran entre paréntesis.
2. Realice las multiplicaciones y divisiones, trabajando de derecha a izquierda.
3. Realice las sumas y restas, trabajando de izquierda a derecha.

EJEMPLO 8 **Valor de una expresión**

Evalúe cada expresión

a) $8 \cdot 2 + 3$ b) $5 \cdot (3 + 4) + 2$

c) $\dfrac{2+5}{2+4\cdot 7}$ d) $2 + [4 + 2 \cdot (10 + 6)]$

Solución a) $8 \cdot 2 + 3 = 16 + 3 = 19$

↑ multiplicar primero

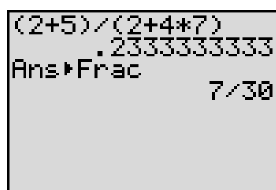
b) $5 \cdot (3 + 4) + 2 = 5 \cdot 7 + 2 = 35 + 2 = 37$

↑ primero paréntesis ↑ multiplicar antes de sumar

c) $\dfrac{2+5}{2+4\cdot 7} = \dfrac{2+5}{2+28} = \dfrac{7}{30}$

d) $2 + [4 + 2 \cdot (10 + 6)] = 2 + [4 + 2 \cdot (16)]$
$= 2 + [4 + 32] = 2 + [36] = 38$ ◄

Figura 4



Tenga cuidado si usa una calculadora. Para el ejemplo 8 c), necesita usar paréntesis. Vea la figura 4.* Si no lo hace, la calculadora realizará la expresión

$$2 + \frac{5}{2} + 4 \cdot 7 = 2 + 2.5 + 28 = 32.5$$

y dará una respuesta incorrecta.

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **45** Y **53**.

Propiedades de los números reales



Se usó el signo igual para indicar que una expresión es equivalente a otra. Ahora se enumeran cuatro propiedades importantes de la igualdad. En la lista *a*, *b* y *c* representan números reales.

*Observe que se convirtió el decimal en su forma fraccionaria. Consulte el manual de su calculadora para hacer esto.

1. La **propiedad reflexiva** establece que el número siempre es igual a sí mismo; esto es, $a = a$.
2. La **propiedad simétrica** establece que si $a = b$, entonces $b = a$.
3. La **propiedad transitiva** establece que si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.
4. El **principio de sustitución** establece que si $a = b$, entonces se puede sustituir b por a en cualquier expresión que contenga a a.

Ahora se consideran algunas propiedades de los números reales. Comenzamos por un ejemplo.

EJEMPLO 9 Propiedades conmutativas

a) $3 + 5 = 8$
$5 + 3 = 8$
$3 + 5 = 5 + 3$

b) $2 \cdot 3 = 6$
$3 \cdot 2 = 6$
$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ ◀

Este ejemplo ilustra la **propiedad conmutativa** de los números reales, que establece que el orden en que se realiza la suma o la multiplicación no afecta el resultado final.

Propiedades conmutativas

$$a + b = b + a \quad \textbf{(1a)}$$
$$a \cdot b = b \cdot a \quad \textbf{(1b)}$$

Aquí, y en las propiedades que siguen y en las páginas 10 a 13, a, b y c representan números.

EJEMPLO 10 Propiedades asociativas

(a) $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$
$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$
$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$

b) $2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$
$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$
$2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4$ ◀

La manera en que se suman o multiplican tres números reales no afectará el resultado final. Las expresiones como $2 + 3 + 4$ y $3 \cdot 4 \cdot 5$ no presentan ambigüedad, aun cuando la suma y la multiplicación se realizan en un par de números a la vez. Esta propiedad se llama **propiedad asociativa**.

Propiedades asociativas

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c \quad \textbf{(2a)}$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c \quad \textbf{(2b)}$$

La siguiente propiedad es quizá la más importante.

Propiedad distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \textbf{(3a)}$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \textbf{(3b)}$$

La **propiedad distributiva** se utiliza de dos maneras diferentes.

EJEMPLO 11 **Propiedad distributiva**

a) $2 \cdot (x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3 = 2x + 6$ *Se usa para eliminar paréntesis.*

b) $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$ *Se usa para combinar dos expresiones.*

c) $(x + 2)(x + 3) = x(x + 3) + 2(x + 3) = (x^2 + 3x) + (2x + 6)$
$= x^2 + (3x + 2x) + 6 = x^2 + 5x + 6$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 71.

Los números reales 0 y 1 tienen propiedades únicas.

EJEMPLO 12 **Propiedades de identidad**

a) $4 + 0 = 0 + 4 = 4$ b) $3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3$ ◀

Las propiedades de 0 y 1 ilustradas en el ejemplo 12 se llaman **propiedades de identidad**.

Propiedades de identidad

$$0 + a = a + 0 = a \quad \textbf{(4a)}$$
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \textbf{(4b)}$$

El 0 recibe el nombre de **identidad aditiva** o **neutro aditivo** y el 1, **identidad multiplicativa** o **neutro multiplicativo**.

Para cada número real a, existe un número real $-a$, llamado **inverso aditivo** de a, que tiene la siguiente propiedad:

Propiedad del inverso aditivo

$$a + (-a) = -a + a = 0 \quad \textbf{(5a)}$$

EJEMPLO 13 **Para encontrar el inverso aditivo**

a) El inverso aditivo de 6 es -6, porque $6 + (-6) = 0$.

b) El inverso aditivo de -8 es $-(-8) = 8$, porque $-8 + 8 = 0$. ◀

El inverso aditivo de a, es decir, $-a$, con frecuencia se llama el *negativo* de a o el *opuesto* de a. Quizá el uso de estos términos resulte peligroso, porque sugieren que el inverso aditivo es un número negativo, lo cual no siem-

pre es cierto. Por ejemplo, el inverso aditivo de -3, o $-(-3)$, es igual a 3, un número positivo.

Para cada número real a *diferente de cero*, existe un número real $\frac{1}{a}$, llamado **inverso multiplicativo** de a, que tiene la siguiente propiedad.

Propiedad del inverso multiplicativo

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \qquad \text{si } a \neq 0 \qquad \textbf{(5b)}$$

El inverso multiplicativo $\frac{1}{a}$ de un número real diferente de cero también se conoce como el **recíproco** de a.

EJEMPLO 14 Para encontrar el recíproco

a) El recíproco de 6 es $\frac{1}{6}$, porque $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.

b) El recíproco de -3 es $\frac{1}{-3}$, porque $-3 \cdot \frac{1}{-3} = 1$.

c) El recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$, porque $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$. ◀

Con estas propiedades para sumar y multiplicar números reales, ahora se definen las operaciones de resta y división como sigue:

La **diferencia** $a - b$ también se lee "a menos b" y se define como

$$a - b = a + (-b) \qquad \textbf{(6)}$$

Para restar b de a, se suma el opuesto de b a a.

Si b es un número real diferente de cero, el **cociente** $\frac{a}{b}$, se lee "a entre b" o "la razón de a a b" y se define como

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \qquad \text{si } b \neq 0 \qquad \textbf{(7)}$$

EJEMPLO 15 Trabajo con diferencias y cocientes

a) $8 - 5 = 8 + (-5) = 3$ b) $4 - 9 = 4 + (-9) = -5$ c) $\frac{5}{8} = 5 \cdot \frac{1}{8}$

◀

En palabras
El resultado de multiplicar por cero es cero

Para cualquier número a, el producto de a veces 0 es siempre 0; es decir,

Multiplicación por cero

$$a \cdot 0 = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Para un número diferente de cero a,

Propiedades de la división

$$\frac{0}{a} = 0 \qquad \frac{a}{a} = 1 \quad \text{si } a \neq 0 \qquad \textbf{(9)}$$

NOTA: La división entre 0 *no está definida*. Una razón es evitar la siguiente dificultad: $\frac{2}{0} = x$ significa encontrar x tal que $0 \cdot x = 2$. Pero $0 \cdot x$ es 0 para toda x, de manera que *no* existe un número único x tal que $\frac{2}{0} = x$.

Reglas de signos

$$a(-b) = -(ab) \qquad (-a)b = -(ab) \qquad (-a)(-b) = ab$$

$$-(-a) = a \qquad \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \qquad \textbf{(10)}$$

EJEMPLO 16 **Aplicación de las reglas de signos**

a) $2(-3) = -(2 \cdot 3) = -6$ b) $(-3)(-5) = 3 \cdot 5 = 15$

c) $\frac{3}{-2} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$ d) $\frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}$ e) $\frac{x}{-2} = \frac{1}{-2} \cdot x = -\frac{1}{2}x$ ◀

Si c es un número diferente de cero, entonces

Propiedades de cancelación

$$ac = bc \quad \text{implica} \quad a = b \quad \text{si } c \neq 0$$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \qquad \text{si } b \neq 0, c \neq 0 \qquad \textbf{(11)}$$

EJEMPLO 17 **Uso de las propiedades de cancelación**

a) Si $2x = 6$, entonces

$$2x = 6$$

$$2x = 2 \cdot 3 \qquad \text{Factorizar 6.}$$

$$x = 3 \qquad \text{Cancelar los números 2.}$$

b) $\dfrac{18}{12} = \dfrac{3 \cdot \cancel{6}}{2 \cdot \cancel{6}} = \dfrac{3}{2}$

↑ Cancelar los números 6. ◀

NOTA: Se sigue la práctica común de usar las diagonales cruzadas para indicar las cancelaciones.

Propiedad del producto cero

$$\text{Si } ab = 0, \text{ entonces } a = 0, \text{ o } b = 0, \text{ o ambos.} \qquad \textbf{(12)}$$

EJEMPLO 18 Uso de la propiedad del producto cero

Si $2x = 0$, entonces $2 = 0$ o $x = 0$. Como $2 \neq 0$, se sigue que $x = 0$. ◀

Aritmética del cociente

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \text{si } b \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(13)}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \text{si } b \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(14)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad \text{si } b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(15)}$$

EJEMPLO 19 Suma, resta, multiplicación y división de cocientes

a) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \dfrac{3 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \dfrac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \dfrac{4 + 15}{6} = \dfrac{19}{6}$

↑ Por la ecuación (13)

b) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{5} + \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{-2}{3}$

↑ Por la ecuación (6) ↑ Por la ecuación (10)

$= \dfrac{3 \cdot 3 + 5 \cdot (-2)}{5 \cdot 3} = \dfrac{9 + (-10)}{15} = \dfrac{-1}{15} = -\dfrac{1}{15}$

↑ Por la ecuación (13)

c) $\dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{15}{4} = \dfrac{8 \cdot 15}{3 \cdot 4} = \dfrac{2 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 1} = \dfrac{2 \cdot 5}{1} = 10$

↑ Por la ecuación (14) ↑ Por la ecuación (11)

NOTA: Inclinar las marcas de cancelación en diferentes direcciones para diferentes factores, como se muestra, es una buena práctica, ya que ayudará a verificar si hay errores.

d) $$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{9}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{7} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 7} = \frac{27}{35}$$

↑ Por la ecuación (15) ↑ Por la ecuación (14)

NOTA: Al escribir los cocientes, debe seguirse la convención y escribirlos en los términos más pequeños; es decir, se escriben de forma que se hayan eliminado los factores comunes del numerador y denominador usando la ecuación (11) de las propiedades de cancelación. Como ejemplo,

$$\frac{90}{24} = \frac{15 \cdot \cancel{6}}{4 \cdot \cancel{6}} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{24x^2}{18x} = \frac{4 \cdot \cancel{6} \cdot x \cdot \cancel{x}}{3 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{x}} = \frac{4x}{3} \qquad x \neq 0$$

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **55, 59 Y 69.**

Algunas veces es más sencillo sumar dos fracciones usando el *mínimo común múltiplo* (MCM). El MCM de dos números es el número más pequeño que es múltiplo de ambos.

EJEMPLO 20 Mínimo común múltiplo de dos números

Encuentre el mínimo común múltiplo de 15 y 12

Solución Para encontrar el MCM de 15 y 12, se observan los múltiplos de 15 y 12.

15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, . . .
12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, . . .

Los múltiplos *comunes* están en tipo color azul. El *mínimo* común múltiplo es 60.

EJEMPLO 21 Uso del mínimo común múltiplo para sumar dos fracciones

Encuentre $\frac{8}{15} + \frac{5}{12}$

Solución Se usa el MCM de los denominadores de las fracciones y se reescribe cada una usando el MCM como denominador. El MCM de los denominadores (12 y 15) es 60. Se reescribe cada fracción usando 60 como denominador.

$$\frac{8}{15} + \frac{5}{12} = \frac{8}{15} \cdot \frac{4}{4} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{5} = \frac{32}{60} + \frac{25}{60} = \frac{32 + 25}{60} = \frac{57}{60}$$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA **63.**

Aspecto histórico

El sistema de números reales tiene una historia que se remonta al menos a la antigua Babilonia (1800 a.C.). Es asombroso cuántas de las actitudes de la antigua Babilonia se parecen a las nuestras. Como se estableció la dificultad fundamental con los números irracionales es que no se pueden escribir como cocientes o enteros, o de manera equivalente, como decimales que se repiten o terminan. En Babilonia escribían los números en un sistema basado en 60, de la misma manera que escribimos los nuestros basados en 10. Escribirían tantos lugares decimales para π como lo demandara la exactitud del problema, igual que ahora se usa

$$\pi \approx 3\frac{1}{7} \quad \text{o} \quad \pi \approx 3.1416 \quad \text{o} \quad \pi \approx 3.14159$$

$$\text{o} \quad \pi \approx 3.14159265358979$$

dependiendo de cuánta exactitud se necesite.

Las cosas eran muy distintas para los griegos, cuyo sistema numérico permitía sólo números racionales. Cuando se descubrió que $\sqrt{2}$ no era un número racional, esto se vio como una falla fundamental en el concepto de número. El asunto era tan serio que se dice que la Hermandad Pitagórica (una sociedad matemática de la época) ahogó a uno de sus miembros por revelar tan terrible secreto. Los matemáticos griegos después se alejaron del concepto de número expresando hechos acerca de los números enteros en términos de segmentos.

Sin embargo, en astronomía, los métodos de Babilonia, incluyendo su sistema numérico, continuaron utilizándose. Simon Stevin (1548-1620), tal vez usando el sistema de Babilonia como modelo inventó el sistema decimal, en 1585, completo con reglas de cálculo. [Otros, como al-Kashi de Samarkanda (1429) habían hecho algunos avances en la misma dirección]. El sistema decimal oculta de manera tan efectiva las dificultades, que la necesidad de mayor precisión lógica comenzó a sentirse hasta principios de 1800. Alrededor de 1880, Georg Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916) proporcionaron definiciones precisas de los números reales. La definición de Cantor, aunque más abstracta y precisa, tiene sus raíces en el sistema numérico decimal (y por ende en el de Babilonia).

Los conjuntos y la teoría de conjuntos fueron el beneficio indirecto de la investigación que llegó a aclarar los fundamentos de los sistemas de números reales. La teoría de conjuntos se ha convertido en una disciplina amplia en sí misma y muchos matemáticos la ven como el fundamento de las matemáticas modernas. Los descubrimientos de Cantor de que los conjuntos infinitos también se pueden contar y tienen tamaños diferentes se encuentran entre los resultados más sorprendentes de las matemáticas modernas.

Problemas históricos

El sistema numérico de Babilonia se basaba en 60. Entonces 2,30 significa $2 + \frac{30}{60} = 2.5$ y 4,25,14 significa

$$4 + \frac{25}{60} + \frac{14}{60^2} = 4 + \frac{1514}{3600} = 4.42055555\ldots$$

1. ¿Cuáles son los siguientes números en la notación de Babilonia?
   a) $1\frac{1}{3}$ b) $2\frac{5}{6}$
2. ¿Cuáles son los siguientes números de Babilonia cuando se escriben como fracciones y como decimales?
   a) 2,20 b) 4,52,30 c) 3,8,29,44

R.1 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Los números en el conjunto $\left\{x \middle| x = \frac{a}{b}\right.$, donde a, b son enteros y $b \neq 0\}$, se llaman números _________.

2. El valor de la expresión $4 + 5 \cdot 6 - 3$ es _________.

3. El hecho de que $2x + 3x = (2 + 3)x$ es una consecuencia de la propiedad _________.

4. "El producto de 5 y $x + 3$ es igual a 6" se escribe como _________.

5. *Falso o verdadero:* los números racionales tienen decimales que o bien terminan o son sin fin con un bloque de dígitos que se repite.

6. *Falso o verdadero:* la propiedad de producto cero establece que el producto de cualquier número y cero es igual a cero.

7. *Falso o verdadero:* el mínimo común múltiplo de 12 y 18 es 6.

8. *Falso o verdadero:* ningún número puede ser real y racional.

Ejercicios

En los problemas 9-14, enumere los números en cada conjunto que son a) números naturales, b) enteros, c) números racionales, d) números irracionales, e) números reales.

9. $A = \left\{-6, \frac{1}{2}, -1.333\ldots \text{(los números 3 se repiten)}, \pi, 2, 5\right\}$

10. $B = \left\{-\frac{5}{3}, 2.060606\ldots \text{(el bloque 06 se repite)}, 1.25, 0, 1, \sqrt{5}\right\}$

11. $C = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$

12. $D = \{-1, -1.1, -1.2, -1.3\}$

13. $E = \left\{\sqrt{2}, \pi, \sqrt{2} + 1, \pi + \frac{1}{2}\right\}$

14. $F = \left\{-\sqrt{2}, \pi + \sqrt{2}, \frac{1}{2} + 10.3\right\}$

En los problemas 15-26, aproxime cada número a) redondeado y b) truncado a tres lugares decimales.

15. 18.9526 **16.** 25.86134 **17.** 28.65319 **18.** 99.05249 **19.** 0.06291 **20.** 0.05388

21. 9.9985 **22.** 1.0006 **23.** $\frac{3}{7}$ **24.** $\frac{5}{9}$ **25.** $\frac{521}{15}$ **26.** $\frac{81}{5}$

En los problemas 27-36, escriba cada proposición usando símbolos.

27. La suma de 3 y 2 es igual a 5.

28. El producto de 2 y 5 es igual a 10.

29. La suma de x y 2 es el producto de 3 y 4.

30. La suma de 3 y y es la suma de 2 y 2.

31. El producto de 3 y y es la suma de 1 y 2.

32. El producto de 2 y x es el producto de 4 y 6.

33. La diferencia de x menos 2 es igual a 6.

34. La diferencia de 2 menos y es igual a 6.

35. El cociente de x entre 2 es 6.

36. El cociente de 2 entre x es 6.

En los problemas 37-70, evalúe cada expresión.

37. $9 - 4 + 2$ **38.** $6 - 4 + 3$ **39.** $-6 + 4 \cdot 3$ **40.** $8 - 4 \cdot 2$

41. $4 + 5 - 8$ **42.** $8 - 3 - 4$ **43.** $4 + \frac{1}{3}$ **44.** $2 - \frac{1}{2}$

45. $6 - [3 \cdot 5 + 2 \cdot (3 - 2)]$ **46.** $2 \cdot [8 - 3(4 + 2)] - 3$ **47.** $2 \cdot (3 - 5) + 8 \cdot 2 - 1$ **48.** $1 - (4 \cdot 3 - 2 + 2)$

49. $10 - [6 - 2 \cdot 2 + (8 - 3)] \cdot 2$ **50.** $2 - 5 \cdot 4 - [6 \cdot (3 - 4)]$

51. $(5 - 3)\frac{1}{2}$ **52.** $(5 + 4)\frac{1}{3}$ **53.** $\frac{4 + 8}{5 - 3}$ **54.** $\frac{2 - 4}{5 - 3}$

55. $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{21}$ **56.** $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{10}$ **57.** $\frac{6}{25} \cdot \frac{10}{27}$ **58.** $\frac{21}{25} \cdot \frac{100}{3}$

59. $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$ **60.** $\frac{4}{3} + \frac{1}{2}$ **61.** $\frac{5}{6} + \frac{9}{5}$ **62.** $\frac{8}{9} + \frac{15}{2}$

63. $\frac{5}{18} + \frac{1}{12}$ **64.** $\frac{2}{15} + \frac{8}{9}$ **65.** $\frac{1}{30} - \frac{7}{18}$ **66.** $\frac{3}{14} - \frac{2}{21}$

67. $\frac{3}{20} - \frac{2}{15}$ **68.** $\frac{6}{35} - \frac{3}{14}$ **69.** $\dfrac{\frac{5}{18}}{\frac{11}{27}}$ **70.** $\dfrac{\frac{5}{21}}{\frac{2}{35}}$

En los problemas 71-82, use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

71. $6(x + 4)$ **72.** $4(2x - 1)$ **73.** $x(x - 4)$ **74.** $4x(x + 3)$

75. $(x + 2)(x + 4)$ **76.** $(x + 5)(x + 1)$ **77.** $(x - 2)(x + 1)$ **78.** $(x - 4)(x + 1)$

79. $(x - 8)(x - 2)$ **80.** $(x - 4)(x - 2)$ **81.** $(x + 2)(x - 2)$ **82.** $(x - 3)(x + 3)$

---

83. Explique a un amigo cómo se usa la propiedad distributiva para justificar el hecho de que $2x + 3x = 5x$.

84. Explique a un amigo por qué $2 + 3 \cdot 4 = 14$, mientras que $(2 + 3) \cdot 4 = 20$.

85. Explique por qué $2(3 \cdot 4)$ no es igual a $(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4)$.

86. Explique por qué $\frac{4 + 3}{2 + 5}$ no es igual a $\frac{4}{2} + \frac{3}{5}$.

87. ¿Es conmutativa la resta? Apoye su conclusión con un ejemplo.

88. ¿Es asociativa la resta? Apoye su conclusión con un ejemplo.

89. ¿Es conmutativa la división? Apoye su conclusión con un ejemplo.

90. ¿Es asociativa la división? Apoye su conclusión con un ejemplo.

91. Si $2 = x$, por qué $x = 2$?

92. Si $x = 5$, ¿por qué $x^2 + x = 30$?

93. ¿Existen números reales que sean tanto racionales como irracionales? ¿Existen números reales que no son uno ni otro? Explique su razonamiento.

94. Explique por qué la suma de un número racional y un número irracional debe ser irracional.

95. ¿A qué número racional es igual el decimal repetitivo 0.9999 . . . ?

R.2 Repaso de álgebra

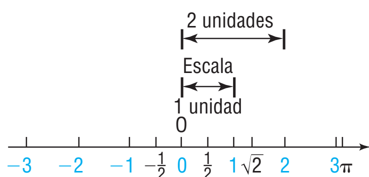
OBJETIVOS
1 Graficar desigualdades
2 Encontrar la distancia en la recta de números reales
3 Evaluar expresiones algebraicas
4 Determinar el dominio de una variable
5 Usar las leyes de exponentes
6 Evaluar raíces cuadradas
7 Usar calculadora para evaluar exponentes
8 Usar notación científica

La recta de números reales

Los números reales se representan por puntos en una recta llamada la **recta de números reales**. Existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos en una recta. Esto es, todo número real corresponde a un punto en la recta, y cada punto en la recta tiene un número real único asociado a él.

Elija un punto en la recta en algún lugar cerca del centro y etiquételo con O. Este punto, llamado **origen**, corresponde al número real 0. Vea la figura 5. El punto que está 1 unidad a la derecha de O corresponde al número 1. La distancia entre 0 y 1 determina la **escala** de la recta numérica. Por ejemplo, el punto asociado con el número 2 está al doble de distancia de O que 1. Observe que la flecha al final de la recta indica la dirección en la que los números aumentan. La figura 5 muestra también los puntos asociados con los números irracionales $\sqrt{2}$ y π. Los puntos a la izquierda del origen corresponden a los números reales -1, -2, etcétera.

Figura 5
Recta de números reales

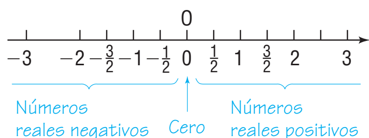


El número real asociado con el punto P se llama **coordenada** de P, y la recta cuyos puntos tiene coordenadas asignadas se llama **recta de números reales**.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

La recta de números reales consiste en tres clases de números reales, como se muestra en la figura 6.

Figura 6



1. Los **números reales negativos** son las coordenadas de los puntos a la izquierda del origen O.
2. El número real **cero** es la coordenada del origen O.
3. Los **números reales positivos** son las coordenadas de los puntos a la derecha del origen O.

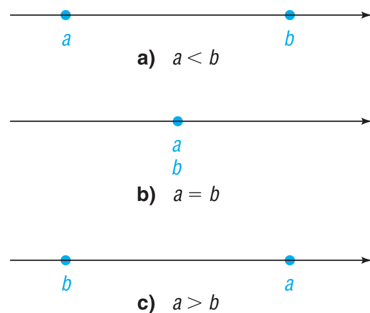
Los números negativos y positivos tienen las siguientes propiedades de multiplicación:

Propiedades de la multiplicación de números positivos y negativos

1. El producto de dos números positivos es un número positivo.
2. El producto de dos números negativos es un número positivo.
3. El producto de un número positivo y un número negativo es un número negativo.

Desigualdades

Figura 7



Una propiedad importante de la recta de números reales se obtiene del hecho de que dados dos números (puntos) a y b, o bien a está a la izquierda de b, a está en el mismo lugar que b, o a está a la derecha de b. Vea la figura 7.

Si a está a la izquierda de b, se dice que "a es menor que b" y se escribe $a < b$. Si a está a la derecha de b, se dice que "a es mayor que b" y se escribe $a > b$. Si a está en el mismo lugar que b, entonces $a = b$. Si a es menor o igual a b, se escribe $a \leq b$. De la misma manera, $a \geq b$ significa a es mayor o igual a b. En conjunto, $<, >, \leq$ y $\geq$ se llaman **símbolos de desigualdad.**

Observe que $a < b$ y $b > a$ significa lo mismo. No importa si se escribe $2 < 3$ o $3 > 2$.

Todavía más, si $a < b$ o si $b > a$, entonces la diferencia $b - a$ es positiva. ¿Sabe por qué?

EJEMPLO 1 Uso de símbolos de desigualdad

a) $3 < 7$ b) $-8 > -16$ c) $-6 < 0$

d) $-8 < -4$ e) $4 > -1$ f) $8 > 0$ ◀

En el ejemplo 1a), se concluye que $3 < 7$ ya sea porque 3 está a la izquierda de 7 en la recta real o porque la diferencia $7 - 3 = 4$ es un número real positivo.

De manera similar, se concluye en el ejemplo 1b) que $-8 > -16$ ya sea porque -8 está a la derecha de -16 en la recta real o porque la diferencia, $-8 - (-16) = -8 + 16 = 8$, es un número real positivo.

Vea de nuevo el ejemplo 1. Observe que el símbolo de desigualdad siempre apunta en la dirección del número más pequeño.

Las proposiciones de la forma $a < b$ o $b > a$ se llaman **desigualdades estrictas**, mientras que las proposiciones de la forma $a \leq b$ o $b \geq a$ se llaman **desigualdades no estrictas**. Una **desigualdad** es una proposición en la que dos expresiones se relacionan por un símbolo de desigualdad. Las expresiones se conocen como los **lados** de la desigualdad.

Con base en estos conceptos, se concluye que

> $a > 0$ es equivalente a decir que a es positivo
> $a < 0$ es equivalente a decir que a es negativo

Algunas veces $a > 0$ se lee diciendo que "a es positivo". Si $a \geq 0$, entonces $a > 0$ o $a = 0$, y se lee como "a es no negativo".



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **15** Y **25.**



Más adelante se encontrará que es útil graficar las desigualdades en la recta de números reales.

EJEMPLO 2 Gráficas de desigualdades

a) En la recta real, grafique todos los números x para los que $x > 4$.

b) En la recta real, grafique todos los números x para los que $x \leq 5$.

Figura 8

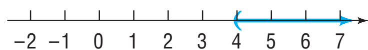
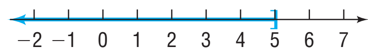


Figura 9



Solución

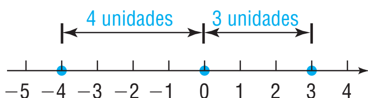
a) Vea la figura 8. Observe que se usó paréntesis izquierdo para indicar que el número 4 *no* es parte de la gráfica.

b) Vea la figura 9. Observe que se usó un corchete derecho para indicar que el número 5 *es* parte de la gráfica. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

Valor absoluto

Figura 10



El *valor absoluto* de un número a es la distancia de 0 a a en la recta real. Por ejemplo, -4 está a 4 unidades de 0, y 3 está a 3 unidades de 0. Vea la figura 10. Entonces, el valor absoluto de -4 es 4 y el valor absoluto de 3 es 3.

A continuación se da una definición más formal de valor absoluto.

> El **valor absoluto** de un número real a, denotado por el símbolos $|a|$, se define por las reglas.
>
> $$|a| = a \quad \text{si } a \geq 0 \qquad \text{y} \qquad |a| = -a \quad \text{si } a < 0$$

Por ejemplo, como $-4 < 0$, debe usarse la segunda regla para obtener $|-4| = -(-4) = 4$.

EJEMPLO 3 **Cálculo del valor absoluto**

a) $|8| = 8$ b) $|0| = 0$ c) $|-15| = -(-15) = 15$ ◀

2 Vea de nuevo la figura 10. La distancia de -4 a 3 es 7 unidades. Esta distancia es la diferencia $3 - (-4)$, obtenida restando la coordenada más pequeña de la más grande. Sin embargo, como $|3 - (-4)| = |7| = 7$ y $|-4 - 3| = |-7| = 7$, podemos usar el valor absoluto para calcular la distancia entre dos puntos sin preocuparnos por cuál es el menor.

> Si P y Q son dos puntos en una recta de números reales con coordenadas a y b, respectivamente, la **distancia entre *P* y *Q***, denotada por $d(P, Q)$, es
>
> $$d(P, Q) = |b - a|$$
>
> Como $|b - a| = |a - b|$, se deduce que $d(P, Q) = d(Q, P)$.

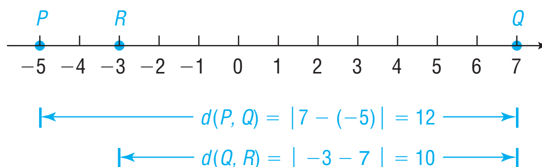
EJEMPLO 4 **Distancia en una recta numérica**

Sean P, Q y R puntos en una recta de números reales con coordenadas respectivas -5, 7 y -3. Encuentre la distancia

a) entre P y Q b) entre Q y R

Solución Vea la figura 11.

Figura 11



a) $d(P, Q) = |7 - (-5)| = |12| = 12$
b) $d(Q, R) = |-3 - 7| = |-10| = 10$ ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37.

Constantes y variables

Como se dijo, en álgebra se usan letras como x, y, a, b y c para representar números. Si la letra se usa para representar *cualquier* número de un conjunto de números dado, se llama **variable**. Una **constante** es ya sea un número fijo, como 5 o $\sqrt{3}$, o una letra que representa un número fijo (quizá no especificado).

Las constantes y variables se combinan usando las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para formar *expresiones algebraicas*. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas.

$$x + 3 \qquad \frac{3}{1 - t} \qquad 7x - 2y$$

3 Para evaluar una expresión algebraica, se sustituye el valor numérico de cada variable.

EJEMPLO 5 Evaluación de una expresión algebraica

Evalúe cada expresión si $x = 3$ y $y = -1$.

a) $x + 3y$ b) $5xy$ c) $\frac{3y}{2 - 2x}$ d) $|-4x + y|$

Solución a) Se sustituye x por 3 y y por -1 en la expresión $x + 3y$.

$$x + 3y = 3 + 3(-1) = 3 + (-3) = 0$$

↑ $x = 3, y = -1$

b) Si $x = 3$ y $y = -1$, entonces

$$5xy = 5(3)(-1) = -15$$

c) Si $x = 3$ y $y = -1$, entonces

$$\frac{3y}{2 - 2x} = \frac{3(-1)}{2 - 2(3)} = \frac{-3}{2 - 6} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

d) Si $x = 3$ y $y = -1$, entonces

$$|-4x + y| = |-4(3) + (-1)| = |-12 + (-1)| = |-13| = 13$$ ◀


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 39 Y 47.

4 Al trabajar con expresiones o fórmulas que incluyen variables, posiblemente sólo se permita que las variables tomen valores de cierto conjunto de números. Por ejemplo, en la fórmula para el área A de un círculo de radio r, $A = \pi r^2$, la variable r está restringida necesariamente a números reales positivos. En la expresión $\frac{1}{x}$, la variable x no puede tomar el valor 0, ya que la división entre 0 no está definida.

El conjunto de valores que toma una variable se llama **dominio de la variable**.

EJEMPLO 6

Dominio de una variable

El dominio de la variable x en la expresión

$$\frac{5}{x-2}$$

es $\{x|x \neq 2\}$, ya que si $x = 2$, el denominador es 0, que no está definido. ◀

EJEMPLO 7

Circunferencia

En la fórmula de la circunferencia C de un círculo de radio r,

$$C = 2\pi r$$

el dominio de la variable r, que representa el radio del círculo, es el conjunto de números reales positivos. El dominio de la variable C que representa la circunferencia del círculo, también es el conjunto de números reales positivos. ◀

Al describir el dominio de una variable, se utiliza ya sea la notación de conjuntos o de palabras, lo que sea más conveniente.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 57.

Exponentes

5 Los exponentes enteros proporcionan un sistema de escritura rápida o taquigrafía para representar la multiplicación repetida de un número real. Por ejemplo,

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Además, muchas fórmulas tienen exponentes. Por ejemplo,

- La fórmula para el valor de los caballos de fuerza H de un motor es
$$H = \frac{D^2 N}{2.5}$$
donde D es el diámetro del cilindro y N es el número de cilindros.
- Una fórmula para la resistencia R de la sangre que fluye en los vasos sanguíneos es
$$R = C\frac{L}{r^4}$$
donde L es la longitud del vaso sanguíneo, r es el radio y C es una constante positiva.

Si a es un número real y n es un entero positivo, entonces el símbolo $\boldsymbol{a^n}$ representa el producto de n factores de a. Es decir,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{factores } n} \qquad \textbf{(1)}$$

Aquí se entiende que $a^1 = a$.

Entonces $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, etcétera. En la expresión a^n, a se llama la **base** y n se llama el **exponente**, o **potencia**. a^n se lee como "a elevado a la potencia n" o como "a a la n". Es usual leer a^2 como "a cuadrada" y a^3 como "a cúbica".

Al trabajar con exponentes, la operación de *elevar a una potencia* se realiza antes de cualquier otra operación. Como ejemplos,

$4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$ $\qquad$ $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

$-2^4 = -16$ $\qquad$ $5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4 = 5 \cdot 9 + 2 \cdot 4 = 45 + 8 = 53$

Los paréntesis se usan para indicar las operaciones que deben realizarse antes. Por ejemplo,

$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16 \qquad (2 + 3)^2 = 5^2 = 25$$

Si $a \neq 0$, se define

$$a^0 = 1 \quad \text{si } a \neq 0$$

Si $a \neq 0$ y si n es un entero positivo, entonces se define

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{si } a \neq 0$$

Siempre que encuentre un exponente negativo, piense en "recíproco".

EJEMPLO 8 Evaluación de expresiones con exponentes negativos

a) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ $\qquad$ b) $x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$ $\qquad$ c) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{25}} = 25$ ◄


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 75 Y 95.

Las siguientes propiedades, llamadas **leyes de exponentes**, se demuestran usando las definiciones anteriores. En la lista a y b son números reales y m y n son enteros.

Leyes de exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \quad \text{si } a \neq 0 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{si } b \neq 0$$

EJEMPLO 9 Uso de las leyes de exponentes

a) $x^{-3} \cdot x^5 = x^{-3+5} = x^2, \quad x \neq 0$

b) $(x^{-3})^2 = x^{-3 \cdot 2} = x^{-6} = \dfrac{1}{x^6}, \quad x \neq 0$

c) $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$ $\qquad$ e) $\dfrac{x^{-2}}{x^{-5}} = x^{-2-(-5)} = x^3, x \neq 0$ ◄


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 77.

EJEMPLO 10 **Uso de las leyes de exponentes**

Escriba cada expresión de manera que todos los exponentes sean positivos.

a) $\dfrac{x^5y^{-2}}{x^3y}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$ b) $\left(\dfrac{x^{-3}}{3y^{-1}}\right)^{-2}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$

Solución a) $\dfrac{x^5y^{-2}}{x^3y} = \dfrac{x^5}{x^3}\cdot\dfrac{y^{-2}}{y} = x^{5-3}\cdot y^{-2-1} = x^2y^{-3} = x^2\cdot\dfrac{1}{y^3} = \dfrac{x^2}{y^3}$

b) $\left(\dfrac{x^{-3}}{3y^{-1}}\right)^{-2} = \dfrac{(x^{-3})^{-2}}{(3y^{-1})^{-2}} = \dfrac{x^6}{3^{-2}(y^{-1})^{-2}} = \dfrac{x^6}{\frac{1}{9}y^2} = \dfrac{9x^6}{y^2}$ ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 87.

Raíces cuadradas

6 Un número real está elevado al cuadrado cuando está elevado a la potencia 2. El inverso de elevar al cuadrado es encontrar la **raíz cuadrada**. Por ejemplo, $6^2 = 36$ y $(-6)^2 = 36$, los números 6 y -6 son las raíces cuadradas de 36.

El símbolo $\sqrt{}$, llamando **signo de radical**, se usa para denotar la raíz cuadrada no negativa o **principal**. Por ejemplo, $\sqrt{36} = 6$.

En general, si a es un número real no negativo, el número real no negativo b, tal que $b^2 = a$ es la **raíz cuadrada principal** de a, se denota por $b = \sqrt{a}$.

Los siguientes comentarios son importantes:

1. Los números negativos no tienen raíces cuadradas (en el sistema de números reales), porque el cuadrado de cualquier número real es *no negativo*. Por ejemplo, $\sqrt{-4}$ no es un número real, porque no existe un número real cuyo cuadrado sea -4.
2. La raíz cuadrada principal de 0 es 0, ya que $0^2 = 0$. Esto es $\sqrt{0} = 0$.
3. La raíz cuadrada principal de un número positivo es positiva.
4. Si $c \geq 0$, entonces $(\sqrt{c})^2 = c$. Por ejemplo $(\sqrt{2})^2 = 2$ y $(\sqrt{3})^2 = 3$.

EJEMPLO 11 **Evaluación de raíces cuadradas**

a) $\sqrt{64} = 8$ b) $\sqrt{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{4}$ c) $\left(\sqrt{1.4}\right)^2 = 1.4$

d) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ ◄

Los ejemplos 11a) y 11b) son ejemplos de raíces cuadradas perfectas, ya que $64 = 8^2$ y $\dfrac{1}{16} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$.

Observe la necesidad del valor absoluto en el ejemplo 11d). Como $a^2 \geq 0$, la raíz cuadrada principal de a^2 está definida, no importa si $a > 0$ o $a < 0$. Sin embargo, como la raíz cuadrada principal es no negativa, se necesita el valor absoluto para asegurar el resultado no negativo.

En general, se tiene

$$\sqrt{a^2} = |a| \qquad \textbf{(2)}$$

EJEMPLO 12 Uso de la ecuación (2)

a) $\sqrt{(2.3)^2} = |2.3| = 2.3$ b) $\sqrt{(-2.3)^2} = |-2.3| = 2.3$

c) $\sqrt{x^2} = |x|$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 83.

Uso de la calculadora

7 Su calculadora tiene la tecla de acento circunflejo, $\boxed{\wedge}$, o bien la tecla $\boxed{x^y}$, que se usa para cálculos que se refieren a exponentes.

EJEMPLO 13 Exponentes en una calculadora gráfica

Evalúe $(2.3)^5$

Figura 12

```
2.3^5
             64.36343
```

Solución La figura 12 muestra el resultado usando una calcuadora gráfica TI-83. ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 113.

8 Notación científica

Las medidas de cantidades físicas pueden ir de muy pequeñas a muy grandes. Por ejemplo, la masa de un protón es aproximadamente 0.00000000000000000000000000167 kilogramos y la masa de la Tierra es alrededor de 5 980 000 000 000 000 000 000 000 kilogramos. Es obvio que estos números son tediosos para escribir y difíciles de leer, de manera que usamos exponentes para escribirlos de nuevo.

Cuando un número se escribe como el producto de un número x, donde $1 \leq x < 10$, y una potencia de 10, se dice que está escrito en **notación científica**.

En notación científica,

$$\text{Masa de un protón} = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kilogramos}$$
$$\text{Masa de la Tierra} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kilogramos}$$

Conversión de un decimal a notación científica

Para cambiar un número positivo a notación científica:

1. Se cuenta el número N de lugares que debe moverse el punto decimal para obtener un número x, tal que $1 \leq x < 10$.
2. Si el número original es mayor o igual que 1, la notación científica es $x \times 10^N$. Si el número original está entre 0 y 1, la notación científica es $x \times 10^{-N}$.

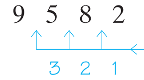
EJEMPLO 14 Uso de la notación científica

Escriba cada número en notación científica.

a) 9582 b) 1.245 c) 0.285 d) 0.000561

Solución a) El punto decimal en 9582 está después del 2. Entonces contamos

9 5 8 2 .



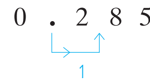
y nos detenemos después de tres movimientos, porque 9.582 es un número entre 1 y 10. Como 9582 es mayor que 1, escribimos

$$9582 = 9.582 \times 10^3$$

b) El punto decimal en 1.245 está entre 1 y 2. Como el número ya está entre 1 y 10, la notación científica sería $1.245 \times 10^0 = 1.245$.

c) El punto decimal en 0.285 está entre 0 y 2. Contamos

0 . 2 8 5

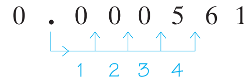


y nos detenemos después de un movimiento, porque 2.85 es un número entre 1 y 10. Como 0.285 está entre 0 y 1, se escribe

$$0.285 = 2.85 \times 10^{-1}$$

d) El punto decimal en 0.000561 se mueve como sigue:

0 . 0 0 0 5 6 1



Como resultado,

$$0.000561 = 5.61 \times 10^{-4}$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA **119.**

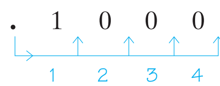
EJEMPLO 15 Cambio de notación científica a decimal

Escriba cada número como un decimal.

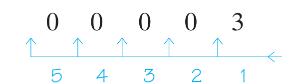
a) 2.1×10^4 b) 3.26×10^{-5} c) 1×10^{-2}

Solución

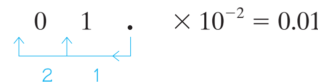
a) $2.1 \times 10^4 = 2\ .\ 1\ 0\ 0\ 0 \times 10^4 = 21{,}000$



b) $3.26 \times 10^{-5} = 0\ \ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ .\ 2\ \ 6 \times 10^{-5} = 0.0000326$



c) $1 \times 10^{-2} = 0\ \ 0\ 1\ . \times 10^{-2} = 0.01$



◀

En una calculadora, un número como 3.615×10^{12} usualmente se aparece como 3.615E12.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA **127.**

EJEMPLO 16 Uso de la notación científica

a) El diámetro de la célula viva más pequeña es sólo alrededor de 0.00001 centímetros (cm).* Exprese este número en notación científica.

b) El área de la superficie de la Tierra es alrededor de 1.97×10^8 millas cuadradas.** Exprese el área como un número entero.

Solución a) $0.00001 \text{ cm} = 1 \times 10^{-5} \text{ cm}$ porque el punto decimal se mueve cinco lugares y el número es menor que 1.

b) 1.97×10^8 millas cuadradas $=$ 197,000,000 millas cuadradas. ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 151.

**Powers of Ten*, Philip y Phylis Morrison.
***1998 Information Please Almanac*.

ASPECTO HISTÓRICO

La palabra álgebra se deriva de la palabra árabe *al-jabr*, que es parte del título de un trabajo del siglo IX, "Hisâb al-jabr w´al-muqâbalah", escrito por Mohammed ibn Mûsâ al-Khowârizmî. *Al-jabr* significa "restauración", una referencia al hecho de que, si se agrega un número en un lado de una ecuación, también debe agregarse al otro lado para "restaurar" la igualdad. El título del trabajo traducido con libertad, es "La ciencia de reducción y cancelación". Por supuesto, en la actualidad, el álgebra significa mucho más.

R.2 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Una _________ es una letra usada en álgebra para representar cualquier número de un conjunto dado.

2. En la recta de números reales, el número real cero es la coordenada del _________.

3. Una desigualdad de la forma $a > b$ se llama una desigualdad _________.

4. En la expresión 2^4, el número 2 se llama _________ y 4 se llama _________.

5. En notación científica, $1234.5678 =$ _________.

6. *Falso o verdadero:* el producto de dos números reales negativos es siempre mayor que cero.

7. *Falso o verdadero:* la distancia entre dos puntos en la recta real es siempre mayor que cero.

8. *Falso o verdadero:* el valor absoluto de un número real es siempre mayor que cero.

9. *Falso o verdadero:* cuando un número se expresa en notación científica, ese escribe como el producto de un número x, $0 \leq x < 1$, y una potencia de 10.

10. *Falso o verdadero:* para multiplicar dos expresiones que tienen la misma base, se conserva la base y se multiplican los exponentes.

Ejercicios

11. En la recta real, etiquete los puntos con coordenadas 0, 1, -1, $\frac{5}{2}$, -2.5, $\frac{3}{4}$, y 0.25.

12. Repita el problema 11 para las coordenadas 0, -2, 2, -1.5, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

En los problemas 13-22, sustituya el signo de interrogación por $<$, $>$ o $=$, *el que sea correcto.*

13. $\frac{1}{2}$? 0 **14.** 5 ? 6 **15.** -1 ? -2 **16.** -3 ? $-\frac{5}{2}$ **17.** π ? 3.14

18. $\sqrt{2}$? 1.41 **19.** $\frac{1}{2}$? 0.5 **20.** $\frac{1}{3}$? 0.33 **21.** $\frac{2}{3}$? 0.67 **22.** $\frac{1}{4}$? 0.25

En los problemas 23-28, escriba cada proposición como una desigualdad.

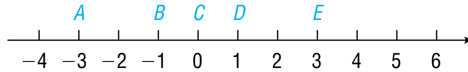
23. x es positivo **24.** z es negativo **25.** x es menor que 2

26. y es mayor que -5 **27.** x es menor o igual que 1 **28.** x es mayor o igual que 2

En los problemas 29-32, grafique los números x en la recta de números reales.

29. $x \geq -2$ **30.** $x < 4$ **31.** $x > -1$ **32.** $x \leq 7$

En los problemas 33-38, use la recta de números reales dada para calcular cada distancia.



33. $d(C, D)$ **34.** $d(C, A)$ **35.** $d(D, E)$ **36.** $d(C, E)$ **37.** $d(A, E)$ **38.** $d(D, B)$

En los problemas 39-46, evalúe cada expresión si $x = -2$ y $y = 3$.

39. $x + 2y$ **40.** $3x + y$ **41.** $5xy + 2$ **42.** $-2x + xy$

43. $\dfrac{2x}{x - y}$ **44.** $\dfrac{x + y}{x - y}$ **45.** $\dfrac{3x + 2y}{2 + y}$ **46.** $\dfrac{2x - 3}{y}$

En los problemas 47-56, encuentre el valor de cada expresión si $x = 3$ y $y = -2$.

47. $|x + y|$ **48.** $|x - y|$ **49.** $|x| + |y|$ **50.** $|x| - |y|$ **51.** $\dfrac{|x|}{x}$

52. $\dfrac{|y|}{y}$ **53.** $|4x - 5y|$ **54.** $|3x + 2y|$ **55.** $||4x| - |5y||$ **56.** $3|x| + 2|y|$

En los problemas 57-64, determine cuál de los valores dados a continuación, si lo hay, debe excluirse del dominio de la variable en cada expresión.

a) $x = 3$ *b)* $x = 1$ *c)* $x = 0$ *d)* $x = -1$

57. $\dfrac{x^2 - 1}{x}$ **58.** $\dfrac{x^2 + 1}{x}$ **59.** $\dfrac{x}{x^2 - 9}$ **60.** $\dfrac{x}{x^2 + 9}$

61. $\dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ **62.** $\dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ **63.** $\dfrac{x^2 + 5x - 10}{x^3 - x}$ **64.** $\dfrac{-9x^2 - x + 1}{x^3 + x}$

En los problemas 65-68, determine el dominio de la variable x en cada expresión.

65. $\dfrac{4}{x - 5}$ **66.** $\dfrac{-6}{x + 4}$ **67.** $\dfrac{x}{x + 4}$ **68.** $\dfrac{x - 2}{x - 6}$

En los problemas 69-72, use la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para convertir grados Fahrenheit en grados Celsius, para encontrar la medida en Celsius de cada temperatura en Fahrenheit.

69. $F = 32°$ **70.** $F = 212°$ **71.** $F = 77°$ **72.** $F = -4°$

En los problemas 73-84, simplifique cada expresión.

73. $(-4)^2$ **74.** -4^2 **75.** 4^{-2} **76.** -4^{-2} **77.** $3^{-6} \cdot 3^4$ **78.** $4^{-2} \cdot 4^3$

79. $(3^{-2})^{-1}$ **80.** $(2^{-1})^{-3}$ **81.** $\sqrt{25}$ **82.** $\sqrt{36}$ **83.** $\sqrt{(-4)^2}$ **84.** $\sqrt{(-3)^2}$

En los problemas 85-94, simplifique cada expresión. Escriba la respuesta de manera que todos los exponentes sean positivos. Siempre que un exponente es 0 o negativo, se supone que la base no es 0.

85. $(8x^3)^2$ **86.** $(-4x^2)^{-1}$ **87.** $(x^2y^{-1})^2$ **88.** $(x^{-1}y)^3$ **89.** $\dfrac{x^2y^3}{xy^4}$

90. $\dfrac{x^{-2}y}{xy^2}$ **91.** $\dfrac{(-2)^3x^4(yz)^2}{3^2xy^3z}$ **92.** $\dfrac{4x^{-2}(yz)^{-1}}{2^3x^4y}$ **93.** $\left(\dfrac{3x^{-1}}{4y^{-1}}\right)^{-2}$ **94.** $\left(\dfrac{5x^{-2}}{6y^{-2}}\right)^{-3}$

En los problemas 95-106, encuentre el valor de cada expresión si $x = 2$ y $y = -1$.

95. $2xy^{-1}$ **96.** $-3x^{-1}y$ **97.** $x^2 + y^2$ **98.** x^2y^2 **99.** $(xy)^2$ **100.** $(x + y)^2$

101. $\sqrt{x^2}$ **102.** $(\sqrt{x})^2$ **103.** $\sqrt{x^2 + y^2}$ **104.** $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ **105.** x^y **106.** y^x

107. Encuentre el valor de la expresión $2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ si $x = 2$. ¿Cuál es el valor si $x = 1$?

108. Encuentre el valor de la expresión $4x^3 + 3x^2 - x + 2$ si $x = 1$. ¿Cuál es el valor si $x = 2$?

109. ¿Cuál es el valor de $\dfrac{(666)^4}{(222)^4}$? **110.** ¿Cuál es el valor de $(0.1)^3(20)^3$?

En los problemas 111-118, use una calculadora para evaluar cada expresión. Redondee su respuesta a tres lugares decimales.

111. $(8.2)^6$ **112.** $(3.7)^5$ **113.** $(6.1)^{-3}$ **114.** $(2.2)^{-5}$

115. $(-2.8)^6$ **116.** $-(2.8)^6$ **117.** $(-8.11)^{-4}$ **118.** $-(8.11)^{-4}$

En los problemas 119-126, escriba cada número en notación científica.

119. 454.2 **120.** 32.14 **121.** 0.013 **122.** 0.00421

123. 32,155 **124.** 21,210 **125.** 0.000423 **126.** 0.0514

En los problemas 127-134, escriba cada número como un decimal.

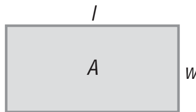
127. 6.15×10^4 **128.** 9.7×10^3 **129.** 1.214×10^{-3} **130.** 9.88×10^{-4}

131. 1.1×10^8 **132.** 4.112×10^2 **133.** 8.1×10^{-2} **134.** 6.453×10^{-1}

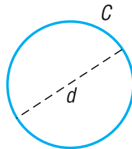
En los problemas 135-144, exprese cada proposición como una ecuación que incluya las variables indicadas.

135. Área de un rectángulo El área A de un rectángulo es el producto de su longitud l y su anchura w.

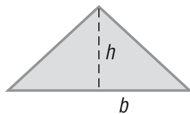
136. Perímetro de un rectángulo El perímetro P de un rectángulo es el doble de la suma de su longitud l y su anchura w.



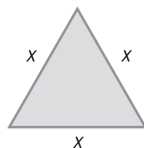
137. Circunferencia de círculo La circunferencia C de un círculo es el producto de π y su diámetro d.



138. Área de un triángulo El área A de un triángulo es la mitad del producto de su base b por su altura h.

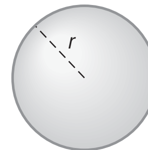


139. Área de un triángulo equilátero El área de un triángulo equilátero es $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ veces el cuadrado de la longitud x de un lado.



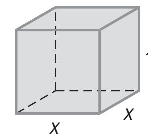
140. Perímetro de un triángulo equilátero El perímetro P de un triángulo equilátero es 3 veces la longitud x de un lado.

141. Volumen de una esfera El volumen V de una esfera es $\dfrac{4}{3}$ multiplicado por π multiplicado por el cubo del radio r.



142. Área de la superficie de una esfera El área de la superficie S de una esfera es 4 multiplicado por π multiplicado por el cuadrado del radio r.

143. Volumen de un cubo El volumen V de un cubo es el cubo de la longitud x de un lado.



144. Área de la superficie de un cubo El área de la superficie S de un cubo es 6 veces el cuadrado de la longitud x de un lado.

145. Costo de manufactura El costo de producción semanal C de fabricar x relojes está dado por la fórmula $C = 4000 + 2x$, donde la variable C está en dólares.

a) ¿Cuál es el costo de producir 1000 relojes?
b) ¿Cuál es el costo de producir 2000 relojes?

146. Saldo de una chequera Al principio del mes, Miguel tenía un saldo de $210 en su cuenta de cheques. Duran-

te el mes depositó \$80, hizo un cheque por \$120, hizo otro depósito de \$25, giró dos cheques de \$60 y \$32 y le hicieron un cargo por servicio del mes de \$5. ¿Cuál es su saldo al final del mes?

147. Voltaje en las casas En Estados Unidos, el voltaje normal en las casas es 115 volts. Es aceptable que el voltaje real x varíe del normal cuando mucho 5 volts. Una fórmula que describe esto es

$$|x - 115| \leq 5$$

a) Muestre que un voltaje de 113 volts es aceptable.
b) Muestre que un voltaje de 109 volts no es aceptable.

148. Voltaje en otros países En otros países, el voltaje normal es 220 volts. Es aceptable que el voltaje real x difiera cuando mucho en 8 volts. Una fórmula que describe esto es

$$|x - 220| \leq 8$$

a) Muestre que un voltaje de 214 volts es aceptable.
b) Muestre que un voltaje de 209 volts no es aceptable.

149. Cojinetes de precisión La FireBall Company fabrica cojinetes de balines para equipo de precisión. Uno de sus productos es un cojinete con un radio establecido de 3 cm. Sólo son aceptables los cojinetes con un radio que difiere no más de 0.01 cm de la medida establecida. Si x es el radio de un cojinete, una fórmula que describe esta situación es

$$|x - 3| \leq 0.01$$

a) ¿Es aceptable un cojinete con radio $x = 2.999$?
b) Es aceptable un cojinete con radio $x = 2.89$?

150. Temperatura del cuerpo La temperatura normal del cuerpo humano es 98.6°F. Una temperatura x que difiere de la normal al menos 1.5°F se considera no sana. Una fórmula que describe esto es

$$|x - 98.6| \geq 1.5$$

a) Muestre que una temperatura de 97°F es no sana.
b) Muestre que la temperatura de 100°F es sana.

151. Distancia de la Tierra a la Luna La distancia de la Tierra a la Luna es alrededor de 4×10^8 metros. Exprese esta distancia como un número entero.

152. Altitud del Monte Everest La altitud del Monte Everest es 8872 metros.* Exprese esta altitud en notación científica.

153. Longitud de onda de la luz visible La longitud de onda de la luz visible es alrededor de 5×10^{-7} metros.* Exprese esta longitud de onda como decimal.

154. Diámetro de un átomo El diámetro aproximado de un átomo es 1×10^{-10} metros.* Exprese este diámetro como decimal.

155. Diámetro de alambre de cobre El alambre de cobre más delgado del mercado tiene un diámetro aproximado de 0.0005 pulgadas.** Exprese este diámetro usando notación científica.

156. Motor más pequeño El motor más pequeño que se ha construido mide menos de 0.05 cm de ancho.** Exprese esta medida usando notación científica.

157. Astronomía Una año luz está definido por los astrónomos como la distancia que recorre un rayo de luz en 1 año (365 días). Si la velocidad de la luz es 186,000 millas por segundo, ¿cuántas millas hay en un año luz? Exprese su respuesta en notación científica.

158. Astronomía ¿Cuánto tiempo toma que un rayo de luz llegue a la Tierra desde el Sol, cuando el Sol está a 93,000,000 millas de la Tierra? Exprese su respuesta en segundos, usando notación científica.

159. ¿Es $\frac{1}{3}$ igual a 0.333? Si no lo es, ¿cuál es más grande? ¿Por cuánto?

160. ¿Es $\frac{2}{3}$ igual a 0.666? Si no lo es, ¿cuál es más grande? ¿Por cuánto?

161. ¿Existe un número real positivo que sea el "más cercano" a 0?

162. ¡Estoy pensando en un número! está entre 1 y 10; su cuadrado es racional y está entre 1 y 10. El número es más grande que π. Dé el número corregido a dos lugares decimales (es decir, truncado a dos lugares decimales). Ahora piense en su propio número y rete a un compañero a que lo adivine.

163. Escriba un párrafo breve que ilustre las similitudes y diferencias entre "menor que" ($<$) y "menor o igual que" ($\leq$).

164. Proporcione una razón por la que la proposición $5 < 8$ es cierta.

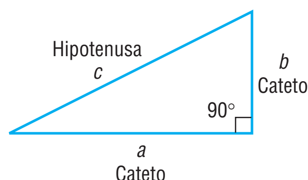
**Powers of Ten*, Philip y Phylis Morrison
***1998 Information Please Almanac*

R.3 Repaso de geometría

OBJETIVOS
1 Usar el teorema de Pitágoras y su recíproco
2 Conocer las fórmulas de geometría

En esta sección se revisan algunos temas estudiados en geometría que se necesitarán en capítulos posteriores.

Figura 13



Teorema de Pitágoras



El *teorema de Pitágoras* es una proposición acerca de los *triángulos rectángulos*. Un **triángulo rectángulo** es uno que contiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90°. El lado del triángulo opuesto al ángulo de 90° se llama **hipotenusa**; los otros dos lados se llaman **catetos**. En la figura 13, c representa la longitud de la hipotenusa y a y b representan las longitudes de los catetos. Observe que el símbolo ⌜ muestra el ángulo de 90°. Ahora se establece el teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos. Esto es, en el triángulo rectángulo mostrado en la figura 13,

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1}$$

Este resultado se demuestra al final de la sección.

EJEMPLO 1 Encontrar la hipotenusa de un triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo, un cateto mide 4 y el otro mide 3. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

Solución Como el triángulo es rectángulo, se usa el teorema de Pitágoras con $a = 4$ y $b = 3$ para encontrar la longitud c de la hipotenusa. De la ecuación (1) se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$
$$c = \sqrt{25} = 5$$ ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

El inverso del teorema de Pitágoras también es cierto.

Recíproco del teorema de Pitágoras

En un triángulo, si el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo. El ángulo de 90° es opuesto al lado más grande.

Este resultado se demuestra al final de la sección.

EJEMPLO 2 Verificación de que un triángulo es un triángulo rectángulo

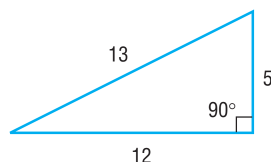
Muestre que un triángulo cuyos lados tiene longitudes 5, 12 y 13 es un triángulo rectángulo. Identifique la hipotenusa.

Solución Se elevan al cuadrado las longitudes de los lados

$$5^2 = 25, \quad 12^2 = 144, \quad 13^2 = 169$$

Observe que la suma de los dos primeros cuadrados (25 y 144) es igual al tercer cuadrado (169). Entonces el triángulo es un triángulo rectángulo. El lado más grande, 13, es la hipotenusa. Vea la figura 14. ◀

Figura 14

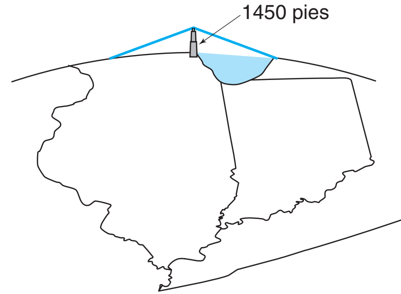



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 17.

EJEMPLO 3 Aplicación del teorema de Pitágoras

El edificio habitado más alto del mundo es la Torre Sears en Chicago. Si la torre de observación está 1450 pies sobre el nivel del suelo, ¿qué tan lejos observaría una persona parada en la torre de observación (con ayuda de un telescopio)? Use 3960 millas para el radio de la Tierra. Vea la figura 15.

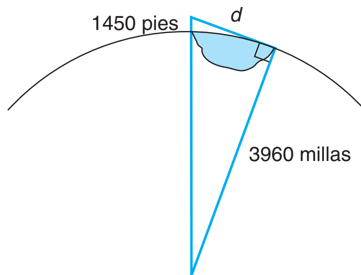
Figura 15



[**Nota:** 1 milla = 5280 pies]

FUENTE: Council on Tall Buildings and Urban Habitat (1997): Torre Sears es Núm. 1 para techo más alto (1450 pies) y piso ocupado más alto (1431 pies).

Figura 16



Solución Desde el centro de la Tierra dibuje dos radios: uno que llegue a la Torre Sears y el otro al punto más lejano que podría ver una persona desde la torre. Vea la figura 16. Aplique el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo.

Como 1450 pies $= \dfrac{1450}{5280}$ millas, se tiene

$$d^2 + (3960)^2 = \left(3960 + \frac{1450}{5280}\right)^2$$

$$d^2 = \left(3960 + \frac{1450}{5280}\right)^2 - (3960)^2 \approx 2175.08$$

$$d \approx 46.64$$

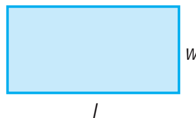
Una persona podría ver hasta alrededor de 47 millas desde la torre de observación. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 43.

Fórmulas de geometría

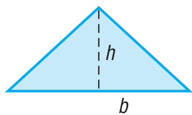
2 Ciertas fórmulas de geometría son útiles al resolver problemas de álgebra. A continuación se enumeran estas fórmulas.

Para un rectángulo con longitud l y anchura w,



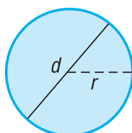
$$\text{Área} = lw \qquad \text{Perímetro} = 2l + 2w$$

Para un triángulo con base b y altura h,

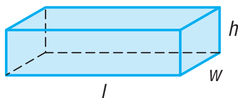


$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh$$

Para un círculo de radio r (diámetro $d = 2r$),

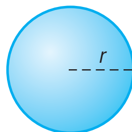


$$\text{Área} = \pi r^2 \qquad \text{Circunferencia} = 2\pi r = \pi d$$



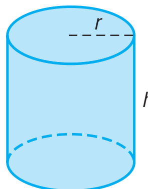
Para una caja rectangular cerrada con longitud l, anchura w y alto h,

$$\text{Volumen} = lwh \qquad \text{Área de superficie} = 2lw + 2lh + 2wh$$



Para una esfera de radio r,

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{Área de superficie} = 4\pi r^2$$



Para un cilindro circular recto con altura h y radio r

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h \qquad \text{Área de superficie} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

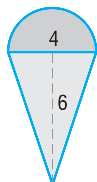


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.

EJEMPLO 4 Uso de las fórmulas de geometría

Un adorno de Navidad tiene forma de semicírculo arriba de un triángulo. ¿Cuántos centímetros cuadrados de cobre se requieren para hacer el adorno si la altura del triángulo es 6 cm y la base es 4 cm?

Figura 17



Solución Vea la figura 17. La cantidad de cobre necesaria es igual al área sombreada. Esta área es la suma de las áreas del triángulo y el semicírculo. El triángulo tiene altura $h = 6$ y base $b = 4$. El semicírculo tiene diámetro $d = 4$, por lo que el radio es $r = 2$.

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \text{Área del triángulo} + \text{Área del semicírculo}\\ &= \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}(4)(6) + \frac{1}{2}\pi 2^2 \qquad b = 4;\ h = 6;\ r = 2.\\ &= 12 + 2\pi \approx 18.28 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

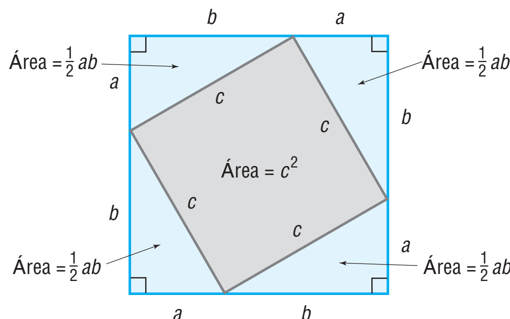
Se requieren alrededor de 18.28 cm^2 de cobre. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

Demostración del teorema de Pitágoras Se comienza con un cuadrado, cada lado de longitud $a + b$. En este cuadrado, se forman cuatro triángulos rectángulos, cada uno con catetos de longitud igual a a y b. Vea la figura 18. Todos estos triángulos son **congruentes** (dos lados y los ángulos incluidos son iguales). Como resultado, la hipotenusa de cada uno mide lo mismo, digamos c, y la sombra oscura en la figura 18 indica un cuadrado con área

Figura 18

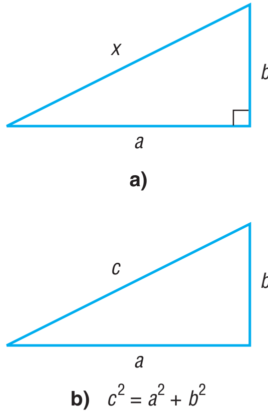


igual a c^2. El área del cuadrado original con lados $a + b$ es igual a la suma de las áreas de los cuatro triángulos (cada uno con área de $\frac{1}{2}ab$) más el área del cuadrado con lados c. Entonces)

$$(a + b)^2 = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + c^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

La demostración queda completa. ■

Figura 19



Demostración del recíproco del teorema de Pitágoras Se comienza con dos triángulos: un triángulo rectángulo con catetos a y b y el otro un triángulo con lados a, b y c para el que $c^2 = a^2 + b^2$. Vea la figura 19. Por el teorema de Pitágoras, la longitud x del tercer lado del primer triángulo es

$$x^2 = a^2 + b^2$$

Pero $c^2 = a^2 + b^2$. Entonces

$$x^2 = c^2$$
$$x = c$$

Los dos triángulos tienen los mismos lados y por lo tanto son congruentes; así, los ángulos correspondientes son iguales. Entonces, el ángulo opuesto al lado c del segundo triángulo es igual a 90º.

La prueba queda completa. ■

R.3 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Un triángulo _________ contiene un ángulo de 90 grados. El lado más largo se llama _________.

2. Para un triángulo con base b y altura h, una fórmula para el área A es _________.

3. La fórmula para la circunferencia C de un círculo de radio r es _________.

4. *Falso o verdadero:* en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de lado más largo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros lados.

5. *Falso o verdadero:* el triángulo con lados de longitud 6, 8 y 10 es un triángulo rectángulo.

6. *Falso o verdadero:* el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^2$.

Ejercicios

En los problemas 7-12 se dan las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo. Encuentre la hipotenusa.

7. $a = 5, \quad b = 12$
8. $a = 6, \quad b = 8$
9. $a = 10, \quad b = 24$
10. $a = 4, \quad b = 3$
11. $a = 7, \quad b = 24$
12. $a = 14, \quad b = 48$

En los problemas 13-20 se dan las longitudes de los lados de un triángulo. Determine cuáles son triángulos rectángulos. Para los que son, identifique la hipotenusa.

13. 3, 4, 5
14. 6, 8, 10
15. 4, 5, 6
16. 2, 2, 3
17. 7, 24, 25
18. 10, 24, 26
19. 6, 4, 3
20. 5, 4, 7

21. Encuentre el área A de un rectángulo con 4 pulgadas de largo y 3 de ancho.
22. Encuentre el área A de un rectángulo con 9 cm de largo y 4 de ancho.
23. Encuentre el área A de un triángulo con 4 pulgadas de alto y 2 de base.
24. Encuentre el área A de un triángulo con 9 cm de alto y 4 de base.
25. Encuentre el área A y la circunferencia C de un círculo de 5 m de radio.
26. Encuentre el área A y la circunferencia C de un círculo de 2 pies de radio.
27. Encuentre el volumen V y el área de la superficie S de una caja rectangular con 8 pies de largo, 4 de ancho y 7 de alto.

28. Encuentre el volumen V y el área de la superficie S de una caja rectangular con 9 pulgadas de largo, 4 de ancho y 8 de alto.

29. Encuentre el volumen V y el área de la superficie S de una esfera con 4 cm de radio.

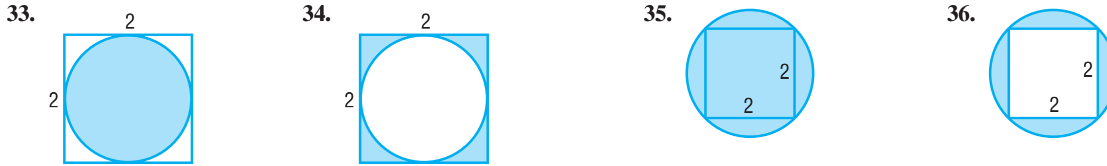
30. Encuentre el volumen V y el área de la superficie S de una esfera con 3 pies de radio.

31. Encuentre el volumen V y el área de la superficie S de un cilindro circular recto con radio de 9 pulgadas y altura de 8 pulgadas.

32. Encuentre el volumen V y el área de la superficie S de un cilindro circular recto con radio de 8 pulgadas y altura de 9 pulgadas.

En los problemas 33-36, encuentre el área de la región sombreada.

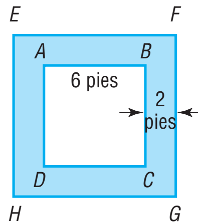
33. **34.** **35.** **36.**



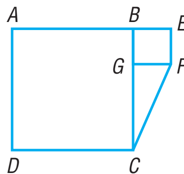
37. ¿Cuántos pies recorre una llanta con diámetro de 16 pulgadas después de cuatro revoluciones?

38. ¿Cuántas revoluciones habrá completado un disco circular con 4 pies de diámetro después de recorrer 20 pies?

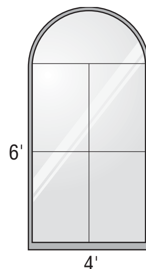
39. En la figura siguiente, $ABCD$ es un cuadrado, cada lado tiene 6 pies de longitud. El ancho del borde (parte sombreada) entre el cuadrado exterior $EFGH$ y $ABCD$ es 2 pies. Encuentre el área del borde.



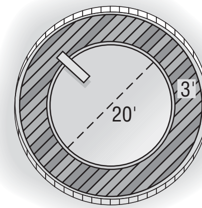
40. Vea la siguiente figura. El cuadrado $ABCD$ tiene un área de 100 pies cuadrados; el cuadrado $BEFG$ tiene un área de 16 pies cuadrados. ¿Cuál es el área del triángulo CFG?



41. Arquitectura Una ventana Norman consiste en un rectángulo con un semicírculo en la parte de arriba. Encuentre el área de la ventana mostrada en la ilustración. ¿Cuánta madera se necesita para el marco de la ventana?



42. Construcción Una alberca circular, con 20 pies de diámetro, está rodeada por un entarimado de madera de 3 pies de ancho. ¿Cuál es el área del entarimado? ¿Qué largo de cerca se necesita para rodear el entarimado?



En los problemas 43-45, use la información de que el radio de la Tierra es 3960 millas y 1 milla = 5280 pies.

43. ¿Qué tan lejos podría ver? La torreta del submarino norteamericano *Silversides* de la Segunda Guerra Mundial, ahora atracado en forma permanente en Muskegon, Michigan, está aproximadamente 20 pies sobre el nivel del mar. ¿Qué tan lejos podría ver desde la torreta?

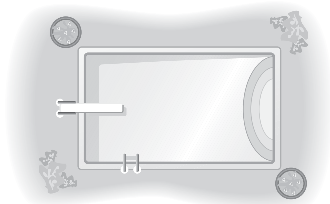
44. ¿Qué tan lejos podría ver? Una persona que mide 6 pies está parada en la playa de Fort Lauderdale, Florida y está mirando al océano Atlántico. De pronto, aparece un barco en el horizonte. ¿A qué distancia está el barco?

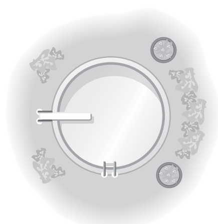
45. ¿Qué tan lejos podría ver? La cubierta de un destructor está a 100 pies sobre el nivel del mar. ¿Qué tan lejos podría ver alguien desde la cubierta? ¿Qué tan lejos podría ver alguien desde el puente de mando que se encuentra a 150 pies sobre el nivel del mar?

46. Suponga que m y n son enteros positivos, con $m > n$. Si $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ y $c = m^2 + n^2$, demuestre que a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. (Estas fórmulas se utilizan para encontrar los lados de un triángulo rectángulo que son enteros, tales como 3, 4, 5; 5, 12, 13; etcétera. Estas tercias de enteros se llaman **tercias de Pitágoras**).

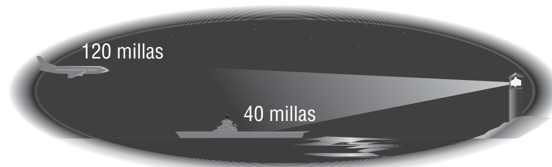
47. Se tienen 1000 pies de borde flexible para albercas y se desea construir una alberca. Experimente con albercas rectangulares cuyos perímetros sean 1000 pies. ¿Cómo varían las áreas? ¿Cuál es la forma rectangular que tiene el área más grande? Ahora calcule el área de una piscina circular con perímetro (circunferencia) de 1000 pies.

¿Qué forma de alberca escogería? Si es rectangular, ¿cuáles son las dimensiones que prefiere? Justifique su respuesta. Si la única consideración es tener una alberca que tenga la mayor área, ¿qué forma escogería?





48. El faro de Gibb en Southampton, Bermuda opera desde 1846, tiene una altura de 117 pies en una loma con 245 pies de altura, de manera que su rayo de luz está a 362 pies sobre el nivel del mar. Un folleto afirma que la luz se observa en el horizonte a una distancia aproximada de 26 millas. Verifique si la información es correcta. El folleto asegura también que barcos que están a 40 millas observan la luz, y que los aviones que vuelan a 10,000 pies la verían desde 120 millas de distancia. Verifique la exactitud de estas proposiciones. ¿Qué suposición hace el folleto acerca de la altura del barco?





R.4 Polinomios

OBJETIVOS
1 Reconocer monomios
2 Reconocer polinomios
3 Sumar y restar polinomios
4 Multiplicar polinomios
5 Conocer fórmulas de productos notables

Se ha descrito el álgebra como una generalización de la aritmética donde se usan letras para representar números reales. De ahora en adelante, se usarán letras del final del alfabeto, como x, y y z, para representar variables y letras del principio del alfabeto, como a, b y c, para representar constantes. En las expresiones $3x + 5$ y $ax + b$, se entiende que x es una variable y que a y b son constantes, aun cuando las constantes a y b no estén especificadas. Como se verá, el contexto suele proporcionar el significado implícito.

Introducimos ahora cierto vocabulario básico.

Un **monomio** en una variable es el producto de una constante por una variable elevada a una potencia entera no negativa. Un monomio es de la forma

$$ax^k$$

donde a es una constante, x es una variable y $k \geq 0$ es un entero. La constante a se llama **coeficiente** del monomio. Si $a \neq 0$, entonces k se llama **grado** del monomio.



EJEMPLO 1

Ejemplos de monomios

Monomio	Coeficiente	Grado	
a) $6x^2$	6	2	
b) $-\sqrt{2}x^3$	$-\sqrt{2}$	3	
c) 3	3	0	ya que $3 = 3 \cdot 1 = 3x^0, x \neq 0$
d) $-5x$	-5	1	ya que $-5x = -5x^1$
e) x^4	1	4	ya que $x^4 = 1 \cdot x^4$

Ahora se verán algunas expresiones que no son monomios.

EJEMPLO 2

Ejemplos de expresiones que no son monomios

a) $3x^{1/2}$ no es monomio, porque el exponente de la variable x es $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ no es un entero no negativo.

b) $4x^{-3}$ no es un monomio, porque el exponente de la variable x es -3 que no es un entero no negativo.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

Dos monomios con la misma variable elevada a la misma potencia se llaman **términos semejantes**. Por ejemplo, $2x^4$ y $-5x^4$ son términos semejantes. Por el contrario, los monomios $2x^3$ y $2x^5$ no son términos semejantes.

Los términos semejantes se suman o restan usando la propiedad distributiva. Por ejemplo,

$$2x^2 + 5x^2 = (2 + 5)x^2 = 7x^2 \quad \text{y} \quad 8x^3 - 5x^3 = (8 - 5)x^3 = 3x^3$$

La suma o diferencia de dos monomios que tiene grados diferentes se llama **binomio**. La suma o diferencia de tres monomios con tres grados diferentes se llama **trinomio**. Por ejemplo,

$x^2 - 2$ es un binomio.

$x^3 - 3x + 5$ es un trinomio.

$2x^2 + 5x^2 + 2 = 7x^2 + 2$ es un binomio.

En palabras

Un polinomio es una suma de monomios.

Un **polinomio** en una variable es una expresión algebraica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \textbf{(1)}$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son constantes,* llamadas **coeficientes** del polinomio, $n \geq 0$ es un entero y x es una variable. Si $a_n \neq 0$, recibe el nombre de **coeficiente principal** y n se llama **grado** del polinomio.

Los monomios que forman un polinomio se llaman **términos**. Si todos los coeficientes son 0, el polinomio se llama **polinomio cero**, y no tiene grado.

*La notación a_n se lee "a sub n". El número n se llama **subíndice** y no debe confundirse con un exponente. Se usan subíndices para distinguir una constante de otra cuando se requiere un número grande o indeterminado de constantes.

En general, los polinomios se escriben en **forma estándar**, comenzando con el término diferente de cero con grado más alto y siguiendo con los términos en orden descendente de acuerdo con el grado. Si falta una potencia de x, se debe a que su coeficiente es cero.



EJEMPLO 3

Ejemplos de polinomios

Polinomio	Coeficiente	Grado
$-8x^3 + 4x^2 - 6x + 2$	$-8, 4, -6, 2$	3
$3x^2 - 5 = 3x^2 + 0 \cdot x + (-5)$	$3, 0, -5$	2
$8 - 2x + x^2 = 1 \cdot x^2 + (-2)x + 8$	$1, -2, 8$	2
$5x + \sqrt{2} = 5x^1 + \sqrt{2}$	$5, \sqrt{2}$	1
$3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot x^0$	3	0
0	0	Sin grado ◀

Aunque se ha usado x para representar la variable, también es común usar letras como y o z.

$3x^4 - x^2 + 2$ es un polinomio (en x) de grado 4.

$9y^3 - 2y^2 + y - 3$ es un polinomio (en y) de grado 3.

$z^5 + \pi$ es un polinomio (en z) de grado 5.

Las expresiones algebraicas de tipo

$$\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{x^2 + 1}{x + 5}$$

son polinomios. La primera no es un polinomio porque $\frac{1}{x} = x^{-1}$ tiene un exponente que no es un entero no negativo. Aunque la segunda expresión es el cociente de dos polinomios, el polinomio en el denominador tiene grado mayor que 0, de manera que la expresión no puede ser un polinomio.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA **17.**

Suma y resta de polinomios



Los polinomios se suman y restan combinando términos semejantes.

EJEMPLO 4

Suma de polinomios

Encuentre la suma de los polinomios:

$$8x^3 - 2x^2 + 6x - 2 \quad \text{y} \quad 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x$$

Solución Se encontrará la suma de dos maneras

Suma horizontal: La idea es agrupar los términos semejantes y después combinarlos.

$$(8x^3 - 2x^2 + 6x - 2) + (3x^4 - 2x^3 + x^2 + x)$$
$$= 3x^4 + (8x^3 - 2x^3) + (-2x^2 + x^2) + (6x + x) - 2$$
$$= 3x^4 + 6x^3 - x^2 + 7x - 2$$

Suma vertical: Aquí la idea es alinear verticalmente los términos semejantes de cada polinomio y luego sumar los coeficientes.

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ & & 8x^3 & -\ 2x^2 & +\ 6x & -\ 2 \\ (+) & 3x^4 & -\ 2x^3 & +\ x^2 & +\ x & \\ \hline & 3x^4 & +\ 6x^3 & -\ x^2 & +\ 7x & -\ 2 \end{array}$$

Se restarán dos polinomios en cualquiera de estas dos formas.

EJEMPLO 5 **Resta de polinomios**

Encuentre la diferencia: $(3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1) - (2x^4 - 8x^2 - 6x + 5)$

Solución ***Resta horizontal:***

$(3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1) - (2x^4 - 8x^2 - 6x + 5)$

$$= 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1 + \underbrace{(-2x^4 + 8x^2 + 6x - 5)}$$

Asegúrese de cambiar el signo de cada término en el segundo polinomio.

$$= (3x^4 - 2x^4) + (-4x^3) + (6x^2 + 8x^2) + 6x + (-1 - 5)$$

↑ Agrupar términos semejantes.

$$= x^4 - 4x^3 + 14x^2 + 6x - 6$$

Resta vertical: Se alinean los términos semejantes, se cambia el signo de cada coeficiente del segundo polinomio y se suma.

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ & 3x^4 & -\ 4x^3 & +\ 6x^2 & & -\ 1 \\ (-) & [2x^4 & & -\ 8x^2 & -\ 6x & +\ 5] \end{array} = \begin{array}{rrrrrr} & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ & 3x^4 & -\ 4x^3 & +\ 6x^2 & & -\ 1 \\ (+) & -2x^4 & & +\ 8x^2 & +\ 6x & -\ 5 \\ \hline & x^4 & -\ 4x^3 & +\ 14x^2 & +\ 6x & -\ 6 \end{array}$$

La elección de cuál de estos métodos utilizar para sumar y restar polinomios se deja al lector. Para ahorrar espacio, se usará con más frecuencia el formato horizontal.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

Multiplicación de polinomios

 Dos polinomios se multiplican usando las leyes de exponentes, y las propiedades conmutativa y asociativa. Por ejemplo,

$$(2x^3) \cdot (5x^4) = (2 \cdot 5) \cdot (x^3 \cdot x^4) = 10x^{3+4} = 10x^7$$

Los productos de polinomios se encuentran mediante el uso repetido de la propiedad distributiva y las leyes de exponentes. De nuevo, se tiene la opción de los formatos horizontal o vertical.

EJEMPLO 6 **Multiplicación de polinomios**

Encuentre el producto: $(2x + 5)(x^2 - x + 2)$

Solución ***Multiplicación horizontal:***

$$(2x + 5)(x^2 - x + 2) = 2x(x^2 - x + 2) + 5(x^2 - x + 2)$$

↑ Propiedad distributiva

$$= (2x \cdot x^2 - 2x \cdot x + 2x \cdot 2) + (5 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 5 \cdot 2)$$

↑ Propiedad distributiva

$$= (2x^3 - 2x^2 + 4x) + (5x^2 - 5x + 10)$$

↑ Ley de exponentes

$$= 2x^3 + 3x^2 - x + 10$$

↑ Combinación de términos semejantes.

Multiplicación vertical: La idea aquí es muy parecida a la de multiplicar un número de dos dígitos por otro de tres dígitos.

$$\begin{array}{rrrrl} & x^2 & - x & + 2 & \\ & & 2x & + 5 & \\ \hline 2x^3 & - 2x^2 & + 4x & & \text{Esta línea es } 2x(x^2 - x + 2). \\ (+) & 5x^2 & - 5x & + 10 & \text{Esta línea es } 5(x^2 - x + 2). \\ \hline 2x^3 & + 3x^2 & - x & + 10 & \text{Suma de las dos líneas anteriores.} \end{array}$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 41.

Productos notables

5 Ciertos productos, llamados **productos notables**, ocurren con frecuencia en álgebra. Se calcula con facilidad usando el método **PP-PS-SP-SS** (primero por primero, primero por segundo, segundo por primero, segundo por segundo) para multiplicar dos binomios.

$$(ax + b)(cx + d) = ax(cx + d) + b(cx + d)$$

(PS, PP, SP, SS)

$$= \underbrace{ax \cdot cx}_{PP} + \underbrace{ax \cdot d}_{PS} + \underbrace{b \cdot cx}_{SP} + \underbrace{b \cdot d}_{SS}$$

$$= acx^2 + adx + bcx + bd$$

$$= acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

EJEMPLO 7 **Uso de PP-PS-SP-SS**

a) $(x - 3)(x + 3) = \underset{PP}{x^2} + \underset{PS}{3x} - \underset{SP}{3x} - \underset{SS}{9} = x^2 - 9$

b) $(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2) = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$

c) $(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$

d) $(x + 3)(x + 1) = x^2 + x + 3x + 3 = x^2 + 4x + 3$

e) $(2x + 1)(3x + 4) = 6x^2 + 8x + 3x + 4 = 6x^2 + 11x + 4$ ◀

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 47 Y 55.

Algunos productos tienen nombres especiales debido a su forma. Los siguientes productos notables están basados en el ejemplo 7a), b) y c).

Diferencia de cuadrados

$$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Binomio al cuadrado o cuadrado perfecto

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \qquad \textbf{(3a)}$$
$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \qquad \textbf{(3b)}$$

EJEMPLO 8 **Uso de las fórmulas de productos notables**

a) $(x - 5)(x + 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$ — Diferencia de cuadrados.

b) $(x + 7)^2 = x^2 + 2 \cdot 7 \cdot x + 7^2 = x^2 + 14x + 49$ — Binomio al cuadrado.

c) $(2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2x + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$ — Observar que se usó $2x$ en lugar de x en (3a).

d) $(3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3x + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16$ — Sustituir $3x$ en lugar de x en (3b).

◄


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **65, 67 Y 69.**

Veremos algunos ejemplos más que llevan a fórmulas generales.

EJEMPLO 9 **Binomio al cubo**

a) $(x + 2)^3 = (x + 2)(x + 2)^2 = (x + 2)(x^2 + 4x + 4)$ — Fórmula (3a)

$= (x^3 + 4x^2 + 4x) + (2x^2 + 8x + 8)$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b) $(x - 1)^3 = (x - 1)(x - 1)^2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 1)$ — Fórmula (3b)

$= (x^3 - 2x^2 + x) - (x^2 - 2x + 1)$

$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ◄

Binomio al cubo o cubo perfecto

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \qquad \textbf{(4a)}$$
$$(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \qquad \textbf{(4b)}$$


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA **85.**

EJEMPLO 10 **Para formar la diferencia de dos cubos**

$$\begin{aligned}(x - 1)(x^2 + x + 1) &= x(x^2 + x + 1) - 1(x^2 + x + 1)\\ &= x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1\\ &= x^3 - 1\end{aligned}$$

◀

EJEMPLO 11 **Para formar la suma de dos cubos**

$$\begin{aligned}(x + 2)(x^2 - 2x + 4) &= x(x^2 - 2x + 4) + 2(x^2 - 2x + 4)\\ &= x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8\\ &= x^3 + 8\end{aligned}$$

◀

Los ejemplos 10 y 11 llevan a otros dos productos notables.

Diferencia de dos cubos

$$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3 \qquad \textbf{(5)}$$

Suma de dos cubos

$$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3 \qquad \textbf{(6)}$$

Polinomios en dos variables

Un **monomio en dos variables** x y y tiene la forma $ax^n y^m$, donde a es una constante, x y y son variables y n y m son enteros no negativos. El **grado** del monomio es la suma de las potencias de las variables.

Por ejemplo,

$$2xy^3, \quad a^2b^2 \quad \text{y} \quad x^3y$$

son monomios, cada uno de los cuales tiene grado 4.

Un **polinomio en dos variables** x y y es la suma de uno o más monomios en dos variables. El **grado de un polinomio** en dos variables es el grado más alto de todos los monomios con coeficiente diferente de cero.

EJEMPLO 12 **Ejemplos de polinomios en dos variables**

$$3x^2 + 2x^3y + 5 \qquad \pi x^3 - y^2 \qquad x^4 + 4x^3y - xy^3 + y^4$$

Dos variables, el grado es 4. — Dos variables, el grado es 3. — Dos variables, el grado es 4.

◀

La multiplicación de polinomios en dos variables se maneja de la misma manera que la de los polinomios en una variable.

EJEMPLO 13 **Uso de una fórmula de productos notables**

Para multiplicar $(2x - y)^2$, use la fórmula (3b) de cuadrados de binomios con $2x$ en lugar de x y y en lugar de a.

$$(2x - y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot y \cdot 2x + y^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 79.

R.4 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. El polinomio $3x^4 - 2x^3 + 13x^2 - 5$ es de grado _________. El coeficiente principal es _________.
2. $(x^2 - 4)(x^2 + 4) =$ __________.
3. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) =$ __________.
4. *Falso o verdadero:* $4x^{-2}$ es un monomio de grado -2.
5. *Falso o verdadero:* el grado del producto de dos polinomios diferentes de cero es igual a la suma de sus grados.
6. *Falso o verdadero:* $(x + a)(x^2 + ax + a) = x^3 + a^3$.

Ejercicios

En los problemas 7-16, diga si la expresión es un monomio. Si lo es, diga cuáles son las variables y los coeficientes y dé el grado del monomio.

7. $2x^3$ **8.** $-4x^2$ **9.** $\frac{8}{x}$ **10.** $-2x^{-3}$ **11.** $-2xy^2$

12. $5x^2y^3$ **13.** $\frac{8x}{y}$ **14.** $-\frac{2x^2}{y^3}$ **15.** $x^2 + y^2$ **16.** $3x^2 + 4$

En los problemas 17-26, diga si la expresión es un polinomio. Si lo es, dé el grado.

17. $3x^2 - 5$ **18.** $1 - 4x$ **19.** 5 **20.** $-\pi$ **21.** $3x^2 - \frac{5}{x}$

22. $\frac{3}{x} + 2$ **23.** $2y^3 - \sqrt{2}$ **24.** $10z^2 + z$ **25.** $\frac{x^2 + 5}{x^3 - 1}$ **26.** $\frac{3x^3 + 2x - 1}{x^2 + x + 1}$

En los problemas 27-46, sume, reste o multiplique, según se indica. Exprese su respuesta como un polinomio en la forma estándar.

27. $(x^2 + 4x + 5) + (3x - 3)$
28. $(x^3 + 3x^2 + 2) + (x^2 - 4x + 4)$
29. $(x^3 - 2x^2 + 5x + 10) - (2x^2 - 4x + 3)$
30. $(x^2 - 3x - 4) - (x^3 - 3x^2 + x + 5)$
31. $(6x^5 + x^3 + x) + (5x^4 - x^3 + 3x^2)$
32. $(10x^5 - 8x^2) + (3x^3 - 2x^2 + 6)$
33. $(x^2 - 3x + 1) + 2(3x^2 + x - 4)$
34. $-2(x^2 + x + 1) + (-5x^2 - x + 2)$
35. $6(x^3 + x^2 - 3) - 4(2x^3 - 3x^2)$
36. $8(4x^3 - 3x^2 - 1) - 6(4x^3 + 8x - 2)$
37. $(x^2 - x + 2) + (2x^2 - 3x + 5) - (x^2 + 1)$
38. $(x^2 + 1) - (4x^2 + 5) + (x^2 + x - 2)$
39. $9(y^2 - 3y + 4) - 6(1 - y^2)$
40. $8(1 - y^3) + 4(1 + y + y^2 + y^3)$
41. $x(x^2 + x - 4)$
42. $4x^2(x^3 - x + 2)$
43. $-2x^2(4x^3 + 5)$
44. $5x^3(3x - 4)$
45. $(x + 1)(x^2 + 2x - 4)$
46. $(2x - 3)(x^2 + x + 1)$

En los problemas 47-64, multiplique los polinomios usando el método PP-PS-SP-SS. Exprese su respuesta como un polinomio en la forma estándar.

47. $(x + 2)(x + 4)$
48. $(x + 3)(x + 5)$
49. $(2x + 5)(x + 2)$
50. $(3x + 1)(2x + 1)$
51. $(x - 4)(x + 2)$
52. $(x + 4)(x - 2)$
53. $(x - 3)(x - 2)$
54. $(x - 5)(x - 1)$
55. $(2x + 3)(x - 2)$
56. $(2x - 4)(3x + 1)$
57. $(-2x + 3)(x - 4)$
58. $(-3x - 1)(x + 1)$
59. $(-x - 2)(-2x - 4)$
60. $(-2x - 3)(3 - x)$
61. $(x - 2y)(x + y)$
62. $(2x + 3y)(x - y)$
63. $(-2x - 3y)(3x + 2y)$
64. $(x - 3y)(-2x + y)$

En los problemas 65-88, multiplique los polinomios usando las fórmulas de productos notables. Exprese su respuesta como un polinomio en forma estándar.

65. $(x - 7)(x + 7)$
66. $(x - 1)(x + 1)$
67. $(2x + 3)(2x - 3)$
68. $(3x + 2)(3x - 2)$
69. $(x + 4)^2$
70. $(x + 5)^2$
71. $(x - 4)^2$
72. $(x - 5)^2$
73. $(3x + 4)(3x - 4)$
74. $(5x - 3)(5x + 3)$
75. $(2x - 3)^2$
76. $(3x - 4)^2$
77. $(x + y)(x - y)$
78. $(x + 3y)(x - 3y)$
79. $(3x + y)(3x - y)$
80. $(3x + 4y)(3x - 4y)$
81. $(x + y)^2$
82. $(x - y)^2$
83. $(x - 2y)^2$
84. $(2x + 3y)^2$
85. $(x - 2)^3$
86. $(x + 1)^3$
87. $(2x + 1)^3$
88. $(3x - 2)^3$

89. Explique por qué el grado del producto de dos polinomios es igual a la suma de sus grados.

90. Explique por qué el grado de la suma de dos polinomios de grados diferentes es igual al mayor de los grados.

91. Proporcione una proposición cuidadosa acerca del grado de la suma de dos polinomios del mismo grado.

92. Prefiere sumar dos polinomios usando el método horizontal o el vertical? Defienda brevemente su elección.

93. ¿Prefiere memorizar la regla para el cuadrado de binomio $(x + a)^2$ o usar PP-PS-SP-SS para obtener el producto? Defienda brevemente su elección.

R.5 Factorización de polinomios

OBJETIVOS
1 Factorizar la diferencia de dos cuadrados y la suma y la diferencia de dos cubos.
2 Factorizar cuadrados perfectos
3 Factorizar polinomios de segundo grado: $x^2 + Bx + C$
4 Factorizar agrupando
5 Factorizar un polinomio de segundo grado: $Ax^2 + Bx + C$

Considere el siguiente producto:

$$(2x + 3)(x - 4) = 2x^2 - 5x - 12$$

Los dos polinomios en el lado izquierdo se llaman **factores** del polinomio en el lado derecho. Expresar un polinomio dado como el producto de otros polinomios, es decir, encontrar los factores de un polinomio se llama **factorización**.

Se restringirá el análisis a la factorización de polinomios en una variable en productos de polinomios en una variable, donde todos los coeficientes son enteros. Esto recibe el nombre de **factorización sobre enteros**.

Cualquier polinomio se escribe como el producto de 1 por el mismo o como -1 por su inverso aditivo. Si un polinomio no se puede escribir como el producto de otros dos polinomios (excepto 1 y -1), entonces se dice que el polinomio es **primo**. Cuando un polinomio se escribe como un producto que consiste en sólo factores primos, se dice que está **completamente factorizado**. Ejemplos de polinomios primos son

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad x, \quad x + 1, \quad x - 1, \quad 3x + 4$$

El primer factor que se busca en un problema de factorización es un monomio común presente en cada término del polinomio. Si hay uno, se usa la propiedad distributiva para factorizarlo.

EJEMPLO 1 Identificación de monomios factores comunes

Polinomios	Monomio factor común	Factor restante	Forma factorizada
$2x + 4$	2	$x + 2$	$2x + 4 = 2(x + 2)$
$3x - 6$	3	$x - 2$	$3x - 6 = 3(x - 2)$
$2x^2 - 4x + 8$	2	$x^2 - 2x + 4$	$2x^2 - 4x + 8 = 2(x^2 - 2x + 4)$
$8x - 12$	4	$2x - 3$	$8x - 12 = 4(2x - 3)$
$x^2 + x$	x	$x + 1$	$x^2 + x = x(x + 1)$
$x^3 - 3x^2$	x^2	$x - 3$	$x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$
$6x^2 + 9x$	$3x$	$2x + 3$	$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$ ◀

Observe que, una vez que se han eliminado todos los factores comunes del polinomio, el factor restante es un polinomio primo de grado 1 o es un polinomio de grado 2 o mayor. (¿Vea por qué?)

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 5.

Fórmulas notables

 Cuando factorice un polinomio, primero verifique los monomios factores comunes. Luego vea si podría usar una de las fórmulas de productos notables estudiadas en la sección anterior.

Diferencia de cuadradas	$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$
Cuadrados prefectos	$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$
	$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$
Suma de dos cubos	$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$
Diferencia de dos cubos	$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

EJEMPLO 2 Factorización de la diferencia de dos cuadrados

Factorice completamente: $x^2 - 4$

Solución Observamos que $x^2 - 4$ es la diferencia de x^2 y 2^2. Entonces

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$ ◀

EJEMPLO 3 Factorización de la diferencia de dos cubos

Factorice completamente: $x^3 - 1$

Solución Como $x^3 - 1$ es la diferencia de dos cubos, x^3 y 1^3, se encuentra que

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$ ◀

EJEMPLO 4 Factorización de la suma de dos cubos

Factorice completamente: $x^3 + 8$

Solución Como $x^3 + 8$ es la suma de dos cubos, x^3 y 2^3, se tiene

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$ ◀

EJEMPLO 5 **Factorización de la diferencia de dos cuadrados**

Factorice completamente: $x^4 - 16$

Solución Como $x^4 - 16$ es la diferencia de dos cuadrados, $x^4 = (x^2)^2$ y $16 = 4^2$, se tiene

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$$

Pero $x^2 - 4$ también es una diferencia de dos cuadrados. Entonces,\

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$ ◄

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **15** Y **33**.

2 Cuando el primero y tercer términos de un trinomio son ambos positivos y son cuadrados prefectos, como x^2, $9x^2$, 1 y 4, se verifica si el trinomio es un cuadrado perfecto.

EJEMPLO 6 **Factorización de cuadrados perfectos**

Factorice completamente: $x^2 + 6x + 9$

Solución El primer término, x^2, y el tercer término, $9 = 3^2$, son cuadrados perfectos. Como el término medio $6x$ es el doble del producto de x y 3, se tiene un cuadrado perfecto.

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$ ◄

EJEMPLO 7 **Factorización de cuadrados perfectos**

Factorice completamente: $9x^2 - 6x + 1$

Solución El primer término, $9x^2 = (3x)^2$, y el tercer término, $1 = 1^2$, son cuadrados perfectos. Como el término medio $-6x$ es -2 por el producto de $3x$ y 1, se tiene un cuadrado perfecto.

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$$ ◄

EJEMPLO 8 **Factorización de un cuadrado perfecto**

Factorice completamente: $25x^2 + 30x + 9$

Solución El primer término, $25x^2 = (5x)^2$, y el tercer término, $9 = 3^2$, son cuadrados perfectos. Como el término medio $30x$ es el doble del producto de $5x$ y 3, se tiene un cuadrado perfecto.

$$25x^2 + 30x + 9 = (5x + 3)^2$$ ◄

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **25** Y **93**.

Si un trinomio no es un cuadrado perfecto, es posible factorizarlo usando la técnica que se presenta a continuación.

Factorización de un polinomio de segundo grado: $x^2 + Bx + C$

3 La idea que fundamenta la factorización de un polinomio de segundo grado como $x^2 + Bx + C$ es ver si se puede hacer igual al producto de dos polinomios de primer grado, tal vez iguales.

Por ejemplo, se sabe que

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$$

Los factores de $x^2 + 7x + 12$ son $x + 3$ y $x + 4$. Observe lo siguiente:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

12 es el producto de 3 y 4

7 es la suma de 3 y 4

En general, si $x^2 + Bx + C = (x + a)(x + b)$, entonces $ab = C$ y $a + b = B$.

Para factorizar un polinomio de segundo grado $x^2 + Bx + C$, se encuentran enteros cuyo producto sea C y cuya suma sea B. Esto es, si existen números a, b, tales que $ab = C$ y $a + b = B$, entonces

$$x^2 + Bx + C = (x + a)(x + b)$$

EJEMPLO 9 Factorización de trinomios

Factorice completamente: $x^2 + 7x + 10$

Solución Primero, determine todos los enteros cuyo producto es 10 y luego calcule sus sumas.

Enteros cuyo producto es 10	1, 10	−1, −10	2, 5	−2, −5
Suma	11	−11	7	−7

Los enteros 2 y 5 tienen un producto de 10 y suman 7, el coeficiente del término medio. Como resultado se tiene

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$ ◀

EJEMPLO 10 Factorización de trinomios

Factorice completamente: $x^2 - 6x + 8$

Solución Primero determine todos los enteros cuyo producto sea 8 y luego calcule cada suma.

Enteros cuyo producto es 8	1, 8	−1, −8	2, 4	−2, −4
Suma	9	−9	6	−6

Como -6 es el coeficiente del término medio,

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$ ◀

EJEMPLO 11 **Factorización de trinomios**

Factorice completamente: $x^2 - x - 12$

Solución Primero determine todos los enteros cuyo producto sea -12 y luego calcule cada suma.

Enteros cuyo producto es -12	1, −12	−1, 12	2, −6	−2, 6	3, −4	−3, 4
Suma	−11	11	−4	4	−1	1

Como -1 es el coeficiente del término medio,

$$x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$$ ◀

EJEMPLO 12 **Factorización de trinomios**

Factorice completamente: $x^2 + 4x - 12$

Solución Los enteros -2 y 6 tienen producto igual a -12 y suman 4. Entonces,

$$x^2 + 4x - 12 = (x - 2)(x + 6)$$ ◀

Para evitar errores al factorizar, verifique siempre su respuesta multiplicando para ver si el resultado es igual a la expresión original.

Cuando ninguna posibilidad funciona, el polinomio es primo.

EJEMPLO 13 **Identificación de polinomios primos**

Demuestre que $x^2 + 9$ es primo.

Solución Primero encuentre los enteros cuyo producto es 9 y luego calcule sus sumas.

Enteros cuyo producto es 9	1, 9	−1, −9	3, 3	−3, −3
Suma	10	−10	6	−6

Como el coeficiente del término medio en $x^2 + 9 = x^2 + 0x + 9$ es 0 y ninguna suma es igual a cero, se concluye que $x^2 + 9$ es primo. ◀

El ejemplo 13 demuestra un resultado más general:

Teorema

> Cualquier polinomio de la forma $x^2 + a^2$, con a real, es primo.

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **39** Y **77**.

Factorización por agrupamiento

4 En ocasiones no hay un factor común a todos los términos del polinomio, sino en cada uno de varios grupos de términos que juntos forman un polinomio. Cuando esto ocurre, el factor común de cada grupo se factoriza mediante la propiedad distributiva. Esta técnica se llama **factorización por agrupamiento**.

EJEMPLO 14 Factorización por agrupamiento

Factorice completamente agrupando: $(x^2 + 2)x + (x^2 + 2) \cdot 3$

Solución Observe el factor común $x^2 + 2$. Si se aplica la propiedad distributiva, se tiene

$$(x^2 + 2)x + (x^2 + 2) \cdot 3 = (x^2 + 2)(x + 3)$$

Como $x^2 + 2$ y $x + 3$ son primos, la factorización está completa ◄


El siguiente ejemplo muestra un problema de factorización que ocurre en cálculo.

EJEMPLO 15 Factorización por agrupamiento

Factorice completamente agrupando:
$3(x - 1)^2(x + 2)^4 + 4(x - 1)^3(x + 2)^3$

Solución Aquí, $(x - 1)^2(x + 2)^3$ es un factor común de $3(x - 1)^2(x + 2)^4$ y de $4(x - 1)^3(x + 2)^3$. Como resultado,

$$\begin{aligned} 3(x - 1)^2(x + 2)^4 + 4(x - 1)^3(x + 2)^3 &= (x - 1)^2(x + 2)^3[3(x + 2) + 4(x - 1)] \\ &= (x - 1)^2(x + 2)^3[3x + 6 + 4x - 4] \\ &= (x - 1)^2(x + 2)^3(7x + 2) \end{aligned}$$ ◄

EJEMPLO 16 Factorización por agrupamiento

Factorice completamente por agrupamiento: $x^3 - 4x^2 + 2x - 8$

Solución Para ver si se puede efectuar la factorización por agrupamiento, se agrupan los dos primeros términos y los últimos dos. Después se busca un factor común en cada grupo. En este ejemplo podemos factorizar x^2 en $x^3 - 4x^2$ y 2 para $2x - 8$. El factor restante en cada caso es el mismo, $x - 4$. Esto significa que el agrupamiento funciona como sigue:

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 2x - 8 &= (x^3 - 4x^2) + (2x - 8) \\ &= x^2(x - 4) + 2(x - 4) \\ &= (x^2 + 2)(x - 4) \end{aligned}$$

Como $x^2 + 2$ y $x - 4$ son primos, la factorización está completa. ◄


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 51 Y 121.

Factorización de un polinomio de segundo grado: $Ax^2 + Bx + C$

5 Para factorizar un polinomio de segundo grado $Ax^2 + Bx + C$, cuando $A \neq 1$ y A, B, y C no tienen factores comunes, los pasos son:

Pasos para factorizar $Ax^2 + Bx + C$, donde $A \neq 1$, y A, B, y C no tienen factores comunes

PASO 1: Encuentre el valor de AC.

PASO 2: Encuentre enteros cuyo producto sea AC y sumen B. Es decir, encuentre a y b tales que $ab = AC$ y $a + b = B$.

PASO 3: Escriba $Ax^2 + Bx + C = Ax^2 + ax + bx + C$.

PASO 4: Factorice la última expresión por agrupamiento.

EJEMPLO 17 Factorización de trinomios

Factorice completamente: $2x^2 + 5x + 3$

Solución Al comparar $2x^2 + 5x + 3$ con $Ax^2 + Bx + C$, se encuentra que $A = 2$, $B = 5$, y $C = 3$.

PASO 1: El valor de AC es $2 \cdot 3 = 6$.

PASO 2: Determine los enteros cuyo producto es $AC = 6$ y calcule sus sumas.

Enteros cuyo producto es 6	1, 6	−1, −6	2, 3	−2, −3
Suma	7	−7	5	−5

Los enteros cuyo producto es 6 que suman $B = 5$ son 2 y 3.

PASO 3: $2x^2 + 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 3x + 3$

PASO 4: Factorice agrupando.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 3x + 3 &= (2x^2 + 2x) + (3x + 3) \\ &= 2x(x + 1) + 3(x + 1) \\ &= (2x + 3)(x + 1) \end{aligned}$$

Entonces,

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$ ◄

EJEMPLO 18 Factorización de trinomios

Factorice completamente: $2x^2 - x - 6$

Solución Al comparar $2x^2 - x - 6$ con $Ax^2 + Bx + C$, se encuentra que $A = 2$, $B = -1$, y $C = -6$.

PASO 1: El valor de AC es $2 \cdot (-6) = -12$.

PASO 2: Determine los enteros cuyo producto es $AC = -12$ y calcule sus sumas.

Enteros cuyo producto es -12	$1, -12$	$-1, 12$	$2, -6$	$-2, 6$	$3, -4$	$-3, 4$
Suma	-11	11	-4	4	-1	1

Los enteros cuyo producto es -12 y suman $B = -1$ son -4 y 3.

PASO 3: $2x^2 - x - 6 = 2x^2 - 4x + 3x - 6$

PASO 4: Factorice agrupando

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 3x - 6 &= (2x^2 - 4x) + (3x - 6) \\ &= 2x(x - 2) + 3(x - 2) \\ &= (2x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

Como resultado,

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2)$$

◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 57.

Resumen

Se cierra esta sección con una cápsula de resumen.

Tipo de polinomio	Método	Ejemplo
Cualquier polinomio	Buscar monomios que sean factores comunes. (Esto se hace siempre primero.)	$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$
Binomios de grado 2 o mayor	Verificar si son productos notables:	
	Diferencia de dos cuadrados, $x^2 - a^2$	$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$
	Diferencia de dos cubos, $x^3 - a^3$	$x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$
	Suma de dos cubos, $x^3 + a^3$	$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
Trinomios de grado 2	Verificar si es un cuadrado perfecto, $(x \pm a)^2$.	$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$
	Vea la página 45.	$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$
	Seguir los pasos de la página 46 o 49.	$6x^2 + x - 1 = (2x + 1)(3x - 1)$
Tres términos o más	Agrupar	$2x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = (2x - 3)(x^2 + 2)$

R.5 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Si se factoriza completamente, $3x^3 - 12x =$ __________.

2. Si no se puede escribir un polinomio como el producto de otros dos polinomios (excepto 1 y -1), se dice que el polinomio es __________.

3. *Falso o verdadero:* el polinomio $x^2 + 4$ es primo.

4. *Falso o verdadero:*
$3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = (3x - 2)(x^2 + 2)$.

Ejercicios

En los problemas 5-14, factorice cada polinomio eliminando los monomios factores comunes.

5. $3x + 6$ **6.** $7x - 14$ **7.** $ax^2 + a$ **8.** $ax - a$ **9.** $x^3 + x^2 + x$
10. $x^3 - x^2 + x$ **11.** $2x^2 - 2x$ **12.** $3x^2 - 3x$ **13.** $3x^2y - 6xy^2 + 12xy$ **14.** $60x^2y - 48xy^2 + 72x^3y$

En los problemas 15-22, factorice la diferencia de dos cuadrados.

15. $x^2 - 1$ **16.** $x^2 - 4$ **17.** $4x^2 - 1$ **18.** $9x^2 - 1$
19. $x^2 - 16$ **20.** $x^2 - 25$ **21.** $25x^2 - 4$ **22.** $36x^2 - 9$

En los problemas 23-32, factorice los cuadrados perfectos.

23. $x^2 + 2x + 1$ **24.** $x^2 - 4x + 4$ **25.** $x^2 + 4x + 4$ **26.** $x^2 - 2x + 1$ **27.** $x^2 - 10x + 25$
28. $x^2 + 10x + 25$ **29.** $4x^2 + 4x + 1$ **30.** $9x^2 + 6x + 1$ **31.** $16x^2 + 8x + 1$ **32.** $25x^2 + 10x + 1$

En los problemas 33-38, factorice la suma o diferencia de dos cubos.

33. $x^3 - 27$ **34.** $x^3 + 125$ **35.** $x^3 + 27$ **36.** $27 - 8x^3$ **37.** $8x^3 + 27$ **38.** $64 - 27x^3$

En los problemas 39-50, factorice cada polinomio.

39. $x^2 + 5x + 6$ **40.** $x^2 + 6x + 8$ **41.** $x^2 + 7x + 6$ **42.** $x^2 + 9x + 8$
43. $x^2 + 7x + 10$ **44.** $x^2 + 11x + 10$ **45.** $x^2 - 10x + 16$ **46.** $x^2 - 17x + 16$
47. $x^2 - 7x - 8$ **48.** $x^2 - 2x - 8$ **49.** $x^2 + 7x - 8$ **50.** $x^2 + 2x - 8$

En los problemas 51-56, factorice por agrupamiento.

51. $2x^2 + 4x + 3x + 6$ **52.** $3x^2 - 3x + 2x - 2$ **53.** $2x^2 - 4x + x - 2$
54. $3x^2 + 6x - x - 2$ **55.** $6x^2 + 9x + 4x + 6$ **56.** $9x^2 - 6x + 3x - 2$

En los problemas 57-68, factorice cada polinomio.

57. $3x^2 + 4x + 1$ **58.** $2x^2 + 3x + 1$ **59.** $2z^2 + 5z + 3$ **60.** $6z^2 + 5z + 1$
61. $3x^2 + 2x - 8$ **62.** $3x^2 + 10x + 8$ **63.** $3x^2 - 2x - 8$ **64.** $3x^2 - 10x + 8$
65. $3x^2 + 14x + 8$ **66.** $3x^2 - 14x + 8$ **67.** $3x^2 + 10x - 8$ **68.** $3x^2 - 10x - 8$

En los problemas 69-116, factorice completamente cada polinomio. Si no se puede factorizar, diga si es primo.

69. $x^2 - 36$ **70.** $x^2 - 9$ **71.** $2 - 8x^2$ **72.** $3 - 27x^2$
73. $x^2 + 7x + 10$ **74.** $x^2 + 5x + 4$ **75.** $x^2 - 10x + 21$ **76.** $x^2 - 6x + 8$
77. $4x^2 - 8x + 32$ **78.** $3x^2 - 12x + 15$ **79.** $x^2 + 4x + 16$ **80.** $x^2 + 12x + 36$
81. $15 + 2x - x^2$ **82.** $14 + 6x - x^2$ **83.** $3x^2 - 12x - 36$ **84.** $x^3 + 8x^2 - 20x$
85. $y^4 + 11y^3 + 30y^2$ **86.** $3y^3 - 18y^2 - 48y$ **87.** $4x^2 + 12x + 9$ **88.** $9x^2 - 12x + 4$
89. $6x^2 + 8x + 2$ **90.** $8x^2 + 6x - 2$ **91.** $x^4 - 81$ **92.** $x^4 - 1$
93. $x^6 - 2x^3 + 1$ **94.** $x^6 + 2x^3 + 1$ **95.** $x^7 - x^5$ **96.** $x^8 - x^5$
97. $16x^2 + 24x + 9$ **98.** $9x^2 - 24x + 16$ **99.** $5 + 16x - 16x^2$ **100.** $5 + 11x - 16x^2$
101. $4y^2 - 16y + 15$ **102.** $9y^2 + 9y - 4$ **103.** $1 - 8x^2 - 9x^4$ **104.** $4 - 14x^2 - 8x^4$
105. $x(x + 3) - 6(x + 3)$ **106.** $5(3x - 7) + x(3x - 7)$ **107.** $(x + 2)^2 - 5(x + 2)$ **108.** $(x - 1)^2 - 2(x - 1)$
109. $(3x - 2)^3 - 27$ **110.** $(5x + 1)^3 - 1$ **111.** $3(x^2 + 10x + 25) - 4(x + 5)$
112. $7(x^2 - 6x + 9) + 5(x - 3)$ **113.** $x^3 + 2x^2 - x - 2$ **114.** $x^3 - 3x^2 - x + 3$
115. $x^4 - x^3 + x - 1$ **116.** $x^4 + x^3 + x + 1$

En los problemas 117-128, se dan expresiones que ocurren en cálculo. Factorice completamente cada expresión.

117. $2(3x + 4)^2 + (2x + 3) \cdot 2(3x + 4) \cdot 3$ **118.** $5(2x + 1)^2 + (5x - 6) \cdot 2(2x + 1) \cdot 2$
119. $2x(2x + 5) + x^2 \cdot 2$ **120.** $3x^2(8x - 3) + x^3 \cdot 8$
121. $2(x + 3)(x - 2)^3 + (x + 3)^2 \cdot 3(x - 2)^2$ **122.** $4(x + 5)^3(x - 1)^2 + (x + 5)^4 \cdot 2(x - 1)$

123. $(4x - 3)^2 + x \cdot 2(4x - 3) \cdot 4$

124. $3x^2(3x + 4)^2 + x^3 \cdot 2(3x + 4) \cdot 3$

125. $2(3x - 5) \cdot 3(2x + 1)^3 + (3x - 5)^2 \cdot 3(2x + 1)^2 \cdot 2$

126. $3(4x + 5)^2 \cdot 4(5x + 1)^2 + (4x + 5)^3 \cdot 2(5x + 1) \cdot 5$

127. Demuestre que $x^2 + 4$ es primo.

128. Demuestre que $x^2 + x + 1$ es primo.

129. Invente un polinomio que se factorice en un cuadrado perfecto.

130. Explique a un compañero lo que busca primero cuando tiene un problema de factorización. ¿Qué hace después?

R.6 División de polinomios; división sintética

OBJETIVOS
1 Dividir polinomios usando división larga
2 Dividir polinomios usando división sintética

División larga

1 El procedimiento para dividir dos polinomios es similar al procedimiento para dividir dos enteros.

EJEMPLO 1 **División de dos enteros**

Divida 842 entre 15..

Solución

$$\begin{array}{r l} 56 & \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Divisor} \rightarrow 15\overline{)842} & \leftarrow \text{Dividendo} \\ \underline{75} & \leftarrow 5 \cdot 15 \text{ (restar)} \\ 92 & \\ \underline{90} & \leftarrow 6 \cdot 15 \text{ (restar)} \\ 2 & \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

De manera que, $\dfrac{842}{15} = 56 + \dfrac{2}{15}$. ◀

En el proceso detallado de la división larga del ejemplo 1, el número 15 se llama **divisor**, el numero 842 se llama **dividendo**, el número 56 se llama **cociente** y el número 2 es el **residuo**.

Para verificar la respuesta obtenida en un problema de división, se multiplica el conciente por el divisor y se suma el residuo. La respuesta debe ser el dividendo.

$$(\text{Cociente})(\text{Divisor}) + \text{Residuo} = \text{Dividendo}$$

Por ejemplo, se verifican los resultados obtenidos en el ejemplo 1 como sigue:

$$(56)(15) + 2 = 840 + 2 = 842$$

Para dividir dos polinomios, primero se escribe cada polinomio en forma estándar. El proceso sigue un patrón similar al del ejemplo 1. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 2 **División de dos polinomios**

Encuentre el cociente y el residuo cuando

$$3x^3 + 4x^2 + x + 7 \quad \text{se divide entre} \quad x^2 + 1$$

Solución Cada polinomio está en la forma estándar. El dividendo es $3x^3 + 4x^2 + x + 7$, y el divisor es $x^2 + 1$.

Paso 1: Se divide el término de mayor grado del dividendo, $3x^3$, entre el término de mayor grado del divisor, x^2. El resultado, $3x$, se coloca arriba del término $3x^3$, como sigue:

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x^2+1 & 3x^3 + 4x^2 + x + 7 \end{array}$$

Paso 2: Se multiplica $3x$ por $x^2 + 1$ y el resultado se coloca abajo del dividendo.

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x^2+1 & 3x^3 + 4x^2 + x + 7 \\ & 3x^3 \qquad\quad + 3x \end{array}$$

← $3x \cdot (x^2 + 1) = 3x^3 + 3x$

↑ El término $3x$ se alinea abajo de x para Facilitar el siguiente paso

Paso 3: Se restan y se bajan los términos restantes

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x^2+1 & 3x^3 + 4x^2 + x + 7 \\ & \underline{3x^3 \qquad\quad + 3x} \\ & \qquad 4x^2 - 2x + 7 \end{array}$$

← Restar (cambiar signos y sumar)

← Bajar los términos $4x^2$ y 7.

Paso 4: Se repiten los pasos 1 a 3 usando $4x^2 - 2x + 7$ como dividendo.

$$\begin{array}{r|l} & 3x + 4 \\ \hline x^2+1 & 3x^3 + 4x^2 + x + 7 \\ & \underline{3x^3 \qquad\quad + 3x} \\ & \qquad 4x^2 - 2x + 7 \\ & \qquad \underline{4x^2 \qquad + 4} \\ & \qquad\qquad -2x + 3 \end{array}$$

← Dividir $4x^2$ entre x^2 para obtener 4.

← Multiplicar $x^2 + 1$ por 4; restar.

Como x^2 no divide a $-2x$ (es decir, el resultado no es un monomio), el proceso termina. El cociente es $3x + 4$, y el residuo es $-2x + 3$.

✔ **Comprobación:** (Cociente)(Divisor) + Residuo

$$= (3x + 4)(x^2 + 1) + (-2x + 3)$$

$$= 3x^3 + 4x^2 + 3x + 4 + (-2x + 3)$$

$$= 3x^3 + 4x^2 + x + 7 = \text{dividendo}$$

Entonces

$$\frac{3x^3 + 4x^2 + x + 7}{x^2 + 1} = 3x + 4 + \frac{-2x + 3}{x^2 + 1}$$ ◀

El siguiente ejemplo combina los pasos de la división larga.

EJEMPLO 3 División de dos polinomios

Encuentre el cociente y el residuo cuando

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 5 \quad \text{se divide entre} \quad x^2 - x + 1$$

Solución Al escribir este problema de división, es necesario dejar espacio para el término x^2 que falta en el dividendo.

$$\begin{array}{rrl} & x^2 - 2x - 3 & \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Divisor} \rightarrow \quad x^2 - x + 1 \big) & x^4 - 3x^3 \qquad + 2x - 5 & \leftarrow \text{Dividendo} \\ \text{Restar} \rightarrow & x^4 - x^3 + x^2 \qquad\qquad & \\ & -2x^3 - x^2 + 2x - 5 & \\ \text{Restar} \rightarrow & -2x^3 + 2x^2 - 2x \quad & \\ & -3x^2 + 4x - 5 & \\ \text{Restar} \rightarrow & -3x^2 + 3x - 3 & \\ & x - 2 & \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

✔ **COMPROBACIÓN:** (cociente)(divisor) + residuo

$$= (x^2 - 2x - 3)(x^2 - x + 1) + x - 2$$
$$= x^4 - x^3 + x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3x^2 + 3x - 3 + x - 2$$
$$= x^4 - 3x^3 + 2x - 5 = \text{Dividendo}$$

Como resultado,

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x - 5}{x^2 - x + 1} = x^2 - 2x - 3 + \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}$$ ◀

El proceso de dividir dos polinomios lleva al siguiente resultado:

Teorema

> Sea Q un polinomio de grado positivo y sea P un polinomio cuyo grado es mayor que el de Q. El residuo de dividir P entre Q es el polinomio cero o bien un polinomio cuyo grado es menor que el grado del divisor Q.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

División sintética

Para encontrar el cociente y el residuo cuando se divide un polinomio de grado 1 o mayor entre $x - c$, una versión más corta de la división larga, llamada **división sintética**, facilita el trabajo.

2 Para ver cómo funciona la división sintética, se usará la división larga para dividir el polinomio $2x^3 - x^2 + 3$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{rl} 2x^2 + 5x + 15 & \leftarrow \text{Cociente} \\ x - 3 \big) 2x^3 - x^2 \qquad + 3 & \\ 2x^3 - 6x^2 \qquad\qquad & \\ 5x^2 \qquad\qquad & \\ 5x^2 - 15x \quad\; & \\ 15x + 3 & \\ 15x - 45 & \\ 48 & \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

✔ **COMPROBACIÓN:** (divisor)·(cociente) + residuo

$$
\begin{aligned}
&= (x - 3)(2x^2 + 5x + 15) + 48 \\
&= 2x^3 + 5x^2 + 15x - 6x^2 - 15x - 45 + 48 \\
&= 2x^3 - x^2 + 3
\end{aligned}
$$

El proceso de la división sintética surge al escribir la división larga en una forma más compacta, usando una notación más sencilla. Por ejemplo, en la división larga en la página 54, los términos en negritas en realidad no son necesarios porque son idénticos a los que están justo arriba. Al eliminar estos términos, se tiene

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & +\,5x & +\,15 & \\
\hline
x - 3 & 2x^3 - & x^2 & & +\ \ 3 \\
 & & -\,6x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & 5x^2 & & \\
 & & & -\,15x & \\
\cline{3-5}
 & & & 15x & \\
 & & & & -\,45 \\
\cline{4-5}
 & & & & 48
\end{array}
$$

Casi todas las x que aparecen en este proceso también se pueden eliminar, siempre que se tenga cuidado de la posición de cada coeficiente. En este sentido se requerirá usar 0 como coeficiente de x en el dividendo, ya que esa potencia de x falta. Ahora se tiene

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & +\,5x & +\,15 & \\
\hline
x - 3 & 2 & -\,1 & 0 & 3 \\
 & & -\,6 & & \\
\cline{2-3}
 & & 5 & & \\
 & & & -\,15 & \\
\cline{3-5}
 & & & 15 & \\
 & & & & -\,45 \\
\cline{4-5}
 & & & & 48
\end{array}
$$

Podemos hacer esta presentación más compacta moviendo las líneas hacia arriba hasta que los números en negritas estén en una línea horizontal.

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 2x^2 & +\,5x & +\,15 & & \text{Renglón 1} \\
\cline{2-5}
x - 3 & 2 & -\,1 & 0 & 3 & \text{Renglón 2} \\
 & & -\,6 & -\,15 & -\,45 & \text{Renglón 3} \\
\cline{2-5}
 & \bigcirc & 5 & 15 & 48 & \text{Renglón 4}
\end{array}
$$

Como el coeficiente principal del divisor siempre es 1, se sabe que el coeficiente principal del dividendo es también el coeficiente principal del cociente. Ahora, los primeros tres números en el renglón 4 son precisamente los coeficientes del cociente y el último número de ese renglón es el residuo. Entonces, en realidad el renglón 1 no es necesario, y el proceso se podría comprimir a tres renglones, el último de los cuales contiene tanto los coeficientes del cociente como el residuo.

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
\cline{2-5}
x - 3 & 2 & -\,1 & 0 & 3 & \text{Renglón 1} \\
 & & -\,6 & -\,15 & -\,45 & \text{Renglón 2 (restar)} \\
\cline{2-5}
 & 2 & 5 & 15 & 48 & \text{Renglón 3}
\end{array}
$$

Recuerde que los elementos del renglón 3 se obtienen restando el renglón 1 menos el renglón 2. En lugar de restar los elementos del renglón 2, se pueden cambiar los signos y sumar. Con esta modificación nuestra presentación se vería como sigue:

$x - 3\,)$	2	-1	0	3	Renglón 1
		6	15	45	Renglón 2 (sumar)
	2	5	15	48	Renglón 3

Observe que los elementos del renglón 2 son el triple de los elementos del renglón 3 anterior. La última modificación a la presentación sustituye $x - 3$ por 3. Los elementos del renglón 3 dan el cociente y el residuo como se muestra a continuación.

$3\,)$	2	-1	0	3	Renglón 1
		6	15	45	Renglón 2 (s
	2	5	15	48	Renglón 3

Cociente: $2x^2 + 5x + 15$ Residuo: 48

Se verá un ejemplo paso por paso.

EJEMPLO 4 Uso de la división sintética para encontrar el cociente y el residuo

Utilice la división sintética para encontrar el cociente y residuo cuando

$$x^3 - 4x^2 - 5 \quad \text{se divide entre} \quad x - 3$$

Solución

Paso 1: Escriba el dividendo en orden descendiente de las potencias de x. Después copie los coeficientes, recordando insertar un 0 si falta una potencia de x.

1	-4	0	-5	Renglón 1

Paso 2: Inserte el símbolo usual de división. En la división sintética, el divisor es de la forma $x - c$, y c es el número colocado a la izquierda del símbolo de divisiónComo en este caso el divisor es $x - 3$, ponemos un 3 a la izquierda del símbolo de división

$3\,)$	1	-4	0	-5	Renglón 1

Paso 3: Baje el 1 dos renglones, colóquelo en el renglón 3

$3\,)$	1	-4	0	-5	Renglón 1
	↓				Renglón 2
	1				Renglón 3

Paso 4: Multiplique el último elemento del renglón 3 por 3 y coloque el resultado en el renglón 2, una columna a la derecha

$3\,)$	1	-4	0	-5	Renglón 1
		3			Renglón 2
	1 (×3)				Renglón 3

Paso 5: Sume el elemento en el renglón 2 al elemento arriba de él en el renglón 1 y coloque la suma en el renglón 3.

$3\,)$	1	-4	0	-5	Renglón 1
		3			Renglón 2
	1 (×3)	-1 (+)			Renglón 3

PASO 6: Repita los pasos 4 y 5 hasta que ya no haya elementos en el renglón 1.

$3\,)$	1	-4	0	-5	Renglón 1
		3	-3	-9	Renglón 2
	1	-1	-3	-14	Renglón 3

PASO 7: El último elemento del renglón -14, es el residuo; los otros elementos, 1, -1 y -3, son los coeficientes (en orden descendiente) de un polinomio cuyo grado es 1 menos que el del dividendo. Éste es el cociente. Entonces,

$$\text{Cociente} = x^2 - x - 3 \qquad \text{Residuo} = -14$$

✔ **COMPROBACIÓN:** (divisor)(cociente) + residuo

$$= (x - 3)(x^2 - x - 3) + (-14)$$
$$= (x^3 - x^2 - 3x - 3x^2 + 3x + 9) + (-14)$$
$$= x^3 - 4x^2 - 5 = \text{Dividendo}$$ ◄

Se verá un ejemplo en el que se combinan los siete pasos.

EJEMPLO 5 Uso de la división sintética para verificar un factor

Utilice división sintética para mostrar que $x + 3$ es un factor de

$$2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3$$

Solución El divisor es $x + 3 = x - (-3)$, de manera que se coloca -3 a la izquierda del símbolo de división. Entonces los elementos del renglón 3 multiplicados por -3, se colocan en el renglón 2 y se suman al renglón 1.

$-3\,)$	2	5	-2	2	-2	3	Renglón 1
		-6	3	-3	3	-3	Renglón 2
	2	-1	1	-1	1	0	Renglón 3

Como el residuo es 0, se tiene

(Divisor)(Cociente) + Residuo

$$= (x + 3)(2x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3$$

Como se ve, $x + 3$ es un factor de $2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3$. ◄

Como lo ilustra el ejemplo 5, el residuo después de dividir proporciona información acerca de si el divisor es o no un factor. Esto se analizará con más detalle en el capítulo 4.


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 23 Y 33.

R.6 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Para verificar la división, la expresión que se está dividiendo, el dividendo, debe ser igual al producto del __________ por el __________ más el __________.

2. Para dividir $2x^3 - 5x + 1$ entre $x + 3$ usando división sintética, el primer paso es escribir ______ $\overline{)\,________}$.

3. *Falso o verdadero:* al usar la división sintética, el divisor siempre es un polinomio de grado 1 cuyo coeficiente principal es 1.

4. *Falso o verdadero:*

$-2\,)$	5	3	2	1
		-10	14	-32
	5	-7	16	-31

significa $\dfrac{5x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x + 2} = 5x^2 - 7x + 16 + \dfrac{-31}{x + 2}$.

Ejercicios

En los problemas 5-20, encuentre el cociente y el residuo. Verifique su trabajo usando el hecho de que

$$(\text{Cociente})(\text{divisor}) + \text{residuo} = \text{dividendo}$$

5. $4x^3 - 3x^2 + x + 1$ entre $x + 2$

6. $3x^3 - x^2 + x - 2$ entre $x + 2$

7. $4x^3 - 3x^2 + x + 1$ entre x^2

8. $3x^3 - x^2 + x - 2$ entre x^2

9. $5x^4 - 3x^2 + x + 1$ entre $x^2 + 2$

10. $5x^4 - x^2 + x - 2$ entre $x^2 + 2$

11. $4x^5 - 3x^2 + x + 1$ entre $2x^3 - 1$

12. $3x^5 - x^2 + x - 2$ entre $3x^3 - 1$

13. $2x^4 - 3x^3 + x + 1$ entre $2x^2 + x + 1$

14. $3x^4 - x^3 + x - 2$ entre $3x^2 + x + 1$

15. $-4x^3 + x^2 - 4$ entre $x - 1$

16. $-3x^4 - 2x - 1$ entre $x - 1$

17. $1 - x^2 + x^4$ entre $x^2 + x + 1$

18. $1 - x^2 + x^4$ entre $x^2 - x + 1$

19. $x^3 - a^3$ entre $x - a$

20. $x^5 - a^5$ entre $x - a$

En los problemas 21-32, use la división sintética para encontrar el cociente y el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $g(x)$.

21. $x^3 - x^2 + 2x + 4$ entre $x - 2$

22. $x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ entre $x + 1$

23. $3x^3 + 2x^2 - x + 3$ entre $x - 3$

24. $-4x^3 + 2x^2 - x + 1$ entre $x + 2$

25. $x^5 - 4x^3 + x$ entre $x + 3$

26. $x^4 + x^2 + 2$ entre $x - 2$

27. $4x^6 - 3x^4 + x^2 + 5$ entre $x - 1$

28. $x^5 + 5x^3 - 10$ entre $x + 1$

29. $0.1x^3 + 0.2x$ entre $x + 1.1$

30. $0.1x^2 - 0.2$ entre $x + 2.1$

31. $x^5 - 1$ entre $x - 1$

32. $x^5 + 1$ entre $x + 1$

En los problemas 33-42, use la división sintética para determinar si $x - c$ es un factor del polinomio dado.

33. $4x^3 - 3x^2 - 8x + 4;\quad x - 2$

34. $-4x^3 + 5x^2 + 8;\quad x + 3$

35. $3x^4 - 6x^3 - 5x + 10;\quad x - 2$

36. $4x^4 - 15x^2 - 4;\quad x - 2$

37. $3x^6 + 82x^3 + 27;\quad x + 3$

38. $2x^6 - 18x^4 + x^2 - 9;\quad x + 3$

39. $4x^6 - 64x^4 + x^2 - 15;\quad x + 4$

40. $x^6 - 16x^4 + x^2 - 16;\quad x + 4$

41. $2x^4 - x^3 + 2x - 1;\quad x - \frac{1}{2}$

42. $3x^4 + x^3 - 3x + 1;\quad x + \frac{1}{3}$

43. Encuentre la suma de a, b, c, y d si

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 5}{x + 2} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x + 2}$$

44. Al dividir un polinomio entre $x - c$, ¿prefiere usar la división larga o la división sintética? ¿Influye el valor de c en su elección? Dé razones.

R.7 Expresiones racionales

OBJETIVOS
1. Reducir una expresión racional a términos mínimos
2. Multiplicar y dividir expresiones racionales
3. Sumar y restar expresiones racionales
4. Utilizar el método del mínimo común múltiplo
5. Simplificar cocientes mixtos

Si se forma el cociente de dos polinomios, el resultado se llama **expresión racional**. Algunos ejemplos de expresiones racionales son

a) $\dfrac{x^3 + 1}{x}$ b) $\dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 5}$ c) $\dfrac{x}{x^2 - 1}$ d) $\dfrac{xy^2}{(x - y)^2}$

Las expresiones a), b) y c) son expresiones racionales en una variable, x, mientras que d) es una expresión racional en dos variables, x y y.

Las expresiones racionales se describen de la misma manera que los números racionales. En la expresión a), el polinomio $x^3 + 1$ se llama **numerador**, y x es el **denominador**. Cuando el numerador y el denominador de una expresión racional no tienen factores comunes (excepto 1 y -1), se dice que la expresión racional está **reducida a términos mínimos**, o **simplificada**.

El polinomio en el denominador de una expresión racional no podría ser igual a 0 porque la división entre 0 no está definida. Por ejemplo, para la expresión $\frac{x^3 + 1}{x}$, x no podría tomar el valor 0. El dominio de la variable x es $\{x|x \neq 0\}$.



Una expresión racional se reduce a términos mínimos factorizando completamente el numerador y el denominador y cancelando los factores comunes usando la propiedad de cancelación:

$$\frac{a\cancel{c}}{b\cancel{c}} = \frac{a}{b} \qquad \text{si } b \neq 0, c \neq 0 \qquad \textbf{(1)}$$

EJEMPLO 1 Reducción de una expresión racional a términos mínimos

Reduzca a términos mínimos: $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

Solución Se comienza por factorizar el numerador y el denominador.

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2)$$
$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$$

Como aparece un factor común, $x + 2$, la expresión original no está en términos mínimos. Para reducirla a términos mínimos, se usa la propiedad de cancelación

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2} = \frac{\cancel{(x + 2)}(x + 2)}{\cancel{(x + 2)}(x + 1)} = \frac{x + 2}{x + 1} \qquad x \neq -2, -1$$

◄

ADVERTENCIA: aplique la propiedad de cancelación sólo a expresiones racionales factorizadas. Asegúrese de cancelar sólo factores comunes. ■

EJEMPLO 2 Reducción de expresiones racionales a términos mínimos

Reduzca cada expresión racional a términos mínimos.

a) $\frac{x^3 - 8}{x^3 - 2x^2}$ b) $\frac{8 - 2x}{x^2 - x - 12}$

Solución a) $\frac{x^3 - 8}{x^3 - 2x^2} = \frac{\cancel{(x - 2)}(x^2 + 2x + 4)}{x^2\cancel{(x - 2)}} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2} \qquad x \neq 0, 2$

b) $\frac{8 - 2x}{x^2 - x - 12} = \frac{2(4 - x)}{(x - 4)(x + 3)} = \frac{2(-1)\cancel{(x - 4)}}{\cancel{(x - 4)}(x + 3)} = \frac{-2}{x + 3} \qquad x \neq -3, 4$

◄



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 5.

Multiplicación y división de expresiones racionales

2 Las reglas para multiplicar y dividir expresiones racionales son las mismas que las reglas para multiplicar y dividir números racionales. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, son dos expresiones racionales, entonces

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \text{si } b \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad \text{si } b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Al usar las ecuaciones (2) y (3) con expresiones racionales, asegúrese primero de factorizar completamente cada polinomio de manera que se puedan cancelar los factores comunes. Deje su respuesta en la forma factorizada.

EJEMPLO 3 Multiplicación y división de expresiones racionales

Realice la operación indicada y simplifique el resultado. Deje su respuesta en forma factorizada.

a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + x} \cdot \dfrac{4x^2 + 4}{x^2 + x - 2}$ b) $\dfrac{\dfrac{x + 3}{x^2 - 4}}{\dfrac{x^2 - x - 12}{x^3 - 8}}$

Solución a)

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + x} \cdot \frac{4x^2 + 4}{x^2 + x - 2} = \frac{(x - 1)^2}{x(x^2 + 1)} \cdot \frac{4(x^2 + 1)}{(x + 2)(x - 1)}$$

$$= \frac{(x - 1)^{\cancel{2}}(4)\cancel{(x^2 + 1)}}{x\cancel{(x^2 + 1)}(x + 2)\cancel{(x - 1)}}$$

$$= \frac{4(x - 1)}{x(x + 2)}, \qquad x \neq -2, 0, 1$$

b)

$$\frac{\frac{x + 3}{x^2 - 4}}{\frac{x^2 - x - 12}{x^3 - 8}} = \frac{x + 3}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 12}$$

$$= \frac{x + 3}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 4)(x + 3)}$$

$$= \frac{\cancel{(x + 3)}\cancel{(x - 2)}(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{(x - 2)}(x + 2)(x - 4)\cancel{(x + 3)}}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 2)(x - 4)} \qquad x \neq -3, -2, 2, 4$$

◄

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 17 Y 25.

Suma y resta de expresiones racionales


Las reglas para sumar y restar expresiones racionales son las mismas que para sumar y restar números racionales. Entonces, si los denominadores de dos expresiones racionales que se van a sumar (o restar) son iguales, se suman (o restan) los numeradores y se conserva el denominador común.

En palabras
El denominador común se conserva y se suman (o restan) los numeradores.

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$ son dos expresiones racionales, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b} \qquad \text{si } b \neq 0 \qquad \textbf{(4)}$$

EJEMPLO 4 **Suma y resta de expresiones racionales con denominadores iguales**

Realice la operación indicada y simplifique el resultado. Deje su respuesta en la forma factorizada.

a) $\frac{2x^2 - 4}{2x + 5} + \frac{x + 3}{2x + 5} \quad x \neq -\frac{5}{2}$ b) $\frac{x}{x - 3} - \frac{3x + 2}{x - 3} \quad x \neq 3$

Solución a)

$$\frac{2x^2 - 4}{2x + 5} + \frac{x + 3}{2x + 5} = \frac{(2x^2 - 4) + (x + 3)}{2x + 5}$$

$$= \frac{2x^2 + x - 1}{2x + 5} = \frac{(2x - 1)(x + 1)}{2x + 5}$$

b)

$$\frac{x}{x - 3} - \frac{3x + 2}{x - 3} = \frac{x - (3x + 2)}{x - 3} = \frac{x - 3x - 2}{x - 3}$$

$$= \frac{-2x - 2}{x - 3} = \frac{-2(x + 1)}{x - 3}$$

◀

EJEMPLO 5 **Suma y resta de expresiones racionales cuyos denominadores son inversos aditivos uno de otro**

Realice la operación indicada y simplifique el resultado. Deje su respuesta en forma factorizada.

$$\frac{2x}{x - 3} + \frac{5}{3 - x} \qquad x \neq 3$$

Solución Observe que los denominadores de las dos expresiones racionales son diferentes. Sin embargo, el denominador de la segunda expresión es el inverso aditivo del denominador de la primera. Esto es,

$$3 - x = -x + 3 = -1 \cdot (x - 3) = -(x - 3)$$

Entonces

$$\frac{2x}{x - 3} + \frac{5}{3 - x} \underset{\uparrow}{=} \frac{2x}{x - 3} + \frac{5}{-(x - 3)} \underset{\uparrow}{=} \frac{2x}{x - 3} + \frac{-5}{x - 3}$$

$3 - x = -(x - 3)$ $\qquad$ $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$

$$= \frac{2x + (-5)}{x - 3} = \frac{2x - 5}{x - 3}$$

◀

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **37** Y **43**.

Si los denominadores de dos expresiones racionales que se van a sumar o restar no son iguales, se usan las fórmulas generales para sumar y restar cocientes.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{si } b \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(5a)}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad - bc}{bd} \quad \text{si } b \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(5b)}$$

EJEMPLO 6 **Suma y resta de expresiones racionales con denominadores diferentes**

Realice la operación indicada y simplifique el resultado. Deje su respuesta en forma factorizada.

a) $\frac{x-3}{x+4} + \frac{x}{x-2} \quad x \neq -4, 2$ b) $\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{1}{x} \quad x \neq -2, 0, 2$

Solución a)

$$\frac{x-3}{x+4} + \frac{x}{x-2} = \frac{x-3}{x+4} \cdot \frac{x-2}{x-2} + \frac{x+4}{x+4} \cdot \frac{x}{x-2}$$

(5a)

$$= \frac{(x-3)(x-2) + (x+4)(x)}{(x+4)(x-2)}$$

$$= \frac{x^2 - 5x + 6 + x^2 + 4x}{(x+4)(x-2)} = \frac{2x^2 - x + 6}{(x+4)(x-2)}$$

b)

$$\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2-4} \cdot \frac{x}{x} - \frac{x^2-4}{x^2-4} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2(x) - (x^2-4)(1)}{(x^2-4)(x)}$$

(5b)

$$= \frac{x^3 - x^2 + 4}{(x-2)(x+2)(x)}$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

Mínimo común múltiplo (MCM)

4 Si los denominadores de dos expresiones racionales que se van a sumar (o restar) tiene factores comunes, en general no se usan las reglas generales dadas por las ecuaciones (5a) y (5b). Igual que con las fracciones, se aplica el **método de mínimo común múltiplo (MCM)**. El método MCM usa el polinomio de menor grado que tiene a cada polinomio denominador como factor.

Método MCM para sumar y restar expresiones racionales

El método de mínimo común múltiplo (MCM) consiste en cuatro pasos:

PASO 1: Factorizar completamente el polinomio en el denominador de cada expresión racional.

PASO 2: El MCM del denominador es el producto de cada uno de estos factores elevados a una potencia igual al mayor número de veces que cada factor aparece en los polinomios.

PASO 3: Escribir cada expresión racional usando el MCM como denominador común.

PASO 4: Sumar o restar la expresión racional usando la ecuación (4).

Se trabajará con un ejemplo que sólo requiere los pasos 1 y 2.

EJEMPLO 7 Para encontrar el mínimo común múltiplo

Encuentre el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de polinomios:

$$x(x-1)^2(x+1) \quad \text{y} \quad 4(x-1)(x+1)^3$$

Solución **PASO 1:** Los polinomios ya están factorizados completamente como

$$x(x-1)^2(x+1) \quad \text{y} \quad 4(x-1)(x+1)^3$$

PASO 2: Comience por escribir los factores del polinomio de la izquierda. (También podría comenzar por el de la derecha.)

$$x(x-1)^2(x+1)$$

Ahora vea el polinomio de la derecha. Su primer factor, 4, no aparece en la lista, de manera que se inserta.

$$4x(x-1)^2(x+1)$$

El siguiente factor, $x - 1$, ya está en la lista, de manera que no es necesario hacer cambios. El último factor es $(x+1)^3$. Como la lista tiene $x + 1$ sólo a la potencia 1, se sustituye $x + 1$ en la lista por $(x+1)^3$. El MCM es

$$4x(x-1)^2(x+1)^3$$ ◀

Observe que el MCM, de hecho, es el polinomio de menor grado que contiene $x(x-1)^2(x+1)$ y $4(x-1)(x+1)^3$ como factores.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

EJEMPLO 8 Uso del mínimo común múltiplo para sumar expresiones racionales

Realice la operación indicada y simplifique el resultado. Deje su respuesta en forma factorizada.

$$\frac{x}{x^2+3x+2} + \frac{2x-3}{x^2-1} \qquad x \neq -2, -1, 1$$

Solución **PASO 1:** Factorice completamente los polinomios en los denominadores.

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$$
$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

PASO 2: El MCM es $(x + 2)(x + 1)(x - 1)$. ¿Se da cuenta por qué?

PASO 3: Escriba cada expresión racional usando el MCM como denominador.

$$\frac{x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{x}{(x + 2)(x + 1)} \cdot \frac{x - 1}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}$$

↑ Multiplicar el numerador y el denominador por $x - 1$ para obtener el MCM en el denominador

$$\frac{2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{2x - 3}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{2x - 3}{(x - 1)(x + 1)} \cdot \frac{x + 2}{x + 2} = \frac{(2x - 3)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)}$$

↑ Multiplicar el numerador y el denominador por $x + 2$ para obtener el MCM en el denominador

PASO 4: Ahora se suman usando la ecuación (4).

$$\frac{x}{x^2 + 3x + 2} + \frac{2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{x(x - 1)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} + \frac{(2x - 3)(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{(x^2 - x) + (2x^2 + x - 6)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{3x^2 - 6}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \frac{3(x^2 - 2)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}$$ ◀

EJEMPLO 9 Uso del mínimo común múltiplo para restar expresiones racionales

Realice la operación indicada y simplifique el resultado. Deje su respuesta en forma factorizada.

$$\frac{3}{x^2 + x} - \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 1} \qquad x \neq -1, 0$$

Solución **PASO 1:** Factorice completamente los polinomios en los denominadores.

$$x^2 + x = x(x + 1)$$
$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

PASO 2: El MCM es $x(x + 1)^2$.

PASO 3: Escriba cada expresión racional usando el MCM como denominador.

$$\frac{3}{x^2 + x} = \frac{3}{x(x + 1)} = \frac{3}{x(x + 1)} \cdot \frac{x + 1}{x + 1} = \frac{3(x + 1)}{x(x + 1)^2}$$

$$\frac{x + 4}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x + 4}{(x + 1)^2} = \frac{x + 4}{(x + 1)^2} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x(x + 4)}{x(x + 1)^2}$$

PASO 4: Reste, usando la ecuación (4).

$$\frac{3}{x^2 + x} - \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 1} = \frac{3(x + 1)}{x(x + 1)^2} - \frac{x(x + 4)}{x(x + 1)^2}$$
$$= \frac{3(x + 1) - x(x + 4)}{x(x + 1)^2}$$
$$= \frac{3x + 3 - x^2 - 4x}{x(x + 1)^2}$$
$$= \frac{-x^2 - x + 3}{x(x + 1)^2}$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 63.

Cocientes mixtos

5 Cuando aparecen sumas y/o diferencias de expresiones racionales en el numerador y/o denominador de un cociente, el cociente se llama **conciente mixto**.* Por ejemplo,

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \quad \text{y} \quad \frac{\frac{x^2}{x^2 - 4} - 3}{\frac{x - 3}{x + 2} - 1}$$

son cocientes mixtos. **Simplificar** un cociente mixto significa escribirlo como una expresión racional reducida a términos mínimos. Esto se logra de dos maneras:

Simplificación de cocientes mixtos

Método 1: El numerador y denominador del cociente mixto se manejan por separado, realizando las operaciones indicadas y simplificando los resultados. Después se simplifica la expresión racional obtenida.

Método 2: Se encuentra el MCM de los denominadores de todas las expresiones racionales que aparecen en el cociente mixto. Se multiplican el numerador y el denominador del cociente mixto por el MCM y se simplifica el resultado.

Se usarán los dos métodos en el siguiente ejemplo. Se estudiará con cuidado cada uno; usted descubrirá situaciones donde un método será más sencillo que el otro.

*Algunos libros usan el término **fracción compleja.**

EJEMPLO 10 Simplificación de cociente mixto

Simplifique: $$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{x}}{\frac{x+3}{4}} \qquad x \neq -3, 0$$

Solución **MÉTODO 1:** Primero realice la operación indicada en el numerador y después divida.

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{x}}{\frac{x+3}{4}} = \frac{\frac{1\cdot x + 2\cdot 3}{2\cdot x}}{\frac{x+3}{4}} = \frac{\frac{x+6}{2x}}{\frac{x+3}{4}} = \frac{x+6}{2x}\cdot\frac{4}{x+3}$$

↑ Regla para sumar cocientes ↑ Regla para dividir cocientes

$$= \frac{(x+6)\cdot 4}{2\cdot x\cdot(x+3)} = \frac{\cancel{2}\cdot 2\cdot(x+6)}{\cancel{2}\cdot x\cdot(x+3)} = \frac{2(x+6)}{x(x+3)}$$

↑ Regla para multiplicar cocientes

MÉTODO 2: Las expresiones racionales que aparecen en el cociente mixto son

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{x}, \quad \frac{x+3}{4}$$

El MCM de sus denominadores es $4x$. Se multiplican el numerador y el denominador del cociente mixto por $4x$ y luego se simplifica.

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{x}}{\frac{x+3}{4}} = \frac{4x\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{x}\right)}{4x\cdot\left(\frac{x+3}{4}\right)} = \frac{4x\cdot\frac{1}{2} + 4x\cdot\frac{3}{x}}{\frac{4x\cdot(x+3)}{4}}$$

↑ Multiplicar numerador y denominador por 4x. ↑ Propiedad distributiva en el numerador

$$= \frac{\cancel{2}\cdot 2x\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + 4\cancel{x}\cdot\frac{3}{\cancel{x}}}{\frac{\cancel{4}x\cdot(x+3)}{\cancel{4}}} = \frac{2x+12}{x(x+3)} = \frac{2(x+6)}{x(x+3)}$$

↑ Simplificar ↑ Factorizar ◀

EJEMPLO 11 Simplificación de concientes mixtos

Simplifique: $$\frac{\frac{x^2}{x-4} + 2}{\frac{2x-2}{x} - 1}$$

Solución Se usará el método 1.

$$\frac{\frac{x^2}{x-4}+2}{\frac{2x-2}{x}-1} = \frac{\frac{x^2}{x-4}+\frac{2(x-4)}{x-4}}{\frac{2x-2}{x}-\frac{x}{x}} = \frac{\frac{x^2+2x-8}{x-4}}{\frac{2x-2-x}{x}}$$

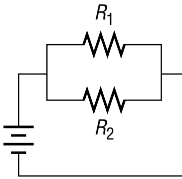
$$= \frac{\frac{(x+4)(x-2)}{x-4}}{\frac{x-2}{x}} = \frac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{x-4}\cdot\frac{x}{\cancel{x-2}}$$

$$= \frac{(x+4)\cdot x}{x-4}$$ ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 73.

EJEMPLO 12 Solución de una aplicación a electricidad

Figura 20



Un circuito eléctrico contiene dos resistores conectados en paralelo, como se muestra en la figura 20. Si la resistencia de cada uno es R_1 y R_2 ohms, respectivamente, su resistencia combinada R está dada por la fórmula

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$$

Exprese R como una expresión racional; es decir, simplifique el lado derecho de esta fórmula. Evalúe la expresión racional si $R_1 = 6$ ohms y $R_2 = 10$ ohms.

Solución Se usará el método 2. Si se considera 1 como la fracción $\frac{1}{1}$, entonces las expresiones racionales en el cociente mixto son

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{R_1}, \quad \frac{1}{R_2}$$

El MCM de los denominadores es R_1R_2. Se multiplican numerador y denominador del cociente mixto por R_1R_2 y se simplifica.

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{1\cdot R_1R_2}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cdot R_1R_2} = \frac{R_1R_2}{\frac{1}{R_1}\cdot R_1R_2+\frac{1}{R_2}\cdot R_1R_2} = \frac{R_1R_2}{R_2+R_1}$$

Entonces,

$$R = \frac{R_1R_2}{R_2+R_1}$$

Si $R_1 = 6$ y $R_2 = 10$, entonces

$$R = \frac{6\cdot 10}{10+6} = \frac{60}{16} = \frac{15}{4}\text{ ohms}$$ ◀

R.7 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Cuando el numerador y el denominador de una expresión racional no tienen factores comunes (excepto 1 y −1), la expresión racional está __________ __________.
2. MCM es la abreviatura para __________ __________ __________.
3. *Falso o verdadero:* la expresión racional $\dfrac{2x^3 - 4x}{x - 2}$ está reducida a términos mínimos.
4. *Falso o verdadero:* el MCM de $2x^3 + 6x^2$ y $6x^4 + 4x^3$ es $4x^3(x + 1)$.

Ejercicios

En los problemas 5-16, reduzca cada expresión racional a términos mínimos.

5. $\dfrac{3x + 9}{x^2 - 9}$ 6. $\dfrac{4x^2 + 8x}{12x + 24}$ 7. $\dfrac{x^2 - 2x}{3x - 6}$ 8. $\dfrac{15x^2 + 24x}{3x^2}$

9. $\dfrac{24x^2}{12x^2 - 6x}$ 10. $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 16}$ 11. $\dfrac{y^2 - 25}{2y^2 - 8y - 10}$ 12. $\dfrac{3y^2 - y - 2}{3y^2 + 5y + 2}$

13. $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 2x + 1}$ 14. $\dfrac{x - x^2}{x^2 + x - 2}$ 15. $\dfrac{x^2 + 5x - 14}{2 - x}$ 16. $\dfrac{2x^2 + 5x - 3}{1 - 2x}$

En los problemas 17-34, realice la operación indicada y simplifique el resultado. Deje su respuesta en forma factorizada.

17. $\dfrac{3x + 6}{5x^2} \cdot \dfrac{x}{x^2 - 4}$ 18. $\dfrac{3}{2x} \cdot \dfrac{x^2}{6x + 10}$ 19. $\dfrac{4x^2}{x^2 - 16} \cdot \dfrac{x - 4}{2x}$ 20. $\dfrac{12}{x^2 - x} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{4x - 2}$

21. $\dfrac{4x - 8}{-3x} \cdot \dfrac{12}{12 - 6x}$ 22. $\dfrac{6x - 27}{5x} \cdot \dfrac{2}{4x - 18}$ 23. $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 2x - 35} \cdot \dfrac{x^2 + 4x - 21}{x^2 + 9x + 14}$

24. $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x - 5} \cdot \dfrac{x^2 - 25}{x^2 + 2x - 15}$ 25. $\dfrac{\dfrac{6x}{x^2 - 4}}{\dfrac{3x - 9}{2x + 4}}$ 26. $\dfrac{\dfrac{12x}{5x + 20}}{\dfrac{4x^2}{x^2 - 16}}$

27. $\dfrac{\dfrac{8x}{x^2 - 1}}{\dfrac{10x}{x + 1}}$ 28. $\dfrac{\dfrac{x - 2}{4x}}{\dfrac{x^2 - 4x + 4}{12x}}$ 29. $\dfrac{\dfrac{4 - x}{4 + x}}{\dfrac{4x}{x^2 - 16}}$ 30. $\dfrac{\dfrac{3 + x}{3 - x}}{\dfrac{x^2 - 9}{9x^3}}$

31. $\dfrac{\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 7x + 12}}{\dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 12}}$ 32. $\dfrac{\dfrac{x^2 + 7x + 6}{x^2 + x - 6}}{\dfrac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 5x + 6}}$ 33. $\dfrac{\dfrac{2x^2 - x - 28}{3x^2 - x - 2}}{\dfrac{4x^2 + 16x + 7}{3x^2 + 11x + 6}}$ 34. $\dfrac{\dfrac{9x^2 + 3x - 2}{12x^2 + 5x - 2}}{\dfrac{9x^2 - 6x + 1}{8x^2 - 10x - 3}}$

En los problemas 35-52, realice las operaciones indicadas y simplifique el resultado. Deje su respuesta en forma factorizada.

35. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$ 36. $\dfrac{3}{x} - \dfrac{6}{x}$ 37. $\dfrac{x^2}{2x - 3} - \dfrac{4}{2x - 3}$

38. $\dfrac{3x^2}{2x - 1} - \dfrac{9}{2x - 1}$ 39. $\dfrac{x + 1}{x - 3} + \dfrac{2x - 3}{x - 3}$ 40. $\dfrac{2x - 5}{3x + 2} + \dfrac{x + 4}{3x + 2}$

41. $\dfrac{3x + 5}{2x - 1} - \dfrac{2x - 4}{2x - 1}$ 42. $\dfrac{5x - 4}{3x + 4} - \dfrac{x + 1}{3x + 4}$ 43. $\dfrac{4}{x - 2} + \dfrac{x}{2 - x}$

44. $\dfrac{6}{x - 1} - \dfrac{x}{1 - x}$ 45. $\dfrac{4}{x - 1} - \dfrac{2}{x + 2}$ 46. $\dfrac{2}{x + 5} - \dfrac{5}{x - 5}$

47. $\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{2x - 3}{x - 1}$ 48. $\dfrac{3x}{x - 4} + \dfrac{2x}{x + 3}$ 49. $\dfrac{x - 3}{x + 2} - \dfrac{x + 4}{x - 2}$

50. $\dfrac{2x - 3}{x - 1} - \dfrac{2x + 1}{x + 1}$ 51. $\dfrac{x}{x^2 - 4} + \dfrac{1}{x}$ 52. $\dfrac{x - 1}{x^3} + \dfrac{x}{x^2 + 1}$

En los problemas 53-60, encuentre el MCM de los polinomios dados.

53. $x^2 - 4, \quad x^2 - x - 2$

54. $x^2 - x - 12, \quad x^2 - 8x + 16$

55. $x^3 - x, \quad x^2 - x$

56. $3x^2 - 27, \quad 2x^2 - x - 15$

57. $4x^3 - 4x^2 + x, \quad 2x^3 - x^2, \quad x^3$

58. $x - 3, \quad x^2 + 3x, \quad x^3 - 9x$

59. $x^3 - x, \quad x^3 - 2x^2 + x, \quad x^3 - 1$

60. $x^2 + 4x + 4, \quad x^3 + 2x^2, \quad (x + 2)^3$

En los problemas 61-72, realice las operaciones indicadas y simplifique el resultado. Deje su respuesta en forma factorizada.

61. $\dfrac{x}{x^2 - 7x + 6} - \dfrac{x}{x^2 - 2x - 24}$

62. $\dfrac{x}{x - 3} - \dfrac{x + 1}{x^2 + 5x - 24}$

63. $\dfrac{4x}{x^2 - 4} - \dfrac{2}{x^2 + x - 6}$

64. $\dfrac{3x}{x - 1} - \dfrac{x - 4}{x^2 - 2x + 1}$

65. $\dfrac{3}{(x - 1)^2(x + 1)} + \dfrac{2}{(x - 1)(x + 1)^2}$

66. $\dfrac{2}{(x + 2)^2(x - 1)} - \dfrac{6}{(x + 2)(x - 1)^2}$

67. $\dfrac{x + 4}{x^2 - x - 2} - \dfrac{2x + 3}{x^2 + 2x - 8}$

68. $\dfrac{2x - 3}{x^2 + 8x + 7} - \dfrac{x - 2}{(x + 1)^2}$

69. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2 + x} + \dfrac{3}{x^3 - x^2}$

70. $\dfrac{x}{(x - 1)^2} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{x + 1}{x^3 - x^2}$

71. $\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}\right)$

72. $\dfrac{1}{h}\left[\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}\right]$

En los problemas 73-82, realice las operaciones indicadas y simplifique el resultado. Deje su respuesta en forma factorizada.

73. $\dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}}$

74. $\dfrac{4 + \dfrac{1}{x^2}}{3 - \dfrac{1}{x^2}}$

75. $\dfrac{2 - \dfrac{x + 1}{x}}{3 + \dfrac{x - 1}{x + 1}}$

76. $\dfrac{1 - \dfrac{x}{x + 1}}{2 - \dfrac{x - 1}{x}}$

77. $\dfrac{\dfrac{x + 4}{x - 2} - \dfrac{x - 3}{x + 1}}{x + 1}$

78. $\dfrac{\dfrac{x - 2}{x + 1} - \dfrac{x}{x - 2}}{x + 3}$

79. $\dfrac{\dfrac{x - 2}{x + 2} + \dfrac{x - 1}{x + 1}}{\dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{2x - 3}{x}}$

80. $\dfrac{\dfrac{2x + 5}{x} - \dfrac{x}{x - 3}}{\dfrac{x^2}{x - 3} - \dfrac{(x + 1)^2}{x + 3}}$

81. $1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x}}$

82. $1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - x}}$

En los problemas 83-90 se dan expresiones que ocurren en cálculo. Reduzca cada expresión a términos mínimos.

83. $\dfrac{(2x + 3) \cdot 3 - (3x - 5) \cdot 2}{(3x - 5)^2}$

84. $\dfrac{(4x + 1) \cdot 5 - (5x - 2) \cdot 4}{(5x - 2)^2}$

85. $\dfrac{x \cdot 2x - (x^2 + 1) \cdot 1}{(x^2 + 1)^2}$

86. $\dfrac{x \cdot 2x - (x^2 - 4) \cdot 1}{(x^2 - 4)^2}$

87. $\dfrac{(3x + 1) \cdot 2x - x^2 \cdot 3}{(3x + 1)^2}$

88. $\dfrac{(2x - 5) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2}{(2x - 5)^2}$

89. $\dfrac{(x^2 + 1) \cdot 3 - (3x + 4) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$

90. $\dfrac{(x^2 + 9) \cdot 2 - (2x - 5) \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2}$

91. Ecuación de Lensmaker La longitud focal f de una lente con índice de refracción n es

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right]$$

donde R_1 y R_2 son los respectivos radios de las curvaturas de las superficies anterior y posterior. Exprese f como una expresión racional. Evalúe la expresión racional para $n = 1.5$, $R_1 = 0.1$ metros, y $R_2 = 0.2$ metros.

92. Circuitos eléctricos Un circuito eléctrico contiene tres resistores conectados en paralelo. Si la resistencia de cada uno es R_1, R_2, y R_3 ohms, respectivamente, su resistencia combinada R está dada por la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Exprese R como una expresión racional. Evalúe R para $R_1 = 5$ ohms, $R_2 = 4$ ohms, y $R_3 = 10$ ohms.

93. Las siguientes expresiones se llaman **fracciones continuas:**

$$1+\frac{1}{x},\quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}},\quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}},\quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}},\quad \ldots$$

Cada una se simplifica a una expresión de la forma

$$\frac{ax+b}{bx+c}$$

Averigüe los valores sucesivos de a, b, y c conforme "continúa" la fracción. ¿Podría descubrir los patrones que siguen estos valores? Vaya a la biblioteca e investigue los números de Fibonacci. Escriba un reporte de los que encontró.

94. Explique a un compañero cuándo usaría el método del MCM para sumar dos expresiones racionales. Proporcione dos ejemplos de suma de expresiones racionales, una en la que se usa el MCM y otra en la que no.

95. ¿Cuál de los dos métodos dados en el texto para simplificar cocientes mixtos prefiere? Escriba un párrafo breve estableciendo las razones de su elección.

R.8 Raíces *n*-ésimas; exponentes racionales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de iniciar, revise lo siguiente:*

- Exponentes, raíces cuadradas (sección R.2, pp. 21-24)

OBJETIVOS
1. Manejo de raíces n-ésimas
2. Simplificación de radicales
3. Racionalización de denominadores
4. Simplificación de expresiones con exponentes racionales

Raíces *n*-ésimas

La **raíz *n*-ésima principal de un número real *a*,** $n \geq 2$ un entero, simbolizada por $\sqrt[n]{a}$, está definida como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{significa} \quad a = b^n$$

donde $a \geq 0$ y $b \geq 0$ si n es par y a, b son cualquier número real si n es impar.

Observe que si a es negativo y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no está definida. Cuando está definida, la raíz n-ésima principal de un número es única.

1 El símbolo $\sqrt[n]{a}$ para la raíz n-ésima principal de a en ocasiones se llama **radical**; el entero n se llama **índice** y a es el **radicando**. Si el índice de un radical es 2, $\sqrt[2]{a}$ recibe el nombre de **raíz cuadrada** de a y se omite el índice 2 escribiendo simplemente $\sqrt{a}$. Si el índice es 3, $\sqrt[3]{a}$ se llama **raíz cúbica** de a.

EJEMPLO 1 Simplificación de la raíz *n*-ésima principal

a) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

b) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

c) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$

d) $\sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2$

Estos son ejemplos de **raíces perfectas**, ya que cada una se simplifica a un número racional. Observe el valor absoluto en el ejemplo 1b). Si n es par, la raíz n-ésima principal debe ser no negativa.

En general, si $n \geq 2$ es un entero y a es un número real, se tiene

$$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad \text{si } n \geq 3 \text{ es impar} \qquad \textbf{(1a)}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \qquad \text{si } n \geq 2 \text{ es par} \qquad \textbf{(1b)}$$


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 5.

Propiedades de los radicales

Sean $n \geq 2$ y $m \geq 2$ dos enteros positivos, y sean a y b números reales. Si se supone que todos los radicales están definidos, se tienen las siguientes propiedades

Propiedades de los radicales

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \qquad \textbf{(2a)}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \textbf{(2b)}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \textbf{(2c)}$$

2 Cuando se usa en referencia a los radicales, la instrucción de "simplificar" significa eliminar de los radicales cualesquiera raíces perfectas que ocurran como factores. Se verán algunos ejemplos de la aplicación de estas reglas para simplificar radicales.

EJEMPLO 2 **Simplificación de radicales**

a) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

↑ Factorizar 16, un cuadrado perfecto

b) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

↑ Factorizar 8, un cubo perfecto ↑ (2a)

c) $\sqrt[3]{-16x^4} = \sqrt[3]{-8 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{(-8x^3)(2x)}$

↑ Factorizar cubos perfectos dentro del radical. ↑ Combinar cubos perfectos.

$= \sqrt[3]{(-2x)^3 \cdot 2x} = \sqrt[3]{(-2x)^3} \cdot \sqrt[3]{2x} = -2x\sqrt[3]{2x}$

↑ (2a)

d) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^5}{27}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3x^3x^2}{3^3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{2x}{3}\right)^3 \cdot x^2} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{2x}{3}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \dfrac{2x}{3}\sqrt[3]{x^2}$ ◀


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 9 Y 15.

Es posible combinar dos radicales o más, siempre que tengan el mismo índice y el mismo radicando. Estos radicales se llaman **radicales semejantes**.

EJEMPLO 3 **Combinación de radicales semejantes**

a) $-8\sqrt{12}+\sqrt{3} = -8\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{3}$

$= -8\cdot\sqrt{4}\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$= -16\sqrt{3}+\sqrt{3} = -15\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{8x^4}+\sqrt[3]{-x}+4\sqrt[3]{27x} = \sqrt[3]{2^3x^3x}+\sqrt[3]{-1\cdot x}+4\sqrt[3]{3^3x}$

$= \sqrt[3]{(2x)^3}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{-1}\cdot\sqrt[3]{x}+4\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{x}$

$= 2x\sqrt[3]{x}-1\cdot\sqrt[3]{x}+12\sqrt[3]{x}$

$= (2x+11)\sqrt[3]{x}$ ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

Racionalización


Cuando aparecen radicales en cocientes, es costumbre rescribir el cociente de manera que el denominador no contenga radicales. Este proceso se conoce como **racionalización del denominador**.

La idea es multiplicar por una expresión adecuada de manera que el nuevo denominador no contenga raíces cuadradas. Por ejemplo:

Si el denominador contiene el factor	Se multiplica por	Para obtener un denominador sin radicales
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3})^2 = 3$
$\sqrt{3}+1$	$\sqrt{3}-1$	$(\sqrt{3})^2-1^2 = 3-1 = 2$
$\sqrt{2}-3$	$\sqrt{2}+3$	$(\sqrt{2})^2-3^2 = 2-9 = -7$
$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2 = 5-3 = 2$
$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$

Al racionalizar el denominador de un cociente, debe asegurarse de multiplicar tanto el numerador como el denominador por la expresión.

EJEMPLO 4 **Racionalización de denominadores**

Racionalice el denominador de cada expresión:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{5}{4\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Solución a) El denominador contiene el factor $\sqrt{3}$, de manera que se multiplican numerador y denominador por $\sqrt{3}$ para obtener

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) El denominador contiene el factor $\sqrt{2}$, por lo que se multiplican numerador y denominador por $\sqrt{2}$ para obtener

$$\frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4(\sqrt{2})^2} = \frac{5\sqrt{2}}{4\cdot 2} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

c) El denominador contiene el factor $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, entonces se multiplican numerador y denominador por $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ para obtener

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{2})^2}{3 - 2} = \sqrt{6} + 2$$


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45.

Exponentes racionales

4 Los radicales se usan para definir exponentes racionales.

Si a es un número real y $n \geq 2$ es un entero, entonces

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \qquad \textbf{(3)}$$

siempre que $\sqrt[n]{a}$ exista.

Note que si n es par y $a < 0$ entonces $\sqrt[n]{a}$ y $a^{1/n}$ no existen.

EJEMPLO 5 **Para escribir expresiones con exponentes fraccionales como radicales**

a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$ b) $8^{1/2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $(-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -3$ d) $16^{1/3} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$

Si a es un número real y m y n son enteros que no tienen factores comunes, con $n \geq 2$, entonces

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \textbf{(4)}$$

siempre que $\sqrt[n]{a}$ exista.

Hay dos comentarios acerca de la ecuación (4):

1. El exponente $\frac{m}{n}$ debe estar en términos mínimos y n debe ser positivo.
2. Al simplificar la expresión racional $a^{m/n}$, se utiliza ya sea $\sqrt[n]{a^m}$ o bien $(\sqrt[n]{a})^m$ la elección depende de cuál es más sencillo simplificar. En general, es más fácil tomar primero la raíz cuadrada, como en $(\sqrt[n]{a})^m$,.

EJEMPLO 6 **Uso de la ecuación (4)**

a) $4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$ b) $(-8)^{4/3} = (\sqrt[3]{-8})^4 = (-2)^4 = 16$

c) $(32)^{-2/5} = (\sqrt[5]{32})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ d) $4^{6/4} = 4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

Se puede demostrar que las leyes de exponentes se cumplen para exponentes racionales.

En ocasiones los exponentes racionales sirven para simplificar radicales. El siguiente ejemplo ilustra el uso de las leyes de exponentes para simplificar.

EJEMPLO 7 Simplificación de expresiones con exponentes racionales

Simplifique cada expresión. Exprese su respuesta de manera que sólo aparezcan exponentes positivos. Suponga que las variables son positivas.

a) $(x^{2/3}y)(x^{-2}y)^{1/2}$ b) $\left(\dfrac{2x^{1/3}}{y^{2/3}}\right)^{-3}$ c) $\left(\dfrac{9x^2y^{1/3}}{x^{1/3}y}\right)^{1/2}$

Solución a)
$$\begin{aligned}(x^{2/3}y)(x^{-2}y)^{1/2} &= (x^{2/3}y)[(x^{-2})^{1/2}y^{1/2}]\\ &= x^{2/3}yx^{-1}y^{1/2}\\ &= (x^{2/3}\cdot x^{-1})(y\cdot y^{1/2})\\ &= x^{-1/3}y^{3/2}\\ &= \frac{y^{3/2}}{x^{1/3}}\end{aligned}$$

b) $$\left(\frac{2x^{1/3}}{y^{2/3}}\right)^{-3} = \left(\frac{y^{2/3}}{2x^{1/3}}\right)^{3} = \frac{(y^{2/3})^3}{(2x^{1/3})^3} = \frac{y^2}{2^3(x^{1/3})^3} = \frac{y^2}{8x}$$

c) $$\left(\frac{9x^2y^{1/3}}{x^{1/3}y}\right)^{1/2} = \left(\frac{9x^{2-(1/3)}}{y^{1-(1/3)}}\right)^{1/2} = \left(\frac{9x^{5/3}}{y^{2/3}}\right)^{1/2} = \frac{9^{1/2}(x^{5/3})^{1/2}}{(y^{2/3})^{1/2}} = \frac{3x^{5/6}}{y^{1/3}}$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 69.

 Los siguientes dos ejemplos ilustran manipulaciones algebraicas que se necesitarán para ciertos problemas de cálculo.

EJEMPLO 8 Para escribir una expresión como un solo cocientet

Escriba la siguiente expresión como un solo cociente en el que parecen sólo exponentes positivos.

$$(x^2+1)^{1/2} + x\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x$$

Solución
$$\begin{aligned}(x^2+1)^{1/2} + x\cdot\frac{1}{\not 2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot \not 2x &= (x^2+1)^{1/2} + \frac{x^2}{(x^2+1)^{1/2}}\\ &= \frac{(x^2+1)^{1/2}(x^2+1)^{1/2}+x^2}{(x^2+1)^{1/2}}\\ &= \frac{(x^2+1)+x^2}{(x^2+1)^{1/2}}\\ &= \frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}\end{aligned}$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 75.

EJEMPLO 9 Factorización de una expresión con exponentes racionales

Factorice: $\frac{4}{3}x^{1/3}(2x + 1) + 2x^{4/3}$

Solución Se comienza por buscar factores que sean comunes a los dos términos. Observe que 2 y $x^{1/3}$ son factores comunes. Entonces,

$$\frac{4}{3}x^{1/3}(2x + 1) + 2x^{4/3} = 2x^{1/3}\left[\frac{2}{3}(2x + 1) + x\right]$$
$$= \frac{2}{3}x^{1/3}(7x + 2)$$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 87.

ASPECTO HISTÓRICO

El signo de radical, $\sqrt{\ }$, se utilizó por primera vez en forma impresa por Christoff Rudolff en 1525. Se cree que fue la forma manuscrita de la letra r (por la palabra en latín *radix* = *raíz*), aunque esto no se ha probado de manera concluyente. Tomó un tiempo para que $\sqrt{\ }$ se convirtiera en el símbolo estándar de la raíz cuadrada y mucho más para estandarizar $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, etcétera. Los índices de la raíz se colocaron en todas las posiciones concebibles, con

$$\sqrt{\overset{3}{8}}, \quad \sqrt{③8}, \quad \text{y} \quad \sqrt{8}_{3}$$

todas variantes de $\sqrt[3]{8}$. la notación $\sqrt{\sqrt{16}}$ se popularizó en lugar de $\sqrt[4]{16}$. Para los años de 1700, el índice se había establecido donde lo colocamos ahora.

La barra sobre el símbolo de radical actual, como se muestra

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$$

es el último sobreviviente del **vínculo,** una barra colocada encima de una expresión para indicar lo que ahora indicamos con paréntesis. Por ejemplo,

$$a\overline{b + c} = a(b + c)$$

R.8 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. En el símbolo $\sqrt[n]{a}$, el entero n se llama __________.
2. $\sqrt[3]{a}$ se llama la __________ __________ de a.
3. *Falso o verdadero:* $\sqrt[5]{-32} = -2$
4. *Falso o verdadero:* $\sqrt[4]{(-3)^4} = -3$

Ejercicios

En los problemas 5-40, simplifique cada expresión. Suponga que todas las variables que aparecen son positivas.

5. $\sqrt[3]{27}$
6. $\sqrt[4]{16}$
7. $\sqrt[3]{-8}$
8. $\sqrt[3]{-1}$
9. $\sqrt{8}$
10. $\sqrt[3]{54}$
11. $\sqrt[3]{-8x^4}$
12. $\sqrt[4]{48x^5}$
13. $\sqrt[4]{x^{12}y^8}$
14. $\sqrt[5]{x^{10}y^5}$
15. $\sqrt[4]{\dfrac{x^9y^7}{xy^3}}$
16. $\sqrt[3]{\dfrac{3xy^2}{81x^4y^2}}$
17. $\sqrt{36x}$
18. $\sqrt{9x^5}$
19. $\sqrt{3x^2}\sqrt{12x}$
20. $\sqrt{5x}\sqrt{20x^3}$
21. $\left(\sqrt{5}\sqrt[3]{9}\right)^2$
22. $\left(\sqrt[3]{3}\sqrt{10}\right)^4$
23. $\left(3\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{2}\right)$
24. $\left(5\sqrt{8}\right)\left(-3\sqrt{3}\right)$
25. $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$
26. $6\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$
27. $-\sqrt{18} + 2\sqrt{8}$
28. $2\sqrt{12} - 3\sqrt{27}$
29. $\left(\sqrt{3} + 3\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)$
30. $\left(\sqrt{5} - 2\right)\left(\sqrt{5} + 3\right)$
31. $5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{54}$
32. $9\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81}$
33. $(\sqrt{x} - 1)^2$
34. $\left(\sqrt{x} + \sqrt{5}\right)^2$
35. $\sqrt[3]{16x^4} - \sqrt[3]{2x}$
36. $\sqrt[4]{32x} + \sqrt[4]{2x^5}$
37. $\sqrt{8x^3} - 3\sqrt{50x}, \quad x \geq 0$
38. $3x\sqrt{9y} + 4\sqrt{25y}, \quad y \geq 0$
39. $\sqrt[3]{16x^4y} - 3x\sqrt[3]{2xy} + 5\sqrt[3]{-2xy^4}$
40. $8xy - \sqrt{25x^2y^2} + \sqrt[3]{8x^3y^3}, \quad x \geq 0, y \geq 0$

En los problemas 41-52, racionalice el denominador de cada expresión. Suponga que todas las variables que aparecen son positivas.

41. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **42.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **43.** $\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ **44.** $\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

45. $\dfrac{\sqrt{3}}{5-\sqrt{2}}$ **46.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+2}$ **47.** $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+3\sqrt{5}}$ **48.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+3}$

49. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}}$ **50.** $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{9}}$ **51.** $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ **52.** $\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x-h}}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x-h}}$

En los problemas 53-64, simplifique cada expresión.

53. $8^{2/3}$ **54.** $4^{3/2}$ **55.** $(-27)^{1/3}$ **56.** $16^{3/4}$ **57.** $16^{3/2}$ **58.** $25^{3/2}$

59. $9^{-3/2}$ **60.** $16^{-3/2}$ **61.** $\left(\dfrac{9}{8}\right)^{3/2}$ **62.** $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{2/3}$ **63.** $\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-3/2}$ **64.** $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-2/3}$

En los problemas 65-72, simplifique cada expresión. Exprese su respuesta de manera que sólo haya exponentes positivos. Suponga que las variables son positivas.

65. $x^{3/4}x^{1/3}x^{-1/2}$ **66.** $x^{2/3}x^{1/2}x^{-1/4}$ **67.** $(x^3y^6)^{1/3}$ **68.** $(x^4y^8)^{3/4}$

69. $(x^2y)^{1/3}(xy^2)^{2/3}$ **70.** $(xy)^{1/4}(x^2y^2)^{1/2}$ **71.** $(16x^2y^{-1/3})^{3/4}$ **72.** $(4x^{-1}y^{1/3})^{3/2}$

En los problemas 73-86 se dan expresiones que ocurren en cálculo. Escriba cada expresión como un solo cociente en el que hay nada más exponentes positivos y/o radicales.

73. $\dfrac{x}{(1+x)^{1/2}}+2(1+x)^{1/2}, \quad x>-1$

74. $\dfrac{1+x}{2x^{1/2}}+x^{1/2}, \quad x>0$

75. $2x(x^2+1)^{1/2}+x^2\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x$

76. $(x+1)^{1/3}+x\cdot\dfrac{1}{3}(x+1)^{-2/3}, \quad x\neq -1$

77. $\sqrt{4x+3}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-5}}+\sqrt{x-5}\cdot\dfrac{1}{5\sqrt{4x+3}}, \quad x>5$

78. $\dfrac{\sqrt[3]{8x+1}}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{x-2}}{24\sqrt[3]{(8x+1)^2}}, \quad x\neq 2, x\neq -\dfrac{1}{8}$

79. $\dfrac{\sqrt{1+x}-x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}, \quad x>-1$

80. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

81. $\dfrac{(x+4)^{1/2}-2x(x+4)^{-1/2}}{x+4}, \quad x>-4$

82. $\dfrac{(9-x^2)^{1/2}+x^2(9-x^2)^{-1/2}}{9-x^2}, \quad -3<x<3$

83. $\dfrac{\dfrac{x^2}{(x^2-1)^{1/2}}-(x^2-1)^{1/2}}{x^2}, \quad x<-1 \text{ or } x>1$

84. $\dfrac{(x^2+4)^{1/2}-x^2(x^2+4)^{-1/2}}{x^2+4}$

85. $\dfrac{\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{x}}-2x\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}, \quad x>0$

86. $\dfrac{2x(1-x^2)^{1/3}+\dfrac{2}{3}x^3(1-x^2)^{-2/3}}{(1-x^2)^{2/3}}, \quad x\neq -1, x\neq 1$

En los problemas 87-96 se dan expresiones que ocurren en cálculo. Factorice cada expresión. Exprese su respuesta de manera que sólo haya exponentes positivos.

87. $(x+1)^{3/2}+x\cdot\dfrac{3}{2}(x+1)^{1/2}, \quad x\geq -1$

88. $(x^2+4)^{4/3}+x\cdot\dfrac{4}{3}(x^2+4)^{1/3}\cdot 2x$

89. $6x^{1/2}(x^2+x)-8x^{3/2}-8x^{1/2}, \quad x\geq 0$

90. $6x^{1/2}(2x+3)+x^{3/2}\cdot 8, \quad x\geq 0$

91. $3(x^2+4)^{4/3}+x\cdot 4(x^2+4)^{1/3}\cdot 2x$

92. $2x(3x+4)^{4/3}+x^2\cdot 4(3x+4)^{1/3}$

93. $4(3x+5)^{1/3}(2x+3)^{3/2}+3(3x+5)^{4/3}(2x+3)^{1/2}, \quad x\geq -\dfrac{3}{2}$

94. $6(6x+1)^{1/3}(4x-3)^{3/2}+6(6x+1)^{4/3}(4x-3)^{1/2}, \quad x\geq \dfrac{3}{4}$

95. $3x^{-1/2}+\dfrac{3}{2}x^{1/2}, \quad x>0$

96. $8x^{1/3}-4x^{-2/3}, \quad x\neq 0$

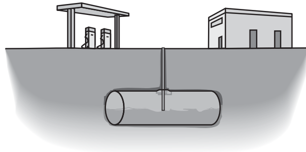
97. Cálculo de la cantidad de gasolina en un tanque Una gasolinera de Exxon almacena su gasolina en tanques subterráneos que son cilindros circulares rectos colocados de lado. Vea la ilustración. El volumen V de gasolina en el tanque (en galones) está dado por la fórmula

$$V = 40h^2\sqrt{\frac{96}{h} - 0.608}$$

donde h es la altura de la gasolina (en pulgadas) medida por la varilla de profundidad.

a) Si $h = 12$ pulgadas, ¿cuántos galones de gasolina hay en el tanque?

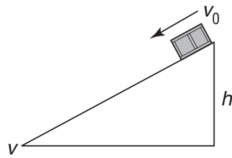
b) Si $h = 1$ pulgada, ¿cuántos galones de gasolina hay en el tanque?



98. Planos inclinados La velocidad final v de un objeto en pies por segundo (pies/s) después de deslizarse por un plano inclinado sin fricción, desde una altura h en pies es

$$v = \sqrt{64h + v_0^2}$$

donde v_0 es la velocidad inicial (en pies/s) del objeto.



a) ¿Cuál es la velocidad final v de un objeto que se desliza hacia abajo por un plano inclinado sin fricción con altura de 4 pies? Suponga una velocidad inicial de 0.

b) ¿Cuál es la velocidad final v de un objeto que se desliza hacia abajo por un plano inclinado sin fricción con altura de 16 pies? Suponga una velocidad inicial de 0.

c) ¿Cuál es la velocidad final v de un objeto que se desliza por un plano inclinado sin fricción con altura de 2 pies con una velocidad inicial de 4 pies/s?

En los problemas 99-103, use la siguiente información.

Periodo de un péndulo El periodo T, en segundos, de un péndulo de longitud l, en pies, se aproxima por la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{32}}$$

En los siguientes problemas, exprese su respuesta como una raíz cuadrada y como decimal.

99. Encuentre el periodo T de un péndulo cuya longitud es 64 pies.

100. Encuentre el periodo T de un péndulo cuya longitud es 16 pies.

101. Encuentre el periodo T de un péndulo cuya longitud es 8 pulgadas.

102. Encuentre el periodo T de un péndulo cuya longitud es 4 pulgadas.

103. Dé un ejemplo para mostrar que $\sqrt{a^2}$ no es igual a a. Utilícelo para explicar por qué $\sqrt{a^2} = |a|$.

Repaso del capítulo

Conocimiento

Clasificación de números (pp. 2-4)

Números naturales	1, 2, 3 . . .
Número enteros	0, 1, 2, 3 . . .
Enteros	. . . , −2, −1, 0, 1, 2, . . .
Números racionales	Cocientes de dos enteros (denominador diferente de 0); decimales que terminan o se repiten
Números irracionales	Decimales que no se repiten
Números reales	Números racionales o irracionales

Propiedades de los números reales (pp. 8-13)

Propiedades conmutativas	$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$
Propiedades asociativas	$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Propiedad distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Propiedades de identidad $a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$

Propiedades inversas $a + (-a) = 0, \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad$ donde $a \neq 0$

Propiedad de producto cero Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ or $b = 0$ o ambos.

Valor absoluto (p. 19)

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0, \quad |a| = -a \text{ si } a < 0$$

Exponentes (pp. 21-23)

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$, n entero positivo, $a^0 = 1, a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$, n entero positivo

Leyes de exponentes (p. 22)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Teorema de Pitágoras (p. 30)

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Inverso del teorema de Pitágoras (p. 30)

En un triángulo, si el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados, entonces se trata de un triángulo rectángulo.

Polinomio (p. 36)

Expresión algebraica de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, n un entero no negativo

Productos notables/fórmulas de factorización (pp. 40–41)

$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2, \quad (x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3, \quad (x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3, \quad (x + a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3$

Radicales; exponentes racionales (pp. 70 y 73)

$\sqrt[n]{a} = b$ significa $a = b^n$, donde $a \geq 0$ y $b \geq 0$ si $n \geq 2$ es par y a, b son cualesquiera números reales si $n \geq 3$ es impar

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Objetivos

Sección		Debe ser capaz de . . .	Ejercicios de repaso
R.1	1	Clasificar números (p. 2)	1, 2
	2	Evaluar expresiones numéricas (p. 7)	3–8
	3	Trabajar con las propiedades de los números reales (p. 8)	9, 10
R.2	1	Graficar desigualdades (p. 18)	11, 12
	2	Encontrar distancias en la recta real (p. 19)	13, 14
	3	Evaluar expresiones algebraicas (p. 20)	15–20, 98
	4	Determinar el dominio de una variable (p. 20)	21, 22
	5	Usar las leyes de exponentes (p. 21)	29, 30

	6	Evaluar raíces cuadradas (p. 23)	7, 19
	7	Usar una calculadora para evaluar exponentes (p. 24)	33
	8	Usar la notación científica (p. 24)	36, 95
R.3	1	Usar el teorema de Pitágoras y su inverso (p. 30)	96, 97, 103
	2	Conocer las fórmulas de geometría (p. 31)	100, 101, 102
R.4	1	Reconocer monomios (p. 36)	34
	2	Reconocer polinomios (p. 37)	35
	3	Sumar y restar polinomios (p. 37)	37, 38
	4	Multiplicar polinomios (p. 38)	39–44
	5	Conocer las fórmulas de productos notables (p. 39)	41, 42
R.5	1	Factorizar la diferencia de dos cuadrados y la suma y diferencia de dos cubos (p. 44)	57, 58, 61, 62
	2	Factorizar cuadrados perfectos (p. 45)	65, 66
	3	Factorizar un polinomio de segundo grado: $x^2 + Bx + C$ (p. 46)	51, 52, 64
	4	Factorizar por agrupamiento (p. 48)	59, 60
	5	Factorizar un polinomio de segundo grado: $Ax^2 + Bx + C$ (p. 49)	53–56, 63
R.6	1	Dividir polinomios usando la división larga (p. 52)	45–50
	2	Dividir polinomios usando la división sintética (p. 54)	45, 46, 49, 50
R.7	1	Reducir una expresión racional a términos mínimos (p. 59)	67, 68
	2	Multiplicar y dividir expresiones racionales (p. 60)	69, 70, 75
	3	Sumar y restar expresiones racionales (p. 61)	71–74
	4	Usar el método del mínimo común múltiplo (p. 62)	73, 74
	5	Simplificar cocientes mixtos (p. 65)	76
R.8	1	Trabajar con raíces n-ésimas (p. 70)	20, 77–80
	2	Simplificar radicales (p. 71)	23–28, 77–80
	3	Racionalizar denominadores (p. 72)	81–86
	4	Simplificar expresiones con exponentes racionales (p. 73)	31–32, 87–90

Ejercicio de repaso

(Los problemas con asterisco (*) indican que el autor los sugiere para usarse como examen de práctica.)

In Problems 1 and 2, list the numbers in the set that are a) Natural numbers, b) Integers, c) Rational numbers, d) Irrational numbers, e) Real numbers.

*1. $A = \left\{-10, 0.65, 1.343434\ldots, \sqrt{7}, \frac{1}{9}\right\}$

2. $B = \left\{0, -5, \frac{1}{3}, 0.59, 1.333\ldots, 2\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

En los problemas 3-8, evalúe cada expresión.

*3. $-6 + 4 \cdot (8 - 3)$

4. $\frac{5}{18} + \frac{1}{12}$

5. $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{16}$

6. $\dfrac{\frac{5}{18}}{\frac{11}{27}}$

7. $\sqrt{(-3)^2}$

8. $(-3)^5$

En los problemas 9 y 10, use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

*9. $4(x - 3)$

10. $(x - 2)(3x + 1)$

En los problemas 11 y 12, grafique los números x *en la recta de números reales.*

*11. $x > 3$

12. $x \leq 5$

En los problemas 13 y 14, sean P, Q, y R puntos en la recta de números reales con coordenadas $-2, 3,$ *y* 9*, respectivamente*

*13. Encuentre la distancia entre P y Q.

14. Encuentre la distancia entre Q y R.

En los problemas 15-20, evalúe cada expresión si $x = -5$ y $y = 7$.

*15. $\dfrac{4x}{x + y}$ 16. $|2x - 3y|$ 17. $5x^{-1}y^2$ 18. $2x^2y^{-2}$ 19. $\sqrt{x^2}$ 20. $\sqrt[3]{x^3}$

En los problemas 21 y 22, determine el dominio de la variable.

*21. $\dfrac{3}{x - 6}$ 22. $\dfrac{x + 1}{x + 5}$

En los problemas 23-32, simplifique cada expresión. Todos los exponentes deben ser positivos. Suponga que $x > 0$ y $y > 0$, cuando aparecen.

23. $\sqrt{32}$ 24. $\sqrt{75}$ 25. $\sqrt[3]{-16}$ 26. $\sqrt[5]{64}$ 27. $5\sqrt{8} - 2\sqrt{32}$

28. $4\sqrt{12} + 5\sqrt{27}$ 29. $\dfrac{(x^2y)^{-4}}{(xy)^{-3}}$ 30. $\left(\dfrac{x^2y^2}{x^{-1}}\right)^2$ *31. $(25x^{-4/3}y^{-2/3})^{3/2}$ 32. $(27x^{-3/2}y^{5/2})^{2/3}$

33. Utilice una calculadora para evaluar $(1.5)^4$.
34. Identifique el coeficiente y grado del monomio $-5x^3$.
35. Identifique los coeficientes y el grado del polinomio $3x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 5x - 12$.
36. Escriba 3.275×10^5 como un entero.

En los problemas 37-44, realice la operación indicada.

37. $(2x^4 - 8x^3 + 5x - 1) + (6x^3 + x^2 + 4)$ 38. $(x^3 + 8x^2 - 3x + 4) - (4x^3 - 7x^2 - 2x + 3)$

*39. $(2x + 1)(3x - 5)$ 40. $(2x - 5)(3x^2 + 2)$ 41. $(4x + 1)(4x - 1)$

42. $(5x + 2)^2$ 43. $(x + 1)(x + 2)(x - 3)$ 44. $(x + 1)(x + 3)(x - 5)$

En los problemas 45-50, encuentre el cociente y el residuo. Verifique su trabajo con las operaciones

$$(\textit{cociente})(\textit{divisor}) + \textit{residuo} = \textit{dividendo}$$

*45. $3x^3 - x^2 + x + 4$ entre $x - 3$ 46. $2x^3 - 3x^2 + x + 1$ entre $x - 2$

47. $-3x^4 + x^2 + 2$ entre $x^2 + 1$ 48. $-4x^3 + x^2 - 2$ entre $x^2 - 1$

49. $x^5 + 1$ entre $x + 1$ 50. $x^5 - 1$ entre $x - 1$

En los problemas 51-66, factorice completamente cada polinomio (sobre los enteros). Si el polinomio no se puede factorizar, diga que es primo.

*51. $x^2 + 5x - 14$ 52. $x^2 - 9x + 14$ *53. $6x^2 - 5x - 6$ 54. $6x^2 + x - 2$

55. $3x^2 - 15x - 42$ 56. $2x^3 + 18x^2 + 28x$ 57. $8x^3 + 1$ 58. $27x^3 - 8$

59. $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ 60. $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ 61. $25x^2 - 4$ 62. $16x^2 - 1$

63. $9x^2 + 1$ 64. $x^2 - x + 1$ 65. $x^2 + 8x + 16$ 66. $4x^2 + 12x + 9$

En los problemas 67-76, realice la operación indicada y simplifique. Deje su respuesta en forma factorizada.

67. $\dfrac{2x^2 + 11x + 14}{x^2 - 4}$ 68. $\dfrac{x^2 - 5x - 14}{4 - x^2}$ *69. $\dfrac{9x^2 - 1}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{3x - 9}{9x^2 + 6x + 1}$

70. $\dfrac{x^2 - 25}{x^3 - 4x^2 - 5x} \cdot \dfrac{x^2 + x}{1 - x^2}$ 71. $\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{x - 1}{x + 1}$ 72. $\dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{2x}{x + 2}$

73. $\dfrac{3x + 4}{x^2 - 4} - \dfrac{2x - 3}{x^2 + 4x + 4}$ 74. $\dfrac{x^2}{2x^2 + 5x - 3} + \dfrac{x^2}{2x^2 - 5x + 2}$

75. $\dfrac{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}}{\dfrac{x + 1}{x - 2}}$ 76. $\dfrac{\dfrac{x + 4}{3}}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{x}}$

En los problemas 77-80, simplifique cada expresión.

*77. $\sqrt{\dfrac{9x^2}{25y^4}}$, $x \geq 0, y > 0$

78. $\dfrac{\sqrt{2x}\,\sqrt{5xy^3}}{\sqrt{10y}}$, $x \geq 0, y > 0$

79. $\sqrt[3]{27x^4y^{12}}$

80. $\dfrac{\sqrt[4]{243x^5y}}{\sqrt[4]{3xy^9}}$, $x > 0, y > 0$

En los problemas 81-86, racionalice el denominador de cada expresión.

81. $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

82. $\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$

*83. $\dfrac{2}{1-\sqrt{2}}$

84. $\dfrac{-4}{1+\sqrt{3}}$

85. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$

86. $\dfrac{4\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+1}$

En los problemas 87-92, escriba cada expresión como un solo cociente en el que todos los exponentes y/o radicales son positivos.

87. $(2+x^2)^{1/2} + x\cdot\dfrac{1}{2}(2+x^2)^{-1/2}\cdot 2x$

88. $(x^2+4)^{2/3} + x\cdot\dfrac{2}{3}(x^2+4)^{-1/3}\cdot 2x$

89. $\dfrac{(x+4)^{1/2}\cdot 2x - x^2\cdot\frac{1}{2}(x+4)^{-1/2}}{x+4}$, $x > -4$

90. $\dfrac{(x^2+4)^{1/2}\cdot 2x - x^2\cdot\frac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2}\cdot 2x}{x^2+4}$

91. $\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1}}{x^2}$

92. $\dfrac{\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{x}} - 2x\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}$

En los problemas 93 y 94, factorice cada expresión.

93. $3(x^2+4)^{4/3} + x\cdot 4(x^2+4)^{1/3}\cdot 2x$

94. $2x(3x+4)^{4/3} + x^2\cdot 4(3x+4)^{1/3}$

---

95. **Población de Estados Unidos** Según la oficina de censos de Estados Unidos, la población en 2000 era 281, 421, 906. Escriba la población estadounidense en notación científica.

96. Encuentre la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tiene longitudes de 5 y 8.

97. Las longitudes de los lados de un triángulo son 12, 16 y 20. ¿Es éste un triángulo rectángulo?

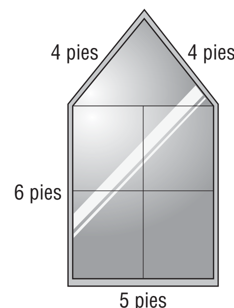
98. **Costo de manufactura** El costo C de la producción semanal por fabricar x calculadoras está dado por la fórmula

$$C = 3000 + 6x - \frac{x^2}{1000}$$

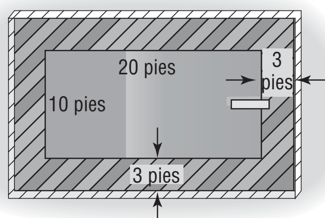
a) ¿Cuál es el costo de producir 1000 calculadoras?
b) ¿Cuál es el costo de producir 3000 calculadoras?

99. **Ingresos corporativos trimestrales** En el primer trimestre de su año fiscal, una compañía reportó ganancias de \$1.20 por acción. Durante el segundo y tercer trimestres reportó pérdidas respectivas de \$0.75 por acción y \$0.30 por acción. En el cuarto trimestre ganó modestamente \$0.20 por acción. ¿Cuáles son las ganancias anuales por acción de esta compañía?

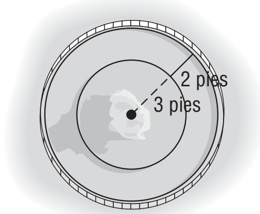
100. **Diseño** Una ventana consiste en un rectángulo con un triángulo en la parte superior. Encuentre el área de la ventana mostrada en la ilustración. ¿Cuánta madera se necesita para el marco de la ventana?



*101. **Construcción** Una alberca rectangular con 20 pies de largo y 10 pies de ancho está rodeada por un entarimado de madera de 3 pies de ancho. ¿Cuál es el área del entarimado? ¿Qué longitud de cerca se requiere para rodear el entarimado?



*102. **Construcción** Una estatua con una base circular con radio de 3 pies está rodeada por una fuente circular como se muestra en la ilustración. ¿Cuál es el área de la fuente? ¿Qué largo de cerca se necesita para rodear la fuente?



103. **¿Qué tan lejos podría ver un piloto?** En un vuelo reciente a San Francisco, el piloto anunció que estábamos a 139 millas de la ciudad, volando a una altitud de 35,000 pies. El piloto aseguró que podía ver el puente Golden Gate y más allá. ¿Decía la verdad? ¿Qué tan lejos podía ver?



104. Utilice el material de este capítulo para crear un problema que use las siguientes palabras:
a) Simplifique b) Factorice c) Reduzca

105. Un número racional está definido como el cociente de dos enteros. Cuando se escribe como decimal, el decimal se repite o termina. Al ver el denominador del número racional, existe una forma de predecir si su representación decimal se repite o termina. Haga una lista de números racionales y sus decimales. Vea si puede descubrir el patrón. Confirme su conclusión consultando libros de teoría de números en la biblioteca. Escriba un resumen de lo que encontró.

106. La hora actual es las 12 del día. Qué hora será dentro de 12 997 horas?

107. Ni $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ ni $\frac{0}{0}$ están definidas, pero por razones diferentes. Escriba un párrafo o dos explicando las diferentes razones

1 Ecuaciones y desigualdades

Las tasas suben: 5.67% a 30 años

WASHINGTON – Las tasas de hipotecas a 30 y 15 años subieron esta semana a sus niveles más altos desde principios de mayo, declaró Freddie Mac el jueves.

La tasa promedio fija de hipoteca a 30 años brincó a 5.67% de 5.52% la semana pasada. A la mitad de junio, las tasas hipotecarias a 30 años se deslizaron a 5.21%, el nivel más bajo desde que Freddie Mac comenzó su seguimiento en 1971.

Para la tasa hipotecaria fija a 15 años, una opción popular para refinanciamiento, la tasa aumentó de 4.85% la semana pasada a 5%. Las tasas para hipotecas ajustables cada año también subieron de 3.55 a 3.58%.

Hace un año, la tasa hipotecaria promedio a 30 años era 6.49%; a 15 años, 5.93%, y a un año, 4.50%.

Chicago Tribune, 18 de julio, 2003.

VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO

CONTENIDO

1.1 Ecuaciones lineales

1.2 Ecuaciones cuadráticas

1.3 Ecuaciones cuadráticas en el sistema de números complejos

1.4 Ecuaciones radicales; ecuaciones de forma cuadrática; ecuaciones que se factorizan

1.5 Solución de desigualdades

1.6 Ecuaciones y desigualdades que incluyen valor absoluto

1.7 Aplicaciones: interés, mezcla, movimiento uniforme, tareas de tasa constante

Repaso del capítulo

Proyectos del capítulo



1.1 Ecuaciones lineales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Números reales (Repaso, sección R.1, pp. 2-4 y 8-14)
- Repaso de álgebra (Repaso, sección R.2, pp. 20-21)

Ahora trabaje los problemas de “¿Está preparado?” de la página 93.

OBJETIVOS
1. Resolver una ecuación lineal
2. Resolver ecuaciones que conducen a ecuaciones lineales
3. Resolver problemas de aplicación que involucran ecuaciones lineales

Una **ecuación en una variable** es una proposición en la que dos expresiones, donde al menos una contiene la variable, son iguales. Las expresiones se llaman **lados** de la ecuación. Como una ecuación es una proposición, podría ser verdadera o falsa, dependiendo del valor de la variable. A menos que se restrinja de otra manera, los valores admisibles de la variable son los del dominio de la variable. Los valores admisibles de la variable, si los hay, que proporcionan una proposición verdadera se llaman **soluciones** o **raíces** de la ecuación. **Resolver una ecuación** significa encontrar todas sus soluciones.

Por ejemplo, las siguientes son ecuaciones en una variable, x:

$$x + 5 = 9 \qquad x^2 + 5x = 2x - 2 \qquad \frac{x^2 - 4}{x + 1} = 0 \qquad \sqrt{x^2 + 9} = 5$$

La primera proposición, $x + 5 = 9$, es verdadera cuando $x = 4$ y falsa para cualquier otra elección de x. Es decir, 4 es una solución de la ecuación $x + 5 = 9$. También se dice que 4 **satisface** la ecuación $x + 5 = 9$, porque al sustituir 4 en lugar de x, se obtiene una proposición verdadera.

En ocasiones una ecuación tendrá más de una solución. Por ejemplo

$$\frac{x^2 - 4}{x + 1} = 0$$

tiene como soluciones a $x = -2$ y $x = 2$.

Por lo común, se escribirá la solución de una ecuación en notación de conjuntos. Este conjunto se llama **conjunto de soluciones** de la ecuación. Por ejemplo, el conjunto de soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$ es $\{-3, 3\}$.

Algunas ecuaciones no tienen solución real. Por ejemplo, $x^2 + 9 = 5$ no tiene soluciones reales, porque no existe un número real cuyo cuadrado sumado a 9 sea igual a 5.

Una ecuación que se satisface para todos los valores de la variable para los que ambos lados están definidos se llama **identidad**. Por ejemplo, la ecuación

$$3x + 5 = x + 3 + 2x + 2$$

es una identidad, porque esta proposición es verdadera para cualquier número real x.

Dos o más ecuaciones que tienen el mismo conjunto de soluciones se llaman **ecuaciones equivalentes**.

Por ejemplo, todas la ecuaciones siguientes son equivalentes, porque cada una tiene sólo una solución, $x = 5$:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 13 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones ilustran un método para resolver muchos tipos de ecuaciones: Se sustituye la ecuación original por una ecuación equivalente y se continúa hasta llegar a una ecuación con una solución obvia, como $x = 5$. Sin embargo, la pregunta es "¿cómo se obtiene una ecuación equivalente?" En general, hay cinco maneras de hacerlo.

Procedimiento para obtener ecuaciones equivalentes

1. Intercambie los dos lados de la ecuación:

   Sustituya $3 = x$ por $x = 3$

2. Simplifique los lados de la ecuación combinando términos semejantes, eliminando paréntesis, etcétera:

   Sustituya $(x + 2) + 6 = 2x + (x + 1)$

   por $x + 8 = 3x + 1$

3. Sume o reste la misma expresión en ambos lados de la ecuación:

   Sustituya $3x - 5 = 4$

   por $(3x - 5) + 5 = 4 + 5$

4. Multiplique o divida ambos lados de la ecuación por la misma expresión diferente de cero:

   Sustituya $\dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{6}{x-1} \qquad x \neq 1$

   por $\dfrac{3x}{x-1} \cdot (x - 1) = \dfrac{6}{x-1} \cdot (x - 1)$

5. Si un lado de la ecuación es 0 y el otro se factoriza, entonces se utiliza la propiedad del producto cero* e igualar a 0 cada factor:

   Sustituya $x(x - 3) = 0$

   por $x = 0$ o $x - 3 = 0$

ADVERTENCIA: Elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación no necesariamente lleva a una ecuación equivalente. ■

Siempre que sea posible resolver una ecuación mentalmente, hágalo. Por ejemplo,

La solución de $2x = 8$ es $x = 4$.

La solución de $3x - 15 = 0$ es $x = 5$.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

No obstante, con frecuencia cierto reacomodo es necesario.

*La propiedad del producto cero dice que si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$ o ambos son iguales a 0.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación

Resuelva la ecuación: $3x - 5 = 4$

Solución Se sustituye la ecuación original por una sucesión de ecuaciones equivalentes.

$$3x - 5 = 4$$
$$(3x - 5) + 5 = 4 + 5 \quad \text{Sumar 5 en ambos lados.}$$
$$3x = 9 \quad \text{Simplificar.}$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \quad \text{Dividir ambos lados entre 3.}$$
$$x = 3 \quad \text{Simplificar.}$$

La última ecuación, $x = 3$, tiene la solución única 3. Todas estas ecuaciones son equivalentes, de manera que 3 es la única solución de la ecuación original, $3x - 5 = 4$.

✔ **COMPROBACIÓN:** es una buena práctica verificar la solución sustituyendo 3 en lugar de x en la ecuación original.

$$3x - 5 = 4$$
$$3(3) - 5 \stackrel{?}{=} 4$$
$$9 - 5 \stackrel{?}{=} 4$$
$$4 = 4$$

La solución es correcta. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 23.

Pasos para resolver ecuaciones

PASO 1: Enumere cualesquiera restricciones sobre el dominio de la variable.

PASO 2: Simplifique la ecuación sustituyendo la ecuación original por una sucesión de ecuaciones equivalentes siguiendo los procedimientos enumerados.

PASO 3: Si el resultado del paso 2 es un producto de factores iguales a 0, use la propiedad del producto cero e iguale cada factor a 0 (procedimiento 5).

PASO 4: Verifique su solución o soluciones.

Ecuaciones lineales



Las *ecuaciones lineales* son ecuaciones como

$$3x + 12 = 0 \qquad -2x + 5 = 0 \qquad \frac{1}{2}x - \sqrt{3} = 0$$

A continuación se da una definición general.

Una **ecuación lineal en una variable** es equivalente a una ecuación de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

Algunas veces, una ecuación lineal se llama **ecuación de primer grado**, porque su lado izquierdo es un polinomio en x de grado 1.

Es relativamente sencillo resolver una ecuación lineal. La idea es *aislar* la variable:

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b \quad \text{Restar } b \text{ en ambos lados.}$$

$$x = \frac{-b}{a} \quad \text{Dividir ambos lados entre } a,\ a \neq 0.$$

La ecuación lineal $ax + b = 0$ tiene la solución única dada por la fórmula $x = -\frac{b}{a}$.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación: $\frac{1}{2}(x + 5) - 4 = \frac{1}{3}(2x - 1)$

Solución Para eliminar las fracciones de la ecuación, se multiplican ambos lados por 6, el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{2}(x + 5) - 4 = \frac{1}{3}(2x - 1)$$

$$6\left[\frac{1}{2}(x + 5) - 4\right] = 6\left[\frac{1}{3}(2x - 1)\right] \quad \text{Multiplicar ambos lados por 6, el MCM de 2 y 3.}$$

$$3(x + 5) - 24 = 2(2x - 1) \quad \text{Usar propiedad distributiva en el lado izquierdo y propiedad asociativa en el lado derecho.}$$

$$3x + 15 - 24 = 4x - 2 \quad \text{Usar propiedad distributiva.}$$

$$3x - 9 = 4x - 2 \quad \text{Combinar términos semejantes.}$$

$$3x - 9 + 9 = 4x - 2 + 9 \quad \text{Sumar 9 en ambos lados.}$$

$$3x = 4x + 7 \quad \text{Simplificar.}$$

$$3x - 4x = 4x + 7 - 4x \quad \text{Restar } 4x \text{ de cada lado.}$$

$$-x = 7 \quad \text{Simplificar.}$$

$$x = -7 \quad \text{Multiplicar ambos lados por } -+1.$$

✔ **COMPROBACIÓN:**

$$\frac{1}{2}(x + 5) - 4 = \frac{1}{2}(-7 + 5) - 4 = \frac{1}{2}(-2) - 4 = -1 - 4 = -5$$

$$\frac{1}{3}(2x - 1) = \frac{1}{3}[2(-7) - 1] = \frac{1}{3}(-14 - 1) = \frac{1}{3}(-15) = -5$$

Como las dos expresiones son iguales, la solución $x = -7$ es correcta y el conjunto de soluciones es $\{-7\}$. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 33.

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación lineal usando una calculadora

Resuelva la ecuación: $2.78x + \dfrac{2}{17.931} = 54.06$

Redondee el resultado a dos lugares decimales.

Solución Para evitar errores de redondeo, se despeja x antes de usar la calculadora.

$$2.78x + \frac{2}{17.931} = 54.06$$

$$2.78x = 54.06 - \frac{2}{17.931} \qquad \text{Restar } \frac{2}{17.931} \text{ de cada lado.}$$

$$x = \frac{54.06 - \frac{2}{17.931}}{2.78} \qquad \text{Dividir ambos lados entre 2.78.}$$

Ahora use su calculadora. La solución redondeada a dos lugares decimales es 19.41.

✔ **COMPROBACIÓN:** Se almacena la solución no redondeada en la memoria y se procede a evaluar $2.78x + \dfrac{2}{17.931}$.

$$(2.78)(19.40592134) + \frac{2}{17.931} = 54.06$$

◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 65.

Ecuaciones que llevan a ecuaciones lineales

2 Los siguientes tres ejemplos ilustran ecuaciones que llevan a ecuaciones lineales mediante la simplificación.

EJEMPLO 4 Solución de ecuaciones

Resuelva la ecuación: $(2y + 1)(y - 1) = (y + 5)(2y - 5)$

Solución

$$(2y + 1)(y - 1) = (y + 5)(2y - 5)$$

$$2y^2 - y - 1 = 2y^2 + 5y - 25 \qquad \text{Multiplicar y combinar términos semejantes.}$$

$$-y - 1 = 5y - 25 \qquad \text{Restar } 2y^2 \text{ de cada lado.}$$

$$-y = 5y - 24 \qquad \text{Sumar 1 en cada lado.}$$

$$-6y = -24 \qquad \text{Restar } 5y \text{ de cada lado.}$$

$$y = 4 \qquad \text{Dividir ambos lados entre } -6.$$

✔ **COMPROBACIÓN:**

$$(2y + 1)(y - 1) = [2(4) + 1](4 - 1) = (8 + 1)(3) = (9)(3) = 27$$

$$(y + 5)(2y - 5) = (4 + 5)[2(4) - 5] = (9)(8 - 5) = (9)(3) = 27$$

Como las dos expresiones son iguales, la solución $y = 4$ es correcta.

El conjunto de soluciones es $\{4\}$. ◀

EJEMPLO 5 Solución de ecuaciones

Resuelva la ecuación: $\frac{3}{x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{7}{(x-1)(x-2)}$

Solución Primero, se observa que el dominio de la variable es $\{x|x \neq 1, x \neq 2\}$. Se eliminan las fracciones de la ecuación multiplicando ambos lados por el mínimo común múltiplo de los denominadores de las tres fracciones, $(x-1)(x-2)$.

$$\frac{3}{x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{7}{(x-1)(x-2)}$$

$$(x-1)\cancel{(x-2)}\frac{3}{\cancel{x-2}} = (x-1)(x-2)\left[\frac{1}{x-1} + \frac{7}{(x-1)(x-2)}\right]$$

Multiplicar ambos lados por $(x-1)(x-2)$; cancelar en el lado izquierdo.

$$3x - 3 = \cancel{(x-1)}(x-2)\frac{1}{\cancel{x-1}} + \cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}\frac{7}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}}$$

Usar propiedad distributiva en cada lado; cancelar en el lado derecho.

$$3x - 3 = (x-2) + 7$$

$$3x - 3 = x + 5$$

Combinar términos semejantes.

$$2x = 8$$

Sumar 3 en cada lado; restar x de cada lado.

$$x = 4$$

Dividir entre 2.

✔ **COMPROBACIÓN:** $\frac{3}{x-2} = \frac{3}{4-2} = \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{7}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{4-1} + \frac{7}{(4-1)(4-2)} = \frac{1}{3} + \frac{7}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} + \frac{7}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Como las dos expresiones son iguales, la solución $x = 4$ es correcta.

El conjunto de soluciones es $\{4\}$.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 59.

El siguiente ejemplo es una ecuación que no tiene solución.

EJEMPLO 6 Una ecuación sin solución

Resuelva la ecuación: $\frac{3x}{x-1} + 2 = \frac{3}{x-1}$

Solución Primero, se observa que el dominio de la variable es $\{x|x \neq 1\}$. Como los dos cocientes en la ecuación tienen el mismo denominador, $x - 1$, se simplifica multiplicando ambos lados por $x - 1$. La ecuación que se obtiene es equivalente a la ecuación original, ya que se multiplica por $x - 1$, que no es 0 (recuerde, $x \neq 1$).

$$\frac{3x}{x-1} + 2 = \frac{3}{x-1}$$

$$\left(\frac{3x}{x-1} + 2\right)\cdot(x-1) = \frac{3}{\cancel{x-1}}\cdot\cancel{(x-1)}$$ Multiplicar ambos lados por $x - 1$; cancelar en el lado derecho.

$$\frac{3x}{\cancel{x-1}}\cdot\cancel{(x-1)} + 2\cdot(x-1) = 3$$ Usar la propiedad distributiva en el lado izquierdo; cancelar en el lado izquierdo.

$$3x + 2x - 2 = 3$$ Simplificar.

$$5x - 2 = 3$$ Combinar términos semejantes.

$$5x = 5$$ Sumar 2 en ambos lados.

$$x = 1$$ Dividir ambos lados entre 5.

Parece que la solución es 1. Pero recuerde que $x = 1$ no está en el dominio de la variable. La ecuación no tiene solución. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 49.

EJEMPLO 7 Conversión de Fahrenheit a Celsius

En Estados Unidos la temperatura se mide tanto en grados Fahrenheit (ºF) como en grados Celsius (ºC), los cuales están relacionados por la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. ¿Qué temperaturas Fahrenheit corresponden a temperaturas Celsius de 0º, 10º, 20º y 30ºC?

Solución Se despejan las cuatro ecuaciones para F, reemplazando C cada vez por 0, 10, 20 y 30. No obstante, es mucho más sencillo y rápido despejar primero la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para F y luego sustituir el valor de C.

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$9C = 5(F - 32)$$ Multiplicar ambos lados por 9.

$$9C = 5F - 160$$ Usar la propiedad distributiva.

$$5F - 160 = 9C$$ Intercambiar lados.

$$5F = 9C + 160$$ Sumar 160 en ambos lados.

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$ Dividir ambos lados entre 5.

Ahora se realiza la aritmética necesaria.

$$0°\text{C}: \quad F = \frac{9}{5}(0) + 32 = 32°\text{F}$$

$$10°\text{C}: \quad F = \frac{9}{5}(10) + 32 = 50°\text{F}$$

$$20°\text{C}: \quad F = \frac{9}{5}(20) + 32 = 68°\text{F}$$

$$30°\text{C}: \quad F = \frac{9}{5}(30) + 32 = 86°\text{F}$$

◀

Aplicaciones

3 Aunque cada situación tiene sus propias características únicas, se señala una serie de pasos a seguir para establecer problemas de aplicación.

Pasos para establecer problemas aplicados

PASO 1: Lea el problema con cuidado, quizá dos o tres veces. Ponga atención especial en la pregunta que se hace con el fin de identificar lo que busca. Si puede, determine las posibilidades reales para la respuesta.

PASO 2: Asigne una letra (variable) para representar lo que busca y, si es necesario, exprese cualesquiera cantidades desconocidas en términos de esta variable.

PASO 3: Haga una lista de todos los hechos y tradúzcalos en expresiones matemáticas. Éstas toman la forma de una ecuación (o, más adelante, de una desigualdad) que involucra la variable. Si es posible, dibuje un diagrama con las etiquetas adecuadas como ayuda. En ocasiones una tabla o gráfica será útil.

PASO 4: Resuelva la ecuación para la variable y luego responda la pregunta, por lo general, usando una oración completa.

PASO 5: Verifique la respuesta con los hechos del problema. Si concuerdan, ¡felicitaciones! Si no concuerdan, intente de nuevo.

Se verán dos ejemplos.

EJEMPLO 8 **Inversiones**

Se invierte un total de $18,000, parte en acciones y parte en bonos. Si la cantidad invertida en bonos es la mitad de lo invertido en acciones, ¿cuánto se invierte en cada categoría?

Solución

PASO 1: Se pide encontrar la cantidad de las dos inversiones. Estas cantidades deben sumar $18,000. (¿Se da cuenta por qué?).

PASO 2: Se hace x igual a la cantidad invertida en acciones, entonces $18{,}000 - x$ es la cantidad invertida en bonos. ¿Se da cuenta por qué? Vea el paso 3.

PASO 3: Se construye una tabla.

Cantidad en acciones	Cantidad en bonos	Razón
x	$18{,}000 - x$	Total invertido $18,000

También se sabe que

Cantidad total invertida en bonos	es	la mitad que en acciones
$18{,}000 - x$	$=$	$\frac{1}{2}(x)$

PASO 4: $18{,}000 - x = \frac{1}{2}x$

$$18{,}000 = x + \frac{1}{2}x \qquad \text{Sumar } x \text{ en ambos lados.}$$

$$18{,}000 = \frac{3}{2}x \qquad \text{Simplificar.}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)18{,}000 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}x\right) \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } \frac{2}{3}.$$

$$12{,}000 = x \qquad \text{Simplificar.}$$

Entonces, se invierten $12,000 en acciones y $18,000 − $12,000 = $6000 se invierten en bonos.

PASO 5: La inversión total es $12,000 + $6000 = $18,000 y la cantidad en bonos, $6000, es la mitad de la cantidad en acciones, $12,000. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 83.

EJEMPLO 9 Determinación del salario por hora

Shannon tuvo ingresos de $435 una semana trabajando 52 horas. Su patrón paga salario y medio por todas las horas extra trabajadas, después de 40 horas. Con esta información, ¿podría determinar el salario normal por hora de Shannon?

Solución

PASO 1: Se busca el salario por hora. La respuesta se dará en dólares por hora.

PASO 2: Sea x el salario normal por hora; x se mide en dólares por hora.

PASO 3: Se construye una tabla.

	Horas trabajadas	Salario por hora	Salario
Normal	40	x	$40x$
Horas extra	12	$1.5x$	$12(1.5x) = 18x$

La suma del salario normal más el pago por horas extra será igual a $435. De la tabla, $40x + 18x = 435$.

PASO 4: $40x + 18x = 435$

$$58x = 435$$

$$x = 7.50$$

El salario normal por hora de Shannon es $7.50 por hora.

PASO 5: Cuarenta horas dan un salario de 40(7.50) = $300 y 12 horas de tiempo extra dan un ingreso de 12(1.5)(7.50) = $135, lo que da un total de $435. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 87.

Resumen

Pasos para resolver una ecuación lineal

Para resolver una ecuación lineal se siguen estos pasos:

Paso 1: Si es necesario, elimine las fracciones de la ecuación multiplicando ambos lados por el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores de todas las fracciones.

Paso 2: Elimine los paréntesis y simplifique.

Paso 3: Reúna todos los términos que contienen la variable en un lado y el resto en el otro lado.

Paso 4: Verifique su solución o soluciones.

Aspecto histórico

La resolución de ecuaciones es una de las actividades matemáticas más antiguas, y los esfuerzos para sistematizar esta actividad determinan en gran medida el estado de las matemáticas modernas.

Considere el siguiente problema y su solución usando sólo palabras: resuelva el problema de cuántas manzanas tiene Jim, puesto que

"Las cinco manzanas de Bob y las manzanas de Jim suman doce", piensa,

"Las manzanas de Jim son las doce manzanas menos las cinco de Bob", y luego se concluye,

"Jim tiene siete manzanas".

Los pasos mentales traducidos en álgebra son

$$5 + x = 12$$
$$x = 12 - 5$$
$$= 7$$

La solución de este problema usando sólo palabras es la forma de los inicios del álgebra. Estos problemas se resolvían exactamente de esta manera en Babilonia en 1800 a.C. Casi no se conoce el trabajo matemático antes de esta época, aunque la mayor parte de los estudiosos creen que la sofisticación de los primeros libros indica que seguramente hubo un largo periodo de desarrollo anterior. El método de escribir ecuaciones en palabras persistió miles de años y, aunque ahora parece en extremo enfadoso, se usó de manera muy efectiva durante muchas generaciones de matemáticos. Los árabes crearon una buena parte de la teoría de ecuaciones cúbicas escribiendo todas las ecuaciones en palabras. Alrededor de 1500 d.C., la tendencia a abreviar palabras en las ecuaciones escritas marcó la dirección de la notación moderna; por ejemplo, la palabra en latín *et* (que significa y) se desarrolló en el álgebra como el signo más, +. Aunque el uso ocasional de letras para representar variables data de 1200 d.C., la práctica no se generalizó hasta los años 1600 dC. En adelante, el desarrollo fue rápido, y para 1632 la notación algebraica no difería, en esencia, de la que se usa ahora.

1.1 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas están dadas al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. El hecho de que $2(x + 3) = 2x + 6$ se debe a la propiedad __________. (p. 10)

2. El hecho de que $3x = 0$ implica que $x = 0$ es un resultado de la propiedad __________. (p. 13)

3. El dominio de la variable en la expresión $\frac{x}{x-4}$ es __________. (p. 21)

Conceptos y vocabulario

4. Dos ecuaciones que tienen la misma solución se llaman__________.

5. Una ecuación que se satisface para todos los valores de la variable para los que ambos lados están definidos se llama ecuación __________.

6. Una ecuación de la forma $ax + b = 0$ se llama ecuación __________ o ecuación __________.

7. *Falso o verdadero:* la solución de la ecuación $3x - 8 = 0$ es $\frac{3}{8}$.

8. *Falso o verdadero:* algunas ecuaciones no tienen solución.

Ejercicios

En los problemas 9-16, resuelva las ecuaciones mentalmente.

9. $7x = 21$ **10.** $6x = -24$ **11.** $3x + 15 = 0$ **12.** $6x + 18 = 0$

13. $2x - 3 = 0$ **14.** $3x + 4 = 0$ **15.** $\frac{1}{3}x = \frac{5}{12}$ **16.** $\frac{2}{3}x = \frac{9}{2}$

En los problemas 17-64, resuelva cada ecuación.

17. $3x + 4 = x$ **18.** $2x + 9 = 5x$ **19.** $2t - 6 = 3 - t$

20. $5y + 6 = -18 - y$ **21.** $6 - x = 2x + 9$ **22.** $3 - 2x = 2 - x$

23. $3 + 2n = 4n + 7$ **24.** $6 - 2m = 3m + 1$ **25.** $2(3 + 2x) = 3(x - 4)$

26. $3(2 - x) = 2x - 1$ **27.** $8x - (3x + 2) = 3x - 10$ **28.** $7 - (2x - 1) = 10$

29. $\frac{3}{2}x + 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ **30.** $\frac{1}{3}x = 2 - \frac{2}{3}x$ **31.** $\frac{1}{2}x - 5 = \frac{3}{4}x$

32. $1 - \frac{1}{2}x = 6$ **33.** $\frac{2}{3}p = \frac{1}{2}p + \frac{1}{3}$ **34.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}p = \frac{4}{3}$

35. $0.9t = 0.4 + 0.1t$ **36.** $0.9t = 1 + t$ **37.** $\frac{x + 1}{3} + \frac{x + 2}{7} = 2$

38. $\frac{2x + 1}{3} + 16 = 3x$ **39.** $\frac{2}{y} + \frac{4}{y} = 3$ **40.** $\frac{4}{y} - 5 = \frac{5}{2y}$

41. $\frac{1}{2} + \frac{2}{x} = \frac{3}{4}$ **42.** $\frac{3}{x} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ **43.** $(x + 7)(x - 1) = (x + 1)^2$

44. $(x + 2)(x - 3) = (x + 3)^2$ **45.** $x(2x - 3) = (2x + 1)(x - 4)$ **46.** $x(1 + 2x) = (2x - 1)(x - 2)$

47. $z(z^2 + 1) = 3 + z^3$ **48.** $w(4 - w^2) = 8 - w^3$ **49.** $\frac{x}{x - 2} + 3 = \frac{2}{x - 2}$

50. $\frac{2x}{x + 3} = \frac{-6}{x + 3} - 2$ **51.** $\frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{3}{x + 2}$ **52.** $\frac{x}{x^2 - 9} + \frac{4}{x + 3} = \frac{3}{x^2 - 9}$

53. $\frac{x}{x + 2} = \frac{3}{2}$ **54.** $\frac{3x}{x - 1} = 2$ **55.** $\frac{5}{2x - 3} = \frac{3}{x + 5}$

56. $\frac{-4}{x + 4} = \frac{-3}{x + 6}$ **57.** $\frac{6t + 7}{4t - 1} = \frac{3t + 8}{2t - 4}$ **58.** $\frac{8w + 5}{10w - 7} = \frac{4w - 3}{5w + 7}$

59. $\frac{4}{x - 2} = \frac{-3}{x + 5} + \frac{7}{(x + 5)(x - 2)}$ **60.** $\frac{-4}{2x + 3} + \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{(2x + 3)(x - 1)}$ **61.** $\frac{2}{y + 3} + \frac{3}{y - 4} = \frac{5}{y + 6}$

62. $\frac{5}{5z - 11} + \frac{4}{2z - 3} = \frac{-3}{5 - z}$ **63.** $\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{x + 3}{x^2 - x} = \frac{-3}{x^2 + x}$ **64.** $\frac{x + 1}{x^2 + 2x} - \frac{x + 4}{x^2 + x} = \frac{-3}{x^2 + 3x + 2}$

En los problemas 65-68, use una calculadora para resolver cada ecuación. Redondee a dos decimales.

65. $3.2x + \frac{21.3}{65.871} = 19.23$ **66.** $6.2x - \frac{19.1}{83.72} = 0.195$

67. $14.72 - 21.58x = \frac{18}{2.11}x + 2.4$ **68.** $18.63x - \frac{21.2}{2.6} = \frac{14}{2.32}x - 20$

En los problemas 69-74, resuelva cada ecuación. Las letras a, b y c son constantes.

69. $ax - b = c, \quad a \neq 0$ **70.** $1 - ax = b, \quad a \neq 0$

71. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c, \quad a \neq 0, b \neq 0, a \neq -b$ **72.** $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = c, \quad c \neq 0$

73. $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x + a} = \frac{2}{x - 1}$ **74.** $\frac{b + c}{x + a} = \frac{b - c}{x - a}, \quad c \neq 0, a \neq 0$

75. Encuentre el número a para el que $x = 4$ es una solución de la ecuación
$$x + 2a = 16 + ax - 6a$$

76. Encuentre el número b para el que $x = 2$ es una solución de la ecuación
$$x + 2b = x - 4 + 2bx$$

Los problemas 77-82 dan algunas fórmulas que ocurren en las aplicaciones. Resuelva cada fórmula para la variable indicada.

77. Electricidad $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ para R

78. Finanzas $A = P(1 + rt)$ para r

79. Mecánica $F = \frac{mv^2}{R}$ para R

80. Química $PV = nRT$ para T

81. Matemáticas $S = \frac{a}{1 - r}$ para r

82. Mecánica $v = -gt + v_0$ para t

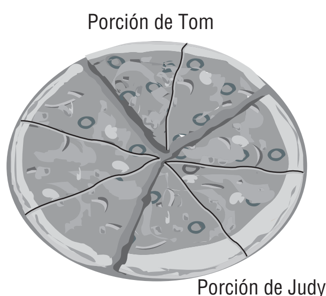
83. Finanzas Se invierte un total de $20,000, parte en bonos y parte en certificados de depósito (CD). Si la cantidad invertida en bonos excede a la invertida en CD por $3000, ¿a cuánto asciende cada tipo de inversión?

84. Finanzas Un total de $10,000 se dividirá entre Sean y George; George recibirá $3000 menos que Sean. ¿Cuánto recibirá cada uno?

85. Finanzas Una herencia de $900,000 debe dividirse entre Scott, Alice y Tricia de la siguiente manera: Alicia recibe $\frac{3}{4}$ de los que obtiene Scott, mientras que Tricia recibe $\frac{1}{2}$ de lo que recibe Scott. ¿Cuánto recibe cada uno?

86. Compartir el costo de una pizza Judy y Tom acordaron compartir el costo de una pizza de $18 con base en lo que cada uno comiera. Tom comió $\frac{2}{3}$ de la cantidad que Judy comió, ¿cuánto debe pagar cada uno?

[**Sugerencia:** quizá quedó algo de la pizza].



87. Cálculo del salario por hora Sandra, a quien se le paga salario y medio por las horas extra trabajadas después de 40 horas, tuvo ingresos netos de $442 por 48 horas trabajadas. ¿Cuál es su salario por hora?

88. Cálculo del salario por hora Leigh, gana salario y medio por las horas extra después de 40 horas y doble por horas trabajadas en domingo. Si tuvo un ingreso neto de $342 por trabajar 50 horas, 4 de las cuales fueron en domingo, ¿cuál es su salario por hora?

89. Cálculo de calificaciones Al presentar su examen final, que contará como dos parciales, Brooke tiene calificaciones de 80, 83, 71, 61 y 95. ¿Qué calificación necesita Brooke en el examen final para obtener promedio de 80?

90. Cálculo de calificaciones Al presentar el examen final, que contará como dos tercios de la calificación final, Mike tiene calificaciones en exámenes de 86, 80, 84 y 90. ¿Qué calificación necesita Mike en el examen final para obtener B, que requiere promedio de 80? ¿Qué necesita para obtener A, que requiere promedio de 90?

91. Negocios: precio de descuento Un constructor de casas móviles redujo el precio de un modelo 15%. Si el nuevo precio es $125,000, ¿cuál era el precio original? ¿Cuánto se ahorra al comprar ese modelo?

92. Negocios: precio de descuento Un distribuidor de autos, en una barata de fin de año, reduce 15% la lista de precios de los modelos del año anterior. Si cierto modelo de cuatro puertas tiene un descuento de $8000, ¿cuál era su precio de lista? ¿Cuánto se ahorra al comprar el modelo del año anterior?

93. Negocios: marcando el precio de los libros Una librería universitaria sube 35% el precio que paga a la editorial por un libro. Si el precio de venta de un libro es $56.00, ¿cuánto pagó la librería por el libro?



94. Finanzas personales: costo de un auto El precio de lista sugerido de un auto nuevo es $12,000. El costo para el distribuidor es 85% del precio de lista. ¿Cuánto pagaría si el distribuidor está dispuesto a aceptar $100 por arriba del costo del automóvil?

95. Negocios: asistencia al teatro El administrador del Coral Theater desea saber si la mayor parte de sus clientes habituales son adultos o niños. Durante una semana en julio vendió 5200 boletos y los ingresos fueron por un total de $20,335. La admisión por adulto es $4.75 y por niño, $2.50. ¿Cuántos adultos entraron?

96. Negocios: descuento en el precio Un traje de lana, rebajado 30% en una barata, tiene un precio en la etiqueta de $399. ¿Cuál era el precio original del traje?

97. Geometría El perímetro de un rectángulo es 60 pies. Encuentre su longitud y ancho si la longitud es 8 pies más larga que el ancho.

98. Geometría El perímetro de un rectángulo es 42 metros. Encuentre su largo y ancho si el largo es el doble que el ancho.

99. Uno de los pasos en la siguiente lista contiene un error. Identifíquelo y explique por qué está mal.

$$x = 2 \quad (1)$$
$$3x - 2x = 2 \quad (2)$$
$$3x = 2x + 2 \quad (3)$$
$$x^2 + 3x = x^2 + 2x + 2 \quad (4)$$
$$x^2 + 3x - 10 = x^2 + 2x - 8 \quad (5)$$
$$(x - 2)(x + 5) = (x - 2)(x + 4) \quad (6)$$
$$x + 5 = x + 4 \quad (7)$$
$$1 = 0 \quad (8)$$

100. La ecuación

$$\frac{5}{x+3} + 3 = \frac{8+x}{x+3}$$

no tiene solución, pero cuando se trabaja en los pasos para resolverla se obtiene $x = -3$. Escriba un párrafo breve para explicar qué ocasiona este valor.

101. Construya una ecuación que no tenga solución y désela a un compañero para su solución. Pídale que escriba una crítica de su ecuación.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. Distributiva **2.** Producto cero **3.** $\{x|x \neq 4\}$

1.2 Ecuaciones cuadráticas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Factorización de polinomios (Repaso, sección R.5, pp. 43-50)
- Raíces cuadradas (Repaso, sección R.2, pp. 23-24)
- Propiedad de producto cero (Repaso, sección R.1, p. 13)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?" de la página 106.

OBJETIVOS
1 Resolver una ecuación cuadrática factorizando
2 Saber cómo completar cuadrados
3 Resolver ecuaciones cuadráticas completando cuadrados
4 Resolver una ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática
5 Resolver problemas de aplicación con ecuaciones cuadráticas

Las *ecuaciones cuadráticas* son ecuaciones como las siguientes

$$2x^2 + x + 8 = 0$$
$$3x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x^2 - 9 = 0$$

En seguida se da una definición general.

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Se dice que una ecuación cuadrática escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ está en la **forma estándar**.

En ocasiones, una ecuación cuadrática se llama **ecuación de segundo grado**, porque el lado izquierdo es un polinomio de grado 2. Se analizarán tres maneras de resolver ecuaciones cuadráticas: factorizando, completando cuadrados y usando la fórmula cuadrática.

Factorización

1 Cuando una ecuación cuadrática está escrita en la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$, puede ser posible factorizar la expresión del lado izquierdo como el producto de dos polinomios de primer grado. Entonces, al usar la propiedad del producto cero e igualar a cero cada factor, se resuelven las ecuaciones lineales que resultan y se obtienen las soluciones a la ecuación cuadrática.

Veamos unos ejemplos.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación cuadrática factorizando

Resuelva la ecuación: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Solución La ecuación está en la forma estándar especificada en la ecuación (1). El lado izquierdo se factoriza como

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x-2)(x-3) = 0 \quad \text{Factorizar}$$

Se iguala cada factor a 0 y se resuelven las ecuaciones de primer grado obtenidas.

$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0 \quad \text{Propiedad de producto cero}$$
$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = 3 \quad \text{Despejar}$$

El conjunto de soluciones es $\{2, 3\}$. ◀

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación cuadrática factorizando

Resuelva la ecuación: $2x^2 = x + 3$

Solución Se pone la ecuación en la forma estándar sumando $-x - 3$ en ambos lados.

$$2x^2 = x + 3$$
$$2x^2 - x - 3 = 0 \quad \text{Sumar } -x-3 \text{ en ambos lados.}$$

El lado izquierdo ahora se factoriza como

$$(2x-3)(x+1) = 0 \quad \text{Factorizar}$$

de manera que

$$2x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0 \quad \text{Propiedad de producto cero}$$
$$x = \frac{3}{2} \qquad x = -1 \quad \text{Despejar}$$

El conjunto de soluciones es $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$. ◀

Cuando el lado izquierdo se factoriza en dos ecuaciones lineales con la misma solución, se dice que la ecuación cuadrática tiene **soluciones repetidas**. Esta solución también recibe el nombre de **raíz de multiplicidad 2** o **raíz doble**.

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación cuadrática factorizando

Resuelva la ecuación: $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Solución Esta ecuación ya está en la forma estándar, y el lado izquierdo se factoriza.

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$(3x-1)(3x-1) = 0$$

de manera que

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{3}$$

Esta ecuación sólo tiene la solución repetida $\frac{1}{3}$. ◀



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 11 Y 21.

Método de la raíz cuadrada

Suponga que se quiere resolver la ecuación cuadrática

$$x^2 = p \tag{2}$$

donde $p \geq 0$ es un número no negativo. Se procede como en los ejemplos anteriores.

$$x^2 - p = 0 \quad \text{Poner en forma estándar.}$$
$$(x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p}) = 0 \quad \text{Factorizar (sobre los números reales).}$$
$$x = \sqrt{p} \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{p} \quad \text{Despejar.}$$

Se tiene el siguiente resultado:

> Si $x^2 = p$ y $p \geq 0$, entonces $x = \sqrt{p}$ o $x = -\sqrt{p}$. **(3)**

El método enunciado en la proposición (3), se llama **método de la raíz cuadrada**. En la proposición (3), observe que si $p > 0$, la ecuación $x^2 = p$ tiene dos soluciones, $x = \sqrt{p}$ y $x = -\sqrt{p}$. Por lo común, estas soluciones se abrevian como $x = \pm\sqrt{p}$, leído "x es igual a más menos la raíz cuadrada de p".

Por ejemplo, las dos soluciones de la ecuación

$$x^2 = 4$$

son

$$x = \pm\sqrt{4} \quad \text{Usar el método de la raíz cuadrada.}$$

y como $\sqrt{4} = 2$, se tiene

$$x = \pm 2$$

El conjunto de soluciones es $\{-2, 2\}$

EJEMPLO 4 Solución de la ecuación cuadrática usando el método de la raíz cuadrada

Resuelva la ecuación

a) $x^2 = 5$ b) $(x - 2)^2 = 16$

Solución a) Se usa el método de la raíz cuadrada para obtener

$$x^2 = 5$$
$$x = \pm\sqrt{5} \quad \text{Usar el método de la raíz cuadrada.}$$
$$x = \sqrt{5} \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{5}$$

El conjunto de soluciones es $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

b) Se usa el método de la raíz cuadrada para obtener

$$(x-2)^2 = 16$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{16} \qquad \text{Usar el método de la raíz cuadrada.}$$

$$x - 2 = \pm 4$$

$$x - 2 = 4 \quad \text{o} \quad x - 2 = -4$$

$$x = 6 \quad \text{o} \quad x = -2$$

El conjunto de soluciones es $\{-2, 6\}$. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

Completar cuadrados


Ahora se introduce el método de **completar cuadrados**. La idea detrás de este método es *ajustar* el lado izquierdo de una ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$, de manera que se convierta en un cuadrado perfecto, es decir, el cuadrado de un polinomio de primer grado. Por ejemplo, $x^2 + 6x + 9$ y $x^2 - 4x + 4$ son cuadrados perfectos porque

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \quad \text{y} \quad x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

¿Cómo se ajusta el lado izquierdo? Se hace sumando el número adecuado al lado izquierdo para crear un cuadrado perfecto. Por ejemplo, para hacer que $x^2 + 6x$ sea un cuadrado perfecto, se suma 9.

Veamos varios ejemplos de completar cuadrados cuando el coeficiente de x^2 es 1:

Inicio	Sumar	Resultado
$x^2 + 4x$	4	$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$
$x^2 + 12x$	36	$x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$
$x^2 - 6x$	9	$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
$x^2 + x$	$\frac{1}{4}$	$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

¿Ve el patrón? Siempre que el coeficiente de x^2 sea 1, se completa el cuadrado sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

Procedimiento para completar cuadrados

Inicio	Sumar	Resultado
$x^2 + mx$	$\left(\frac{m}{2}\right)^2$	$x^2 + mx + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2$


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 35.


El siguiente ejemplo ilustra de qué manera se utiliza el procedimiento de completar el cuadrado para resolver una ecuación cuadrática.

EJEMPLO 5 Solución de una ecuación cuadrática completando el cuadrado

Resuelva completando cuadrados: $x^2 + 5x + 4 = 0$

Solución Siempre se inicia el procedimiento reacomodando la ecuación de forma que la constante esté del lado derecho.

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$
$$x^2 + 5x = -4$$

Como el coeficiente de x^2 es 1, se completa el cuadrado en el lado izquierdo sumando $\left(\frac{1}{2}\cdot 5\right)^2 = \frac{25}{4}$. Por supuesto, en una ecuación, lo que se suma en el lado izquierdo debe sumarse también en el derecho. Entonces se suma $\frac{25}{4}$ en *ambos* lados.

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = -4 + \frac{25}{4} \qquad \text{Sumar } \frac{25}{4} \text{ en ambos lados.}$$
$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \qquad \text{Factorizar.}$$
$$x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \qquad \text{Usar el método de raíz cuadrada.}$$
$$x + \frac{5}{2} = \pm\frac{3}{2}$$
$$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$x = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1 \quad \text{o} \quad x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -4$$

El conjunto de soluciones es $\{-4, -1\}$. ◀



LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN EN EL EJEMPLO 5 TAMBIÉN SE OBTIENE FACTORIZANDO. TRABAJE DE NUEVO EN EL EJEMPLO 5 USANDO ESTA TÉCNICA.

El siguiente ejemplo ilustra una ecuación que no se puede resolver por factorización.

EJEMPLO 6 Solución de una ecuación completando cuadrados

Resuelva completando el cuadrado: $2x^2 - 8x - 5 = 0$

Solución Primero reescriba la ecuación

$$2x^2 - 8x - 5 = 0$$
$$2x^2 - 8x = 5$$

Ahora divida ambos lados entre 2 para que el coeficiente de x^2 sea 1. (Esto permite completar el cuadrado en el siguiente paso).

$$x^2 - 4x = \frac{5}{2}$$

Por último, complete el cuadrado sumando 4 en ambos lados.

$$x^2 - 4x + 4 = \frac{5}{2} + 4$$

$$(x-2)^2 = \frac{13}{2}$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{\frac{13}{2}} \qquad \text{Usar el método de la raíz cuadrada.}$$

$$x - 2 = \pm\frac{\sqrt{26}}{2} \qquad \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$x = 2 \pm \frac{\sqrt{26}}{2}$$

El conjunto de soluciones es $\left\{2 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{26}}{2}\right\}$ ◀

Nota: Si se deseara una aproximación de estas soluciones, digamos redondeadas a dos decimales, se usaría una calculadora para obtener $\{-0.55, 4.55\}$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 41.

La fórmula cuadrática

 Se usa el método de completar el cuadrado para obtener una fórmula general para resolver la ecuación cuadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Nota: No hay pérdida de generalidad al suponer que $a > 0$, ya que si $a < 0$ se multiplica por -1 para obtener una ecuación equivalente con un primer coeficiente positivo.

Igual que en los ejemplos 5 y 6, se reacomodan los términos como

$$ax^2 + bx = -c \qquad a > 0$$

Como $a > 0$, se dividen ambos lados entre a para obtener

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Ahora el coeficiente de x^2 es 1. Para completar el cuadrado en el lado izquierdo, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x; es decir, se suma

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

en ambos lados. Entonces

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Siempre que $b^2 - 4ac \geq 0$, se utiliza el método de la raíz cuadrada para obtener

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La raíz cuadrada de un cociente es igual al cociente de las raíces cuadradas; además, $\sqrt{4a^2} = 2a$ puesto que $a > 0$.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sumar $-\frac{b}{2a}$ en ambos lados.

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Combinar los cocientes a la derecha.

¿Qué pasa si $b^2 - 4ac$ es negativo? Entonces la ecuación (4) establece que la expresión de la izquierda (un número real elevado al cuadrado) es igual a la expresión de la derecha (un número negativo). Como esto es imposible para los números reales, se concluye que si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene solución *real*. (Se estudiarán las ecuaciones cuadráticas para las que la cantidad $b^2 - 4ac < 0$ con detalle en la siguiente sección).

A continuación se establece la *fórmula cuadrática*.

Teorema

Considere la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, esta ecuación no tiene solución real.

Si $b^2 - 4ac \geq 0$, la solución o soluciones reales de esta ecuación están dadas por la **fórmula cuadrática**.

Fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textbf{(5)}$$

La cantidad $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática, porque su valor indica si la ecuación tiene soluciones reales. De hecho, también indica cuántas soluciones esperar.

Discriminante de una ecuación cuadrática

Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, existen dos soluciones reales diferentes.

2. Si $b^2 - 4ac = 0$, existe una solución repetida, una raíz de multiplicidad 2.

3. Si $b^2 - 4ac < 0$, no hay una solución real.

Cuando se pide encontrar las soluciones reales, si las hay, de una ecuación cuadrática, siempre se evalúa el discriminante para ver cuántas soluciones reales se tienen.

EJEMPLO 7 Solución de una ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática

Utilice la ecuación cuadrática para encontrar las soluciones reales, si las hay, de la ecuación

$$3x^2 - 5x + 1 = 0$$

Solución La ecuación está en la forma estándar, de manera que se compara con $ax^2 + bx + c = 0$ para encontrar a, b y c.

$$3x^2 - 5x + 1 = 0$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a = 3, b = -5, c = 1$$

Con $a = 3, b = -5$ y $c = 1$, se evalúa el discriminante $b^2 - 4ac$.

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(1) = 25 - 12 = 13$$

Como $b^2 - 4ac > 0$, existen dos soluciones reales, que se podrían encontrar usando la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{13}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

El conjunto de soluciones es $\left\{\frac{5 - \sqrt{13}}{6}, \frac{5 + \sqrt{13}}{6}\right\}$. ◄

EJEMPLO 8 Solución de una ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática

Utilice la fórmula cuadrática para encontrar las soluciones reales, si las hay, de la ecuación

$$\frac{25}{2}x^2 - 30x + 18 = 0$$

Solución La ecuación está dada en la forma estándar. Sin embargo, para simplificar la aritmética, se eliminan las fracciones.

$$\frac{25}{2}x^2 - 30x + 18 = 0$$
$$25x^2 - 60x + 36 = 0 \qquad \text{Eliminar fracciones; multiplicar por 2.}$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{Comparar con la forma estándar.}$$

Con $a = 25, b = -60$ y $c = 36$, se evalúa el discriminante.

$$b^2 - 4ac = (-60)^2 - 4(25)(36) = 3600 - 3600 = 0$$

La ecuación tiene una solución repetida, que se encuentra usando la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{60 \pm \sqrt{0}}{50} = \frac{60}{50} = \frac{6}{5}$$

El conjunto de soluciones es $\left\{\frac{6}{5}\right\}$. ◄

EJEMPLO 9 **Solución de una ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática**

Utilice la fórmula cuadrática para encontrar las soluciones reales, si las hay, de la ecuación

$$3x^2 + 2 = 4x$$

Solución La ecuación, como está dada, no se encuentra en la forma estándar.

$$3x^2 + 2 = 4x$$

$$3x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \text{Poner en la forma estándar.}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{Comparar con la forma estándar.}$$

Con $a = 3$, $b = -4$ y $c = 2$, se encuentra

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(3)(2) = 16 - 24 = -8$$

Como $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales. ◄

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 51 Y 61.

Algunas veces una ecuación dada se transforma en una ecuación cuadrática para resolverla usando la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 10 **Solución de una ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática**

Encuentre las soluciones reales, si las hay, de la ecuación:

$$9 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} = 0, \; x \neq 0.$$

Solución En su forma actual, la ecuación

$$9 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} = 0$$

no es una ecuación cuadrática. Sin embargo, se puede transformar en una multiplicando cada lado por x^2. El resultado es

$$9x^2 + 3x - 2 = 0$$

Aunque se multiplicó cada lado por x^2, se sabe que $x^2 \neq 0$ (¿por qué?), de manera que esta ecuación cuadrática es equivalente a la ecuación original.

Usando $a = 9$, $b = 3$ y $c = -2$, el discriminante es

$$b^2 - 4ac = 3^2 - 4(9)(-2) = 9 + 72 = 81$$

Como $b^2 - 4ac > 0$, la nueva ecuación tiene dos soluciones reales.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2(9)} = \frac{-3 \pm 9}{18}$$

$$x = \frac{-3 + 9}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{-3 - 9}{18} = \frac{-12}{18} = -\frac{2}{3}$$

El conjunto de soluciones es $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$. ◄

Resumen

Procedimiento para resolver una ecuación cuadrática

Para resolver una ecuación cuadrática, primero se convierte a la forma estándar:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Luego,

PASO 1: Identifique a, b y c.

PASO 2: Evalúe el discriminante, $b^2 - 4ac$.

PASO 3: a) Si el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.
b) Si el discriminante es cero, la ecuación tiene una solución real, una raíz repetida.
c) Si el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes. Si se detectan los factores, use el método de factorización para resolver la ecuación. De otra manera, utilice la fórmula cuadrática o el método de completar el cuadrado.

Aplicación

5 

Muchos problemas aplicados requieren la solución de una ecuación cuadrática. Se estudiará uno que quizá vea de nuevo en forma un poco diferente si estudia cálculo.

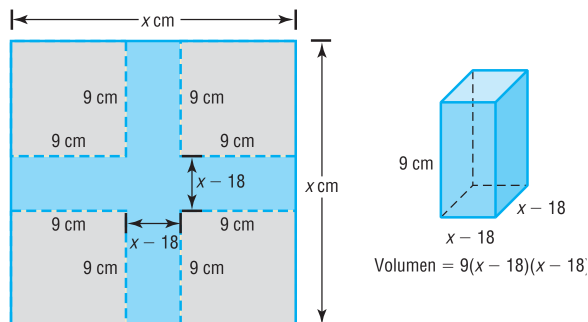
EJEMPLO 11 Construcción de una caja

En cada esquina de una hoja de metal cuadrada, corte un cuadrado con lado de 9 centímetros. Doble hacia arriba las orillas para forma una caja cuadrada. Si la caja debe tener una capacidad de 144 centímetros cúbicos (cm^3), ¿cuáles deben ser las dimensiones de la hoja de metal?

Solución Se usará la figura 1 como guía. Se etiquetó con x la longitud del lado de la hoja cuadrada de metal. La caja tendrá 9 cm de altura y su base cuadrada tendrá $x - 18$ como longitud del lado. El volumen (largo × ancho × alto) de la caja es entonces

$$(x - 18)(x - 18) \cdot 9 = 9(x - 18)^2$$

Figura 1



Como el volumen de la caja debe ser 144 cm^3, se tiene

$$9(x - 18)^2 = 144$$
$$(x - 18)^2 = 16 \quad \text{Dividir cada lado entre 9.}$$
$$x - 18 = \pm 4 \quad \text{Usar el método de la raíz cuadrada.}$$
$$x = 18 \pm 4$$
$$x = 22 \quad \text{o} \quad x = 14$$

Se descarta la solución $x = 14$ (¿por qué?) y se concluye que la hoja de metal debe tener 22 centímetros por 22 centímetros.

✔ **COMPROBACIÓN:** Se comienza con una hoja de metal de 22 cm por 22 cm, se corta un cuadrado de 9 cm en cada esquina y se doblan las orillas hacia arriba, se obtiene una caja cuyas dimensiones son 9 por 4 por 4, con volumen $9 \times 4 \times 4 = 144 \text{ cm}^3$, como se requiere. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 97.

ASPECTO HISTÓRICO

Los problemas que usan ecuaciones cuadráticas se encuentran en la literatura de matemáticas más antigua. La gente de Babilonia y Egipto resolvía problemas de este tipo antes de 1800 a.C. Euclides resolvió ecuaciones cuadráticas de manera geométrica en su *Data* (300 a.C.), y en la India y Arabia se daban reglas para resolver cualquier ecuación cuadrática con raíces reales. Puesto que los números negativos no se usaban con libertad antes de 1500 d.C., había varios tipos de ecuaciones cuadráticas, cada uno con sus propias reglas. Thomas Harriot (1560-1621) introdujo el método de factorización para obtener soluciones, y François Viète (1540-1603) introdujo un método que en esencia es completar el cuadrado.

Hasta los tiempos modernos era usual despreciar las raíces negativas (si las había), y las ecuaciones que involucraban raíces cuadradas de cantidades negativas se veían como sin solución hasta los años 1500.

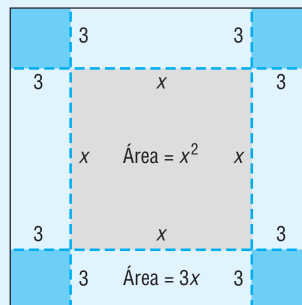
Problemas históricos

1. *Una de las soluciones de al-Khwăiismi* Se resuelve $x^2 + 12x = 85$ dibujando el cuadrado que se muestra. El área de los cuatro rectángulos blancos y el gris claro es $x^2 + 12x$. Después, esta expresión se hace igual a 85 para obtener la ecuación $x^2 + 12x = 85$. Se suman los cuatro cuadrados azules y se tiene un cuadrado más grande de área conocida. Complete la solución.
2. *Método de Viète* Se resuelve $x^2 + 12x - 85 = 0$ haciendo $x = u + z$. Entonces

$$(u + z)^2 + 12(u + z) - 85 = 0$$
$$u^2 + (2z + 12)u + (z^2 + 12z - 85) = 0$$

Ahora se selecciona z tal que $2z + 12 = 0$; termine la solución.

3. *Otro método para obtener la fórmula cuadrática* Observe la ecuación (4) en la página 101. Reescriba el lado derecho como $\left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$ y luego réstelo de cada lado. El lado derecho ahora es cero y el izquierdo es una diferencia de dos cuadrados. Si factoriza esta diferencia, podrá obtener con facilidad la fórmula cuadrática y, lo que es más, la expresión cuadrática está factorizada, lo cual en ocasiones es útil.



1.2 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Factorice: $x^2 - 5x - 6$ (pp. 43–50)
2. Factorice: $2x^2 - x - 3$ (pp. 43–50)
3. El conjunto de soluciones de la ecuación $(x-3)(3x + 5) = 0$ es __________. (p. 13)
4. *Falso o verdadero:* $\sqrt{x^2} = |x|$. (pp. 23–24)

Conceptos y vocabulario

5. Para completar el cuadrado de la expresión $x^2 + 5x$, se __________ el número __________.
6. La cantidad $b^2 - 4ac$ se llama __________ de una ecuación cuadrática. Si es __________ la ecuación no tiene soluciones.
7. *Falso o verdadero:* las ecuaciones cuadráticas siempre tienen dos soluciones reales.
8. *Falso o verdadero:* si el discriminante de una ecuación cuadrática es positivo, entonces la ecuación tiene dos soluciones tales que una es el negativo de la otra.

Ejercicios

En los problemas 9-28, resuelva cada ecuación factorizando.

9. $x^2 - 9x = 0$ **10.** $x^2 + 4x = 0$ **11.** $x^2 - 25 = 0$ **12.** $x^2 - 9 = 0$

13. $z^2 + z - 6 = 0$ **14.** $v^2 + 7v + 6 = 0$ **15.** $2x^2 - 5x - 3 = 0$ **16.** $3x^2 + 5x + 2 = 0$

17. $3t^2 - 48 = 0$ **18.** $2y^2 - 50 = 0$ **19.** $x(x - 8) + 12 = 0$ **20.** $x(x + 4) = 12$

21. $4x^2 + 9 = 12x$ **22.** $25x^2 + 16 = 40x$ **23.** $6(p^2 - 1) = 5p$ **24.** $2(2u^2 - 4u) + 3 = 0$

25. $6x - 5 = \frac{6}{x}$ **26.** $x + \frac{12}{x} = 7$ **27.** $\frac{4(x-2)}{x-3} + \frac{3}{x} = \frac{-3}{x(x-3)}$ **28.** $\frac{5}{x+4} = 4 + \frac{3}{x-2}$

En los problemas 29-34, resuelva cada ecuación por el método de la raíz cuadrada.

29. $x^2 = 25$ **30.** $x^2 = 36$ **31.** $(x - 1)^2 = 4$

32. $(x + 2)^2 = 1$ **33.** $(2x + 3)^2 = 9$ **34.** $(3x - 2)^2 = 4$

En los problemas 35-40, ¿qué número debe sumarse para completar el cuadrado de cada expresión?

35. $x^2 + 8x$ **36.** $x^2 - 4x$ **37.** $x^2 + \frac{1}{2}x$

38. $x^2 - \frac{1}{3}x$ **39.** $x^2 - \frac{2}{3}x$ **40.** $x^2 - \frac{2}{5}x$

En los problemas 41-46, resuelva cada ecuación completando cuadrados.

41. $x^2 + 4x = 21$ **42.** $x^2 - 6x = 13$ **43.** $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{16} = 0$

44. $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ **45.** $3x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$ **46.** $2x^2 - 3x - 1 = 0$

En los problemas 47-66, encuentre las soluciones reales, si las hay, de cada ecuación. Utilice la fórmula cuadrática.

47. $x^2 - 4x + 2 = 0$ **48.** $x^2 + 4x + 2 = 0$ **49.** $x^2 - 4x - 1 = 0$ **50.** $x^2 + 6x + 1 = 0$

51. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ **52.** $2x^2 + 5x + 3 = 0$ **53.** $4y^2 - y + 2 = 0$ **54.** $4t^2 + t + 1 = 0$

55. $4x^2 = 1 - 2x$ **56.** $2x^2 = 1 - 2x$ **57.** $4x^2 = 9x$ **58.** $5x = 4x^2$

59. $9t^2 - 6t + 1 = 0$ **60.** $4u^2 - 6u + 9 = 0$ **61.** $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$ **62.** $\frac{2}{3}x^2 - x - 3 = 0$

63. $4 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 0$ **64.** $4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$ **65.** $3x = 1 - \frac{1}{x}$ **66.** $x = 1 - \frac{4}{x}$

En los problemas 67-74, encuentre las soluciones reales, si las hay, de cada ecuación. Utilice la fórmula cuadrática y una calculadora. Exprese las repuestas redondeadas a dos decimales.

67. $x^2 - 4.1x + 2.2 = 0$ **68.** $x^2 + 3.9x + 1.8 = 0$ **69.** $x^2 + \sqrt{3}x - 3 = 0$

70. $x^2 + \sqrt{2}x - 2 = 0$ **71.** $\pi x^2 - x - \pi = 0$ **72.** $\pi x^2 + \pi x - 2 = 0$

73. $3x^2 + 8\pi x + \sqrt{29} = 0$ **74.** $\pi x^2 - 15\sqrt{2}x + 20 = 0$

En los problemas 75-86, encuentre las soluciones reales, si las hay, de cada ecuación cuadrática. Utilice cualquier método.

75. $x^2 - 5 = 0$ **76.** $x^2 - 6 = 0$ **77.** $16x^2 - 8x + 1 = 0$

78. $9x^2 - 6x + 1 = 0$ **79.** $10x^2 - 19x - 15 = 0$ **80.** $6x^2 + 7x - 20 = 0$

81. $2 + z = 6z^2$ **82.** $2 = y + 6y^2$ **83.** $x^2 + \sqrt{2}x = \frac{1}{2}$

84. $\frac{1}{2}x^2 = \sqrt{2}x + 1$ **85.** $x^2 + x = 4$ **86.** $x^2 + x = 1$

En los problemas 87-92, use el discriminante para determinar si cada ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas, una solución real repetida o no tiene soluciones reales; no resuelva la ecuación.

87. $2x^2 - 6x + 7 = 0$ **88.** $x^2 + 4x + 7 = 0$ **89.** $9x^2 - 30x + 25 = 0$

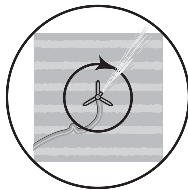
90. $25x^2 - 20x + 4 = 0$ **91.** $3x^2 + 5x - 8 = 0$ **92.** $2x^2 - 3x - 7 = 0$

93. **Dimensiones de una ventana** El área del claro de una ventana rectangular debe ser 143 pies cuadrados. Si el largo debe ser 2 pies mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones?

94. **Dimensiones de una ventana** El área de una ventana rectangular debe ser 306 cm^2. Si la longitud excede al ancho en 1 cm, ¿cuáles son las dimensiones de la ventana?

95. **Geometría** Encuentre las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 26 metros y cuya área es 40 m^2.

96. **Riego de un campo** Un aspersor de agua ajustable que riega en un patrón circular se coloca en el centro de un campo cuadrado cuya área es 1250 pies cuadrados (vea la figura). ¿Cuál es el menor radio que se podría usar si debe cubrir el campo por completo dentro del círculo?



97. **Construcción de una caja** Debe construirse una caja abierta a partir de una hoja cuadrada de metal cortando cuadrados de lado 1 pie en cada esquina y doblando las orillas hacia arriba. Si la caja debe tener 4 pies cúbicos de capacidad, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la hoja de metal?

98. **Construcción de una caja** Trabaje de nuevo el problema 97 si la pieza de metal es rectangular con largo del doble que el ancho.

99. **Física** Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio que mide 96 pies, con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La distancia s (en pies) de la pelota al suelo después de t segundos es $s = 96 + 80t - 16t^2$.
   a) ¿Después de cuántos segundos llega la pelota al suelo?
   b) ¿Después de cuántos segundos pasa la pelota por lo alto del edificio en su caída al suelo?

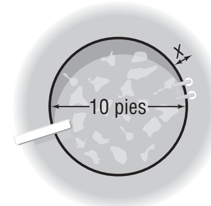
100. **Física** Un objeto se dispara verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 metros por segundo. La distancia s (en metros) del objeto al suelo después de t segundos es $s = -4.9t^2 + 20t$.
   a) ¿Cuándo estará el objeto 15 metros arriba del suelo?
   b) ¿Cuándo pegará en el suelo?
   c) ¿Llegará el objeto a 100 metros de altura?

101. **Reducción del tamaño de la barra de chocolate** Una barra de chocolate jumbo con forma rectangular mide 12 cm de largo, 7 cm de ancho y 3 cm de grueso. Debido a la escalada de los costos de cocoa, la administración decidió reducir 10% el volumen de la barra. Para lograrlo, desea que la nueva barra tenga los mismos 3 cm de grueso, pero debe reducirse el largo y ancho el mismo número de centímetros. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la nueva barra de chocolate?



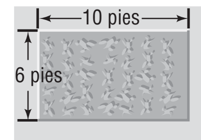
102. **Reducción de la barra de chocolate** Trabaje de nuevo el problema 101 si la reducción debe ser 20%.

103. **Construcción del borde de una alberca** Una piscina circular mide 10 pies de un lado a otro. Debe usarse una yarda cúbica de concreto para crear un borde circular de ancho uniforme alrededor de la alberca. Si el borde debe tener 3 pulgadas de grueso, ¿qué tan ancho puede ser? (1 yarda cúbica = 27 pies cúbicos) Vea la ilustración.



104. **Construcción del borde de una alberca** Trabaje de nuevo el problema 103 si el grueso debe ser 4 pulgadas.

105. **Construcción del borde de una jardinera** Un arquitecto de paisaje acaba de terminar una jardinera de flores que mide 6 por 10 pies, ordena 1 yarda cúbica de cemento premezclado que se usará todo para crear un borde de ancho uniforme alrededor de la jardinera. Si el borde debe tener 3 pulgadas de grueso, ¿qué tan ancho puede ser?



106. **Dimensiones de un patio** Un contratista ordena 8 yardas cúbicas de cemento premezclado, que usará todo en el firme de un patio que tendrá 4 pulgadas de grueso. Si el largo del patrio se especifica como el doble del ancho, ¿cuáles serán las dimensiones del patio? (1 yarda cúbica = 27 pies cúbicos).

107. La suma de enteros consecutivos 1, 2, 3, . . . , n está dada por la fórmula $\frac{1}{2}n(n + 1)$. ¿Cuántos enteros consecutivos, comenzando con 1, deben sumarse para obtener un total de 666?

108. **Geometría** Sin un polígono de n lados tiene $\frac{1}{2}n(n - 3)$ diagonales, ¿cuántos lados tendrá si el polígono tiene 65 diagonales? ¿Existe un polígono con 80 diagonales?

109. Demuestre que la suma de las raíces de una ecuación cuadrática es $-\frac{b}{a}$.

110. Demuestre que el producto de las raíces de una ecuación cuadrática es $\frac{c}{a}$.

111. Encuentre k tal que la ecuación $kx^2 + x + k = 0$ tenga una solución real repetida.

112. Encuentre k tal que la ecuación $x^2 - kx + 4 = 0$ tenga una solución real repetida.

113. Demuestre que las soluciones reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los negativos de las soluciones reales de la ecuación $ax^2 - bx + c = 0$. Suponga que $b^2 - 4ac \geq 0$.

114. Demuestre que las soluciones reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los recíprocos de las soluciones reales de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$. Suponga que $b^2 - 4ac \geq 0$.

115. ¿Cuáles de los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes? Explique.

a) $x^2 = 9$; $x = 3$

b) $x = \sqrt{9}$; $x = 3$

c) $(x - 1)(x - 2) = (x - 1)^2$; $x - 2 = x - 1$

116. Describa tres maneras de resolver una ecuación cuadrática. Establezca su método preferido; explique por qué lo elige.

117. Explique los beneficios de evaluar el discriminante de una ecuación cuadrática antes de intentar resolverla.

118. Desarrolle tres ecuaciones cuadráticas: una con dos soluciones distintas, otra sin soluciones reales y una que tenga exactamente una solución real.

119. La palabra *cuadrática* parece implicar cuatro, pero una ecuación cuadrática es una ecuación que involucra un polinomio de grado 2. Investigue el origen del término *cuadrática* según se usa en la expresión *ecuación cuadrática*. Escriba un resumen breve de lo que encontró.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $(x - 6)(x + 1)$

2. $(2x - 3)(x + 1)$

3. $\left\{-\frac{5}{3}, 3\right\}$

4. Verdadero

1.3 Ecuaciones cuadráticas en el sistema de números complejos*

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de iniciar repase lo siguiente:*

- Clasificación de números (Repaso, sección R.1, pp. 2-4)
- Racionalización de denominadores (Repaso, sección R.8, pp. 72-73)


Trabaje ahora los problemas de "¿Está preparado?" de la página 116.

OBJETIVOS
1 Sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos
2 Resolver ecuaciones cuadráticas en el sistema de números complejos

Números complejos

Una propiedad de un número real es que su cuadrado es no negativo. Por ejemplo, no existe un número real tal que

$$x^2 = -1$$

Para remediar esta situación, se introduce un número llamado **unidad imaginaria**, que se denota por $\boldsymbol{i}$ y cuyo cuadrado es -1:

$$i^2 = -1$$

Esto no debe sorprenderle. Si nuestro universo consistiera sólo de enteros, no habría números para los cuales $2x = 1$. Esta desafortunada circunstancia se remedió introduciendo números como $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, *números racionales*.

*Esta sección se podría omitirse sin pérdida de continuidad.

Si nuestro universo consistiera sólo de números racionales, no habría una x tal que su cuadrado fuera 2. Es decir, no existiría un número x tal que $x^2 = 2$. Para corregir esto, se introdujeron números como $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{5}$, los *números irracionales*. Los *números reales*, recordará, consisten en números racionales y números irracionales. Ahora, si nuestro universo consistiera sólo de números reales, entonces no habría números x cuyo cuadrado fuera -1. Para rectificar esto, se introduce un número i, cuyo cuadrado es -1.

En la progresión descrita, cada vez que se encuentra una situación no adecuada, se introduce un nuevo sistema de números para corregir la situación. Cada nuevo sistema de números contiene el sistema de números anterior como subconjunto. El sistema de números obtenido al introducir el número i se llama **sistema de números complejos**.

Los **números complejos** son de la forma $\boldsymbol{a + bi}$, donde a y b son números reales. El número real a se llama **parte real** del número $a + bi$; el número real b se llama **parte imaginaria** de $a + bi$, e i es la unidad imaginaria, tal que $i^2 = -1$.

Por ejemplo, el número complejo $-5 + 6i$ tiene la parte real -5 y la parte imaginaria 6.

Cuando se escribe un número complejo en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, se dice que está en **forma estándar**. Sin embargo, si la parte imaginaria de un número complejo es negativa, como en el número complejo $3 + (-2)i$, la convención es escribir $3 - 2i$.

Además, el número complejo $a + 0i$ suele escribirse sólo como a. Esto sirve para recordarnos que los números reales son un subconjunto de los números complejos. El número complejo $0 + bi$ suele escribirse como bi. En ocasiones el número bi recibe el nombre de **número imaginario puro**.



La igualdad, suma, resta y multiplicación de números complejos se define de manera que se conserven las reglas familiares de álgebra para números reales. Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. Esto es,

Igualdad de números complejos

$$a + bi = c + di \qquad \text{si y sólo si } a = c \text{ y } b = d \qquad \textbf{(1)}$$

Dos números complejos se suman formando el número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias. Esto es

Suma de números complejos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \qquad \textbf{(2)}$$

Para restar dos números complejos, se usa la siguiente regla:

Diferencia de números complejos

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \qquad \textbf{(3)}$$

EJEMPLO 1

Suma y resta de números complejos

a) $(3 + 5i) + (-2 + 3i) = [3 + (-2)] + (5 + 3)i = 1 + 8i$

b) $(6 + 4i) - (3 + 6i) = (6 - 3) + (4 - 6)i = 3 + (-2)i = 3 - 2i$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

Los productos de números complejos se calculan como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2

Multiplicación de números complejos

$$(5 + 3i) \cdot (2 + 7i) = 5 \cdot (2 + 7i) + 3i(2 + 7i) = 10 + 35i + 6i + 21i^2$$

↑ Propiedad distributiva ↑ Propiedad distributiva

$$= 10 + 41i + 21(-1)$$

↑ $i^2 = -1$

$$= -11 + 41i$$ ◀

Con base en el procedimiento del ejemplo 2, el **producto** de dos números complejos se define por la siguiente fórmula:

Producto de números complejos

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad \textbf{(4)}$$

No se moleste en memorizar la fórmula (4). Más bien, siempre que sea necesario multiplicar dos números complejos, siga las reglas usuales para multiplicar dos binomios, como en el ejemplo 2, recordando que $i^2 = -1$. Por ejemplo,

$$(2i)(2i) = 4i^2 = -4$$
$$(2 + i)(1 - i) = 2 - 2i + i - i^2 = 3 - i$$

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

Las propiedades algebraicas para la suma y multiplicación, como las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, se cumplen para números complejos. Las propiedades de que todo número complejo diferente de cero tiene inverso multiplicativo, o recíproco, requieren más detalle.

Conjugado

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces su **conjugado**, denotado por $\bar{z}$, se define como

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Por ejemplo, $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$ y $\overline{-6 - 2i} = -6 + 2i$.

EJEMPLO 3

Multiplicación de un número complejo por su conjugado

Encuentre el producto del número complejo $z = 3 + 4i$ y su conjugado $\bar{z}$.

Solución Como $\bar{z} = 3 - 4i$, se tiene

$$z\bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$ ◀

El resultado obtenido en el ejemplo 3 tiene una generalización importante.

Teorema El producto de un número complejo por su conjugado es un número real no negativo. Es decir, si $z = a + bi$, entonces

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \tag{5}$$

Demostración Si $z = a + bi$, entonces

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2 \quad ■$$

Para expresar el recíproco de un número complejo z diferente de cero en forma estándar, se multiplica el denominador de $\frac{1}{z}$ por $\bar{z}$. Es decir, si $z = a + bi$ es un número complejo diferente de cero, entonces

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

↑ Usar (5).

$$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

EJEMPLO 4 Escribir el recíproco de un número complejo en forma estándar

Escriba $\frac{1}{3 + 4i}$ en la forma estándar $a + bi$; es decir, encuentre el recíproco de $3 + 4i$.

Solución La idea es multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado de $3 + 4i$, esto es el número complejo $3 - 4i$. El resultado es

$$\frac{1}{3 + 4i} = \frac{1}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{3 - 4i}{9 + 16} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \quad ◄$$

Para expresar el cociente de dos números complejos en forma estándar, se multiplican el numerador y el denominador del cociente por el conjugado del denominador.

EJEMPLO 5 Escribir el cociente de números complejos en forma estándar

Escriba cada uno de los siguientes en forma estándar.

a) $\frac{1 + 4i}{5 - 12i}$ b) $\frac{2 - 3i}{4 - 3i}$

Solución a) $$\frac{1 + 4i}{5 - 12i} = \frac{1 + 4i}{5 - 12i} \cdot \frac{5 + 12i}{5 + 12i} = \frac{5 + 12i + 20i + 48i^2}{25 + 144}$$

$$= \frac{-43 + 32i}{169} = -\frac{43}{169} + \frac{32}{169}i$$

b) $\dfrac{2-3i}{4-3i} = \dfrac{2-3i}{4-3i}\cdot\dfrac{4+3i}{4+3i} = \dfrac{8+6i-12i-9i^2}{16+9}$

$= \dfrac{17-6i}{25} = \dfrac{17}{25} - \dfrac{6}{25}i$ ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

EJEMPLO 6 Escribir otras expresiones en forma estándar

Si $z = 2 - 3i$ y $w = 5 + 2i$, escriba cada una de las siguientes expresiones en forma estándar.

a) $\dfrac{z}{w}$ b) $\overline{z+w}$ c) $z + \overline{z}$

Solución a) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\cdot\overline{w}}{w\cdot\overline{w}} = \dfrac{(2-3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \dfrac{10-4i-15i+6i^2}{25+4}$

$= \dfrac{4-19i}{29} = \dfrac{4}{29} - \dfrac{19}{29}i$

b) $\overline{z+w} = \overline{(2-3i)+(5+2i)} = \overline{7-i} = 7+i$

c) $z + \overline{z} = (2-3i) + (2+3i) = 4$ ◄

El conjugado de un número complejo tiene ciertas propiedades generales que serán útiles más adelante.

Para un número real $a = a + 0i$, el conjugado es $\overline{a} = \overline{a + 0i} = a - 0i = a$. Esto es,

Teorema El conjugado de un número real es el propio número real.

Otras propiedades del conjugado son consecuencias directas de la definición que se da a continuación. En cada proposición, z y w representan números complejos.

Teorema El conjugado del conjugado de un número complejo es el propio número complejo.

$$(\overline{\overline{z}}) = z \qquad \textbf{(6)}$$

El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de sus conjugados.

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \textbf{(7)}$$

El conjugado del producto de dos números complejos es el producto de sus conjugados

$$\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w} \qquad \textbf{(8)}$$

Las demostraciones de las ecuaciones (6), (7) y (8) se dejan como ejercicios.

Potencias de *i*

Las **potencias de** *i* siguen un patrón que es útil conocer.

$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$

Y así sucesivamente; las potencias de *i* se repiten cada cuatro potencias.

EJEMPLO 7 **Evaluación de potencias de *i***

a) $i^{27} = i^{24} \cdot i^3 = (i^4)^6 \cdot i^3 = 1^6 \cdot i^3 = -i$

b) $i^{101} = i^{100} \cdot i^1 = (i^4)^{25} \cdot i = 1^{25} \cdot i = i$ ◀

EJEMPLO 8 **Escribir la potencia de un número complejo en forma estándar**

Escriba $(2 + i)^3$ en la forma estándar.

Solución Se usa la fórmula de producto notable para $(x + a)^3$.

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

Usando la fórmula del producto notable,

$$\begin{aligned}(2 + i)^3 &= 2^3 + 3 \cdot i \cdot 2^2 + 3 \cdot i^2 \cdot 2 + i^3 \\ &= 8 + 12i + 6(-1) + (-i) \\ &= 2 + 11i.\end{aligned}$$ ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 41.

Ecuaciones cuadráticas con discriminante negativo


Las ecuaciones cuadráticas con discriminante negativo no tienen soluciones reales. Sin embargo, si se extiende el sistema de números de manera que incluya números complejos, las ecuaciones cuadráticas siempre tendrán solución. Como la solución de una ecuación cuadrática involucra la raíz cuadrada del discriminante, comenzamos con un análisis de las raíces cuadradas de números negativos.

Si *N* es un número real positivo, la **raíz cuadrada principal** de $-N$, denotada por $\sqrt{-N}$, se define como

$$\sqrt{-N} = \sqrt{N}\,i$$

donde *i* es la unidad imaginaria e $i^2 = -1$.

ADVERTENCIA: Al escribir $\sqrt{-N} = \sqrt{N}\,i$, asegúrese de colocar *i* fuera del símbolo $\sqrt{\ }$. ■

EJEMPLO 9 **Evaluación de la raíz cuadrada de un número negativo**

a) $\sqrt{-1} = \sqrt{1}\,i = i$ b) $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\,i = 2i$

c) $\sqrt{-8} = \sqrt{8}\,i = 2\sqrt{2}\,i$ ◀

EJEMPLO 10 Solución de ecuaciones

Resuelva cada ecuación en el sistema de números complejos.

a) $x^2 = 4$ b) $x^2 = -9$

Solución a) $x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

La ecuación tiene dos soluciones, -2 y 2.

b) $x^2 = -9$

$x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\,i = \pm 3i$

La ecuación tiene dos soluciones, $-3i$ y $3i$. ◄


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 49 Y 53.

ADVERTENCIA: Al trabajar con raíces cuadradas de números negativos, no establezca la raíz cuadrada de un producto igual al producto de las raíces cuadradas (lo cual es posible hacer con números positivos). Para ver por qué, observe el siguiente cálculo. Se sabe que $\sqrt{100} = 10$. Sin embargo, también es cierto que $100 = (+25)(-4)$, de manera que

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{(-25)(-4)} \neq \sqrt{-25}\,\sqrt{-4} = \left(\sqrt{25}\,i\right)\left(\sqrt{4}\,i\right) = (5i)(2i) = 10i^2 = -10$$

↑ Aquí se produce el error. ■

Puesto que la raíz cuadrada de un número negativo está ahora definida, se reestablece la fórmula cuadrática sin restricciones.

Teorema

En el sistema de números complejos, las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, están dadas por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textbf{(9)}$$

EJEMPLO 11 Solución de ecuaciones cuadráticas en el sistema de números complejos

Resuelva la ecuación $x^2 - 4x + 8 = 0$ en el sistema de números complejos.

Solución En este caso $a = 1$, $b = -4$, $c = 8$ y $b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(8) = -16$. Usando la ecuación (9), se encuentra que

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-16}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16}\,i}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$$

La ecuación tiene el conjunto de soluciones $\{2 - 2i, 2 + 2i\}$. ◄

✔ **COMPROBACIÓN:**

$2 + 2i$: $(2 + 2i)^2 - 4(2 + 2i) + 8 = 4 - \cancel{8i} + 4i^2 - \cancel{8} - \cancel{8i} + \cancel{8}$
$= 4 - 4 = 0$

$2 - 2i$: $(2 - 2i)^2 - 4(2 - 2i) + 8 = 4 - \cancel{8i} + 4i^2 - \cancel{8} + \cancel{8i} + \cancel{8}$
$= 4 - 4 = 0$


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 59.

El discriminante $b^2 - 4ac$ de una ecuación cuadrática todavía sirve para determinar el tipo de las soluciones.

Tipo de soluciones de una ecuación cuadrática

En el sistema de números complejos, considere una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes reales.

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.

2. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución real repetida, una raíz doble.

3. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas que no son reales. Las soluciones son una el conjugado de la otra.

La tercera conclusión es una consecuencia del hecho de que si $b^2 - 4ac = -N < 0$, entonces, por la fórmula cuadrática, las soluciones son

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{-N}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{N}\,i}{2a} = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{N}}{2a}i$$

y

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{-N}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{N}\,i}{2a} = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{N}}{2a}i$$

que son una el conjugado de la otra.

EJEMPLO 12 Determinar el tipo de solución de una ecuación cuadrática

Sin resolver, determine el tipo de la solución de cada ecuación

a) $3x^2 + 4x + 5 = 0$ b) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Solución

a) Aquí $a = 3, b = 4$ y $c = 5$, de manera que $b^2 - 4ac = 16 - 4(3)(5) = -44$. Las soluciones son dos números complejos que no son reales y una es el conjugado de la otra.

b) En este caso $a = 2, b = 4$ y $c = 1$, de manera que $b^2 - 4ac = 16 - 8 = 8$. Las soluciones son dos números complejos que no son reales y son conjugados entre sí.

c) Aquí $a = 9, b = -6$ y $c = 1$, de manera que $b^2 - 4ac = 36 - 4(9)(1) = 0$. La solución es un número real repetido, es decir, una raíz doble. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 73.

1.3 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Clasifique en números enteros y racionales a los números en el conjunto $\left\{-3, 0, \sqrt{2}, \frac{6}{5}, \pi\right\}$. (pp. 2–4)

2. *Falso o verdadero:* los números racionales y los irracionales están en el conjunto de números reales. (pp. 2–4)

3. Racionalice el denominador de $\frac{3}{2 + \sqrt{3}}$. (pp. 72–73)

Conceptos y vocabulario

4. En el número complejo $5 + 2i$, el número 5 se llama parte ______________________; el número 2 se llama parte ______________; el número i se llama ______________ ______________.

5. La ecuación $x^2 = -4$ tiene el conjunto de soluciones _________.

6. *Falso o verdadero:* el conjugado de $2 + 5i$ es $-2 - 5i$.

7. *Falso o verdadero:* Todos los números reales son números complejos.

8. *Falso o verdadero:* si $2 - 3i$ es una solución de una ecuación cuadrática con coeficientes reales, entonces $-2 + 3i$ también es una solución.

Ejercicios

En los problemas 9-46, escriba cada expresión en la forma estándar $a + bi$.

9. $(2 - 3i) + (6 + 8i)$ **10.** $(4 + 5i) + (-8 + 2i)$ **11.** $(-3 + 2i) - (4 - 4i)$ **12.** $(3 - 4i) - (-3 - 4i)$

13. $(2 - 5i) - (8 + 6i)$ **14.** $(-8 + 4i) - (2 - 2i)$ **15.** $3(2 - 6i)$ **16.** $-4(2 + 8i)$

17. $2i(2 - 3i)$ **18.** $3i(-3 + 4i)$ **19.** $(3 - 4i)(2 + i)$ **20.** $(5 + 3i)(2 - i)$

21. $(-6 + i)(-6 - i)$ **22.** $(-3 + i)(3 + i)$ **23.** $\dfrac{10}{3 - 4i}$ **24.** $\dfrac{13}{5 - 12i}$

25. $\dfrac{2 + i}{i}$ **26.** $\dfrac{2 - i}{-2i}$ **27.** $\dfrac{6 - i}{1 + i}$ **28.** $\dfrac{2 + 3i}{1 - i}$

29. $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$ **30.** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^2$ **31.** $(1 + i)^2$ **32.** $(1 - i)^2$

33. i^{23} **34.** i^{14} **35.** i^{-15} **36.** i^{-23}

37. $i^6 - 5$ **38.** $4 + i^3$ **39.** $6i^3 - 4i^5$ **40.** $4i^3 - 2i^2 + 1$

41. $(1 + i)^3$ **42.** $(3i)^4 + 1$ **43.** $i^7(1 + i^2)$ **44.** $2i^4(1 + i^2)$

45. $i^6 + i^4 + i^2 + 1$ **46.** $i^7 + i^5 + i^3 + i$

En los problemas 47-52, realice las operaciones indicadas y exprese su respuesta en la forma $a + bi$.

47. $\sqrt{-4}$ **48.** $\sqrt{-9}$ **49.** $\sqrt{-25}$

50. $\sqrt{-64}$ **51.** $\sqrt{(3 + 4i)(4i - 3)}$ **52.** $\sqrt{(4 + 3i)(3i - 4)}$

En los problemas 53-72, resuelva cada ecuación en el sistema de números complejos.

53. $x^2 + 4 = 0$ **54.** $x^2 - 4 = 0$ **55.** $x^2 - 16 = 0$ **56.** $x^2 + 25 = 0$

57. $x^2 - 6x + 13 = 0$ **58.** $x^2 + 4x + 8 = 0$ **59.** $x^2 - 6x + 10 = 0$ **60.** $x^2 - 2x + 5 = 0$

61. $8x^2 - 4x + 1 = 0$ **62.** $10x^2 + 6x + 1 = 0$ **63.** $5x^2 + 1 = 2x$ **64.** $13x^2 + 1 = 6x$

65. $x^2 + x + 1 = 0$ **66.** $x^2 - x + 1 = 0$ **67.** $x^3 - 8 = 0$ **68.** $x^3 + 27 = 0$

69. $x^4 = 16$ **70.** $x^4 = 1$ **71.** $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$ **72.** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

En los problemas 73-78, determine el tipo de solución de cada ecuación en el sistema de números complejos.

73. $3x^2 - 3x + 4 = 0$ **74.** $2x^2 - 4x + 1 = 0$ **75.** $2x^2 + 3x = 4$

76. $x^2 + 6 = 2x$ **77.** $9x^2 - 12x + 4 = 0$ **78.** $4x^2 + 12x + 9 = 0$

79. $2 + 3i$ es una solución de una ecuación cuadrática con coeficientes reales. Encuentre la otra solución.

80. $4 - i$ es una solución de una ecuación cuadrática con coeficientes reales. Encuentre la otra solución.

En los problemas 81-84, $z = 3 - 4i$ y $w = 8 + 3i$. Escriba cada expresión en la forma estándar $a + bi$.

81. $z + \overline{z}$ **82.** $w - \overline{w}$ **83.** $z\overline{z}$ **84.** $\overline{z - w}$

85. Utilice $z = a + bi$ para demostrar que $z + \bar{z} = 2a$ y $z - \bar{z} = 2bi$.

86. Utilice $z = a + bi$ para demostrar que $\bar{\bar{z}} = z$.

87. Utilice $z = a + bi$ y $w = c + di$ para demostrar que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

88. Utilice $z = a + bi$ y $w = c + di$ para demostrar que $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

89. Explique a un compañero cómo sumaría dos números complejos y cómo multiplicaría dos números complejos. Explique las diferencias en los dos procesos.

90. Escriba un párrafo breve que compare el método usado para racionalizar el denominador de una expresión racional y el método usado para escribir el cociente de dos números complejos en forma estándar.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $\{-3, 0\}$; son enteros; $\left\{-3, 0, \frac{6}{5}\right\}$ son números racionales

2. Verdadero

3. $3(2 - \sqrt{3})$

1.4 Ecuaciones radicales; ecuaciones de forma cuadrática; ecuaciones que se factorizan

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Raíces cuadradas (Repaso, sección R.2, pp. 22-23)
- Factorizarización de polinomios (Repaso, sección R.5, pp. 43-50)
- Raíces n-ésimas; exponentes racionales (Repaso, sección R.8, pp. 70-75)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?" en la página 123.

OBJETIVOS
1 Resolver ecuaciones radicales
2 Resolver ecuaciones de forma cuadrática
3 Resolver ecuaciones por factorización

Ecuaciones radicales


Cuando la variable en una ecuación está dentro de una raíz cuadrada, cúbica, etcétera, es decir, cuando ocurre en un radical, la ecuación se llama **ecuación radical**. En ocasiones una operación convertirá una ecuación radical en una lineal o cuadrática. Un procedimiento común es aislar el radical más complejo en un lado de la ecuación y luego eliminarlo elevando a una potencia igual al índice del radical. Sin embargo, debe tenerse cuidado, ya que podrían obtenerse soluciones aparentes de la ecuación original que en realidad no lo son. Éstas se llaman **soluciones extrañas**. Por lo tanto, es necesario verificar todas las respuestas cuando se trabaja con ecuaciones radicales.

EJEMPLO 1 **Solución de una ecuación radical**

Encuentre las soluciones reales de la ecuación $\sqrt[3]{2x - 4} - 2 = 0$

Solución La ecuación contiene un radical con índice 3. Se aísla en el lado izquierdo.

$$\sqrt[3]{2x - 4} - 2 = 0$$
$$\sqrt[3]{2x - 4} = 2$$

Ahora se eleva cada lado a la tercera potencia (el índice del radical es 3) y se resuelve.

$$\left(\sqrt[3]{2x - 4}\right)^3 = 2^3 \quad \text{Elevar ambos lados a la potencia 3.}$$
$$2x - 4 = 8 \quad \text{Simplificar.}$$
$$2x = 12 \quad \text{Sumar 4 en ambos lados.}$$
$$x = 6 \quad \text{Dividir ambos lado entre 2.}$$

✔ COMPROBACIÓN: $\sqrt[3]{2(6) - 4} - 2 = \sqrt[3]{12 - 4} - 2 = \sqrt[3]{8} - 2 = 2 - 2 = 0$

El conjunto de soluciones es $\{6\}$. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación radical

Encuentre las soluciones reales de la ecuación: $\sqrt{x - 1} = x - 7$

Solución Se elevan al cuadrado ambos lados ya que el índice de la raíz cuadrada es 2.

$$\sqrt{x - 1} = x - 7$$
$$\left(\sqrt{x - 1}\right)^2 = (x - 7)^2 \quad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$
$$x - 1 = x^2 - 14x + 49 \quad \text{Eliminar paréntesis.}$$
$$x^2 - 15x + 50 = 0 \quad \text{Poner en forma estándar.}$$
$$(x - 10)(x - 5) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$
$$x = 10 \quad \text{o} \quad x = 5 \quad \text{Aplicar la propiedad de producto cero y resolver.}$$

✔ COMPROBACIÓN:

$x = 10$: $\sqrt{x - 1} = \sqrt{10 - 1} = \sqrt{9} = 3$ y $x - 7 = 10 - 7 = 3$

$x = 5$: $\sqrt{x - 1} = \sqrt{5 - 1} = \sqrt{4} = 2$ y $x - 7 = 5 - 7 = -2$

La solución $x = 5$ es extraña; la única solución de la ecuación es $x = 10$. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

Algunas veces, es necesario elevar cada lado a una potencia más de una vez para resolver la ecuación radical.

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación radical

Encuentre la solución de la ecuación: $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 2} = 2$

Solución Primero, se elige aislar la expresión radical más complicada (en este caso $\sqrt{2x + 3}$) en el lado izquierdo.

$$\sqrt{2x + 3} = \sqrt{x + 2} + 2$$

Ahora se elevan al cuadrado ambos lados (el índice del radical es 2).

$$\left(\sqrt{2x + 3}\right)^2 = \left(\sqrt{x + 2} + 2\right)^2 \quad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$
$$2x + 3 = \left(\sqrt{x + 2}\right)^2 + 4\sqrt{x + 2} + 4 \quad \text{Eliminar paréntesis.}$$
$$2x + 3 = x + 2 + 4\sqrt{x + 2} + 4 \quad \text{Simplificar.}$$
$$2x + 3 = x + 6 + 4\sqrt{x + 2} \quad \text{Combinar términos semejantes.}$$

Como la ecuación todavía contiene un radical, se aísla en el lado derecho y de nuevo se elevan al cuadrado ambos lados.

$$x - 3 = 4\sqrt{x + 2} \quad \text{Aislar el radical en el lado derecho.}$$
$$(x - 3)^2 = 16(x + 2) \quad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$
$$x^2 - 6x + 9 = 16x + 32 \quad \text{Eliminar paréntesis.}$$
$$x^2 - 22x - 23 = 0 \quad \text{Poner en forma estándar.}$$
$$(x - 23)(x + 1) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$
$$x = 23 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Parece que la ecuación original tiene el conjunto de soluciones $\{-1, 23\}$. Sin embargo, todavía no se verifica.

✔ **COMPROBACIÓN:**

$$x = 23: \quad \sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 2} = \sqrt{2(23) + 3} - \sqrt{23 + 2} = \sqrt{49} - \sqrt{25} = 7 - 5 = 2$$

$$x = -1: \quad \sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 2} = \sqrt{2(-1) + 3} - \sqrt{-1 + 2} = \sqrt{1} - \sqrt{1} = 1 - 1 = 0$$

La ecuación tiene sólo una solución, 23; la solución -1 es extraña. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

Ecuaciones de forma cuadrática

2 La ecuación $x^4 + x^2 - 12 = 0$ no es cuadrática en x, pero es cuadrática en x^2. Esto es, si $u = x^2$, se obtiene $u^2 + u - 12 = 0$, una ecuación cuadrática. Se despeja u de esta ecuación y después, usando $u = x^2$, se pueden encontrar las solución x de la ecuación original.

En general, si una sustitución adecuada u transforma una ecuación en una de la forma

$$au^2 + bu + c = 0 \qquad a \neq 0$$

entonces la ecuación original se llama **ecuación de forma cuadrática** o **ecuación de tipo cuadrático**.

La dificultad al resolver este tipo de ecuaciones estriba en determinar que, de hecho, la ecuación es de forma cuadrática. Después que nos dicen que una ecuación es de forma cuadrática, es suficientemente sencillo verlo, pero se necesita cierta práctica para poder reconocer estas ecuaciones.

EJEMPLO 4 Solución de ecuaciones de forma cuadrática

Encuentre las soluciones reales de la ecuación: $(x + 2)^2 + 11(x + 2) - 12 = 0$

Solución Para esta ecuación, sea $u = x + 2$. Entonces $u^2 = (x + 2)^2$, y la ecuación original

$$(x + 2)^2 + 11(x + 2) - 12 = 0$$

se convierte en

$$u^2 + 11u - 12 = 0 \quad \text{Sea } u = x + 2\text{; entonces } u^2 = (x + 2)^2.$$
$$(u + 12)(u - 1) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$
$$u = -12 \quad \text{o} \quad u = 1 \quad \text{Resolver.}$$

Pero se quiere obtener el valor de x. Como $u = x + 2$, se tiene

$$x + 2 = -12 \quad \text{o} \quad x + 2 = 1$$
$$x = -14 \qquad\qquad x = -1$$

✔ **COMPROBACIÓN:** $x = -14$: $(-14 + 2)^2 + 11(-14 + 2) - 12$
$= (-12)^2 + 11(-12) - 12 = 144 - 132 - 12 = 0$
$x = -1$: $(-1 + 2)^2 + 11(-1 + 2) - 12 = 1 + 11 - 12 = 0$

La ecuación original tiene el conjunto de soluciones $\{-14, -1\}$. ◀

EJEMPLO 5 Solución de ecuaciones de forma cuadrática

Encuentre las soluciones reales de la ecuación: $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 12 = 0$

Solución Para la ecuación $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 12 = 0$, se hace $u = x^2 - 1$ de manera que $u^2 = (x^2 - 1)^2$. Entonces la ecuación original

$$(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 12 = 0$$

se convierte en

$$u^2 + u - 12 = 0 \quad \text{Sea } u = x^2 - 1 \text{ Entonces } u^2 = (x^2 - 1)^2.$$
$$(u + 4)(u - 3) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$
$$u = -4 \quad \text{or} \quad u = 3 \quad \text{Resolver.}$$

Pero recuerde que se quiere obtener el valor de x. Como $u = x^2 - 1$, se tiene

$$x^2 - 1 = -4 \quad \text{o} \quad x^2 - 1 = 3$$
$$x^2 = -3 \qquad\qquad x^2 = 4$$

La primera de éstas no tiene solución real; la segunda tiene el conjunto de soluciones $\{-2, 2\}$.

✔ **COMPROBACIÓN:** $x = -2$: $(4 - 1)^2 + (4 - 1) - 12 = 9 + 3 - 12 = 0$
$x = 2$: $(4 - 1)^2 + (4 - 1) - 12 = 9 + 3 - 12 = 0$

Así, $\{-2, 2\}$ es el conjunto de soluciones de la ecuación original ◀

EJEMPLO 6 Solución de ecuaciones de forma cuadrática

Encuentre las soluciones reales de la ecuación: $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$

Solución Para la ecuación $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$, sea $u = \sqrt{x}$. Entonces $u^2 = x$, y la ecuación original,

$$x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$$

se convierte en

$$u^2 + 2u - 3 = 0 \quad \text{Sea } u = \sqrt{x}. \text{ Entonces } u^2 = x.$$
$$(u + 3)(u - 1) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$
$$u = -3 \quad \text{or} \quad u = 1 \quad \text{Resolver.}$$

Como $u = \sqrt{x}$, se tiene $\sqrt{x} = -3$ o $\sqrt{x} = 1$. La primera ecuación, $\sqrt{x} = -3$, no tiene solución real ya que la raíz cuadrada de un número real nunca es negativa. La segunda, $\sqrt{x} = 1$, tiene la solución $x = 1$.

✔ **COMPROBACIÓN:** $1 + 2\sqrt{1} - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

Entonces $x = 1$ es la única solución de la ecuación original. ◀



OTRO MÉTODO PARA RESOLVER EL EJEMPLO 6 SERÍA MANEJARLO COMO UNA ECUACIÓN RADICAL. RESUELVA DE ESTA MANERA PARA PRACTICAR.

La idea debe estar clara. Si una ecuación contiene una expresión y esa misma expresión se eleva al cuadrado, haga una sustitución para la expresión. Tal vez obtenga una ecuación cuadrática.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 51.

Ecuaciones que se factorizan

3 Ya se resolvieron varios tipos de ecuaciones cuadráticas usando factorización. Se verán ejemplos de otros tipos de ecuaciones que se resuelven factorizando.

EJEMPLO 7 Solución de ecuaciones factorizando

Resuelva la ecuación: $x^4 = 4x^2$

Solución Se comienza por reunir todos los términos en un lado. Esto da un 0 en un lado y una expresión que se va a factorizar en el otro.

$$x^4 = 4x^2$$

$$x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$

$$x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 - 4 = 0 \quad \text{Aplicar la propiedad de producto cero.}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -2 \quad \text{o} \quad x = 2$$

El conjunto de soluciones es $\{-2, 0, 2\}$.

✔ **COMPROBACIÓN:**

$x = -2$: $(-2)^4 = 16$ y $4(-2)^2 = 16$ Entonces -2 es una solución.

$x = 0$: $0^4 = 4 \cdot 0^2$ Entonces 0 es una solución.

$x = 2$: $2^4 = 16$ y $4 \cdot 2^2 = 16$ Entonces 2 es una solución. ◀

EJEMPLO 8 Solución de ecuaciones por factores

Resuelva la ecuación: $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

Solución ¿Recuerda el método de factorización agrupando? (Si no, repase p. 48.) Se agrupan los términos de $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ como sigue:

$$(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0$$

Factorice x^2 del primer grupo y 4 del segundo.

$$x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0$$

Esto revela el factor común $(x - 1)$, por lo que se tiene

$$(x^2 - 4)(x - 1) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x - 1) = 0 \quad \text{Factorizar otra vez.}$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \quad \text{Igualar a 0 cada factor.}$$

$$x = 2 \qquad x = -2 \qquad x = 1 \quad \text{Resolver.}$$

El conjunto de soluciones es $\{-2, 1, 2\}$.

✔ **COMPROBACIÓN:**

$x = -2$: $(-2)^3 - (-2)^2 - 4(-2) + 4 = -8 - 4 + 8 + 4 = 0$ — -2 es una solución.

$x = 1$: $1^3 - 1^2 - 4(1) + 4 = 1 - 1 - 4 + 4 = 0$ — 1 es una solución.

$x = 2$: $2^3 - 2^2 - 4(2) + 4 = 8 - 4 - 8 + 4 = 0$ — 2 es una solución. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 79.

1.4 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas están dadas al final de estos ejercicios. Si obtuvo una respuesta incorrecta, lea las páginas indicadas en azul.*

1. *Falso o verdadero:* la raíz cuadrada principal de cualquier número real no negativo es siempre no negativa. (pp. 23-24)
2. $\sqrt[3]{-8} =$ __________ (pp. 70–75)
3. Factorice $6x^3 - 2x^2$ (pp. 43–50)

Conceptos y vocabulario

4. Cuando una solución aparente no satisface la ecuación original, se llama solución _________.
5. Si u es una expresión que incluye a x, la ecuación $au^2 - bu + c = 0$, $a \neq 0$, se llama ecuación _________ _________.
6. *Falso o verdadero:* las ecuaciones radicales algunas veces no tiene solución.

Ejercicios

En los problemas 7-40, encuentre las soluciones reales de cada ecuación.

7. $\sqrt{2t - 1} = 1$
8. $\sqrt{3t + 4} = 2$
9. $\sqrt{3t + 4} = -6$
10. $\sqrt{5t + 3} = -2$
11. $\sqrt[3]{1 - 2x} - 3 = 0$
12. $\sqrt[3]{1 - 2x} - 1 = 0$
13. $\sqrt[4]{5x - 4} = 2$
14. $\sqrt[5]{2x - 3} = -1$
15. $\sqrt[5]{x^2 + 2x} = -1$
16. $\sqrt[4]{x^2 + 16} = \sqrt{5}$
17. $x = 8\sqrt{x}$
18. $x = 3\sqrt{x}$
19. $\sqrt{15 - 2x} = x$
20. $\sqrt{12 - x} = x$
21. $x = 2\sqrt{x - 1}$
22. $x = 2\sqrt{-x - 1}$
23. $\sqrt{x^2 - x - 4} = x + 2$
24. $\sqrt{3 - x + x^2} = x - 2$
25. $3 + \sqrt{3x + 1} = x$
26. $2 + \sqrt{12 - 2x} = x$
27. $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 1} = 1$
28. $\sqrt{3x + 7} + \sqrt{x + 2} = 1$
29. $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x - 1} = 2$
30. $\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x + 7} = 2$
31. $\sqrt{3 - 2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$
32. $\sqrt{10 + 3\sqrt{x}} = \sqrt{x}$
33. $(3x + 1)^{1/2} = 4$
34. $(3x - 5)^{1/2} = 2$
35. $(5x - 2)^{1/3} = 2$
36. $(2x + 1)^{1/3} = -1$
37. $(x^2 + 9)^{1/2} = 5$
38. $(x^2 - 16)^{1/2} = 9$
39. $x^{3/2} - 3x^{1/2} = 0$
40. $x^{3/4} - 9x^{1/4} = 0$

En los problemas 41-72, encuentre las soluciones reales de cada ecuación.

41. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
42. $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$
43. $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$
44. $2x^4 - 5x^2 - 12 = 0$
45. $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$
46. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
47. $(x + 2)^2 + 7(x + 2) + 12 = 0$
48. $(2x + 5)^2 - (2x + 5) - 6 = 0$
49. $(3x + 4)^2 - 6(3x + 4) + 9 = 0$

50. $(2-x)^2+(2-x)-20=0$

51. $2(s+1)^2-5(s+1)=3$

52. $3(1-y)^2+5(1-y)+2=0$

53. $x-4x\sqrt{x}=0$

54. $x+8\sqrt{x}=0$

55. $x+\sqrt{x}=20$

56. $x+\sqrt{x}=6$

57. $t^{1/2}-2t^{1/4}+1=0$

58. $z^{1/2}-4z^{1/4}+4=0$

59. $4x^{1/2}-9x^{1/4}+4=0$

60. $x^{1/2}-3x^{1/4}+2=0$

61. $\sqrt[4]{5x^2-6}=x$

62. $\sqrt[4]{4-5x^2}=x$

63. $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6$

64. $x^2-3x-\sqrt{x^2-3x}=2$

65. $\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{x+1}+2$

66. $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x-1}=12$

67. $3x^{-2}-7x^{-1}-6=0$

68. $2x^{-2}-3x^{-1}-4=0$

69. $2x^{2/3}-5x^{1/3}-3=0$

70. $3x^{4/3}+5x^{2/3}-2=0$

71. $\left(\dfrac{v}{v+1}\right)^2+\dfrac{2v}{v+1}=8$

72. $\left(\dfrac{y}{y-1}\right)^2=6\left(\dfrac{y}{y-1}\right)+7$

En los problemas 73-86, encuentre las soluciones reales de cada ecuación factorizando.

73. $x^3-9x=0$

74. $x^4-x^2=0$

75. $4x^3=3x^2$

76. $x^5=4x^3$

77. $x^3+x^2-20x=0$

78. $x^3+6x^2-7x=0$

79. $x^3+x^2-x-1=0$

80. $x^3+4x^2-x-4=0$

81. $x^3-3x^2-4x+12=0$

82. $x^3-3x^2-x+3=0$

83. $2x^3+4=x^2+8x$

84. $3x^3+4x^2=27x+36$

85. $5x^3+45x=2x^2+18$

86. $3x^3+12x=5x^2+20$

En los problemas 87-92, encuentre las soluciones de cada ecuación. Utilice una calculadora para expresar las soluciones redondeadas a dos decimales.

87. $x-4x^{1/2}+2=0$

88. $x^{2/3}+4x^{1/3}+2=0$

89. $x^4+\sqrt{3}x^2-3=0$

90. $x^4+\sqrt{2}x^2-2=0$

91. $\pi(1+t)^2=\pi+1+t$

92. $\pi(1+r)^2=2+\pi(1+r)$

93. Si $k=\dfrac{x+3}{x-3}$ y $k^2-k=12$, encuentre x.

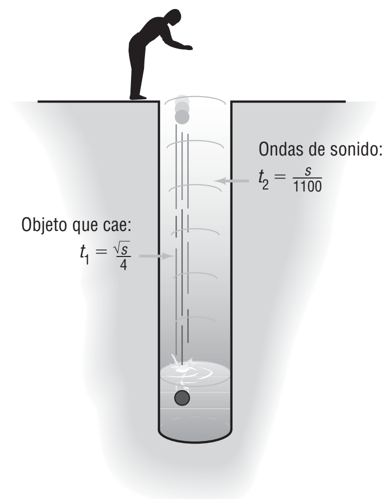
94. Si $k=\dfrac{x+3}{x-4}$ y $k^2-3k=28$, encuentre x.

95. Física: uso del sonido para medir distancia Es posible medir la distancia a la superficie del agua en un pozo dejando caer un objeto y midiendo el tiempo transcurrido hasta oír un sonido. Si t_1 es el tiempo (medido en segundos) que toma al objeto llegar al agua, entonces t_1 obedecerá la ecuación $s=16t_1^2$, donde s es la distancia (en pies). Se deduce que $t_1=\dfrac{\sqrt{s}}{4}$. Suponga que t_2 es el tiempo que toma para el sonido del impacto llegar a nuestros oídos. Como se sabe, las ondas de sonido viajan a una velocidad aproximada de 1100 pies por segundo, el tiempo t_2 para recorrer la distancia s es $t_2=\dfrac{s}{1100}$. Vea la ilustración.

Ahora bien, t_1+t_2 es el tiempo total transcurrido desde el momento en que se deja caer el objeto hasta el momento en que se oye el sonido. Se tiene la ecuación

$$\text{Tiempo total transcurrido}=\frac{\sqrt{s}}{4}+\frac{s}{1100}$$

Encuentre la distancia a la superficie del agua si el tiempo total transcurrido desde que se deja caer el objeto hasta que se oye el impacto en el agua es 4 segundos.



96. Desarrolle una ecuación radical que no tenga solución.

97. Desarrolle una ecuación radical que no tenga soluciones extrañas.

98. Analice el paso en el proceso de solución de ecuaciones radicales que lleva a la posibilidad de soluciones extrañas. ¿Por qué no existe esta posibilidad en las ecuaciones lineales y cuadráticas?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. Verdadero **2.** -2 **3.** $2x^2(3x-1)$

1.5 Solución de desigualdades

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Repaso de álgebra (Repaso, sección R.2, pp. 17-20)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?" en la página 133.

OBJETIVOS
1. Usar la notación de intervalos
2. Usar las propiedades de las desigualdades
3. Resolver desigualdades
4. Resolver desigualdades combinadas

Suponga que a y b son dos números reales y $a < b$. Se usará la notación $a < x < b$ para decir que x es un número *entre* a y b. La expresión $a < x < b$ es equivalente a las dos desigualdades $a < x$ y $x < b$. De igual manera, la expresión $a \leq x \leq b$ es equivalente a las dos desigualdades $a \leq x$ y $x \leq b$. Las dos posibilidades restantes $a \leq x < b$ y $a < x \leq b$ se definen de manera similar.

Aunque es aceptable escribir $3 \geq x \geq 2$, es preferible invertir los símbolos de desigualdad y escribir en su lugar $2 \leq x \leq 3$ de manera que, al leer de izquierda a derecha, los valores vayan de menor a mayor.

Una proposición como $2 \leq x \leq 1$ es falsa porque no existe un número x para el que $2 \leq x$ y $x \leq 1$. Por último, nunca se mezclan símbolos como en $2 \leq x \geq 3$.

Intervalos

1 Sean a y b dos números reales con $a < b$.

Un **intervalo cerrado**, denotado por **[a, b]**, consiste en todos los números reales x para los cuales $a \leq x \leq b$.

Un **intervalo abierto**, denotado por **(a, b)**, consiste en todos los números reales x para los que $a < x < b$.

Los **intervalos semiabiertos** o **semicerrados** son **(a, b]** que consiste en todos los números reales x para los que $a < x \leq b$, y **[a, b)** que consiste en todos los números reales x para los que $a \leq x < b$.

En cada una de estas definiciones, a se llama el **extremo izquierdo** y b el **extremo derecho** del intervalo.

El símbolo ∞ (leído "infinito") no es un número real, sino un artificio de notación usado para indicar que no hay límite en la dirección positiva. El símbolo $-\infty$ (leído "infinito negativo") tampoco es un número real, sino un artificio de notación usado para indicar que no hay límite en la dirección negativa. Usando los símbolos ∞ y $-\infty$, se definen otros cinco tipos de intervalos:

$[a, \infty)$ Consiste en todos los números reales x para los que $x \geq a$ $(a \leq x < \infty)$.

(a, ∞) Consiste en todos los números reales x para los que $x > a$ $(a < x < \infty)$.

$(-\infty, a]$ Consiste en todos los números reales x para los que $x \leq a$ $(-\infty < x \leq a)$.

$(-\infty, a)$ Consiste en todos los números reales x para los que $x < a$ $(-\infty < x < a)$.

$(-\infty, \infty)$ Consiste en todos los números reales x x $(-\infty < x < \infty)$.

Observe que ∞ y $-\infty$ nunca se incluyen como puntos extremos, ya que ninguno de los dos es un número real.

La tabla 1 resume la notación de intervalos, la notación correspondiente de desigualdades y sus gráficas.

Tabla 1

Intervalo	Desigualdad	Gráfica
Intervalo abierto (a, b)	$a < x < b$	
Intervalo cerrado $[a, b]$	$a \le x \le b$	
Intervalo semiabierto $[a, b)$	$a \le x < b$	
Intervalo semiabierto $(a, b]$	$a < x \le b$	
Intervalo $[a, \infty)$	$x \ge a$	
Intervalo (a, ∞)	$x > a$	
Intervalo $(-\infty, a]$	$x \le a$	
Intervalo $(-\infty, a)$	$x < a$	
Intervalo $(-\infty, \infty)$	Todos los números reales	

EJEMPLO 1 Escribir desigualdades usando la notación de intervalos

Escriba cada desigualdad usando la notación de intervalos.

a) $1 \le x \le 3$ b) $-4 < x < 0$ c) $x > 5$ d) $x \le 1$

Solución

a) $1 \le x \le 3$ describe todos los números x entre 1 y 3, inclusive. En la notación de intervalos, se escribe $[1, 3]$.

b) En notación de intervalos, $-4 < x < 0$ se escribe $(-4, 0)$.

c) $x > 5$ consiste en todos los números x mayores que 5. En la notación de intervalos, se escribe $(5, \infty)$.

d) En notación de intervalos, $x \le 1$ se escribe $(-\infty, 1]$. ◀

EJEMPLO 2 Escribir intervalos usando la notación de desigualdades

Escriba cada intervalo como una desigualdad que involucre x.

a) $[1, 4)$ b) $(2, \infty)$ c) $[2, 3]$ d) $(-\infty, -3]$

Solución

a) $[1, 4)$ consiste en todos los número x tales que $1 \le x < 4$.

b) $(2, \infty)$ consiste en todos los números x tales que $x > 2$ $(2 < x < \infty)$.

c) $[2, 3]$ consiste en todos los números x tales que $2 \le x \le 3$.

d) $(-\infty, -3]$ consiste en todos los números x tales que $x \le -3$ $(-\infty < x \le -3)$. ◀

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **11, 23 Y 31.**

Propiedades de las desigualdades

2 El producto de dos números reales positivos es positivo, el producto de dos números reales negativos es positivo, y el producto de 0 por 0 es 0. Para cualquier número real a, el valor de a^2 es 0 o positivo; es decir, a^2 es no negativo. Esto se llama **propiedad de no negatividad**.

Para cualquier número real a, se tiene lo siguiente:

En palabras
El cuadrado de un número real nunca es negativo.

Propiedad de no negatividad

$$a^2 \geq 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Si se suma el mismo número en ambos lado de una desigualdad, se obtiene una desigualdad equivalente. Por ejemplo, como $3 < 5$, entonces $3 + 4 < 5 + 4$ o $7 < 9$. Esto se llama **propiedad de la suma** de las desigualdades.

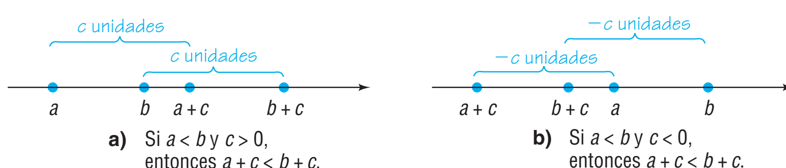
Propiedad de la suma para desigualdades

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$. **(2a)**

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$. **(2b)**

La propiedad de la suma establece que el sentido, o dirección, de una desigualdad permanece sin cambio si se suma el mismo número en cada lado. La figura 2 ilustra la propiedad de la suma (2a). En la figura 2a), se ve que a está a la izquierda de b. Si c es positivo, entonces $a + c$ y $b + c$ están c unidades a la derecha de a y b, respectivamente. En consecuencia, $a + c$ debe estar a la izquierda de $b + c$; es decir, $a + c < b + c$. La figura 2b) ilustra la situación cuando c es negativo.

Figura 2




DIBUJE UNA ILUSTRACIÓN SIMILAR A LA FIGURA 2 QUE ILUSTRE LA PROPIEDAD DE LA SUMA (2b)

EJEMPLO 3 **Propiedad de la suma de desigualdades**

a) Si $x < -5$, entonces $x + 5 < -5 + 5$ o $x + 5 < 0$.

b) Si $x > 2$, entonces $x + (-2) > 2 + (-2)$ o $x - 2 > 0$. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

Se usarán dos ejemplos para llegar a la siguiente propiedad.

EJEMPLO 4 Multiplicación de una desigualdad por un número positivo

Exprese como una desigualdad el resultado de multiplicar cada lado de la desigualdad $3 < 7$ por 2.

Solución Se comienza con

$$3 < 7$$

Al multiplicar cada lado por 2 se llega a los número 6 y 14, entonces se tiene

$$6 < 14$$ ◀

EJEMPLO 5 Multiplicación de una desigualdad por un número negativo

Exprese como desigualdad el resultado de multiplicar cada lado de la desigualdad $9 > 2$ por -4.

Solución Se comienza con

$$9 > 2$$

Al multiplicar cada lado por -4 se llega a los número -36 y -8, entonces se tiene

$$-36 < -8$$ ◀

En palabras
Al multiplicar por un número negativo se invierte la desigualdad.

Observe que el efecto de multiplicar ambos lados de $9 > 2$ por el número negativo -4 es que la dirección del símbolo de la desigualdad se invierte.

Los ejemplos 4 y 5 ilustran la siguiente **propiedad de la multiplicación** para desigualdades:

Propiedades de la multiplicación para desigualdades

Si $a < b$ y si $c > 0$, entonces $ac < bc$.
Si $a < b$ y si $c < 0$, entonces $ac > bc$. **(3a)**
Si $a > b$ y si $c > 0$, entonces $ac > bc$.
Si $a > b$ y si $c < 0$, entonces $ac < bc$. **(3b)**

Las propiedades de la multiplicación establecen que el sentido, o dirección, de una desigualdad *permanece igual* si cada lado se multiplica por un número real *positivo*, mientras que la dirección se *invierte* si cada lado se multiplica por un número real *negativo*.

EJEMPLO 6 Propiedad de la multiplicación de desigualdades

a) Si $2x < 6$, entonces $\frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(6)$ o $x < 3$.

b) Si $\frac{x}{-3} > 12$, entonces $-3\left(\frac{x}{-3}\right) < -3(12)$ o $x < -36$.

c) Si $-4x < -8$, entonces $\frac{-4x}{-4} > \frac{-8}{-4}$ o $x > 2$.

d) Si $-x > 8$, entonces $(-1)(-x) < (-1)(8)$ o $x < -8$. ◀

 TRABAJE AHORA EL PROBLEMA 45.

La **propiedad del recíproco** establece que el recíproco de un número real positivo es positivo y que el recíproco de un número real negativo es negativo.

Propiedad del recíproco para desigualdades

$$\text{Si } a > 0, \text{ entonces } \frac{1}{a} > 0. \qquad \textbf{(4a)}$$

$$\text{Si } a < 0, \text{ entonces } \frac{1}{a} < 0. \qquad \textbf{(4b)}$$

Solución de desigualdades

3 Una **desigualdad en una variable** es una proposición que involucra dos expresiones, de las que al menos una contiene a la variable, separadas por uno de los símbolos de desigualdad $<$, $\leq$, $>$ o $\geq$. **Resolver una desigualdad** significa encontrar todos los valores de la variable para los que la proposición es verdadera. Estos valores se llaman **soluciones** de la desigualdad.

Por ejemplo, las siguientes son desigualdades que involucran una variable x.

$$x + 5 < 8 \qquad 2x - 3 \geq 4 \qquad x^2 - 1 \leq 3 \qquad \frac{x+1}{x-2} > 0$$

Dos desigualdades que tienen exactamente el mismo conjunto de soluciones se llaman **desigualdades equivalentes**. Igual que con las ecuaciones, un método para resolver una desigualdad es sustituirla por una serie de desigualdades equivalentes hasta obtener una desigualdad con una solución obvia, como $x < 3$. Se obtienen desigualdades equivalentes aplicando algunas de las mismas propiedades usadas para encontrar ecuaciones equivalentes. La propiedad de la suma y las propiedades de la multiplicación forman la base para los siguientes procedimientos.

Procedimientos que no cambian el símbolo de desigualdad

1. Simplificar ambos lados de la desigualdad combinando términos semejantes y eliminando paréntesis.

   Sustituir $(x + 2) + 6 > 2x + 5(x + 1)$

   por $x + 8 > 7x + 5$

2. Sumar o restar la misma expresión en ambos lados de la desigualdad.

   Sustituir $3x - 5 < 4$

   por $(3x - 5) + 5 < 4 + 5$

3. Multiplicar o dividir ambos lados de la desigualdad por la misma expresión positiva.

   Sustituir $4x > 16$ por $\dfrac{4x}{4} > \dfrac{16}{4}$

Procedimientos que invierten el sentido o dirección del símbolo de desigualdad

1. Intercambiar los dos lados de la desigualdad.

   Sustituir $3 < x$ por $x > 3$

2. Multiplicar o dividir ambos lados de la desigualdad por la misma expresión *negativa*.

   Sustituir $-2x > 6$ por $\dfrac{-2x}{-2} < \dfrac{6}{-2}$

Como se observa en los siguientes ejemplos, las desigualdades se resuelven usando muchos de los pasos que se usarían para resolver ecuaciones. Al escribir la solución de una desigualdad, se utiliza ya sea la notación de conjuntos o la de intervalos, la que sea más conveniente.

EJEMPLO 7 Solución de una desigualdad

Resuelva la desigualdad: $3 - 2x < 5$
Grafique el conjunto de soluciones.

Solución

$$3 - 2x < 5$$

$$3 - 2x - 3 < 5 - 3 \quad \text{Restar 3 en ambos lados.}$$

$$-2x < 2 \quad \text{Simplificar.}$$

$$\frac{-2x}{-2} > \frac{2}{-2} \quad \text{Dividir ambos lados entre } -2. \text{ (Se invierte el sentido de la desigualdad).}$$

$$x > -1 \quad \text{Simplificar.}$$

Figura 3



El conjunto de soluciones es $\{x|x > -1\}$ o usando la notación de intervalos, todos los números en el intervalo $(-1, \infty)$. Vea la gráfica en la figura 3. ◀

EJEMPLO 8 Solución de una desigualdad

Resuelva la desigualdad: $4x + 7 \geq 2x - 3$
Grafique el conjunto de soluciones.

Solución

$$4x + 7 \geq 2x - 3$$

$$4x + 7 - 7 \geq 2x - 3 - 7 \quad \text{Restar 7 en ambos lados.}$$

$$4x \geq 2x - 10 \quad \text{Simplificar.}$$

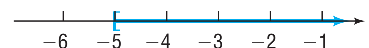
$$4x - 2x \geq 2x - 10 - 2x \quad \text{Restar } 2x \text{ en ambos lados.}$$

$$2x \geq -10 \quad \text{Simplificar.}$$

$$\frac{2x}{2} \geq \frac{-10}{2} \quad \text{Dividir ambos lados entre 2. (No cambia el sentido de la desigualdad).}$$

$$x \geq -5 \quad \text{Simplificar.}$$

Figura 4



El conjunto de soluciones es $\{x|x \geq -5\}$ o, usando la notación de intervalo, todos los números en el intervalo $[-5, \infty)$. Vea la gráfica en la figura 4. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

4

EJEMPLO 9 Solución de desigualdades combinadas

Resuelva la desigualdad: $-5 < 3x - 2 < 1$
Grafique el conjunto de soluciones.

Solución Recuerde que la desigualdad

$$-5 < 3x - 2 < 1$$

es equivalente a las dos desigualdades

$$-5 < 3x - 2 \quad \text{y} \quad 3x - 2 < 1$$

Se resolverá cada una de estas desigualdades por separado.

$-5 < 3x - 2$		$3x - 2 < 1$
$-5 + 2 < 3x - 2 + 2$	Sumar 2 en ambos lados.	$3x - 2 + 2 < 1 + 2$
$-3 < 3x$	Simplificar.	$3x < 3$
$\frac{-3}{3} < \frac{3x}{3}$	Dividir ambos lados entre 3.	$\frac{3x}{3} < \frac{3}{3}$
$-1 < x$	Simplificar.	$x < 1$

El conjunto de soluciones del par de desigualdades original consiste en todas las x para las que

$$-1 < x \quad \text{y} \quad x < 1$$

Figura 5



Esto se escribe en forma más compacta como $\{x|-1 < x < 1\}$. En la notación de intervalos, la solución es $(-1, 1)$. Vea la gráfica en la figura 5. ◀

Se observa en el proceso anterior que las dos desigualdades resueltas requirieron exactamente los mismos pasos. Una manera corta de resolver algebraicamente la desigualdad original es manejar las dos desigualdades al mismo tiempo, como sigue:

$-5 < 3x - 2 < 1$	
$-5 + 2 < 3x - 2 + 2 < 1 + 2$	Sumar 2 en cada parte
$-3 < 3x < 3$	Simplificar.
$\frac{-3}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{3}{3}$	Dividir cada parte entre 3
$-1 < x < 1$	Simplificar.

Se usa esta manera corta en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10 Solución de desigualdades combinadas

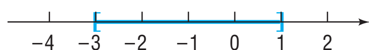
Resuelva la desigualdad: $-1 \le \dfrac{3 - 5x}{2} \le 9$

Grafique el conjunto de soluciones.

Solución

$-1 \le \frac{3 - 5x}{2} \le 9$	
$2(-1) \le 2\left(\frac{3 - 5x}{2}\right) \le 2(9)$	Multiplicar cada parte por 2 para eliminar el denominador.
$-2 \le 3 - 5x \le 18$	Simplificar.
$-2 -3 \le 3 -5x -3 \le 18 -3$	Restar 3 en cada parte para aislar el término que contiene a x.
$-5 \le -5x \le 15$	Simplificar.
$\frac{-5}{-5} \ge \frac{-5x}{-5} \ge \frac{15}{-5}$	Dividir cada parte entre −5 (invertir el sentido de cada símbolo de desigualdad).
$1 \ge x \ge -3$	Simplificar.
$-3 \le x \le 1$	Invertir el orden de manera que los números crezcan de izquierda a derecha.

Figura 6



El conjunto de soluciones es $\{x|-3 \le x \le 1\}$, es decir, todas las x en el intervalo $[-3, 1]$. La figura 6 ilustra la gráfica. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 73.

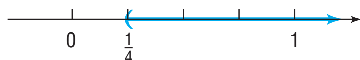
EJEMPLO 11 Uso de la propiedad del recíproco para resolver una desigualdad

Resuelva la desigualdad: $(4x - 1)^{-1} > 0$
Grafique el conjunto de soluciones.

Solución Como $(4x - 1)^{-1} = \dfrac{1}{4x - 1}$ y puesto que la propiedad del recíproco establece que cuando $\dfrac{1}{a} > 0$ entonces $a > 0$, se tiene

$$
\begin{aligned}
(4x - 1)^{-1} &> 0 \\
\frac{1}{4x - 1} &> 0 \\
4x - 1 &> 0 \qquad \text{Propiedad del recíproco} \\
4x &> 1 \\
x &> \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Figura 7



El conjunto de soluciones es $\left\{x \,\middle|\, x > \dfrac{1}{4}\right\}$, es decir, todas las x en el intervalo $\left(\dfrac{1}{4}, \infty\right)$. La figura 7 ilustra la gráfica. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 83.

EJEMPLO 12 Creación de desigualdades equivalentes

Si $-1 < x < 4$, encuentre a y b tales que $a < 2x + 1 < b$.

Solución La idea es cambiar la parte central de la desigualdad combinada de x a $2x + 1$, usando las propiedades de las desigualdades.

$$
\begin{aligned}
-1 < \;&x\; < 4 \\
-2 < \;&2x\; < 8 \qquad \text{Multiplicar cada parte por 2.} \\
-1 < \;&2x + 1\; < 9 \qquad \text{Sumar 1 a cada parte.}
\end{aligned}
$$

Entonces $a = -1$ y $b = 9$. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 91.

Aplicación

Se verá un problema aplicado que involucra desigualdades.

EJEMPLO 13 Física: Ley de Ohm

En electricidad, la ley de Ohm establece que $E = IR$, donde E es el voltaje (en volts), I es la corriente (en amperes) y R es la resistencia (en ohms). Una unidad de aire acondicionado tiene una resistencia de 10 ohms. Si el voltaje varía de 110 a 120 volts, inclusive, ¿qué intervalo correspondiente de corriente consumirá el aire acondicionado?

Solución Los voltajes están entre 110 y 120, inclusive, entonces

$$\begin{aligned} 110 \le\ & E \le 120 \\ 110 \le\ & IR \le 120 && \text{Ley de Ohm, } E = IR \\ 110 \le\ & I(10) \le 120 && R = 10 \\ \frac{110}{10} \le\ & \frac{I(10)}{10} \le \frac{120}{10} && \text{Dividir cada parte entre 10.} \\ 11 \le\ & I \le 12 \end{aligned}$$

El aire acondicionado consumirá entre 11 y 12 amperes de corriente, inclusive.

1.5 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas están dadas al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Grafique la desigualdad: $x \ge -2$. (pp. 17–20)

2. *Falso o verdadero:* $-5 > -3$ (pp. 17–20)

Conceptos y vocabulario

3. Si cada lado de una desigualdad se multiplica por un número _________, entonces el sentido de la desigualdad se invierte.

4. Un _________ _________, denotado por $[a, b]$, consiste en todos los números reales x para los que $a \le x \le b$.

5. La _________ _________ establece que el sentido, o dirección, de una desigualdad se conserva si cada lado se multiplica por un número positivo, mientras que se invierte si cada lado se multiplica por un número negativo.

En los problemas 6-9, suponga que $a < b$ y $c < 0$.

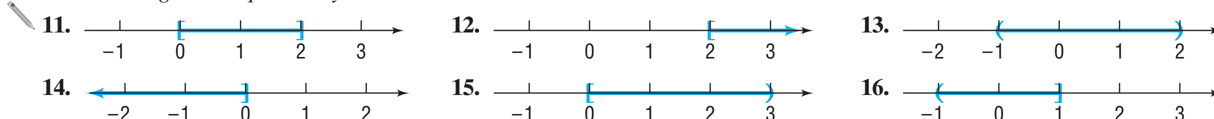
6. $a + c < b + c$ **7.** $a - c < b - c$

8. $ac > bc$ **9.** $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

10. *Falso o verdadero:* el cuadrado de cualquier número real es siempre no negativo.

Ejercicio

En los problemas 11-16, exprese la gráfica mostrada en oscuro usando la notación de intervalos. También exprese cada una como una desigualdad que incluye a x.



En los problemas 17-22, se da una desigualdad. Escriba la desigualdad obtenida si:
a) *Suma 3 en cada lado de la desigualdad dada.*
b) *Resta 5 en cada lado de la desigualdad dada.*
c) *Multiplica cada lado de la desigualdad dada por 3.*
d) *Multiplica cada lado de la desigualdad dada por −2.*

17. $3 < 5$ **18.** $2 > 1$ **19.** $4 > -3$

20. $-3 > -5$ **21.** $2x + 1 < 2$ **22.** $1 - 2x > 5$

En los problemas 23-30, escriba cada desigualdad usando la notación de intervalos e ilustre cada una en la recta de números reales.

23. $0 \le x \le 4$ **24.** $-1 < x < 5$ **25.** $4 \le x < 6$ **26.** $-2 < x < 0$

27. $x \ge 4$ **28.** $x \le 5$ **29.** $x < -4$ **30.** $x > 1$

En los problemas 31-38, escriba cada intervalo como una desigualdad que incluya a x e ilustre cada uno en la recta de números reales.

31. $[2, 5]$ **32.** $(1, 2)$ **33.** $(-3, -2)$ **34.** $[0, 1)$

35. $[4, \infty)$ **36.** $(-\infty, 2]$ **37.** $(-\infty, -3)$ **38.** $(-8, \infty)$

En los problemas 39-52, complete la desigualdad con el símbolo adecuado.

39. Si $x < 5$, entonces $x - 5$ __________ 0.

40. Si $x < -4$, entonces $x + 4$ __________ 0.

41. Si $x > -4$, entonces $x + 4$ __________ 0.

42. Si $x > 6$, entonces $x - 6$ __________ 0.

43. Si $x \geq -4$, entonces $3x$ __________ -12.

44. Si $x \leq 3$, entonces $2x$ __________ 6.

45. Si $x > 6$, entonces $-2x$ __________ -12.

46. Si $x > -2$, entonces $-4x$ __________ 8.

47. Si $x \geq 5$, entonces $-4x$ __________ -20.

48. Si $x \leq -4$, entonces $-3x$ __________ 12.

49. Si $2x > 6$, entonces x __________ 3.

50. Si $3x \leq 12$, entonces x __________ 4.

51. Si $-\frac{1}{2}x \leq 3$, entonces x __________ -6.

52. Si $-\frac{1}{4}x > 1$, entonces x __________ -4.

En los problemas 53-88, resuelva cada desigualdad. Exprese su respuesta en la notación de conjuntos o de intervalos. Grafique el conjunto de soluciones.

53. $x + 1 < 5$

54. $x - 6 < 1$

55. $1 - 2x \leq 3$

56. $2 - 3x \leq 5$

57. $3x - 7 > 2$

58. $2x + 5 > 1$

59. $3x - 1 \geq 3 + x$

60. $2x - 2 \geq 3 + x$

61. $-2(x + 3) < 8$

62. $-3(1 - x) < 12$

63. $4 - 3(1 - x) \leq 3$

64. $8 - 4(2 - x) \leq -2x$

65. $\frac{1}{2}(x - 4) > x + 8$

66. $3x + 4 > \frac{1}{3}(x - 2)$

67. $\frac{x}{2} \geq 1 - \frac{x}{4}$

68. $\frac{x}{3} \geq 2 + \frac{x}{6}$

69. $0 \leq 2x - 6 \leq 4$

70. $4 \leq 2x + 2 \leq 10$

71. $-5 \leq 4 - 3x \leq 2$

72. $-3 \leq 3 - 2x \leq 9$

73. $-3 < \frac{2x - 1}{4} < 0$

74. $0 < \frac{3x + 2}{2} < 4$

75. $1 < 1 - \frac{1}{2}x < 4$

76. $0 < 1 - \frac{1}{3}x < 1$

77. $(x + 2)(x - 3) > (x - 1)(x + 1)$

78. $(x - 1)(x + 1) > (x - 3)(x + 4)$

79. $x(4x + 3) \leq (2x + 1)^2$

80. $x(9x - 5) \leq (3x - 1)^2$

81. $\frac{1}{2} \leq \frac{x + 1}{3} < \frac{3}{4}$

82. $\frac{1}{3} < \frac{x + 1}{2} \leq \frac{2}{3}$

83. $(4x + 2)^{-1} < 0$

84. $(2x - 1)^{-1} > 0$

85. $0 < \frac{2}{x} < \frac{3}{5}$

86. $0 < \frac{4}{x} < \frac{2}{3}$

87. $0 < (2x - 4)^{-1} < \frac{1}{2}$

88. $0 < (3x + 6)^{-1} < \frac{1}{3}$

En los problemas 89-98, encuentre a y b.

89. Si $-1 < x < 1$, entonces $a < x + 4 < b$.

90. Si $-3 < x < 2$, entonces $a < x - 6 < b$.

91. Si $2 < x < 3$, entonces $a < -4x < b$.

92. Si $-4 < x < 0$, entonces $a < \frac{1}{2}x < b$.

93. Si $0 < x < 4$, entonces $a < 2x + 3 < b$.

94. Si $-3 < x < 3$, entonces $a < 1 - 2x < b$.

95. Si $-3 < x < 0$, entonces $a < \frac{1}{x + 4} < b$.

96. Si $2 < x < 4$, entonces $a < \frac{1}{x - 6} < b$.

97. Si $6 < 3x < 12$, entonces $a < x^2 < b$.

98. Si $0 < 2x < 6$, entonces $a < x^2 < b$.

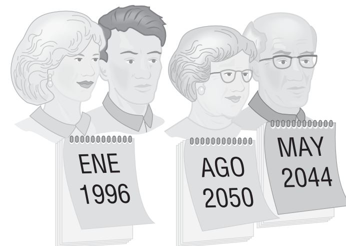
99. ¿Cuál es el dominio de la variable en la expresión $\sqrt{3x + 6}$?

100. ¿Cuál es el dominio de la variable en la expresión $\sqrt{8 + 2x}$?

101. Un joven se define como alguien mayor de 21 años, pero menor de 30. Exprese esta proposición usando desigualdades.

102. Las personas de edad madura se podrían definir como de 40 años o más y menores de 60. Exprese esta proposición usando desigualdades.

103. **Esperanza de vida** La aseguradora Metropolitan Life Insurance reportó que un hombre promedio de 25 años en 1996 esperaría vivir al menos 48.4 años más; y una mujer promedio de 25 años en 1996 esperaría vivir al menos 54.7 años más.



a) ¿Hasta qué edad esperaría vivir un hombre promedio de 25 años? Exprese su respuesta como una desigualdad.

b) ¿Hasta qué edad esperaría vivir una mujer promedio de 25 años? Exprese su respuesta como una desigualdad.

c) ¿Quién esperaría vivir más, un hombre o una mujer? ¿Por cuántos años?

104. Química general Para cierto gas ideal, el volumen V (en centímetros cúbicos) es igual a 20 veces la temperatura T (en grados Celsius). Si la temperatura varía entre 80º y 120ºC inclusive, ¿cuál es el intervalo correspondiente del volumen del gas?

105. Bienes raíces Un agente de bienes raíces acuerda vender un complejo de departamentos grande según el siguiente programa de comisiones: \$45,000 más 25% del precio de venta que exceda a \$900,000. Suponiendo que el complejo se venderá en algún precio entre \$900,000 y \$1,100,000 inclusive, ¿en qué intervalo varía la comisión de agente? ¿Cómo varía la comisión en términos del porcentaje del precio de venta?

106. Comisiones de ventas Un vendedor de autos usados recibe una comisión de \$25 más 40% del precio de venta que exceda el costo del dueño. El dueño asegura que los autos usados suelen venderse al menos en el costo de dueño más \$70 y cuando mucho en el costo de dueño más \$300. Para cada venta hecha, ¿en qué intervalo esperaría el vendedor que varíe su comisión?

107. Retención de impuestos federales El método de porcentaje para la retención de impuestos federales sobre el ingreso (2003) establece que una persona soltera cuyo salario semanal, después de restar las retenciones, es mayor que \$592 y menor que \$1317, debe tener una retención de \$74.35 más 25% de los que exceda a \$592. ¿En qué intervalo varía la cantidad retenida si el salario semanal varía entre \$600 y \$800, inclusive? **FUENTE:** *Employer's Tax Guide*, Department of Treasure, Internal Revenue Service, 2003.

108. Retención de impuestos federales Trabaje de nuevo en el problema 107 si el salario semanal varía entre \$800 y \$1000 inclusive.

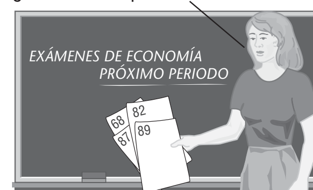
109. Tasa de energía eléctrica El precio de Commonwealth Edison Company por la energía eléctrica en mayo de 2003 es 8.275¢ por kilowatt-hora. Además, cada recibo mensual contiene un cargo al cliente de \$7.58. Si los recibos del año pasado van de \$63.47 a \$214.53, ¿en qué intervalo varía el consumo (en kilowatt-horas)? **FUENTE:** Commonwealth Edison Co., Chicago, Illinois, 2003.

110. Recibos de agua Village of Oak Lawn cobra a los propietarios \$27.18 por trimestre más \$1.90 por cada 100 galones de agua que excedan a 12,000 galones. En 2003, el recibo trimestral de un propietario varió entre \$76.52 y \$34.78. ¿En qué intervalo varía el consumo de agua? **FUENTE:** Village of Oak Lawn, Illinois, 2003.

111. Sobreprecio de un auto nuevo El aumento en el precio, sobre el costo del distribuidor, de un auto nuevo varía entre 12% y 18%. Si el precio marcado es \$8800, ¿en qué intervalo varía el costo del distribuidor?

112. Prueba de IQ Una prueba estándar de coeficiente de inteligencia tiene un promedio de 100. De acuerdo con una teoría estadística, de las personas que resuelven la prueba, el 2.5% con las calificaciones más altas tendrá calificaciones de más de 1.96σ arriba del promedio, donde σ (sigma, un número llamado **desviación estándar**) depende de la naturaleza de la prueba. Si $\sigma = 12$ para esta prueba y no existe (en principio) un límite superior para la calificación posible, escriba el intervalo de las calificaciones posibles de las personas en el 2.5% más alto.

113. Cálculo de calificaciones En la clase 101, de Economía, usted obtuvo calificaciones de 68, 82, 87 y 89 en los primeros cuatro de cinco exámenes. Para obtener B, el promedio de las primeras cinco calificaciones debe ser mayor o igual que 80 y menor que 90. Resuelva la desigualdad para encontrar el intervalo de la calificación que necesita en el último examen para obtener B.



114. Cálculo de calificaciones Repita el problema 113 si el quinto examen cuenta el doble.

115. Media aritmética Si $a < b$, demuestre que $a < \frac{a+b}{2} < b$. El número $\frac{a+b}{2}$ se llama **media aritmética** de a y b.

116. Vea el problema 115. Demuestre que la media aritmética de a y b equidista de a y b.

117. Media geométrica Si $0 < a < b$, demuestre que $a < \sqrt{ab} < b$. El número $\sqrt{ab}$ se llama **media geométrica** de a y b.

118. Vea los problemas 115 y 117. Demuestre que la media geométrica de a y b es menor que la media aritmética de a y b.

119. Media armónica Para $0 < a < b$, definimos h por

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Demuestre que $a < h < b$. El número h se llama **media armónica** de a y b.

120. Vea los problemas 115, 117 y 118. Demuestre que la media armónica de a y b es igual al cuadrado de la media geométrica dividido por la media aritmética.

121. Desarrolle una desigualdad que no tenga solución. Desarrolle una que tenga exactamente una solución.

122. La desigualdad $x^2 + 1 < -5$ o tiene solución. Explique por qué.

123. ¿Prefiere usar la notación de desigualdades o la notación de intervalo para expresar la solución de una desigualdad? Dé sus razones. ¿Existen circunstancias particulares en las que prefiera una o la otra? Cite ejemplos.

124. Diga cómo explicaría a un compañero las razones que fundamentan las propiedades de la multiplicación para desigualdades (página 128); es decir, el sentido o dirección de una desigualdad no cambia si cada lado se multiplica por un número real positivo, mientras que se invierte si cada lado se multiplica por un número real negativo.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. [recta numérica: −4, −2, 0; intervalo desde −2 hacia la derecha]

2. Falso

1.6 Ecuaciones y desigualdades que incluyen valor absoluto

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Repaso de álgebra (Repaso, sección R.2, pp. 17-20)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?" en la página 139.

OBJETIVOS 1 Resolver ecuaciones que incluyen valor absoluto
2 Resolver desigualdades que incluyen valor absoluto

Ecuaciones que incluyen valor absoluto

1 Recuerde que, en la recta de números reales, el valor absoluto de a es igual a la distancia del origen al punto cuya coordenada es a. Por ejemplo, existen dos puntos cuya distancia al origen es 5 unidades, -5 y 5. Entonces la ecuación $|x| = 5$ tendrá el conjunto de soluciones $\{-5, 5\}$. Esto lleva al siguiente resultado.

Ecuaciones que incluyen valor absoluto

Si a es un número real positivo y si u es cualquier expresión algebraica, entonces

$$|u| = a \quad \text{es equivalente a} \quad u = a \quad \text{o} \quad u = -a \qquad \textbf{(1)}$$

EJEMPLO 1 **Solución de una ecuación que incluye valor absoluto**

Resuelva la ecuación: $|x + 4| = 13$

Solución Esto sigue la forma de la ecuación (1), donde $u = x + 4$. Se tienen dos posibilidades.

$$x + 4 = 13 \quad \text{o} \quad x + 4 = -13$$
$$x = 9 \quad \text{o} \quad x = -17$$

El conjunto de soluciones es $\{-17, 9\}$. ◀

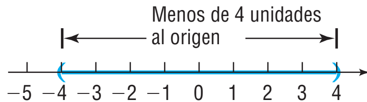
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

2 Se verá una desigualdad que incluye valor absoluto.

EJEMPLO 2 Solución de una desigualdad que incluye valor absoluto

Resuelva la desigualdad: $|x| < 4$

Figura 8



Solución Se buscan todos los puntos cuya coordenada x esté a una distancia del origen menor que 4 unidades. Vea en la figura 8 una ilustración. Como cualquier x entre -4 y 4 satisface la condición $|x| < 4$, el conjunto de soluciones consiste en todos los números x tales que $-4 < x < 4$, es decir, todas las x en el intervalo $(-4, 4)$. ◀

Esto implica los siguientes resultados.

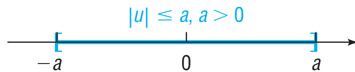
Desigualdades que incluyen valor absoluto

Si a es un número positivo y u es una expresión algebraica, entonces

$\lvert u\rvert < a$	es equivalente a	$-a < u < a$	**(2)**
$\lvert u\rvert \le a$	es equivalente a	$-a \le u \le a$	**(3)**

En otras palabras, $|u| < a$ es equivalente a $-a < u$ y $u < a$.

Figura 9



Vea en la figura 9 una ilustración.

EJEMPLO 3 Solución de una desigualdad que incluye valor absoluto

Resuelva la desigualdad: $|2x + 4| \le 3$
Grafique el conjunto de soluciones.

Solución

$$|2x + 4| \le 3$$ Esto sigue la forma de la proposición (3); la expresión $u = 2x + 4$ está dentro de las barras de valor absoluto.

$$-3 \le 2x + 4 \le 3$$ Aplicar la proposición (3).

$$-3 - 4 \le 2x + 4 - 4 \le 3 - 4$$ Restar 4 de cada parte.

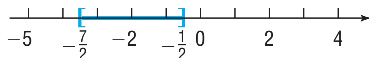
$$-7 \le 2x \le -1$$ Simplificar.

$$\frac{-7}{2} \le \frac{2x}{2} \le \frac{-1}{2}$$ Dividir cada parte entre 2.

$$-\frac{7}{2} \le x \le -\frac{1}{2}$$ Simplificar.

El conjunto de soluciones es $\left\{x \middle| -\frac{7}{2} \le x \le -\frac{1}{2}\right\}$, esto es, todas las x en el intervalo $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]$. Vea la figura 10. ◀

Figura 10



EJEMPLO 4 Solución de una desigualdad que incluye valor absoluto

Resuelva la desigualdad: $|1 - 4x| < 5$
Grafique el conjunto de soluciones.

Solución

$$|1 - 4x| < 5$$ Esta expresión sigue la forma de la proposición (2); la expresión $u = 1 - 4x$ está dentro de las barras de valor absoluto.

$$-5 < 1 - 4x < 5$$ Aplicar la proposición (2).

$$-5 - 1 < 1 - 4x - 1 < 5 - 1$$ Restar 1 en cada parte.

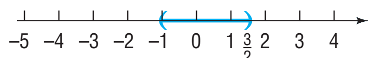
$$-6 < -4x < 4$$ Simplificar.

$$\frac{-6}{-4} > \frac{-4x}{-4} > \frac{4}{-4}$$ Dividir cada parte entre -4; esto cambia el sentido de los símbolos de desigualdad.

$$\frac{3}{2} > x > -1$$ Simplificar.

$$-1 < x < \frac{3}{2}$$ Reordenar.

Figura 11



El conjunto de soluciones es $\left\{x \middle| -1 < x < \frac{3}{2}\right\}$, es decir, todas las x en el intervalo $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$. Vea la figura 11.

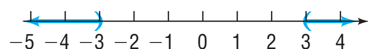

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 35.

EJEMPLO 5 Solución de una desigualdad que incluye valor absoluto

Resuelva la desigualdad: $|x| > 3$
Grafique el conjunto de soluciones.

Solución Se buscan todos los puntos cuya coordenada x está a una distancia mayor que 3 unidades del origen. La figura 12 ilustra esta situación. Se concluye que cualquier x menor que -3 o mayor que 3 satisface la condición $|x| > 3$. En consecuencia, el conjunto de soluciones consiste en todos los números x tales que $x < -3$ o $x > 3$, es decir, todas las x en los intervalos $(-\infty, -3)$ o $(3, \infty)$.

Figura 12



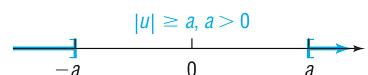
Desigualdades que incluyen valor absoluto

Si a es un número positivo y u es una expresión algebraica, entonces

$\lvert u\rvert > a$	es equivalente a	$u < -a$ o $u > a$	**(4)**
$\lvert u\rvert \geq a$	es equivalente a	$u \leq -a$ o $u \geq a$	**(5)**

Vea en la figura 13 una ilustración.

Figura 13



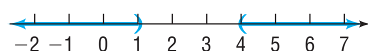
EJEMPLO 6 Solución de una desigualdad que incluye valor absoluto

Resuelva la desigualdad: $|2x - 5| > 3$
Grafique el conjunto de soluciones.

Solución

$\|2x-5\| > 3$			Esto sigue la forma de la proposición (4); la expresión $u = 2x - 5$ está dentro de las barras de valor absoluto.
$2x - 5 < -3$	o	$2x - 5 > 3$	Aplicar la proposición (4).
$2x - 5 + 5 < -3 + 5$	o	$2x - 5 + 5 > 3 + 5$	Sumar 5 en cada parte.
$2x < 2$	o	$2x > 8$	Simplificar.
$\dfrac{2x}{2} < \dfrac{2}{2}$	o	$\dfrac{2x}{2} > \dfrac{8}{2}$	Dividir cada parte entre 2.
$x < 1$	o	$x > 4$	Simplificar.

Figura 14



El conjunto de soluciones es $\{x \mid x < 1 \text{ o } x > 4\}$, es decir, todas las x en los intervalos $(-\infty, 1)$ o $(4, \infty)$. Vea la figura 14. ◀

ADVERTENCIA: Un error común que debe evitarse es intentar escribir la solución $x < 1$ o $x > 4$ como las desigualdad combinada $1 > x > 4$, que es incorrecto puesto que no existen números x para los que $1 > x$ y $x > 4$. ■


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

1.6 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. $|-2| =$ ________ (pp. 17–20)

2. *Falso o verdadero:* $|x| \geq 0$ para cualquier número real x (pp. 17-20)

Conceptos y vocabulario

3. El conjunto de soluciones de la ecuación $|x| = 5$ es $\{$________$\}$.

4. El conjunto de soluciones de la ecuación $|x| < 5$ es $\{x|$________$\}$.

5. *Falso o verdadero:* la ecuación $|x| = -2$ no tiene solución.

6. *Falso o verdadero:* la desigualdad $|x| \geq -2$ tiene el conjunto de números reales como conjunto de soluciones.

Ejercicios

En los problemas 7-30, resuelva cada ecuación.

7. $|2x| = 6$ **8.** $|3x| = 12$ **9.** $|2x + 3| = 5$ **10.** $|3x - 1| = 2$

11. $|1 - 4t| + 8 = 13$ **12.** $|1 - 2z| + 6 = 9$ **13.** $|-2x| = |8|$ **14.** $|-x| = |1|$

15. $|-2|x = 4$ **16.** $|3|x = 9$ **17.** $\frac{2}{3}|x| = 9$ **18.** $\frac{3}{4}|x| = 9$

19. $\left|\frac{x}{3} + \frac{2}{5}\right| = 2$ **20.** $\left|\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right| = 1$ **21.** $|u - 2| = -\frac{1}{2}$ **22.** $|2 - v| = -1$

23. $4 - |2x| = 3$ **24.** $5 - \left|\frac{1}{2}x\right| = 3$ **25.** $|x^2 - 9| = 0$ **26.** $|x^2 - 16| = 0$

27. $|x^2 - 2x| = 3$ **28.** $|x^2 + x| = 12$ **29.** $|x^2 + x - 1| = 1$ **30.** $|x^2 + 3x - 2| = 2$

En los problemas 31-54, resuelva cada desigualdad. Exprese su respuesta usando la notación de conjuntos o de intervalos.

31. $|2x| < 8$ **32.** $|3x| < 15$ **33.** $|3x| > 12$ **34.** $|2x| > 6$

35. $|x - 2| + 2 < 3$ **36.** $|x + 4| + 3 < 5$ **37.** $|3t - 2| \leq 4$ **38.** $|2u + 5| \leq 7$

39. $|x - 3| \geq 2$ **40.** $|x + 4| \geq 2$ **41.** $|1 - 4x| - 7 < -2$ **42.** $|1 - 2x| - 4 < -1$

43. $|1 - 2x| > 3$

44. $|2 - 3x| > 1$

45. $|-4x| + |-5| \leq 1$

46. $|-x| - |4| \leq 2$

47. $|-2x| > |-3|$

48. $|-x - 2| \geq 1$

49. $-|2x - 1| \geq -3$

50. $-|1 - 2x| \geq -3$

51. $|2x| < -1$

52. $|3x| \geq 0$

53. $|5x| \geq -1$

54. $|6x| < -2$

---

55. Temperatura del cuerpo La temperatura "normal" del cuerpo humano es 98.6ºF. Si una temperatura x difiere de la normal en al menos 1.5º se considera no sana, escriba la condición para la temperatura no sana x como una desigualdad que incluya valor absoluto, y despeje x.



56. Voltaje doméstico En Estados Unidos, el voltaje doméstico normal es 115 volts. Sin embargo, es común que el voltaje real difiera del normal a lo más en 5 volts. Exprese esta situación como una desigualdad que incluye valor absoluto. Use x como el voltaje real y despeje x.

57. Exprese el hecho de que x difiere de 3 en menos que $\frac{1}{2}$ como una desigualdad que incluye valor absoluto. Obtenga x.

58. Exprese el hecho de que x difiere de -4 en menos de 1 como una desigualdad que incluye valor absoluto. Obtenga x.

59. Exprese el hecho de que x difiere de -3 en más de 2 como una desigualdad que incluye valor absoluto. Obtenga x.

60. Exprese el hecho de que x difiere de 2 en más de 3 como una desigualdad que incluye valor absoluto. Obtenga x.

En los problemas 61-66, encuentre a y b.

61. Si $|x - 1| < 3$, entonces $a < x + 4 < b$.

62. Si $|x + 2| < 5$, entonces $a < x - 2 < b$.

63. Si $|x + 4| \leq 2$, entonces $a \leq 2x - 3 \leq b$.

64. Si $|x - 3| \leq 1$, entonces $a \leq 3x + 1 \leq b$.

65. Si $|x - 2| \leq 7$, entonces $a \leq \frac{1}{x - 10} \leq b$.

66. Si $|x + 1| \leq 3$, entonces $a \leq \frac{1}{x + 5} \leq b$.

67. Demuestre que si $a > 0$, $b > 0$ y $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, entonces $a < b$. [**Sugerencia:** $b - a = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$]

68. Demuestre que $a \leq |a|$.

69. Pruebe la *desigualdad del triángulo* $|a + b| \leq |a| + |b|$.

[**Sugerencia:** Expanda $|a + b|^2 = (a + b)^2$ y use el resultado del problema 68].

70. Demuestre que $|a - b| \geq |a| - |b|$.

[**Sugerencia:** Aplique la desigualdad del triángulo del problema 69 a $|a| = |(a - b) + b|$].

71. Si $a > 0$, demuestre que el conjunto de soluciones de la desigualdad

$$x^2 < a$$

consiste en todos los números x para los que

$$-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$$

72. Si $a > 0$, demuestre que el conjunto de soluciones de la desigualdad

$$x^2 > a$$

consiste en todos los números x para los que

$$x < -\sqrt{a} \quad \text{o} \quad x > \sqrt{a}$$

En los problemas 73-80, use los resultados encontrados en los problemas 71 y 72 para resolver cada desigualdad.

73. $x^2 < 1$

74. $x^2 < 4$

75. $x^2 \geq 9$

76. $x^2 \geq 1$

77. $x^2 \leq 16$

78. $x^2 \leq 9$

79. $x^2 > 4$

80. $x^2 > 16$

81. Resuelva $|3x - |2x + 1|| = 4$.

82. Resuelva $|x + |3x - 2|| = 2$.

83. La ecuación $|x| = -2$ no tiene solución. Explique por qué.

84. La desigualdad $|x| > -0.5$ tiene todos los números reales como el conjunto de soluciones. Explique por qué.

85. La desigualdad $|x| > 0$ tiene como conjunto de soluciones $\{x|x \neq 0\}$. Explique por qué.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. 2

2. Verdadero

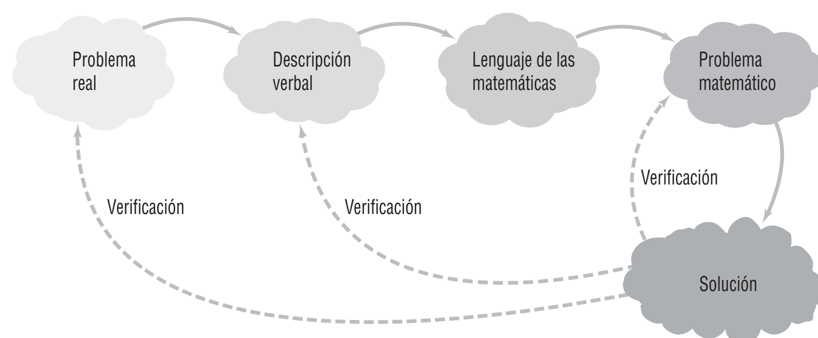
1.7 Aplicaciones: interés, mezcla, movimiento uniforme, tareas de tasa constante

OBJETIVOS
1 Traducir descripciones verbales en expresiones matemáticas
2 Resolver problemas de interés
3 Resolver problemas de mezcla
4 Resolver problemas de movimiento uniforme
5 Resolver problemas de trabajo de tasa constante

Los problemas de aplicación (en palabras) no aparecen en la forma "resuelva la ecuación . . . ". En su lugar, se tiene la información usando palabras, una descripción verbal del problema real. Así, para resolver problemas aplicados, debemos poder traducir la descripción verbal en el lenguaje de las matemáticas. Esto se hace usando variables para representar las cantidades desconocidas y luego encontrando las relaciones (como ecuaciones) que involucran a estas variables. Este proceso se conoce como **modelado matemático**.

Cualquier solución a un problema matemático debe verificarse contra el problema matemático, la descripción verbal y el problema real. La figura 15 ilustra el **proceso de modelado**.

Figura 15



 Se verán algunos ejemplos que ayudarán a traducir ciertas palabras en símbolos matemáticos.

EJEMPLO 1 Traducir descripciones verbales en expresiones matemáticas

a) Para el movimiento uniforme, la velocidad de un objeto es igual a la distancia recorrida dividida entre el tiempo requerido.

Traducción: si v es la velocidad, s es la distancia y t el tiempo, entonces $v = \frac{s}{t}$.

b) Sea x un número.

El número 5 veces más grande que x es $5x$.
El número 3 unidades menor que x es $x - 3$.
El número que excede a x en 4 es $x + 4$.
El número que, al sumarlo a x, da 5 es $5 - x$. ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

Siempre verifique las unidades usadas para medir las variables de un problema aplicado. En el ejemplo 1a), si v se mide en millas por hora, entonces la distancia debe estar expresada en millas y el tiempo en horas. Es una buena práctica verificar las unidades para asegurarse que son consistentes y tienen sentido.

Los pasos a seguir para establecer problemas aplicados, dados antes, se repiten a continuación.

Pasos para establecer problemas aplicados

PASO 1: Lea el problema con cuidado, quizá dos o tres veces. Ponga especial atención en la pregunta que se hace para identificar lo que busca. Si es posible, determine posibilidades realistas para la respuesta.

PASO 2: Asigne una letra (variable) para representar lo que busca y, si es necesario, exprese cualquier cantidad desconocida que quede en términos de esta variable.

PASO 3: Haga una lista de todos los hechos conocidos y tradúzcalos en expresiones matemáticas. Estos pueden tener la forma de una ecuación (o más adelante, de una desigualdad) que incluye la variable. Si es posible, dibuje un diagrama con las etiquetas apropiadas como ayuda. En ocasiones es útil una tabla o un cuadro sinóptico.

PASO 4: Resuelva la ecuación para obtener la variable y luego conteste la pregunta.

PASO 5: Si tiene sentido, ¡felicitaciones! Si no lo tiene, intente de nuevo.

Interés



El **interés** es dinero que se paga por el uso del dinero. La cantidad total del préstamo (sea de un banco para un individuo o de un individuo para el banco en la forma de una cuenta de ahorros) se llama **capital**. La **tasa de interés**, expresada como porcentaje, es la cantidad cargada por el uso del capital durante un periodo dado, usualmente con base anual (es decir, por año).

Fórmula de interés simple

Si se pide un préstamo de C dólares por un periodo de t años a una tasa de interés anual r, expresada como decimal, el interés I cobrado es

$$I = Crt \qquad \textbf{(1)}$$

El interés cobrado según la fórmula (1) se llama **interés simple**. Al usar la fórmula (1), asegúrese de expresar r como decimal.

EJEMPLO 2 **Finanzas: cálculo del interés sobre un préstamo**

Suponga que Juanita pide un préstamo de \$500 por 6 meses a una tasa de interés simple de 9% al año. ¿Cuál es el interés que le cobrarán por este préstamo? ¿Cuánto debe Juanita después de 6 meses?

Solución La tasa de interés está dada por año, de manera que el tiempo real que el dinero se presta debe expresarse en años. El interés cobrado será el capital, \$500, multiplicado por la tasa de interés (9% = 0.09) y por el tiempo en años, $\frac{1}{2}$:

$$\text{Interés cargado} = I = Crt = (500)(0.09)\left(\frac{1}{2}\right) = \$22.50$$

Después de 6 meses, Juanita deberá lo que pidió en préstamo más el interés: \$500 + \$22.50 = \$522.50. ◀

EJEMPLO 3 Planeación financiera

Candy tiene \$70,000 para invertir y requiere una tasa de retorno global de 9%. Puede invertir en un certificado de depósito seguro, asegurado por el gobierno, pero sólo paga 8%. Para obtener 9%, está de acuerdo en invertir parte del dinero en bonos corporativos de riesgo que pagan 12%. ¿Cuánto debe invertir en cada tipo de inversión para lograr su meta?

Solución **PASO 1:** Lo que se busca son dos cantidades en dólares: el capital invertido en bonos corporativos y el capital invertido en certificados de depósito.

PASO 2: Sea x la cantidad invertida (en dólares) en bonos. Entonces $70{,}000 - x$ es la cantidad que invertirá en el certificado. (¿Por qué?)

PASO 3: Se establece una tabla.

	Capital (\$)	Tasa	Tiempo (años)	Interés
Bonos	x	12% = 0.12	1	$0.12x$
Certificado	$70{,}000 - x$	8% = 0.08	1	$0.08(70{,}000 - x)$
Total	70,000	9% = 0.09	1	0.09(70,000) = 6300

Como el interés total de las inversiones es igual a 0.09(70,000) = 6300, se tiene la ecuación

$$0.12x + 0.08(70{,}000 - x) = 6300$$

(Observe que las unidades son congruentes: la unidad es dólares en cada lado).

PASO 4:
$$\begin{aligned} 0.12x + 5600 - 0.08x &= 6300 \\ 0.04x &= 700 \\ x &= 17{,}500 \end{aligned}$$

Candy debe colocar \$17,500 en los bonos y \$70,000−\$17,500 = \$52,500 en el certificado.

PASO 5: El interés de los bonos después de 1 año es 0.12(\$17,500) = \$2100; el interés del certificado después de 1 año es 0.8(\$53,500) = \$4200. El interés total anual es \$6300, la cantidad requerida. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 17.

Problemas de mezcla

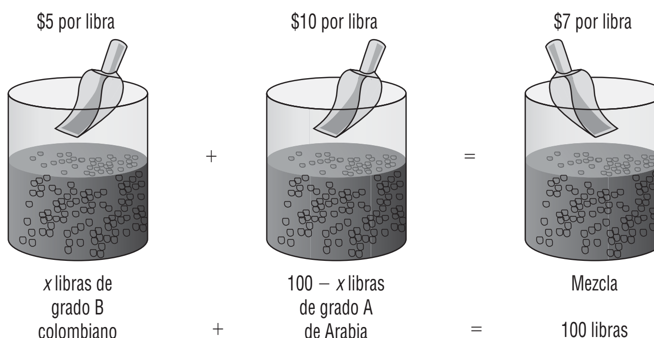
3 Las refinerías algunas veces producen gasolina que es una mezcla de dos o más tipos de combustible; las panaderías en ocasiones mezclan dos o más tipos de harina para su pan. Estos problemas se conocen como **problemas de mezclas** porque combinan dos o más cantidades para formar una mezcla.

EJEMPLO 4 Mezcla de café

El gerente de Starbucks decide experimentar con una nueva mezcla de café. Mezclará algo de café colombiano de grado B que se vende en \$5 la libra con algo de café de Arabia de grado A que se vende en \$10 la libra para obtener 100 libras de la nueva mezcla. El precio de venta de la nueva mezcla debe ser \$7 por libra y no debe haber diferencia en la ganancia por vender la nueva mezcla comparada con vender otros tipos. ¿Cuántas libras de café de grado B colombiano y grado A de Arabia se requieren?

Solución Sea x el número de libras de café grado B colombiano. Entonces $100 - x$ es igual al número de libras de café grado A de Arabia. Vea la figura 16.

Figura 16



Como no debe haber diferencia en la ganancia al vender los grados A y B por separado o vender la mezcla, se tiene

$$\begin{Bmatrix}\text{Precio por libra}\\ \text{del grado B}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\text{\# libras de}\\ \text{grado B}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\text{Precio por libra}\\ \text{del grado A}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\text{\# libras de}\\ \text{grado A}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{Precio por libra}\\ \text{de mezcla}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\text{\# libras por}\\ \text{mezcla}\end{Bmatrix}$$

$$\$5 \cdot x + \$10 \cdot (100 - x) = \$7 \cdot 100$$

Se tiene la ecuación

$$\begin{aligned} 5x + 10(100 - x) &= 700 \\ 5x + 1000 - 10x &= 700 \\ -5x &= -300 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

El administrador debe mezclar 60 libras de grado B colombiano con $100 - 60 = 40$ libras de grado A de Arabia para obtener la mezcla deseada.

✔ **COMPROBACIÓN:** Las 60 libras de café de grado B se venderían en $(\$5)(60) = \$300$ y las 40 libras de café de grado A se venderían en $(\$10)(40) = \$400$; el ingreso total de \$700 es igual al ingreso obtenido con la venta de la mezcla, como se desea. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

Movimiento uniforme

4 Se dice que los objetos que se mueven a una velocidad constante están en un **movimiento uniforme**. Cuando se conoce la velocidad promedio de un objeto, se podría interpretar como su velocidad constante. Por ejemplo, una ciclista que viaja a una velocidad promedio de 25 millas por hora, está en movimiento uniforme.

Fórmula del movimiento uniforme

Si un objeto se mueve a una velocidad promedio v, la distancia s que recorre en el tiempo t está dada por la fórmula

$$s = vt \qquad \textbf{(2)}$$

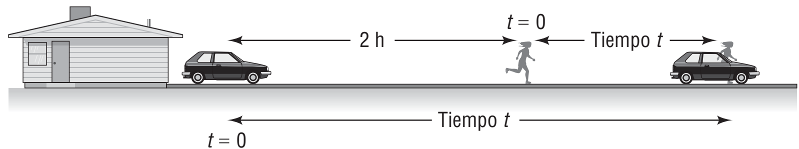
Esto es, distancia = velocidad · tiempo

EJEMPLO 5 Física: movimiento uniforme

Tanya, quien es una corredora de larga distancia, corre a una velocidad promedio de 8 millas por hora (mi/h). Dos horas después de que Tanya sale de su casa, usted se va en su auto y sigue la misma ruta. Si su velocidad promedio es 40 mi/h, ¿cuánto tiempo transcurre hasta que alcanza a Tanya? ¿A qué distancia de la casa la alcanza?

Solución Vea la figura 17. Se usa t para representar el tiempo (en horas) que toma al auto alcanzar a Tanya. Cuando esto ocurre, el tiempo total transcurrido para Tanya es $t + 2$ horas.

Figura 17



Establezca la siguiente tabla:

	Velocidad mi/h	Tiempo h	Distancia mi
Tanya	8	$t + 2$	$8(t + 2)$
Auto	40	t	$40t$

Como la distancia recorrida es la misma, se llega la siguiente ecuación:

$$8(t + 2) = 40t$$
$$8t + 16 = 40t$$
$$32t = 16$$
$$t = \frac{1}{2} \text{ hora}$$

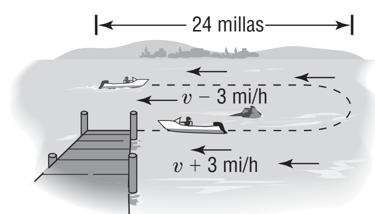
Tomará al auto $\frac{1}{2}$ hora alcanzar a Tanya. Cada uno habrá recorrido 20 millas.

✔ **COMPROBACIÓN:** En 2.5 horas, Tanya recorre una distancia de $(2.5)(8) = 20$ millas. En $\frac{1}{2}$ hora, el auto recorre una distancia de $\left(\frac{1}{2}\right)(40) = 20$ millas. ◀

EJEMPLO 6 Física: movimiento uniforme

Una lancha de motor se dirige río arriba una distancia de 24 millas, en un río cuya corriente va a 3 millas por hora (mi/h). El viaje río arriba y abajo toma 6 horas. Suponiendo que la lancha mantiene una velocidad constante relativa al agua, ¿cuál es su velocidad?

Figura 18



Solución Vea la figura 18. Se usa v para representar la velocidad constante de la lancha de motor relativa al agua. Entonces la velocidad verdadera río arriba es $v - 3$ mi/h y la velocidad verdadera río abajo es $v + 3$ mi/h. Como distancia = velocidad × tiempo, entonces Tiempo $= \frac{\text{Distancia}}{\text{Velocidad}}$. Se establece una tabla.

	Velocidad mi/h	Distancia mi	Tiempo $= \frac{\text{Distancia}}{\text{Velocidad}}$ h
Río arriba	$v - 3$	24	$\frac{24}{v-3}$
Río abajo	$v + 3$	24	$\frac{24}{v+3}$

Como el tiempo total río arriba y abajo es 6 horas, se tiene

$$\frac{24}{v-3} + \frac{24}{v+3} = 6$$

$$\frac{24(v+3) + 24(v-3)}{(v-3)(v+3)} = 6 \qquad \text{Sumar los cocientes en el lado izquierdo.}$$

$$\frac{48v}{v^2 - 9} = 6 \qquad \text{Simplificar.}$$

$$48v = 6(v^2 - 9)$$

$$6v^2 - 48v - 54 = 0 \qquad \text{Poner en forma estándar.}$$

$$v^2 - 8v - 9 = 0 \qquad \text{Dividir entre 6.}$$

$$(v - 9)(v + 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$v = 9 \quad \text{or} \quad v = -1 \qquad \text{Aplicar la propiedad de producto cero y resolver.}$$

Se descarta la solución $v = -1$ mi/h, de manera que la velocidad de la lancha relativa al agua es 9 mi/h. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

Tareas de tasa constante

5 Esta sección tiene que ver con trabajos que se realizan a una **tasa constante**. La suposición es que si un trabajo se realiza en t unidades de tiempo, $\frac{1}{t}$ del trabajo se realiza en 1 unidad de tiempo. Se verá un ejemplo.

EJEMPLO 7 Trabajar juntos para realizar una tarea

A las 10 AM el padre de Danny le pide que quite las hierbas del jardín. Por experiencia, Danny sabe que esto le tomará 4 horas, trabajando solo. Su hermano mayor, Mike, cuando le toca este trabajo, requiere 6 horas. Como Mike quiere ir a jugar golf con Danny y tiene una reservación a la 1 PM, acepta ayudarle. Suponiendo que no hay ganancia ni pérdida en la eficiencia, ¿a qué hora terminarán si trabajan juntos? ¿Lograrán llegar a la hora de la reservación?

Solución

Tabla 2

	Horas para hacer la tarea	Parte de la tarea hecha en 1 hora
Danny	4	$\frac{1}{4}$
Mike	6	$\frac{1}{6}$
Juntos	t	$\frac{1}{t}$

Se establece la tabla 2. En 1 hora, Danny hace $\frac{1}{4}$ del trabajo y Mike hace $\frac{1}{6}$. Sea t el tiempo (en horas) que les toma acabar juntos el trabajo. Entonces en 1 hora queda compSeao $\frac{1}{t}$ del trabajo. Se razona como sigue.

$$\left(\begin{array}{c}\text{Parte hecha por Danny}\\ \text{en 1 hora}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\text{Parte hecha por Mike}\\ \text{en 1 hora}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{Parte hecha juntos}\\ \text{en 1 hora}\end{array}\right)$$

De la tabla 2,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{t}$$

$$\frac{3+2}{12}=\frac{1}{t}$$

$$\frac{5}{12}=\frac{1}{t}$$

$$5t=12$$

$$t=\frac{12}{5}$$

Trabajando juntos, la tarea se puede realizar en $\frac{12}{5}$ horas, o 2 horas 24 minutos. Sí podrían llegar a jugar golf, ya que terminarán a las 12:24 PM. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

1.7 Evalúe su comprensión

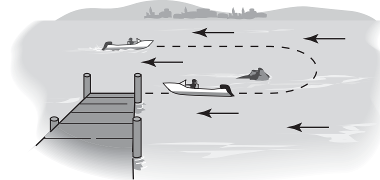
Conceptos y vocabulario

1. Usar variables para representar cantidades desconocidas y luego encontrar las relaciones entre estas variables se conoce como __________ __________.
2. El dinero pagado por el uso del dinero se llama _______.
3. Se dice que los objetos que se mueven a una velocidad constante están en __________ __________.
4. *Falso o verdadero:* la cantidad cargada por el uso del capital durante un periodo dado se llama tasa de interés.
5. *Falso o verdadero:* si un objeto se mueve a una velocidad promedio v, la distancia s que recorre en el tiempo t está dada por la fórmula $s = vt$.
6. Suponga que desea mezclar dos tipos de café para obtener 100 libras de la mezcla. Si x representa el número de libras del café A, escriba una expresión algebraica que represente el número de libras del café B.

Ejercicios

En los problemas 7-16, traduzca cada proposición en una ecuación matemática. Asegúrese de identificar el significado de los símbolos.

7. **Geometría** El área de un círculo es el producto del número π y el cuadrado del radio.
8. **Geometría** La circunferencia de un círculo es el producto del número π y el doble del radio.
9. **Geometría** El área de un cuadrado es el cuadrado de la longitud de un lado.
10. **Geometría** El perímetro de un cuadrado es cuatro veces la longitud de un lado.
11. **Física** La fuerza es igual al producto de la masa y la aceleración.
12. **Física** La presión es la fuerza por unidad de área.
13. **Física** El trabajo es igual a la fuerza por la distancia.
14. **Física** La energía cinética es la mitad del producto de la masa por el cuadrado de la velocidad.
15. **Negocios** El costo variable total de fabricar x lavadoras de platos es \$150 por lavadora multiplicada por el número de lavadoras fabricadas.
16. **Negocios** El ingreso total derivado de vender x lavadoras de platos es \$250 por lavadora multiplicado por el número de lavadoras vendidas.
17. **Planeación financiera** Betsy, quien se acaba de jubilar, requiere \$6000 por año de ingresos adicionales. Tiene \$50,000 para invertir y puede hacerlo en bonos de clasificación B que pagan 15% anual o en un certificado de depósito (CD) que paga 7% anual. ¿Cuánto dinero debe invertir en cada uno para lograr exactamente \$6000 de interés por año?
18. **Planeación financiera** Después de 2 años, Betsy (vea el problema 17) encuentra que ahora requiere \$7000 por año. Suponiendo que el resto de la información es la misma, ¿cómo debe reinvertir el dinero?
19. **Bancos** Un banco otorga un préstamo de \$12,000, parte a una tasa de 8% anual y el resto a una tasa de 18% anual. Si el interés recibido es \$1000 en total, ¿cuánto dinero se prestó a la tasa de 8%?
20. **Bancos** Wendy, una ejecutiva de préstamos en un banco, tiene \$1,000,000 para prestar y se requiere que obtenga un tasa de retorno promedio de 18% anual. Si puede prestar a las tasas de 19% o 16%, ¿cuánto prestaría al 16% para cumplir con sus requerimientos?
21. **Mezcla de té** La gerente de una tienda que se especializa en la venta de té decide experimentar con una nueva mezcla. Mezclará Earl Grey (té negro con aroma a limón) que se vende en \$5 por libra con un poco de Orange Pekoe (té negro con aroma a naranja) que se vende en \$3 por libra para obtener 100 libras de la nueva mezcla, cuyo precio será \$4.50 por libra, y no debe haber diferencia en los ingresos por la venta separada o de la mezcla. ¿Cuántas libras de cada té se requieren?
22. **Negocios: mezcla de café** Un fabricante de café quiere vender una nueva mezcla en \$3.90 por libra, mezclando dos tipos que se venden en \$2.75 y \$5 por libra respectivamente. ¿Qué cantidades de cada café debe combinar para obtener la mezcla deseada?
[**Sugerencia:** Suponga que el peso total de la mezcla deseada es 100 libras].
23. **Negocios: mezcla de nueces** Una tienda de nueces suele vender nuez de la India en \$4.00 la libra y cacahuates en \$1.50 la libra. Pero al final del mes los cacahuates no se han vendido bien, de manera que para vender 60 libras de cacahuate, el gerente decide mezclarlas con algunas nueces de la India y vender la mezcla en \$2.50 por libra. ¿Cuántas libras de nuez de la India debe mezclar con los cacahuates para asegurar que no hay cambio en la ganancia?
24. **Negocios: mezcla de dulces** Una tienda de dulces vende cajas de dulce que contienen caramelos y cremas. Cada caja se vende en \$12.50 y contiene 30 piezas de dulce (todas las piezas son del mismo tamaño). Si producir los caramelos cuesta \$0.25 y producir las cremas, \$0.45, ¿cuántas piezas de cada uno debe haber en la caja para ganar \$3?
25. **Física: movimiento uniforme** Una lancha de motor puede mantener una velocidad constante de 16 millas por hora relativa al agua. La lancha viaja río arriba hasta cierto punto en 20 minutos; el regreso toma 15 minutos. ¿Cuál es la velocidad del agua? (Vea la figura).



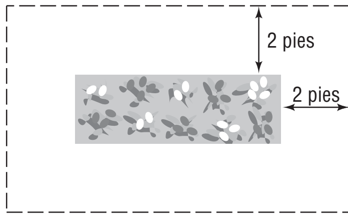
26. **Física: Movimiento uniforme** Una lancha de motor va río arriba en un río con corriente de 3 millas por hora. El viaje río arriba toma 5 horas y el regreso río abajo toma 2.5 horas. ¿Cuál es la velocidad de la lancha? (Suponga que la lancha mantiene una velocidad constante relativa al agua).
27. **Física: movimiento uniforme** Una lancha de motor mantiene una velocidad constante de 15 millas por hora relativa al agua, al ir 10 millas río arriba y regresar. El tiempo total de viaje fue 1.5 horas. Use esta información para encontrar la velocidad de la corriente.
28. **Física: movimiento uniforme** Dos autos entran a la autopista de Florida en Commercial Boulevard a las 8:00 AM, hacia Wildwood. La velocidad promedio de un auto es 10 millas por hora más que la del otro. El auto que va más rápido llega a Wildwood a las 11:00 AM, $\frac{1}{2}$ hora antes que el otro. ¿Cuál es la velocidad promedio del otro auto? ¿Qué tan lejos viajaron?

29. Trabajar juntos en una tarea Trent es capaz de repartir sus periódicos en 30 minutos. Lois tarda 20 minutos en cubrir la misma ruta. ¿Cuánto les llevaría repartir los periódicos si trabajan juntos?

30. Trabajar juntos en una tarea Patrice, solo, pinta cuatro habitaciones en 10 horas. Si contrata a April para ayudarle, pueden hacer el mismo trabajo en 6 horas. Si deja a April sola, ¿cuánto tardará ella en pintar las cuatro habitaciones?

31. Circundar una jardinera Un jardinero tiene 46 pies de cerca para rodear una jardinera rectangular que tiene un borde de 2 pies de ancho alrededor (vea la figura).

a) Si el largo de la jardinera debe ser el doble del ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la jardinera?
b) ¿Cuál es el área de la jardinera?
c) Si el largo y el ancho deben ser iguales, ¿cuáles son las dimensiones?
d) ¿Cuál es el área de la jardinera cuadrada?

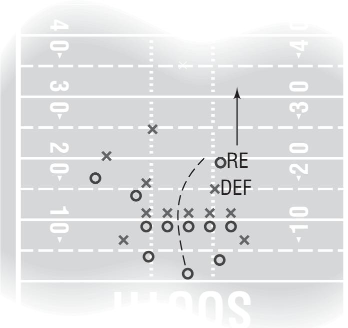


32. Construcción Un estanque está rodeado por un borde de madera de 3 pies de ancho. La cerca que lo rodea es de 100 pies de largo.

a) Si el estanque es cuadrado, ¿cuáles son sus dimensiones?
b) Si el estanque es rectangular y el largo es tres veces el ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?
c) Si el estanque es circular, ¿cuál es su diámetro?
d) ¿Cuál estanque tiene la mayor área?

33. Futbol Un receptor es capaz de correr 100 yardas en 12 segundos. Un defensivo puede hacerlo en 10 segundos. El receptor cacha un pase en la yarda 20 de su campo con el defensivo en la yarda 15. (Vea la figura.) Si ningún otro jugador está cerca, ¿en qué yarda alcanzará el defensivo al receptor?

[**Sugerencia:** En el tiempo $t = 0$, el defensivo está 5 yardas atrás del receptor].



34. Cálculo de gastos de negocios Therese, una agente de ventas externa, usa su auto para negocios y placer. El año pasado, recorrió 30,000 millas, usando 900 galones de gasolina. Su auto da 40 millas por galón en carretera y 25 en la ciudad. Puede deducir de impuestos todos los viajes por carretera, pero nada en la ciudad. ¿Cuántas millas declararía como gastos de negocios?

35. Mezcla de agua y anticongelante ¿Qué cantidad de agua debe agregarse a 1 galón de anticongelante puro para obtener una solución con 60% de anticongelante?

36. Mezcla de agua y anticongelante El sistema de enfriamiento de cierta marca extranjera de auto tiene una capacidad de 15 litros. Si el sistema se llena con una mezcla con 40% de anticongelante, ¿Cuánto de esta mezcla debe drenarse y sustituirse por anticongelante puro para que tenga una solución con 60% de anticongelante?

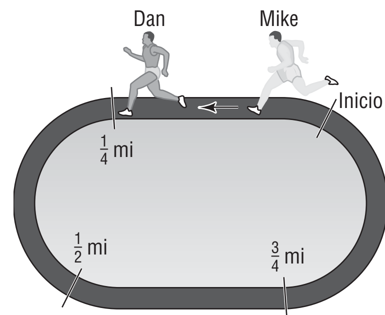
37. Química: soluciones salinas ¿Cuánta agua debe evaporarse de 32 onzas de una solución con 4% de sal para convertirla en una solución con 6% de sal?

38. Química: soluciones salinas ¿Qué cantidad de agua debe evaporarse de 240 galones de una solución con 3% de sal para producir una solución con 5% de sal?

39. Pureza del oro La pureza del oro se mide en quilates, donde el oro puro tiene 24 quilates. Otras purezas del oro se expresan como partes proporcionales de oro puro. Así, el oro de 18 quilates es $\frac{18}{24}$, o 75% de oro puro; el oro de 12 quilates es $\frac{12}{24}$, o 50% de oro puro, y así sucesivamente. ¿Cuánto oro de 12 quilates debe mezclarse con oro puro para obtener 60 gramos de oro de 16 quilates?

40. Química: moléculas de azúcar Una molécula de azúcar tiene el doble de átomos de hidrógeno que de oxígeno y un átomo más de carbón que de oxígeno. Si una molécula de azúcar tiene un total de 45 átomos, ¿cuántos son de oxígeno? ¿Cuántos son de hidrógeno?

41. Carrera Mike es capaz de correr la milla en 6 minutos, y Dan puede correrla en 9 minutos. Si Mike da a Dan una ventaja de 1 minuto, ¿a qué distancia del inicio pasará Mike a Dan? (Vea la figura.) ¿Cuánto tiempo le toma?



42. Alcance de un avión Un avión de rescate aéreo va a un promedio de 300 millas por hora sin viento. Lleva suficiente combustible para 5 horas de tiempo de vuelo. Si al despegar se encuentra viento en contra de 30 mi/h, ¿qué tan lejos podría llegar y regresar a salvo? (Suponga que el viento permanece constante).

43. Vaciado de barcos petroleros Con una bomba principal un barco petrolero se vacía en 4 horas. Una bomba auxiliar puede vaciarlo en 9 horas. Si la bomba principal se arranca a las 9 AM, ¿cuándo debe arrancarse la bomba auxiliar para tener vacío el barco a las 12 PM?

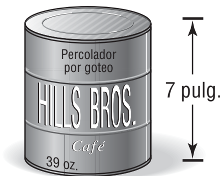
44. Mezcla de cemento Un saco de 20 libras de mezcla de cemento marca Economy contiene 25% de cemento y 75% de arena. ¿Cuánto cemento puro debe agregarse para producir una mezcla con 40% de cemento?

45. Vaciado de una tina Una tina se llena en 15 minutos con ambas llaves abiertas y el tapón cerrado. Con ambas llaves cerradas y el tapón abierto, la tina se vacía en 20 minutos. ¿Cuánto tiempo tomará que la tina se llene con ambas llaves abiertas y el tapón abierto?

46. Uso de dos bombas Una bomba de 5 caballos de fuerza (hp) puede vaciar una piscina en 5 horas. Una bomba más pequeña de 2 hp vacía la misma piscina en 8 horas. Las bombas se usan juntas para comenzar el vaciado. Después de dos horas, la bomba de 2 hp se descompone. ¿Cuánto tiempo llevará que la bomba grande vacíe la piscina?

47. Negocios: descuentos por cantidad Una compañía cobra $200 por cada orden de 150 cajas de herramientas o menos. Si un cliente ordena x cajas además de las 150, el costo de cada caja ordenada se reduce en x dólares. Si la factura de un cliente llega por $30,625, ¿cuántas cajas ordenó?

48. Construcción de una lata de café Una lata de 39 onzas de café Hills Bros® requiere 188.5 pulgadas cuadradas de aluminio. Si su altura es 7 pulgadas, ¿cuál es el radio? (El área de la superficie S de un cilindro recto es $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, donde r es el radio y h es la altura).



49. Comparación de héroes olímpicos En las Olimpiadas de 1984, Carl Lewis de Estados Unidos ganó medalla de oro en la carrera de 100 metros con un tiempo de 9.99 segundos. En las Olimpiadas de 1896, Thomas Burke, también de Estados Unidos, ganó medalla de oro en los 100 metros con 12.0 segundos. Si corrieran en la misma carrera repitiendo sus respectivos tiempos, ¿por cuántos metros le ganaría Lewis a Burke?

50. Pensamiento crítico Usted es el gerente de una tienda de ropa y acaba de comprar 100 camisas de vestir por $20.00 cada una. Después de 1 mes de vender las camisas a precio normal, planea ponerlas en barata con 40% de descuento del precio original. Sin embargo, de todas formas quiere ganar $4 en cada camisa al precio de venta. ¿Cuál debe ser el precio inicial de las camisas para asegurar esto? Si en lugar de 40% de descuento, da 50%, ¿cuánto se reduce su ganancia?

51. Pensamiento crítico Desarrolle un problema en palabras que requiera resolver una ecuación lineal como parte de su solución. Intercambie problemas con un compañero. Escriba una crítica del problema de su compañero.

52. Pensamiento crítico Sin resolver, explique qué está mal en el siguiente problema de mezcla: ¿cuántos litros de 25% de etanol deben agregarse a 30 litros de 48% de etanol para obtener una solución de 50% de etanol? Ahora resuelva algebraicamente. ¿Qué ocurre?

53. Cálculo de la velocidad promedio Al ir de Chicago a Atlanta, un auto promedia 45 millas por hora, y al ir de Atlanta a Miami promedia 55 millas por hora. Si Atlanta está a la mitad del camino entre Chicago y Miami, ¿cuál es la velocidad promedio de Chicago a Miami? Exponga una solución intuitiva. Escriba un párrafo defendiendo su solución intuitiva. Luego resuelva el problema algebraicamente. ¿Es su solución intuitiva la misma que la algebraica? Si no lo es, encuentre la falla.

54. Velocidad de un avión En un vuelo reciente de Phoenix a la ciudad de Kansas, una distancia de 919 millas náuticas, el avión llega 20 minutos antes. Al salir del avión, le pregunté al capitán, "¿cuál era nuestro viento de cola?" Él contestó, "no lo sé, pero nuestra velocidad relativa a la tierra era 550 nudos". ¿Cómo determinaría si tiene suficiente información para encontrar el viento de cola? Si es posible, encuentre el viento de cola. (1 nudo = 1 milla náutica por hora)

Repaso del capítulo

Conocimiento

Ecuación cuadrática y fórmula cuadrática (p. 102 y p. 115)

Si $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Si $b^2 - 4ac < 0$, no existen soluciones reales.

Discriminante (p. 102 y p. 116)

Si $b^2 - 4ac > 0$, se tienen dos soluciones reales diferentes.

Si $b^2 - 4ac = 0$, se tiene una solución real repetida.

Si $b^2 - 4ac < 0$, no existen soluciones reales, pero se tienen dos soluciones complejas diferentes que no son reales; las soluciones complejas son una el conjugado de la otra.

Notación de intervalos (p. 125)

$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	$(-\infty, a]$	$\{x \mid x \leq a\}$
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	$(-\infty, a)$	$\{x \mid x < a\}$
		$(-\infty, \infty)$	Todos los números reales

Propiedades de las desigualdades

Propiedad de la suma (p. 127): Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

Propiedades de la multiplicación (p. 128) a) Si $a < b$ y si $c > 0$, entonces $ac < bc$. b) Si $a > b$ y si $c > 0$, entonces $ac > bc$.
Si $a < b$ y si $c < 0$, entonces $ac > bc$. Si $a > b$ y si $c < 0$, entonces $ac < bc$.

Propiedad del recíproco (p. 129): Si $a > 0$, entonces $\dfrac{1}{a} > 0$. Si $a < 0$, entonces $\dfrac{1}{a} < 0$.

Valor absoluto

Si $|u| = a$, $a > 0$, entonces $u = -a$ o $u = a$. (p. 136)

Si $|u| \leq a$, $a > 0$, entonces $-a \leq u \leq a$. (p. 137)

Si $|u| \geq a$, $a > 0$, entonces $u \leq -a$ o $u \geq a$. (p. 138)

Objetivos

Sección		Debe ser capaz de...	Ejercicios de repaso
1.1	1	Resolver ecuaciones lineales (p. 86)	1–6, 11–12
	2	Resolver ecuaciones que llevan a ecuaciones lineales (p. 88)	7, 8
	3	Resolver problemas aplicados con ecuaciones lineales (p. 91)	104
1.2	1	Resolver ecuaciones cuadráticas Factorizando (p. 97)	10, 13, 14, 33–36
	2	Saber cómo completar el cuadrado (p. 99)	61–64
	3	Resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado (p. 99)	9, 10, 13–16, 19, 20, 33–36
	4	Resolver una ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática (p. 101)	9, 10, 13–16, 19, 20, 33–36
	5	Resolver problemas aplicados con ecuaciones cuadráticas (p. 105)	88, 94, 101, 102, 106, 107

1.3	1	Sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos (p. 110)	65–74
	2	Resolver ecuaciones cuadráticas en el sistema de números complejos (p. 114)	75–82
1.4	1	Resolver ecuaciones radicales (p. 118)	17, 18, 23–30, 37, 38
	2	Resolver ecuaciones de forma cuadrática (p. 120)	21, 22, 31, 32
	3	Resolver ecuaciones Factorizando (p. 122)	43–46
1.5	1	Usar la notación de intervalos (p. 125)	47–60
	2	Usar las propiedades de las desigualdades (p. 127)	47–60
	3	Resolver desigualdades (p. 129)	47–48
	4	Resolver desigualdades combinadas (p. 130)	49–52
1.6	1	Resolver ecuaciones con valor absoluto (p. 136)	39–42
	2	Resolver desigualdades con valor absoluto (p. 137)	53–60
1.7	1	Traducir descripciones verbales en expresiones matemáticas (p. 141)	83, 84
	2	Resolver problemas de interés (p. 142)	85, 86
	3	Resolver problemas de mezcla (p. 144)	86, 97–100
	4	Resolver problemas de movimiento uniforme (p. 145)	87, 89–93, 103
	5	Resolver problemas de trabajos de tasa constante (p. 146)	95, 96, 105, 108

Ejercicios de repaso

Los problemas con asterisco indican la sugerencia del autor para usarse como examen de práctica.

En los problemas 1-46, encuentre todas las soluciones reales, si las hay, de cada ecuación. (a, b, m y n son constantes positivas, cuando aparecen.)

1. $2 - \frac{x}{3} = 8$

2. $\frac{x}{4} - 2 = 4$

3. $-2(5 - 3x) + 8 = 4 + 5x$

4. $(6 - 3x) - 2(1 + x) = 6x$

* **5.** $\frac{3x}{4} - \frac{x}{3} = \frac{1}{12}$

6. $\frac{4 - 2x}{3} + \frac{1}{6} = 2x$

7. $\frac{x}{x - 1} = \frac{6}{5}, \quad x \neq 1$

8. $\frac{4x - 5}{3 - 7x} = 2, \quad x \neq \frac{3}{7}$

* **9.** $x(1 - x) = 6$

10. $x(1 + x) = 6$

11. $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} - \frac{x}{6}$

12. $\frac{1 - 3x}{4} = \frac{x + 6}{3} + \frac{1}{2}$

13. $(x - 1)(2x + 3) = 3$

14. $x(2 - x) = 3(x - 4)$

15. $2x + 3 = 4x^2$

16. $1 + 6x = 4x^2$

17. $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2$

18. $\sqrt{1 + x^3} = 3$

19. $x(x + 1) + 2 = 0$

20. $3x^2 - x + 1 = 0$

***21.** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

22. $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

***23.** $\sqrt{2x - 3} + x = 3$

24. $\sqrt{2x - 1} = x - 2$

25. $\sqrt[4]{2x + 3} = 2$

26. $\sqrt[5]{3x + 1} = -1$

27. $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{2x + 1}$

28. $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x - 5} = 3$

29. $2x^{1/2} - 3 = 0$

30. $3x^{1/4} - 2 = 0$

31. $x^{-6} - 7x^{-3} - 8 = 0$

32. $6x^{-1} - 5x^{-1/2} + 1 = 0$

33. $x^2 + m^2 = 2mx + (nx)^2, \quad n \neq 1, n \neq -1$

34. $b^2x^2 + 2ax = x^2 + a^2, \quad b \neq 1, b \neq -1$

***35.** $10a^2x^2 - 2abx - 36b^2 = 0$

36. $\frac{1}{x - m} + \frac{1}{x - n} = \frac{2}{x}, \quad x \neq 0, x \neq m, x \neq n$

37. $\sqrt{x^2 + 3x + 7} - \sqrt{x^2 - 3x + 9} + 2 = 0$

38. $\sqrt{x^2 + 3x + 7} - \sqrt{x^2 + 3x + 9} = 2$

***39.** $|2x + 3| = 7$

40. $|3x - 1| = 5$

41. $|2 - 3x| + 2 = 9$

42. $|1 - 2x| + 1 = 4$

43. $2x^3 = 3x^2$

44. $5x^4 = 9x^3$

***45.** $2x^3 + 5x^2 - 8x - 20 = 0$

46. $3x^3 + 5x^2 - 3x - 5 = 0$

En los problemas 47-60, resuelva cada desigualdad. Exprese su respuesta usando la notación de conjuntos o la de intervalos. Grafique el conjunto de soluciones.

47. $\dfrac{2x-3}{5}+2 \le \dfrac{x}{2}$ **48.** $\dfrac{5-x}{3} \le 6x-4$ ***49.** $-9 \le \dfrac{2x+3}{-4} \le 7$

50. $-4 < \dfrac{2x-2}{3} < 6$ **51.** $2 < \dfrac{3-3x}{12} < 6$ **52.** $-3 \le \dfrac{5-3x}{2} \le 6$

53. $|3x+4| < \dfrac{1}{2}$ **54.** $|1-2x| < \dfrac{1}{3}$ ***55.** $|2x-5| \ge 9$ **56.** $|3x+1| \ge 10$

***57.** $2+|2-3x| \le 4$ **58.** $\dfrac{1}{2}+\left|\dfrac{2x-1}{3}\right| \le 1$ ***59.** $1-|2-3x| < -4$ **60.** $1-\left|\dfrac{2x-1}{3}\right| < -2$

En los problemas 61-64, diga qué número debe sumarse para completar el cuadrado en cada expresión.

***61.** x^2+6x **62.** x^2-10x **63.** $x^2-\dfrac{4}{3}x$ **64.** $x^2+\dfrac{4}{5}x$

En los problemas 65-74, use el sistema de números complejos y escriba cada expresión en la forma estándar $a+bi$.

65. $(6+3i)-(2-4i)$ **66.** $(8-3i)+(-6+2i)$ **67.** $4(3-i)+3(-5+2i)$ **68.** $2(1+i)-3(2-3i)$

***69.** $\dfrac{3}{3+i}$ **70.** $\dfrac{4}{2-i}$ **71.** i^{50} **72.** i^{29} **73.** $(2+3i)^3$ **74.** $(3-2i)^3$

En los problemas 75-82, resuelva cada ecuación en el sistema de números complejos.

75. $x^2+x+1=0$ **76.** $x^2-x+1=0$ ***77.** $2x^2+x-2=0$ **78.** $3x^2-2x-1=0$

79. $x^2+3=x$ **80.** $2x^2+1=2x$ **81.** $x(1-x)=6$ **82.** $x(1+x)=2$

83. Traduzca la siguiente proposición en una expresión matemática: el perímetro p de un rectángulo es la suma del doble del largo l y el doble del ancho w.

84. Traduzca la siguiente proposición en una expresión matemática: el costo total C de fabricar x bicicletas en un día es $50,000 más $95 por el número de bicicletas fabricadas.

85. Bancos Un banco presta $9000 al 7% de interés simple. Al final del año 1, ¿cuánto interés se debe sobre el préstamo?

86. Planeación financiera Steve, un recién jubilado, requiere $5000 por año de ingreso adicional. Tiene $70,000 para invertir y puede hacerlo en bonos grado A que pagan 8% anual o en un certificado de depósito (CD) que paga 5% anual. ¿Cuánto dinero debe invertir en cada tipo para lograr exactamente $5000 de interés por año?

87. Rayos y truenos Se ve un rayo y el consecuente trueno se oye 3 segundos después. Si la velocidad del sonido es 1100 pies por segundo en promedio, ¿qué tan lejos está la tormenta?

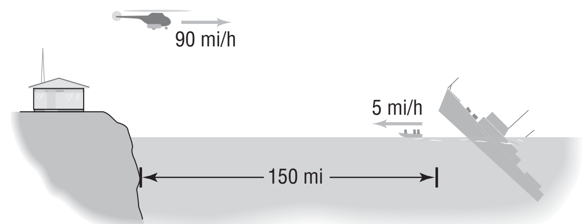


88. Física: intensidad de la luz La intensidad de la luz I (en candelas) de cierta fuente de luz obedece la ecuación $I=\dfrac{900}{x^2}$, donde x es la distancia (en metros) a la luz. ¿En qué intervalo de distancia de la fuente de luz debería colocarse un objeto, de manera que la intensidad de la luz esté entre 1600 y 3600 candelas inclusive?

89. Extensión de búsqueda y rescate Un avión de búsqueda tiene velocidad de crucero de 250 millas por hora y lleva suficiente combustible para 5 horas de vuelo cuando mucho. Si hay viento que promedia 30 millas por hora y la dirección de la búsqueda es la misma del viento en el viaje de ida y en contra en el regreso, ¿qué tan lejos podría viajar el avión antes de tener que regresar?

90. Extensión de búsqueda y rescate Si el avión de búsqueda descrito en el problema 89 puede agregar un tanque suplementario de combustible que permite 2 horas más de vuelo, ¿cuánto más lejos ampliaría su búsqueda?

***91. Rescate en el mar** Una balsa salvavidas de un barco que se hunde va a la deriva, a 150 millas de la costa, viajando directamente hacia la estación del guardacostas a una velocidad de 5 millas por hora. En el momento en que la balsa queda a la deriva, un helicóptero de rescate sale de la estación de guardacostas. Si la velocidad promedio del helicóptero es 90 millas por hora, ¿cuánto tiempo le tomará llegar a la balsa?



92. Física: movimiento uniforme Dos abejas dejan dos lugares separados por 150 metros y vuelan, sin detenerse, de uno a otro de estos lugares a una velocidad promedio de 3 metros por segundo y 5 metros por segundo, respectivamente. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que las abejas se encuentran por primera vez? ¿Cuánto tiempo pasa hasta que se encuentran por segunda vez?

93. Física: movimiento uniforme Un tren Metra suburbano deja la estación Union en Chicago a las 12:00 PM. Dos horas después, un Amtrak sale en la misma vía, viajando a una velocidad promedio que es 50 millas por hora más rápido que el Metra. A las 3 PM el tren Amtrak está 10 millas atrás del Metra. ¿A qué velocidad viaja cada uno?

94. Física Se lanza un objeto hacia abajo desde lo alto de un edificio de 1280 pies, con una velocidad inicial de 32 pies por segundo. La distancia s (en pies) del objeto al suelo después de t segundos es $s = 1280-32t - 16t^2$.

a) ¿Cuándo llegará el objeto al suelo?

b) ¿Cuál es la altura del objeto después de 4 segundos?

***95. Trabajar juntas para terminar la tarea** Clarisa y Shawna, trabajando juntas, pintan el exterior de una casa en 6 días. Clarisa sola puede terminar este trabajo en 5 días menos que Shawna. ¿Cuánto tiempo le tomará a Clarisa terminar el trabajo?

96. Vaciado de un tanque Dos bombas de tamaño diferente, trabajando juntas, vacían un tanque en 5 horas. La bomba grande puede vaciarlo en 4 horas menos que la pequeña. Si se descompone la bomba grande, ¿cuánto tardará la pequeña en hacer sola el trabajo?

97. Química: mezcla de ácidos Un laboratorio tiene 60 centímetros cúbicos (cm^3) de una solución con 40% de ácido HCl. ¿Cuántos centímetros cúbicos de una solución con 15% de ácido HCl debe mezclarse con los 60 cm^3 con 40% de ácido para obtener una solución con 25% de HCl? ¿Cuánto de la solución con 25% tiene?

***98. Negocios: mezcla de café** Una tienda de café tiene 20 libras de un café que se vende en $4 por libra. ¿Cuántas libras de un café que se vende en $8 por libra debe mezclar con las 20 libras para obtener una mezcla que se venda en $5 por libra? ¿Cuánto del café de $5 por libra hay para vender?

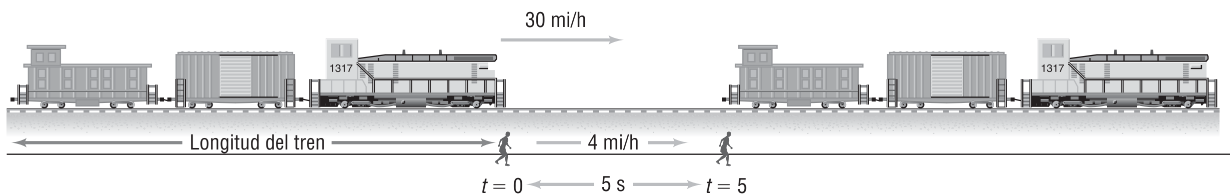
99. Química: soluciones salinas ¿Cuánta agua debe agregarse a 64 onzas de solución con 10% de sal para hacer una solución salina con 2%?

100. Química: soluciones salinas ¿Cuánta agua debe evaporarse de 64 onzas de solución con 2% de sal para obtener una solución con 10% de sal?

101. Geometría La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 centímetros. Encuentre las longitudes de los catetos si su suma es 17 cm.

102. Geometría La diagonal de un rectángulo mide 10 pulgadas. Si el largo tiene 2 pulgadas más que el ancho, encuentre las dimensiones del rectángulo.

103. Física: movimiento uniforme Una persona camina a una velocidad promedio de 4 millas por hora a lo largo de la vía de un tren. Un tren de carga, que va en la misma dirección a una velocidad promedio de 30 millas por hora, requiere 5 segundos para pasar a la persona. ¿Cuál es la longitud del tren? Dé su respuesta en pies.



104. Marco de una pintura Un artista tiene 50 pulgadas de corte de roble para enmarcar una pintura. El marco debe tener 3 pulgadas de ancho rodeando la pintura.

a) Si la pintura es cuadrada, ¿cuáles son sus dimensiones? ¿Cuáles son las dimensiones del marco?

b) Si la pintura es rectangular con el largo del doble que el ancho, ¿cuáles son sus dimensiones? ¿Cuáles son las dimensiones del marco?

105. Uso de bombas Una bomba de 8 caballos de fuerza (hp) puede llenar un tanque en 8 horas. Una bomba de 3 hp llena el mismo tanque en 12 horas. Las bombas se usan juntas para comenzar a llenar el tanque, Después de 4 horas, la bomba de 8 hp se descompone. ¿Cuánto tarda la bomba de 3 hp en llenar el tanque?

106. Proporción adecuada Una fórmula que establece la relación entre el largo l y el ancho w de un rectángulo de "proporción adecuada" es $l^2 = w(l + w)$. ¿Cómo debe cortarse una hoja de 4 por 8 pies de cartón para obtener un rectángulo de "proporción adecuada" con un ancho de 4 pies?

107. Negocios: costo de un charter Un grupo de 20 adultos mayores va a rentar un autobús por un día para una ex-

cursión con costo de \$15 por persona. La compañía del charter está de acuerdo en reducir el precio de cada boleto 10¢ por cada pasajero adicional después de 20, hasta un máximo de 44 pasajeros (la capacidad del autobús). Si la factura final de la compañía es por \$482.40, ¿cuántas personas fueron a la excursión y cuánto pagó cada una?

108. Uso de copiadoras Una nueva copiadora realiza cierto trabajo en 1 hora menos que la copiadora vieja. Juntas pueden hacer este trabajo en 72 minutos. ¿Cuánto tardaría la copiadora vieja en hacer sola el trabajo?

109. En una carrera de 100 metros, Todd cruza la meta 5 metros adelante de Scott. Para emparejar las cosas, Todd sugiere a Scott que corran de nuevo, esta vez Todd arrancando 5 metros atrás de la línea de inicio.

a) Suponga que Todd y Scott corren al mismo paso que antes, ¿es un empate la segunda carrera?
b) Si no es así, ¿quién gana?
c) ¿Por cuántos metros gana?
d) ¿Qué tan atrás debe iniciar Todd para que la carrera sea un empate?

Después de correr la segunda vez, Scott, para emparejar las cosas, sugiere a Todd que él (Scott) inicie 5 metros atrás.

e) Suponga de nuevo que corren al mismo paso que la primera vez, ¿termina en empate la tercera carrera?
f) Si no es así, ¿quién gana?
g) ¿Por cuántos metros?
h) ¿Qué tan atrás debe iniciar Scott para que la carrera sea un empate?

Proyectos del capítulo



1. Hipotecas Es posible que usted no esté buscando una casa, pero tal vez sea un evento que ocurrirá en los próximos años. La fórmula siguiente da el pago mensual P requerido para pagar un préstamo L a una tasa de interés anual r, expresada como decimal, pero que suele ser un porcentaje. El tiempo t, medido en meses, es la duración del préstamo, de manera que una hipoteca a 15 años requiere $t = 12 \times 15 = 180$ pagos mensuales.

$$P = L\left[\frac{\frac{r}{12}}{1-\left(1+\frac{r}{12}\right)^{-t}}\right] \quad (1)$$

P = pago mensual
L = cantidad del préstamo
r = tasa de interés anual, expresada como decimal
t = longitud del préstamo, en meses

El 15 de julio de 2002, las tasas de interés promedio eran:

a) 6.49% en hipotecas a 30 años
b) 5.93% en hipotecas a 15 años
c) 4.50% en una hipoteca con interés ajustable cada año (HIA).

1. Para cada una de estas tasas, calcule el pago mensual por un préstamo de \$200,000.
2. Después calcule la cantidad total pagada en el periodo del préstamo.
3. Por último, calcule el interés pagado.

El 8 de julio de 2003, las tasas de interés promedio eran:

a) 5.52% en hipotecas a 30 años
b) 4.85% en hipotecas a 15 años
c) 3.55% en una hipoteca con interés ajustable cada año (HIA).

4. Para cada una de estas tasas, calcule el pago mensual por un préstamo de \$200,000.
5. Después calcule la cantidad total pagada en el periodo del préstamo.
6. Por último, calcule el interés pagado.

El 15 de julio de 2003, las tasas de interés promedio eran:

a) 5.67% en hipotecas a 30 años
b) 5% en hipotecas a 15 años
c) 3.58% en una hipoteca con interés ajustable cada año (HIA).

7. Para cada una de estas tasas, calcule el pago mensual por un préstamo de \$200,000.

8. Después calcule la cantidad total pagada en el periodo del préstamo.
9. Por último, calcule el interés pagado.
10. Despeje L de la ecuación (1).
11. Si puede pagar $1000 mensuales como pago de hipoteca, calcule la cantidad que pedirá prestada el 8 de julio de 2003
    a) para una hipoteca a 30 años
    b) para una hipoteca a 15 años
    c) para una HIA de un año
12. Repita el problema 11 para las tasa de interés del 15 de julio de 2003.
13. Verifique con su institución local de préstamos las tasas de interés actuales a 30, 15 y HIA de 1 año. Calcule cuánto pedirá prestado con un pago mensual de $1000.
14. Repita el problema 13 si puede pagar $1300 mensuales.
15. Cree que la tasa de interés tiene un papel importante para determinar cuánto hay que pagar por una casa?
16. Comente los tres tipos de hipotecas a: 30 años, 15 años y HIA de 1 año. ¿Cuál elegiría? ¿Por qué?

El siguiente proyecto está disponible en www.prenticehall.com/sullivan

2. Proyect at Motorola ***How Many Cellular Phones Can I Make?***

2 Gráficas

C O N T E N I D O

2.1 Coordenadas rectangulares
2.2 Gráficas de ecuaciones
2.3 Círculos
2.4 Rectas
2.5 Rectas paralelas y perpendiculares
2.6 Diagramas de dispersión; ajuste lineal de curvas
2.7 Variación
Repaso del capítulo
Proyectos del capítulo
Repaso acumulativo

Uso de la estadística al tomar decisiones de inversión: uso de beta

Una de las estadísticas que más usan los inversionistas es beta, que mide un movimiento de valores o portafolio respecto al índice S&P 500. Al determinar beta en una gráfica, los rendimientos se muestran sobre la gráfica, donde el eje horizontal representa los rendimientos S&P y el vertical los del portafolio; los puntos graficados representan los rendimientos de los valores respecto a los de S&P 500 en el mismo periodo. Se dibuja una recta de regresión que es la recta que aproxima de manera más cercana los puntos de la gráfica. Beta representa la pendiente de esa recta; una pendiente pronunciada (45 grados o más) indica que cuando el mercado se mueve arriba o abajo, el portafolio o los valores lo hacen arriba o abajo en promedio en el mismo grado o mayor, y una pendiente más plana indica que al moverse el mercado arriba o abajo, el portafolio también lo hace pero en menor grado. Como beta mide la variabilidad, se usa como medida de riesgo; para beta más grande, mayor variabilidad.

FUENTE: Paul E. Hoffman, *Journal of the American Association of Individual Investors*, septiembre, 1991, http://www.aaii.com

—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO.

2.1 Coordenadas rectangulares

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Repaso de álgebra (sección R.2, pp. 17-24)
- Repaso de geometría (sección R.3, pp. 29-31)



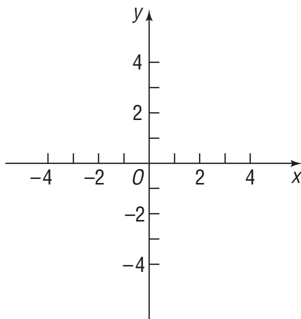
Trabaje ahora en los problemas "¿Está preparado?" de la página 163.

OBJETIVOS
1 Usar la fórmula de la distancia
2 Usar la fórmula del punto medio

Un punto se localiza en la recta de números reales asignándole un solo número real, llamado *coordenada del punto*. Para trabajar en el plano de dos dimensiones, los puntos se localizan usando dos números.

Comenzamos con dos rectas de números reales en el mismo plano: una horizontal y la otra vertical. La recta horizontal se llama **eje x**; la recta vertical, **eje y**; y el punto de intersección es el **origen** O. Se asignan coordenadas a todos los puntos sobre estas rectas numeradas como se muestra en la figura 1, usando una escala conveniente. En matemáticas suele usarse la misma escala en los dos ejes; en las aplicaciones, con frecuencia se usan escalas diferentes en cada eje.

Figura 1

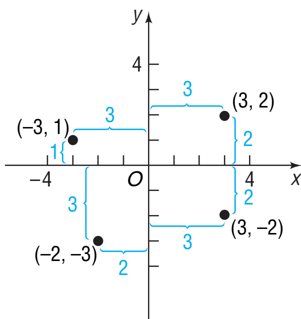


El origen O tiene un valor de 0 en ambos ejes x y y. Se sigue la convención usual de que los puntos en el eje x a la derecha de O se asocian con números reales positivos, y los que están a la izquierda de O con números reales negativos. Los puntos en el eje y arriba de O se asocian con números reales positivos y aquellos abajo de O con números reales negativos. En la figura 1, el eje x y el eje y se etiquetaron como x y y, respectivamente, y se usó una flecha al final de cada eje para indicar la dirección positiva.

El sistema de coordenadas descrito se llama **sistema de coordenadas cartesianas*** o **rectangulares**. El plano formado por los ejes x y y se llama **plano xy** y se hace referencia a los ejes como **ejes coordenados**.

Cualquier punto P en el plano xy se puede localizar usando un **par ordenado** (x, y) de números reales. Sea x la distancia con signo del eje y a P (*con signo* en el sentido de que si P está a la derecha del eje y, entonces $x > 0$, y si P está a la izquierda del eje y, entonces $x < 0$); y sea y la distancia con signo del eje x a P. El par ordenado (x, y), también llamado **coordenadas** de P, da entonces suficiente información para localizar el punto P en el plano.

Figura 2



Por ejemplo, para localizar el punto cuyas coordenadas son $(-3, 1)$, nos movemos 3 unidades sobre el eje x a la izquierda de O y luego 1 unidad hacia arriba. El punto se **grafica** colocando un punto en este lugar. Vea la figura 2, en la que se graficaron los puntos $(-3, 1)$, $(-2, -3)$, $(3, -2)$ y $(3, 2)$.

El origen tiene coordenadas $(0, 0)$. Cualquier punto sobre el eje x tiene coordenadas de la forma $(x, 0)$ y cualquier punto en el eje y tiene coordenadas de la forma $(0, y)$.

Si (x, y) son las coordenadas de un punto P, entonces x se llama la **coordenada x** o **abscisa** de P y y es la **coordenada y** u **ordenada** de P. El punto se identifica por sus coordenadas escribiendo $P + (x, y)$, se hace referencia a él como "el punto (x, y)", en lugar de "el punto cuyas coordenadas son (x, y)".

*En honor a René Descartes (1596-1650), matemático, filósofo y teólogo francés.

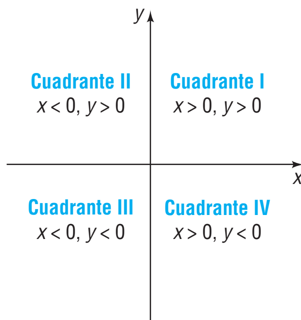


Figura 3

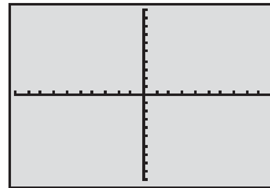
Los ejes coordenados dividen al plano xy en cuatro secciones, llamadas **cuadrantes**, como se muestra en la figura 3. En el cuadrante I, las dos coordenadas x y y de todos los puntos son positivas; en el cuadrante II, x es negativa y y positiva; en el cuadrante III, las dos, x y y son negativas; en el cuadrante IV, x es positiva y y es negativa. Los puntos sobre los ejes coordenados no pertenecen a los cuadrantes.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.



COMENTARIO: En una calculadora gráfica, es posible establecer la escala de cada eje. Una vez hecho esto, se obtiene el **rectángulo de vista**. Vea en la figura 4 un rectángulo típico. Debe leer ahora la sección A.1, *rectángulo de vista*, en el apéndice.

Figura 4



■

Distancia entre dos puntos



1 Si se usan las mismas unidades de medida, como pulgadas o centímetros, en ambos ejes x y y, entonces todas las distancias en el plano xy se determinarán usando esta unidad de medida.

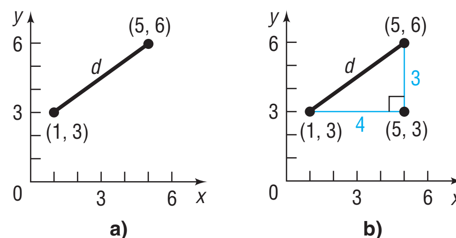
EJEMPLO 1 Distancia entre dos puntos

Encuentre la distancia d entre los puntos $(1, 3)$ y $(5, 6)$.

Solución Primero se grafican los puntos $(1, 3)$ y $(5, 6)$ como se muestra en la figura 5a). Después se dibuja una línea horizontal de $(1, 3)$ a $(5, 3)$ y una línea vertical $(5, 3)$ a $(5, 6)$ para formar un triángulo rectángulo, como en la figura 5b). Un cateto del triángulo tiene longitud 4 y el otro, longitud 3. Por el teorema de Pitágoras (repaso, sección R.3), el cuadrado de la distancia d que buscamos es

$$d^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$
$$d = 5$$

Figura 5



◀

La **fórmula de la distancia** proporciona un método directo para calcular la distancia entre dos puntos.

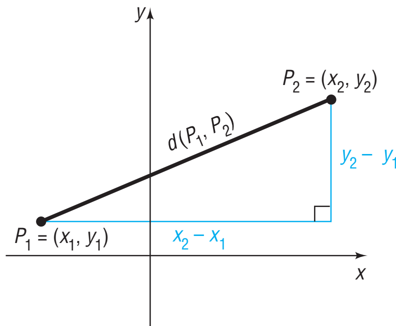
Teorema

Fórmula de la distancia

La distancia entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, denotada por $d(P_1, P_2)$, es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Figura 6

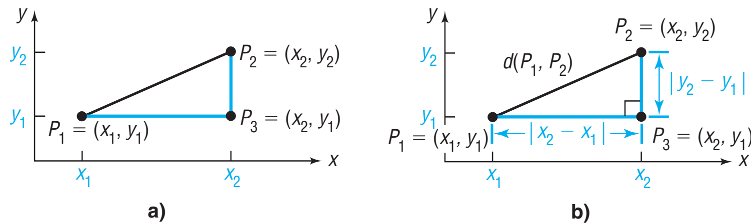


Esto es, para calcular la distancia entre dos puntos, se encuentra la diferencia de las coordenadas x, se eleva al cuadrado, y se suma al cuadrado de la diferencia de las coordenadas y. La raíz cuadrada de esta suma es la distancia. Vea la figura 6.

Demostración de la fórmula de la distancia Sean (x_1, y_1) las coordenadas del punto P_1, y (x_2, y_2) las coordenadas del punto P_2. Suponga que la recta que une a P_1 y P_2 no es horizontal ni vertical. Vea la figura 7a). Las coordenadas de P_3 son (x_2, y_1). La distancia horizontal de P_1 a P_3 es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas x, $|x_2 - x_1|$. La distancia vertical de P_3 a P_2 es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas y, $|y_2 - y_1|$. Vea la figura 7b). La distancia $d(P_1, P_2)$ que se busca es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo, de forma que por el teorema de Pitágoras, se deduce que

$$\begin{aligned}[d(P_1, P_2)]^2 &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\end{aligned}$$

Figura 7

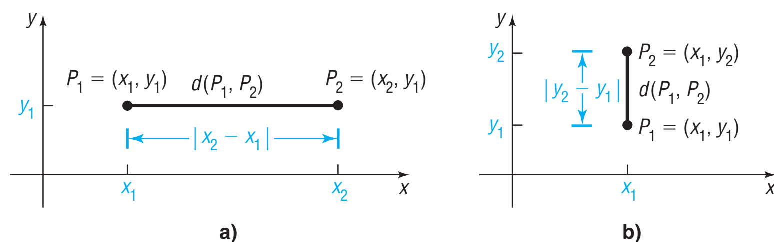


Ahora, si la recta que une P_1 y P_2 es horizontal, entonces la coordenada y de P_1 es igual a la coordenada y de P_2; es decir, $y_1 = y_2$. Vea la figura 8a). En este caso, la fórmula de la distancia (1) todavía es válida, porque con $y_1 = y_2$ se reduce a

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

Un argumento similar se cumple si la línea que une a P_1 y P_2 es vertical. Vea la figura 8b).

Figura 8



La fórmula de la distancia es válida en todos los casos ■

EJEMPLO 2 Distancia entre dos puntos

Encuentre la distancia entre los puntos $(-4, 5)$ y $(3, 2)$.

Solución Usando la fórmula de la distancia (1), la solución se obtiene como sigue:

$$d = \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{7^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} \approx 7.62 \quad ◄$$



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 15 Y 19.

La distancia entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ nunca es negativa. Aún más, la distancia entre dos puntos es 0 sólo cuando los puntos son idénticos, es decir, cuando $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. Además, debido a que $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$, no importa si la distancia se calcula de P_1 a P_2 o de P_2 a P_1; es decir, $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$.

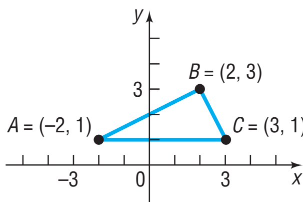
Las coordenadas rectangulares permiten traducir problemas de geometría en problemas de álgebra y viceversa. El ejemplo siguiente muestra cómo se utiliza el álgebra (la fórmula de la distancia) para resolver problemas de geometría.

EJEMPLO 3 Uso de álgebra para resolver problemas de geometría

Considere tres puntos $A = (-2, 1)$, $B = (2, 3)$ y $C = (3, 1)$.

a) Grafique cada punto y forme el triángulo ABC.
b) Encuentre la longitud de cada lado del triángulo.
c) Verifique que se trata de un triángulo rectángulo.
d) Encuentre el área del triángulo

Figura 9



Solución

a) Los puntos A, B y C y el triángulo ABC se graficaron en la figura 9.

b) $d(A, B) = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$d(B, C) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

$d(A, C) = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{25 + 0} = 5$

c) Para demostrar que el triángulo es rectángulo, debemos demostrar que la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados es igual al cuadrado de la longitud del tercer lado. (¿Por qué es esto suficiente?) Al observar la figura 9, parece razonable pensar que el ángulo recto está en el vértice B. Para verificarlo vemos si

$$[d(A, B)]^2 + [d(B, C)]^2 = [d(A, C)]^2$$

Se encuentra que

$$[d(A, B)]^2 + [d(B, C)]^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$= 20 + 5 = 25 = [d(A, C)]^2$$

De manera que, por el inverso del teorema de Pitágoras, podemos concluir que ABC es un triángulo rectángulo.

d) Como el ángulo recto está en B, los lados AB y BC forman la base y la altura del triángulo. Entonces su área es

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}\right) = 5 \text{ unidades cuadradas} \quad ◄$$

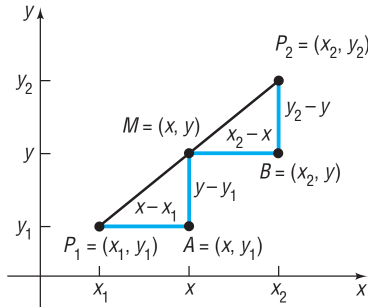


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

Fórmula del punto medio

2 Ahora se derivará la fórmula para las coordenadas del **punto medio de un segmento de recta**. Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ los puntos terminales del segmento de recta y sea $M = (x, y)$ el punto sobre el segmento de recta que está a la misma distancia de P_1 y de P_2. Vea la figura 10. Los triángulos P_1AM y MBP_2 son congruentes.* [¿Nota por qué? Ángulo AP_1M = ángulo BMP_2,** ángulo P_1MA = ángulo MP_2B y $d(P_1, M) = d(M, P_2)$. El resultado es que se tiene ángulo-lado-ángulo.] Como los triángulos P_1AM y MBP_2 son congruentes, los lados correspondientes son iguales en longitud. Esto es

Figura 10



$$x - x_1 = x_2 - x \quad \text{y} \quad y - y_1 = y_2 - y$$
$$2x = x_1 + x_2 \qquad\qquad 2y = y_1 + y_2$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad\qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Teorema

Fórmula para el punto medio

El punto medio $M = (x, y)$ del segmento de recta de $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ es

$$M = (x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

En palabras
Para encontrar el punto medio de un segmento de recta, se obtiene el promedio de las coordenadas x y el promedio de las coordenadas y de los puntos terminales.

EJEMPLO 4 Punto medio de un segmento de recta

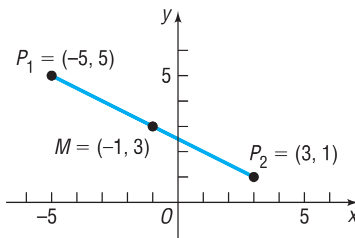
Encuentre el punto medio del segmento de recta de $P_1 = (-5, 5)$ a $P_2 = (3, 1)$. Grafique los puntos P_1 y P_2 y sus puntos medios. Verifique su respuesta.

Solución Se aplica la fórmula (2) del punto medio usando $x_1 = -5$, $y_1 = 5$, $x_2 = 3$ y $y_2 = 1$. Entonces las coordenadas (x, y) del punto medio M son

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Es decir, $M = (-1, 3)$. Vea la figura 11. ◀

Figura 11



✔ **COMPROBACIÓN:** Como M es el punto medio, la respuesta se verifica si $d(P_1, M) = d(M, P_2)$:

$$d(P_1, M) = \sqrt{[-1 - (-5)]^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$
$$d(M, P_2) = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

*La siguiente proposición es un postulado de geometría. Dos triángulos son congruentes si sus lados tienen la misma longitud (LLL), o si dos lados y el ángulo incluido son iguales (LAL) o si dos ángulos y el lado incluido son iguales (ALA).

**Otro postulado de geometría establece que la transversal $\overline{P_1P_2}$ forma ángulos correspondientes iguales con las líneas paralelas $\overline{P_1A}$ y $\overline{MB}$.

2.1 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas están dadas al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. En la recta de números reales se asigna el número __________ al origen. (pp. 17–24)

2. Si 3 y 4 son los catetos de un triángulo rectángulo, la hipotenusa es __________. (pp. 29–31)

3. Si −3 y 5 son las coordenadas de dos puntos en la recta de números reales, la distancia entre estos puntos es __________. (pp. 17–24)

Conceptos y vocabulario

4. Si (x, y) son las coordenadas de un punto P en el plano xy, entonces x se llama la __________ de P y y es la __________ de P.

5. Los ejes coordenados dividen al plano xy en cuatro secciones llamadas __________.

6. Si los tres puntos distintos P, Q y R están todos sobre una recta y si $d(P, Q) = d(Q, R)$ entonces Q se llama el __________ del segmento de P a R.

7. El punto $(a, 0)$ está sobre el eje __________.

8. *Falso o verdadero:* la distancia entre dos puntos algunas veces es un número negativo.

9. *Falso o verdadero:* el punto $(-1, 4)$ está en el cuadrante IV del plano cartesiano.

10. *Falso o verdadero:* el punto medio de un segmento de recta se encuentra con el promedio de las coordenadas x y el promedio de las coordenadas y de los puntos terminales.

Ejercicios

En los problemas 11 y 12, grafique cada punto en el plano xy. Diga en qué cuadrante o eje coordenado se encuentra.

11. a) $A = (-3, 2)$ b) $B = (6, 0)$ c) $C = (-2, -2)$ d) $D = (6, 5)$ e) $E = (0, -3)$ f) $F = (6, -3)$

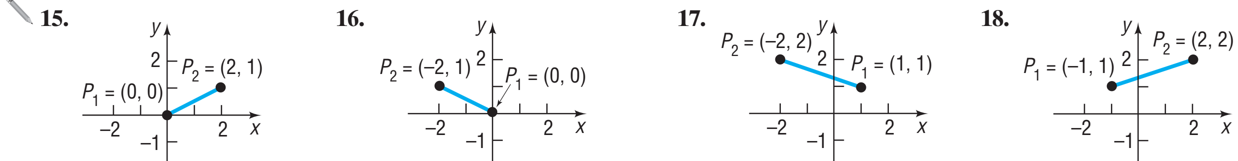
12. a) $A = (1, 4)$ b) $B = (-3, -4)$ c) $C = (-3, 4)$ d) $D = (4, 1)$ e) $E = (0, 1)$ f) $F = (-3, 0)$

13. Grafique los puntos $(2, 0)$, $(2, -3)$, $(2, 4)$, $(2, 1)$ y $(2, -1)$. Describa el conjunto de todos los puntos de la forma $(2, y)$, donde y es un número real.

14. Grafique los puntos $(0, 3)$, $(1, 3)$, $(-2, 3)$, $(5, 3)$, y $(-4, 3)$. Describa el conjunto de todos los puntos de la forma $(x, 3)$, donde x es un número real.

En los problemas 15-28, encuentre la distancia $d(P_1, P_2)$ entre los puntos P_1 y P_2.

15. **16.** **17.** **18.**



19. $P_1 = (3, -4)$; $P_2 = (5, 4)$

20. $P_1 = (-1, 0)$; $P_2 = (2, 4)$

21. $P_1 = (-3, 2)$; $P_2 = (6, 0)$

22. $P_1 = (2, -3)$; $P_2 = (4, 2)$

23. $P_1 = (4, -3)$; $P_2 = (6, 4)$

24. $P_1 = (-4, -3)$; $P_2 = (6, 2)$

25. $P_1 = (-0.2, 0.3)$; $P_2 = (2.3, 1.1)$

26. $P_1 = (1.2, 2.3)$; $P_2 = (-0.3, 1.1)$

27. $P_1 = (a, b)$; $P_2 = (0, 0)$

28. $P_1 = (a, a)$; $P_2 = (0, 0)$

En los problemas 29-34, grafique cada punto y forme el triángulo ABC. Verifique que sea un triángulo rectángulo. Encuentre su área.

29. $A = (-2, 5)$; $B = (1, 3)$; $C = (-1, 0)$

30. $A = (-2, 5)$; $B = (12, 3)$; $C = (10, -11)$

31. $A = (-5, 3)$; $B = (6, 0)$; $C = (5, 5)$

32. $A = (-6, 3)$; $B = (3, -5)$; $C = (-1, 5)$

33. $A = (4, -3)$; $B = (0, -3)$; $C = (4, 2)$

34. $A = (4, -3)$; $B = (4, 1)$; $C = (2, 1)$

35. Encuentre todos los puntos que tienen coordenada x igual a 2 cuya distancia desde el punto $(-2, -1)$ es 5.

36. Encuentre todos los puntos que tienen coordenada y igual a −3 cuya distancia desde el punto $(1, 2)$ es 13.

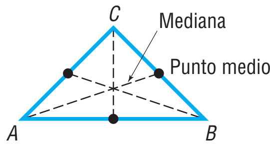
37. Encuentre todos los puntos en el eje x que está a cinco unidades del punto $(4, -3)$.

38. Encuentre todos los puntos en el eje y que están a 5 unidades del puntos $(4, 4)$.

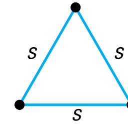
En los problemas 39-48, encuentre el punto medio del segmento de recta que une los puntos P_1 y P_2.

39. $P_1 = (5, -4)$; $P_2 = (3, 2)$
40. $P_1 = (-1, 0)$; $P_2 = (2, 4)$
41. $P_1 = (-3, 2)$; $P_2 = (6, 0)$
42. $P_1 = (2, -3)$; $P_2 = (4, 2)$
43. $P_1 = (4, -3)$; $P_2 = (6, 1)$
44. $P_1 = (-4, -3)$; $P_2 = (2, 2)$
45. $P_1 = (-0.2, 0.3)$; $P_2 = (2.3, 1.1)$
46. $P_1 = (1.2, 2.3)$; $P_2 = (-0.3, 1.1)$
47. $P_1 = (a, b)$; $P_2 = (0, 0)$
48. $P_1 = (a, a)$; $P_2 = (0, 0)$

49. Las **medianas** de un triángulo son los segmentos de recta que van de cada vértice al punto medio del lado opuesto (vea la figura). Encuentre las longitudes de las medianas del triángulo con vértices en $A = (0, 0)$, $B = (0, 6)$ y $C = (4, 4)$.



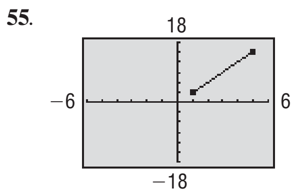
50. Un **triángulo equilátero** es aquel en el que los tres lados tienen la misma longitud. Si dos vértices de un triángulo equilátero son (0, 4) y (0, 0), encuentre el tercer vértice. ¿Cuántos de estos triángulos son posibles?

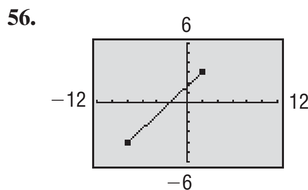


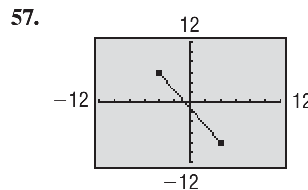
En los problemas 51-54, encuentre la longitud de cada lado del triángulo determinado por los tres puntos P_1, P_2 y P_3. Establezca si el triángulo es isósceles, rectángulo, ninguno de éstos o ambos. (Un **triángulo isósceles** *tiene al menos dos lados de la misma longitud.)*

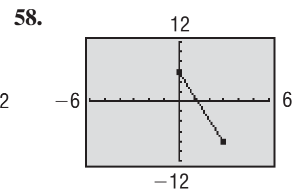
51. $P_1 = (2, 1)$; $P_2 = (-4, 1)$; $P_3 = (-4, -3)$
52. $P_1 = (-1, 4)$; $P_2 = (6, 2)$; $P_3 = (4, -5)$
53. $P_1 = (-2, -1)$; $P_2 = (0, 7)$; $P_3 = (3, 2)$
54. $P_1 = (7, 2)$; $P_2 = (-4, 0)$; $P_3 = (4, 6)$

En los problemas 55-58, encuentre la longitud de los segmentos de recta. Suponga que los puntos terminales de cada segmento tienen coordenadas enteras.

55.


56.


57.


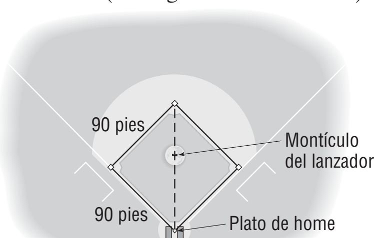
58.


59. Geometría Encuentre el punto medio de cada diagonal de un cuadrado con lados de longitud s. Llegue a la conclusión de que las diagonales de un cuadrado se cruzan en sus puntos medios.

[**Sugerencia:** Use $(0, 0)$, $(0, s)$, $(s, 0)$ y (s, s) como vértices del cuadrado.]

60. Geometría Verifique que los puntos (0, 0), (a, 0) y $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ son los vértices de un triángulo equilátero. Después demuestre que los puntos medios de los tres lados son los vértices de un segundo triángulo equilátero (consulte el problema 50).

61. Béisbol El "diamante" de un campo de béisbol de grandes ligas, de hecho es un cuadrado, con 90 pies por lado (vea la figura). ¿Cuál es la distancia directa de *home* a la segunda base (la diagonal del cuadrado)?



62. Liga pequeña de béisbol El diamante del campo de beisbol de una liga pequeña mide 60 pies por lado. ¿A qué distancia está la segunda base de *home* (la diagonal del cuadrado)?
FUENTE: *Little league Baseball, Official Regulations and Playing Rules*, 2003.

63. Béisbol Consulte el problema 61. Sobreponga al diamante un sistema coordenado rectangular de manera que el origen sea *home*, el lado positivo del eje x esté en la dirección de *home* a la primera base y el lado positivo del eje y vaya en dirección de *home* a la tercera base.

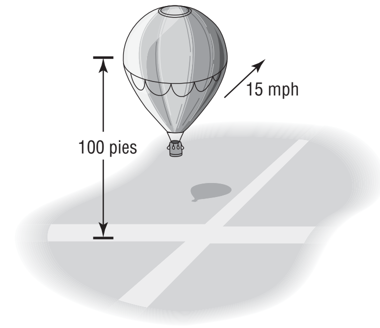
a) ¿Cuáles son las coordenadas de la primera, segunda y tercera base? Use pies como unidad de medida.
b) Si el jardinero derecho se localiza en (310, 15), ¿qué tan lejos está de la segunda base?
c) Si el jardinero central está en (300, 300) ¿qué tan lejos está de la tercera base?

64. Liga pequeña de Béisbol Consulte el problema 62. Sobreponga un sistema de coordenadas rectangular sobre el diamante de la liga pequeña de manera que el origen esté en *home*, el lado positivo del eje x esté en la dirección de *home* a la primera base y el lado positivo del eje y vaya en la dirección de *home* a la tercera base.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de la primera, segunda y tercera base? Use pies como unidad de medida.
b) Si el jardinero derecho se localiza en (180, 20), ¿qué tan lejos está de la segunda base?
c) Si el jardinero central está en (220, 220), ¿qué tan lejos está de la tercera base?

65. Un Dodge Intrepid y una camioneta Mack salen de una intersección al mismo tiempo. El Intrepid se dirige al este a una velocidad promedio de 30 millas por hora, mientras que la camioneta va al sur a una velocidad promedio de 40 millas por hora. Encuentre una expresión para la distancia entre d ellos (en millas) después de t horas.

66. Un globo de aire caliente que se dirige al este, a una velocidad promedio de 15 millas por hora y una altitud constante de 100 pies, pasa por una intersección (vea la figura). Encuentre una expresión para la distancia d (medida en pies) del globo a la intersección t segundos más tarde.



Respuestas a "¿Está preparado?"

1. 0 **2.** 5 **3.** 8

2.2 Gráficas de ecuaciones

OBJETIVOS
1 Gráficas de ecuaciones graficando puntos
2 Encontrar las intercepciones a partir de una gráfica
3 Encontrar las intercepciones a partir de una ecuación
4 Probar la simetría de una ecuación respecto a a) el eje x, b) el eje y y c) el origen

Una **ecuación en dos variables**, digamos x y y, es una proposición en la que dos expresiones que involucran a x y y son iguales. Las expresiones se llaman **miembros** de la ecuación. Como una ecuación es una proposición, podría ser cierta o falsa, según el valor de las variables. Se dice que cualesquiera valores de x y y que resulten en una proposición verdadera **satisfacen** la ecuación.

Por ejemplo, las siguientes son todas ecuaciones en dos variables x y y.

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad 2x - y = 6 \qquad y = 2x + 5 \qquad x^2 = y$$

La primera de ellas, $x^2 + y^2 = 5$, se satisface para $x = 1, y = 2$, ya que $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$. También otras opciones de x y y satisfacen esta ecuación. No se satisface para $x = 2$ y $y = 3$, puesto que $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \neq 5$.

1 La **gráfica de una ecuación** en dos variables x y y consiste en el conjunto de puntos del plano xy cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación.

Las gráficas tienen un papel importante en la visualización de las relaciones que existen entre dos cantidades variables. La figura 12 muestra los

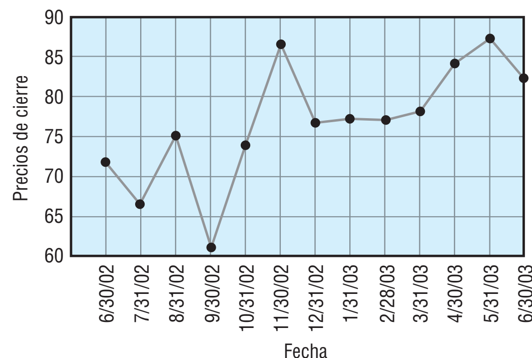


Figura 12
Precios de cierre mensual de las acciones de IBM, 30/6/02 a 30/6/03.

precios de cierre mensuales de las acciones de IBM, del 30 de junio, 2002 al 30 de junio, 2003. Al usar la gráfica también se observa que el precio de cierre el 31 de enero de 2003 era alrededor de $77 por acción.

EJEMPLO 1 Determinación de si un punto está en la gráfica de una ecuación

Determine si los siguientes puntos están en la gráfica de la ecuación $2x - y = 6$.

a) $(2, 3)$ b) $(2, -2)$

Solución a) Para el punto $(2, 3)$, se verifica si $x = 2$, $y = 3$ satisface la ecuación $2x - y = 6$.

$$2x - y = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1 \neq 6$$

La ecuación no se satisface, de manera que el punto $(2, 3)$ no está en la gráfica.

b) Para el punto $(2, -2)$, se tiene

$$2x - y = 2(2) - (-2) = 4 + 2 = 6$$

La ecuación se satisface, por lo que el punto $(2, -2)$ está en la gráfica.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

EJEMPLO 2 Gráfica de una ecuación trazando puntos

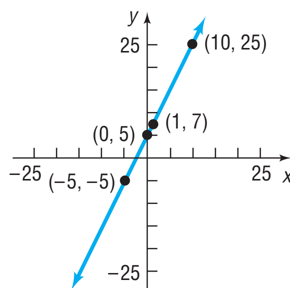
Grafique la ecuación: $y = 2x + 5$

Solución Se desea encontrar todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación. Para localizar algunos de estos puntos (y tener una idea del patrón de la gráfica), se asignan algunos valores a x y se encuentran los valores de y correspondientes.

Si	Entonces	Punto en la gráfica
$x = 0$	$y = 2(0) + 5 = 5$	$(0, 5)$
$x = 1$	$y = 2(1) + 5 = 7$	$(1, 7)$
$x = -5$	$y = 2(-5) + 5 = -5$	$(-5, -5)$
$x = 10$	$y = 2(10) + 5 = 25$	$(10, 25)$

Al graficar estos puntos y luego conectarlos, se obtiene la gráfica de la ecuación (una *recta*), como se muestra en la figura 13.

Figura 13



EJEMPLO 3 Gráfica de una ecuación trazando puntos

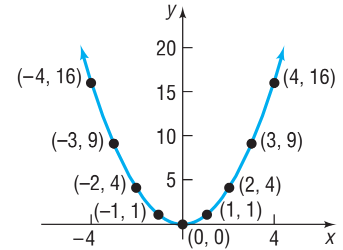
Grafique la ecuación: $y = x^2$

Solución La tabla 1 proporciona varios puntos en la gráfica. En la figura 14 se trazaron estos puntos y se conectaron con una curva suave para obtener la gráfica (una *parábola*).

Tabla 1

x	$y = x^2$	(x, y)
−4	16	(−4, 16)
−3	9	(−3, 9)
−2	4	(−2, 4)
−1	1	(−1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)
3	9	(3, 9)
4	16	(4, 16)

Figura 14



◀

Las gráficas de las ecuaciones ilustradas en las figuras 13 y 14 no muestran todos los puntos. Por ejemplo, en la figura 13, el punto (20, 45) es parte de la gráfica de $y = 2x + 5$, pero no se muestra. Como la gráfica de $y = 2x + 5$ se puede extender tanto como se quiera, se usan flechas para indicar una gráfica cuyo patrón mostrado continúa. Es importante al ilustrar una gráfica, presentar suficiente de ella para que quien la mire "vea" el resto de la gráfica como una continuación obvia de lo que se muestra. Esto se conoce como una **gráfica completa.**

Entonces una manera de obtener una gráfica completa de una ecuación es trazar un número suficiente de puntos en la gráfica hasta que el patrón sea evidente. Luego estos puntos se conectan mediante una curva suave siguiendo el patrón sugerido. Pero, ¿cuántos puntos son suficientes? En ocasiones el conocimiento de la ecuación lo indica. Por ejemplo, aprenderemos en la siguiente sección que si una ecuación es de la forma $y = mx + b$, entonces la gráfica es una recta. En este caso, sólo son necesarios dos puntos para obtener la gráfica.

Una meta de este libro es investigar las propiedades de las ecuaciones con el fin de decidir si una gráfica es completa. Al principio debemos graficar las ecuaciones trazando un número suficiente de puntos. Muy pronto se investigarán varias técnicas que nos permitirán graficar una ecuación sin trazar tantos puntos. Otras veces se graficarán las ecuaciones con base únicamente en las propiedades de la ecuación.



COMENTARIO: Otra manera de obtener la gráfica de una ecuación es usar un dispositivo para graficar. Lea la sección A.2, *uso de un dispositivo de graficación para graficar ecuaciones*, en el apéndice. ■

EJEMPLO 4 Gráfica de una ecuación trazando puntos

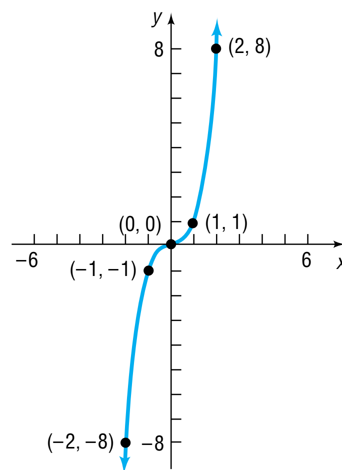
Grafique la ecuación: $y = x^3$

Solución Se establece la tabla 2, se enumeran varios puntos en la gráfica. La figura 15 ilustra algunos de estos puntos y la gráfica de $y = x^3$.

Tabla 2

x	$y = x^3$	(x, y)
−3	−27	(−3, −27)
−2	−8	(−2, −8)
−1	−1	(−1, −1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	8	(2, 8)
3	27	(3, 27)

Figura 15



◀

EJEMPLO 5 Gráfica de una ecuación trazando puntos

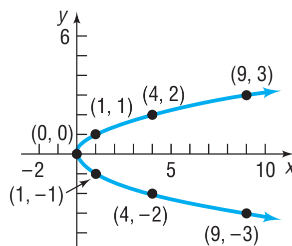
Grafique la ecuación: $x = y^2$

Solución Se establece la tabla 3, se enumeran varios puntos en la gráfica. En este caso, debido a la forma de la ecuación, se asignan algunos números a y para encontrar los valores correspondientes de x. La figura 16 ilustra algunos de estos puntos y la gráfica de $x = y^2$.

Tabla 3

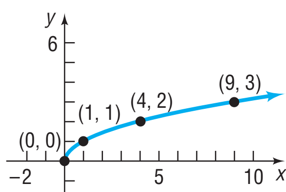
y	$x = y^2$	(x, y)
−3	9	(9, −3)
−2	4	(4, −2)
−1	1	(1, −1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(4, 2)
3	9	(9, 3)
4	16	(16, 4)

Figura 16



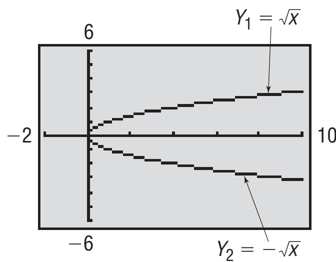
◀

Figura 17



Si se restringe y de manera que $y \geq 0$, la ecuación $x = y^2$, $y \geq 0$, se escriba en forma equivalente como $y = \sqrt{x}$. La porción de la gráfica de $x = y^2$ en el cuadrante I es entonces la gráfica de $y = \sqrt{x}$. Vea la figura 17.

Figura 18





COMENTARIO: Para ver la gráfica de la ecuación $x = y^2$ en una calculadora gráfica, deberá graficar dos ecuaciones $Y_1 = \sqrt{x}$ y $Y_2 = -\sqrt{x}$. Se analiza por qué en el siguiente capítulo. Vea la figura 18. ■

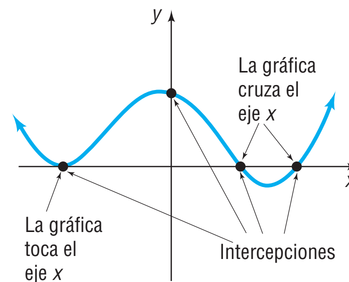
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 49.

Se mencionó que se estudiarían técnicas que reducen el número de puntos requeridos para graficar una ecuación. Dos de estas técnicas involucran encontrar la *abscisa* y la *ordenada*, llamadas también intercepciones, y verificar la *simetría*.

Intercepciones

2 Los puntos, si los hay, en los que la gráfica toca a los ejes coordenados se llaman **intercepciones**. Vea la figura 19. La coordenada x del punto en el que la gráfica cruza o toca el eje x es una **intercepción *x***, y la coordenada y del punto en el que la gráfica cruza o toca el eje y es una **intercepción *y***.

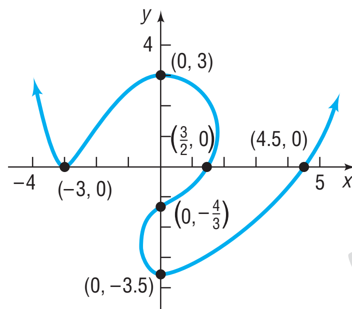
Figura 19



EJEMPLO 6 **Intercepciones de una gráfica**

Encuentre las intercepciones de la gráfica de la figura 20. ¿Cuáles son las intercepciones x? ¿Cuáles son las intercepciones y?

Figura 20



Solución Las intercepciones de la gráfica son los puntos

$$(-3, 0), \quad (0, 3), \quad \left(\frac{3}{2}, 0\right), \quad \left(0, -\frac{4}{3}\right), \quad (0, -3.5), \quad (4.5, 0)$$

Las intercepciones x son $-3, \frac{3}{2}$ y 4.5; las intercepciones y son $-3.5, -\frac{4}{3}$ y 3.

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 15a).

3 Las intercepciones de la gráfica de una ecuación se encuentran usando el hecho de que los puntos sobre el eje x tienen coordenada y igual a 0, y los puntos sobre el eje y tienen coordenada x igual a 0.

Procedimiento para encontrar las intercepciones

1. Para encontrar las intercepciones x, si las hay, de la gráfica de una ecuación, se hace $y = 0$ en la ecuación y se despeja x.

2. Para encontrar las intercepciones y, si las hay, de la gráfica de una ecuación, se hace $x = 0$ en la ecuación y se despeja y.

Como las intercepciones x de la gráfica de una ecuación son los valores de x para los cuales $y = 0$, también se llaman **ceros** (o **raíces**) de la ecuación.

EJEMPLO 7 **Intercepciones a partir de una ecuación**

Encuentre las intercepciones x y las intercepciones y de la gráfica de $y = x^2 - 4$. Grafique $y = x^2 - 4$.

Solución Para encontrar las intercepciones x, se hace $y = 0$ y se obtiene la ecuación

$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x + 2)(x - 2) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$
$$x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0 \quad \text{Propiedad de producto cero.}$$
$$x = -2 \quad \text{o} \quad x = 2$$

La ecuación tiene el conjunto de soluciones $\{-2, 2\}$. Las intercepciones son -2 y 2.

Para encontrar las intercepciones y, se hace $x = 0$ y se obtiene la ecuación

$$y = -4$$

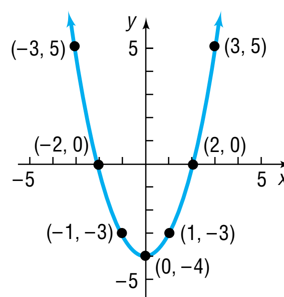
La intercepción y es -4.

Como $x^2 \geq 0$ para toda x, se deduce de la ecuación $y = x^2 - 4$ que $y \geq -4$ para toda x. Esta información, las intercepciones y los puntos de la tabla 4 permiten graficar $y = x^2 - 4$. Vea la figura 21.

Tabla 4

x	$y = x^2 - 4$	(x, y)
−3	5	(−3, 5)
−1	−3	(−1, −3)
1	−3	(1, −3)
3	5	(3, 5)

Figura 21



◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37 (liste las intercepciones).



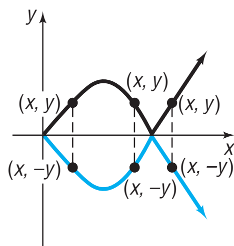
COMENTARIO: Para muchas ecuaciones, quizá encontrar las intercepciones no sea tan sencillo. En esos casos, se utiliza un dispositivo de graficación. Lea la sección A.3, *uso de un dispositivo de graficación para localizar las intercepciones y verificar la simetría* en el apéndice, para ver cómo se encuentran las intercepciones. ■

Simetría

Se acaba de ver el papel de las intercepciones al obtener puntos clave sobre la gráfica de una ecuación. Otra herramienta útil para graficar ecuaciones se refiere a la *simetría*, en particular la simetría respecto al eje x, el eje y y el origen.

Se dice que una gráfica es **simétrica respecto al eje** x si, para todo punto (x, y) en la gráfica, el punto $(x, -y)$ también está en la gráfica.

Figura 22
Simetría respecto al eje x

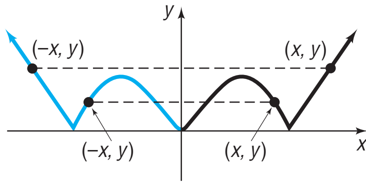


La figura 22 ilustra la definición. Observe que, cuando una gráfica es simétrica respecto al eje x, la parte de la gráfica arriba del eje x es una reflexión o imagen de espejo de la parte de abajo, y viceversa.

EJEMPLO 8 **Puntos simétricos respecto al eje x**

Si una gráfica es simétrica respecto al eje x y el punto $(3, 2)$ está en la gráfica, entonces el punto $(3, -2)$ también está en la gráfica. ◀

Figura 23
Simetría respecto al eje y



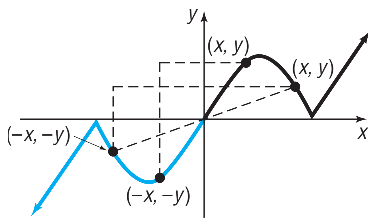
Se dice que una gráfica es **simétrica respecto al eje** y si para todo punto (x, y) en la gráfica, el punto $(-x, y)$ también está en la gráfica.

La figura 23 ilustra la definición. Observe que, cuando una gráfica es simétrica respecto al eje y, la parte de la gráfica a la derecha del eje y es una reflexión de la parte a la izquierda y viceversa.

EJEMPLO 9 Puntos simétricos respecto al eje x

Si una gráfica es simétrica respecto al eje y y el punto $(5, 8)$ está en la gráfica, entonces el punto $(-5, 8)$ también está en la gráfica. ◀

Figura 24
Simetría respecto al origen



Se dice que una gráfica es **simétrica respecto al origen** si para todo punto (x, y) en la gráfica, el punto $(-x, -y)$ también está en la gráfica.

La figura 24 ilustra la definición. Observe que la simetría respecto al origen se puede ver de dos maneras:

1. Como una reflexión alrededor del eje y, seguida de una reflexión alrededor del eje x
2. Como una proyección a lo largo de una recta que pasa por el origen de manera que las distancias desde el origen son iguales

EJEMPLO 10 Puntos simétricos respecto al origen

Si una gráfica es simétrica respecto al origen y el punto $(4, 2)$ está en la gráfica, entonces el punto $(-4, -2)$ también está en la gráfica. ◀

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 5 Y 15b).

4 Cuando la gráfica de una ecuación es simétrica respecto a un eje coordenado o el origen, se reduce el número de puntos que se necesitan para trazarla con el fin de ver el patrón. Por ejemplo, si la gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje y, entonces una vez que se grafican los puntos a la derecha del eje y, es posible obtener el mismo número de puntos de la gráfica reflejándolos respecto al eje y. Debido a esto, antes de graficar una ecuación, es mejor determinar si tiene alguna simetría. Las siguientes pruebas se usan para esto.

Pruebas de simetría

Para probar la simetría de la gráfica de una ecuación respecto al

eje x Se sustituye y por $-y$ en la ecuación. Si se obtiene una ecuación equivalente, la gráfica de la ecuación es simétrica respecto al eje x.

eje y Se sustituye x por $-x$ en la ecuación. Si se obtiene una ecuación equivalente, la gráfica de la ecuación es simétrica respecto al eje y.

origen Se sustituye x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación. Si se obtiene una ecuación equivalente, la gráfica de la ecuación es simétrica respecto al origen.

Se analizará una ecuación que ya se ha graficado para ver cómo se usan estas pruebas.

EJEMPLO 11 Prueba de simetría de una ecuación ($x = y^2$)

a) Para verificar la simetría de la gráfica de la ecuación $x = y^2$ respecto al eje x, se sustituye y por $-y$ en la ecuación, como sigue:

$$x = y^2 \quad \text{Ecuación original.}$$
$$x = (-y)^2 \quad \text{Se sustituye } y \text{ por } -y.$$
$$x = y^2 \quad \text{Se simplifica.}$$

Al hacer la sustitución, el resultado es la misma ecuación. La gráfica es simétrica respecto al eje x.

b) Para verificar la simetría de la gráfica de la ecuación $x = y^2$ respecto al eje y, se sustituye x por $-x$ en la ecuación, como sigue:

$$x = y^2 \quad \text{Ecuación original.}$$
$$-x = y^2 \quad \text{Se sustituye } x \text{ por } -x.$$

Como se obtuvo la ecuación $-x = y^2$, que no es equivalente a la ecuación original, se concluye que la gráfica no es simétrica respecto al eje y.

c) Para verificar la simetría respecto al origen, se sustituye x por $-x$ y y por $-y$:

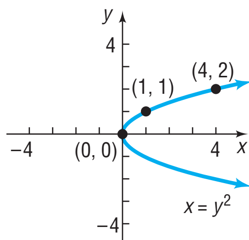
$$x = y^2 \quad \text{Ecuación original.}$$
$$-x = (-y)^2 \quad \text{Se sustituye } x \text{ por } -x \text{ e } y \text{ por } -y.$$
$$-x = y^2 \quad \text{Se simplifica.}$$

La ecuación que se obtiene, $-x = y^2$, no es equivalente a la ecuación original. Se concluye que la gráfica no es simétrica respecto al origen. ◀

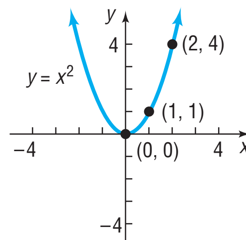
La figura 25a) ilustra la gráfica de $x = y^2$. Al formar la tabla de puntos en la gráfica de $x = y^2$ se podría restringir a puntos cuyas coordenadas y son positivas, Una vez trazados y conectados estos puntos, una reflexión respecto al eje x (debido a la simetría) proporciona el resto de la gráfica.

Las figuras 25b) y c) ilustran otras dos ecuaciones $y = x^2$ y $y = x^3$, que se graficaron antes. Pruebe la simetría de cada ecuación para verificar las conclusiones establecidas en las figuras 25b) y c). Observe cómo la existencia de simetría reduce el número de puntos que se necesitan graficar.

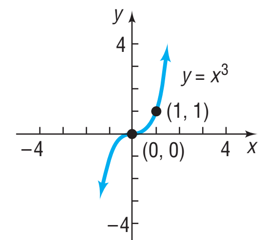
Figura 25



a) Simetría respecto al eje x



b) Simetría respecto al eje y



c) Simetría respecto al origen

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37 (pruebas de simetría).

EJEMPLO 12 Gráfica de la ecuación $y = \frac{1}{x}$

Grafique la ecuación: $y = \frac{1}{x}$

Encuentre cualquier intercepción y verifique la simetría primero.

Solución Primero se verifican las intercepciones. Si se hace $x = 0$, se obtiene un denominador igual a 0, que no está definido. Se concluye que no hay intercepción y. Si se hace $y = 0$, se obtiene la ecuación $\frac{1}{x} = 0$, que no tiene solución. Se concluye que no hay intercepción x. La gráfica de $y = \frac{1}{x}$ no cruza ni toca los ejes coordenados.

Ahora se verifica la simetría.

Eje x Al sustituir y por $-y$ se obtiene $-y = \frac{1}{x}$, que no es equivalente a $y = \frac{1}{x}$.

Eje y Al sustituir x por $-x$ se obtiene $y = \frac{1}{-x}$, que no es equivalente a $y = \frac{1}{x}$.

Origen Al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene $-y = \frac{-1}{x}$, que sí es equivalente a $y = \frac{1}{x}$.

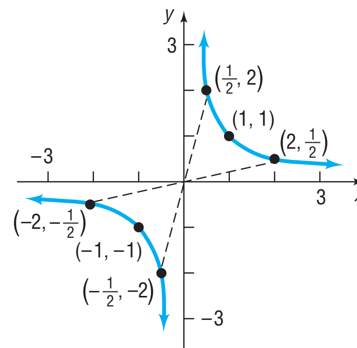
La gráfica es simétrica respecto al origen.

Por último, se establece la tabla 5, enumerando varios puntos en la gráfica. Como la gráfica de la ecuación es simétrica respecto al origen, se usan sólo valores positivos de x. De la tabla 5 se infiere que si x es un número positivo grande, entonces $y = \frac{1}{x}$ es un número positivo cercano a 0. Además se infiere que si x es un número positivo cercano a 0, entonces $y = \frac{1}{x}$ es un número positivo grande. Con esta información, se grafica la ecuación. La figura 26 ilustra algunos de estos puntos y la gráfica de $y = \frac{1}{x}$. Observe cómo se utilizan la ausencia de intercepciones y la existencia de simetría respecto al origen. ◀

Tabla 5

x	$y = \frac{1}{x}$	(x, y)
$\frac{1}{10}$	10	$\left(\frac{1}{10}, 10\right)$
$\frac{1}{3}$	3	$\left(\frac{1}{3}, 3\right)$
$\frac{1}{2}$	2	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
1	1	$(1, 1)$
2	$\frac{1}{2}$	$\left(2, \frac{1}{2}\right)$
3	$\frac{1}{3}$	$\left(3, \frac{1}{3}\right)$
10	$\frac{1}{10}$	$\left(10, \frac{1}{10}\right)$

Figura 26





COMENTARIO: Vea en el ejemplo 3 del apéndice, sección A.3, la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ usando una calculadora gráfica. ■

2.2 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Los puntos, si los hay, en donde la gráfica cruza o toca los ejes coordenados se llaman _________.

2. Como las intercepciones x de la gráfica de una ecuación son aquellos valores de x para los que $y = 0$, también se llaman _________ u _________.

3. *Falso o verdadero:* para encontrar las intercepciones de la gráfica de una ecuación, se hace $y = 0$ y se despeja x.

4. Si una gráfica es simétrica respecto al origen y si $(-3, 4)$ es un punto de la gráfica, entonces el punto _________ también está en la gráfica.

Ejercicios

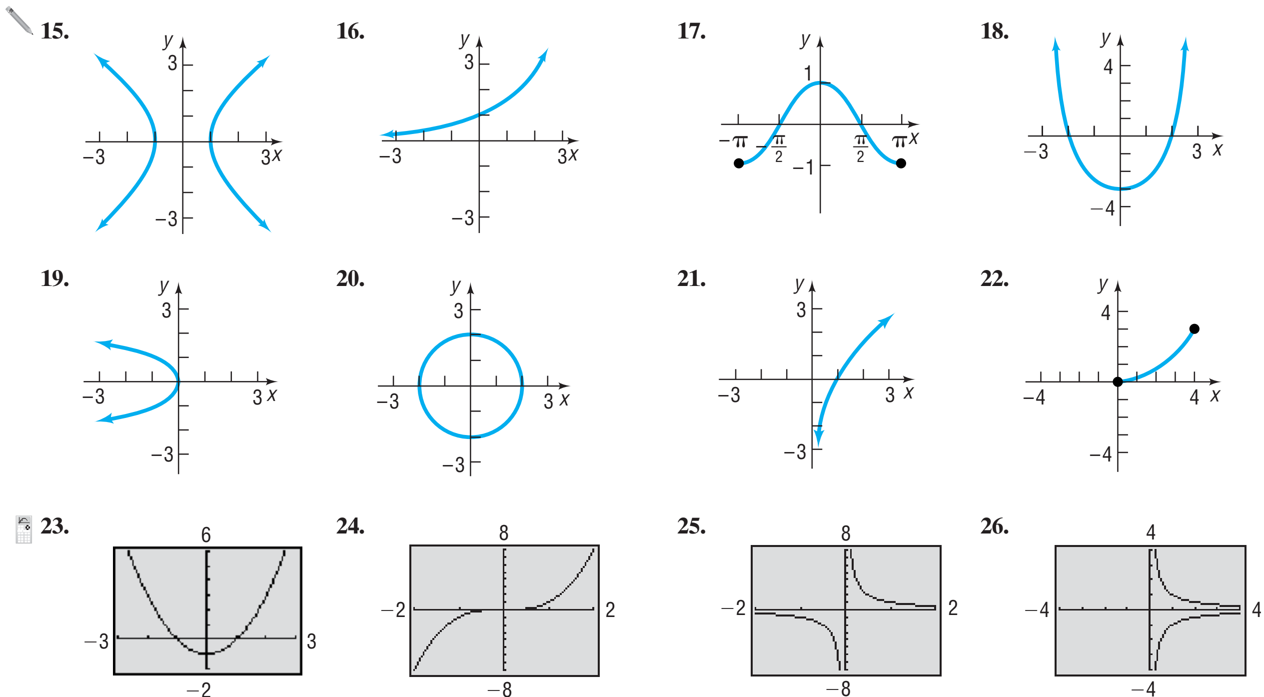
En los problemas 5-14, grafique cada punto. Después trace el punto simétrico respecto al a) eje x; b) eje y; c) origen.

5. $(3, 4)$ **6.** $(5, 3)$ **7.** $(-2, 1)$ **8.** $(4, -2)$ **9.** $(1, 1)$

10. $(-1, -1)$ **11.** $(-3, -4)$ **12.** $(4, 0)$ **13.** $(0, -3)$ **14.** $(-3, 0)$

En los problemas 15-26 está dada la gráfica de una ecuación.

a) *Enumere las intercepciones de la gráfica.*
b) *Con base en la gráfica, diga si es simétrica respecto al eje x, el eje y o el origen.*



En los problemas 27-32, determine si los puntos dados están en la gráfica de la ecuación.

27. Ecuación: $y = x^4 - \sqrt{x}$
Puntos: $(0, 0)$; $(1, 1)$; $(-1, 0)$

28. Ecuación: $y = x^3 - 2\sqrt{x}$
Puntos: $(0, 0)$; $(1, 1)$; $(1, -1)$

29. Ecuación: $y^2 = x^2 + 9$
Puntos: $(0, 3)$; $(3, 0)$; $(-3, 0)$

30. Ecuación: $y^3 = x + 1$
Puntos: $(1, 2)$; $(0, 1)$; $(-1, 0)$

31. Ecuación: $x^2 + y^2 = 4$
Puntos: $(0, 2)$; $(-2, 2)$; $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

32. Ecuación: $x^2 + 4y^2 = 4$
Puntos: $(0, 1)$; $(2, 0)$; $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

En los problemas 33-48, enumere las intercepciones y pruebe la simetría.

33. $x^2 = y$ **34.** $y^2 = x$ **35.** $y = 3x$ **36.** $y = -5x$

37. $x^2 + y - 9 = 0$ **38.** $y^2 - x - 4 = 0$ **39.** $9x^2 + 4y^2 = 36$ **40.** $4x^2 + y^2 = 4$

41. $y = x^3 - 27$ **42.** $y = x^4 - 1$ **43.** $y = x^2 - 3x - 4$ **44.** $y = x^2 + 4$

45. $y = \dfrac{3x}{x^2 + 9}$ **46.** $y = \dfrac{x^2 - 4}{2x^4}$ **47.** $y = |x|$ **48.** $y = \sqrt{x}$

En los problemas 49-52, dibuje un bosquejo de cada ecuación.

49. $y = x^3$ **50.** $x = y^2$ **51.** $y = \sqrt{x}$ **52.** $y = \dfrac{1}{x}$

53. Si $(a, 2)$ es un punto en la gráfica de $y = 3x + 5$, ¿cuál es el valor de a?

54. Si $(2, b)$ es un punto en la gráfica de $y = x^2 + 4x$, ¿cuál es el valor de b?

55. Si (a, b) es un punto en la gráfica de $2x + 3y = 6$, escriba una ecuación que relacione a y b.

56. Si $(2, 0)$ y $(0, 5)$ son puntos en la gráfica de $y = mx + b$, ¿qué valores tienen m y b?

En el problema 57, puede usar una calculadora gráfica, pero no se requiere.

57. a) Grafique $y = \sqrt{x^2}$, $y = x$, $y = |x|$ y $y = (\sqrt{x})^2$, observando qué gráficas son la misma.

b) Explique por qué las gráficas de $y = \sqrt{x^2}$ y $y = |x|$ son iguales.

c) Explique por qué las gráficas de $y = x$ y $y = (\sqrt{x})^2$ no son la misma.

d) Explique por qué las gráficas de $y = \sqrt{x^2}$ y $y = x$ no son iguales.

58. Encuentre una ecuación con intercepciones $(2, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 1)$. Compare su ecuación con la de un compañero. Comente las similitudes.

59. Se prueba una ecuación para ver si es simétrica respecto al eje x, al eje y y al origen. Explique por qué, si existen dos de estas simetrías, la restante también debe estar presente.

60. Dibuje una gráfica que contenga los puntos $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, 5)$. Compare su gráfica con la de otros estudiantes. ¿Son la mayoría de las gráficas líneas rectas? ¿Cuántas curvas hay? Analice las diferentes maneras de conectar estos puntos.

2.3 Círculos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de empezar, revise lo siguiente:*

- Método de la raíz cuadrada (sección 1.2, pp. 98-99)
- Completar cuadrados (sección 1.2, pp. 99)
- Fórmula cuadrática (sección 1.2, pp. 101–104)

Trabaje ahora en los problemas "¿Está preparado?" de la página 179.

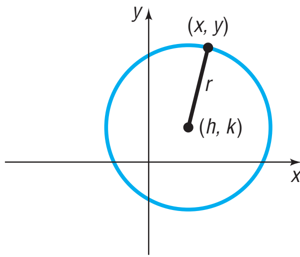
OBJETIVOS
1 Escribir la forma estándar de la ecuación de un círculo
2 Graficar un círculo
3 Encontrar el centro y el radio de un círculo en la forma general y graficarlo.

Círculos

1 Una ventaja de un sistema de coordenadas es que permite traducir una proposición de geometría en una proposición algebraica, y viceversa. Considere, por ejemplo, la siguiente proposición geométrica que define un círculo.

> Un **círculo** es un conjunto de puntos en el plano xy que están a una distancia fija r de un punto fijo (h, k). La distancia fija r se llama **radio,** y el punto fijo (h, k) se llama **centro** del círculo.

Figura 27



La figura 27 muestra la gráfica de un círculo. ¿Existe una ecuación que tenga esta gráfica? Si así es, ¿cuál es la ecuación? Para encontrar la ecuación, dejamos que (x, y) represente las coordenadas de cualquier punto en un círculo con radio r y centro en (h, k). Entonces la distancia entre los puntos (x, y) y (h, k) debe ser siempre r. Es decir, por la fórmula de la distancia

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

o de manera equivalente

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

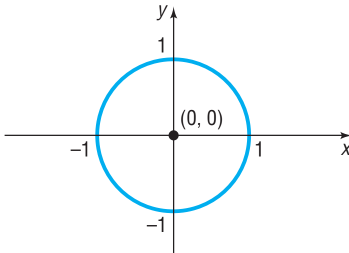
La **forma estándar de la ecuación de un círculo** con radio r y centro en (h, k) es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad \textbf{(1)}$$

La forma estándar de la ecuación de un círculo con radio r y centro en el origen $(0, 0)$ es

$$x^2+y^2=r^2$$

Figura 28
Círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$



Si el radio $r = 1$, el círculo cuyo centro es el origen se llama **círculo unitario** y tiene la ecuación

$$x^2+y^2=1$$

Vea la figura 28. Observe que la gráfica del círculo unitario es simétrica respecto al eje x, el eje y y el origen.

EJEMPLO 1 Forma estándar de la ecuación de un círculo

Escriba la forma estándar de la ecuación del círculo de radio 5 y centro en $(-3, 6)$.

Solución Utilice la forma de la ecuación (1) y sustituya los valores de $r = 5$, $h = -3$ y $k = 6$, para obtener

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x+3)^2+(y-6)^2=25$$


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

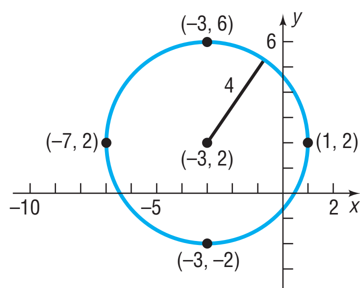

2 La gráfica de cualquier ecuación de la forma (1) es la de un círculo con radio r y centro (h, k).

EJEMPLO 2 Gráfica de un círculo

Grafique la ecuación: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

Solución La ecuación es de la forma (1), de manera que su gráfica es un círculo. Para graficar la ecuación, primero se compara la ecuación dada con la forma estándar de la ecuación de un círculo. La comparación proporciona la información del círculo.

Figura 29



$$
\begin{aligned}
(x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 16 \\
(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 &= 4^2 \\
\uparrow \qquad\quad \uparrow \quad\; &\quad \uparrow \\
(x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2
\end{aligned}
$$

Se ve que $h = -3, k = 2$ y $r = 4$. El círculo tiene centro en $(-3, 2)$ y radio de 4 unidades. Para graficar este círculo, primero se localiza el centro $(-3, 2)$. Como el radio es 4, se localizan cuatro puntos en el círculo marcando 4 unidades a la izquierda, a la derecha, arriba y abajo del centro. Estos cuatro puntos se utilizan como guía para obtener la gráfica. Vea la figura 29. ◀

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 25a) Y b).

EJEMPLO 3 Intercepciones de un círculo

Para el círculo $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$, encuentre las intercepciones de su gráfica, si las hay.

Solución Esta es la ecuación analizada y graficada en el ejemplo 2. Para encontrar las intercepciones x, si las hay, se hace $y = 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
(x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 16 \\
(x + 3)^2 + (0 - 2)^2 &= 16 && y = 0 \\
(x + 3)^2 + 4 &= 16 && \text{Se simplifica.} \\
(x + 3)^2 &= 12 && \text{Se simplifica.} \\
x + 3 &= \pm\sqrt{12} && \text{Se aplica el método de la raíz cuadrada.} \\
x &= -3 \pm 2\sqrt{3} && \text{Se despeja } x.
\end{aligned}
$$

Las intercepciones x son $-3 - 2\sqrt{3} \approx -6.46$ y $-3 + 2\sqrt{3} \approx 0.46$.

Para encontrar las intercepciones y, si las hay, se hace $x = 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
(x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 16 \\
9 + (y - 2)^2 &= 16 \\
(y - 2)^2 &= 7 \\
y - 2 &= \pm\sqrt{7} \\
y &= 2 \pm\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

Las intercepciones y son $2 - \sqrt{7} \approx -0.65$ y $2 + \sqrt{7} \approx 4.65$.

Observe de nuevo la figura 29 para verificar la localización aproximada de las intercepciones. ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25c).

Si eliminamos el paréntesis de la ecuación del círculo $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$, se obtiene

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 16$$

que después de simplificar, se ve que es equivalente a

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

COMENTARIO: Se pudo haber usado la forma equivalente de la ecuación del círculo dada en la ecuación (2) para encontrar las intercepciones. Inténtelo y compare los diferentes pasos requeridos para obtener las mismas soluciones ■

Se demuestra que la gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

es un círculo o un punto, o no existe. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ es el punto único $(0, 0)$. La ecuación $x^2 + y^2 + 5 = 0$ o $x^2 + y^2 = -5$, no tiene gráfica, porque las sumas de cuadrados de número reales nunca son negativas.

Cuando su gráfica es un círculo, la ecuación

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

se conoce como **forma general de la ecuación de un círculo**.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

3 Si la ecuación de un círculo está en la forma general, se usa el método de completar cuadrados para ponerla en la forma estándar de manera que sea fácil identificar el centro y el radio.

EJEMPLO 4 Gráfica de un círculo cuya ecuación está en la forma general

Grafique la ecuación: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$

Solución Se completan los cuadrados tanto en x como en y para poner la ecuación en la forma estándar. Se agrupan los términos en x, se agrupan los términos en y, y se coloca la constante en el lado derecho de la ecuación. El resultado es

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = -12$$

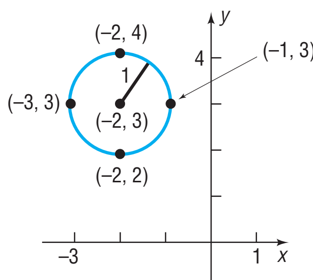
Luego, se completa el cuadrado de cada expresión entre paréntesis. Recuerde que cualquier número agregado al lado izquierdo de la ecuación debe agregarse al lado derecho.

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -12 + 4 + 9$$

$$\left(\tfrac{4}{2}\right)^2 = 4 \qquad \left(\tfrac{-6}{2}\right)^2 = 9$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1 \qquad \text{Factorización.}$$

Figura 30



Esta ecuación se reconoce como la forma estándar de la ecuación de un círculo con radio 1 y centro en $(-2, 3)$.

Para graficar la ecuación, se usa el centro $(-2, 3)$ y el radio 1. Vea la figura 30. ◄


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.



COMENTARIO: Ahora lea la sección A.5, *Pantallas cuadradas*, del apéndice. ■



EJEMPLO 5 Uso de un dispositivo de graficación para graficar un círculo

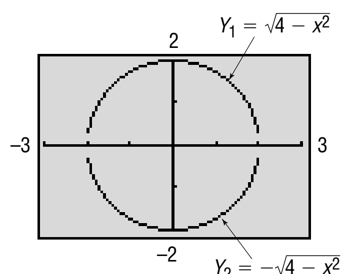
Grafique la ecuación: $x^2 + y^2 = 4$

Solución Ésta es la ecuación de un círculo con centro en el origen y radio 2. Para graficarla, debemos despejar y.

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y^2 = 4 - x^2 \quad \text{Se resta } x^2 \text{ de cada lado.}$$
$$y = \pm\sqrt{4 - x^2} \quad \text{Se aplica el método de la raíz cuadrada para despejar } y.$$

Se tienen dos ecuaciones para graficar: primero se grafica $Y_1 = \sqrt{4 - x^2}$ y luego $Y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$ en la misma pantalla cuadrada. (El círculo aparecerá ovalado si no se usa la pantalla cuadrada.) Vea la figura 31. ◀

Figura 31



2.3 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas están dadas al final de estos ejercicios. Si dio una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Para completar cuadrados de la expresión $x + 4x$, se _________ el número __________. (p. 99)

2. Use el método de la raíz cuadrada para encontrar el conjunto de soluciones de la ecuación $(x - 2)^2 = 4$. (pp. 98-99)

3. *Falso o verdadero:* si el discriminante de una ecuación cuadrática es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales. (pp. 101-104)

Conceptos y vocabulario

4. Para un círculo, el _________ es la distancia del centro a cualquier punto sobre el círculo.

5. *Falso o verdadero:* un círculo con centro en el origen es simétrico respecto al eje x, el eje y y el origen.

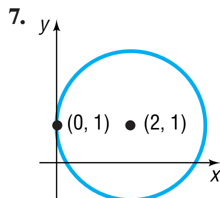
6. El centro y radio del círculo $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 36$ son _________ y _________.

Ejercicios

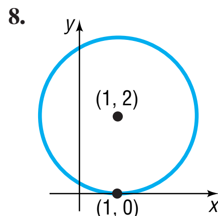
En los problemas 7-10, encuentre el centro y el radio de cada círculo. Escriba la forma estándar de la ecuación.



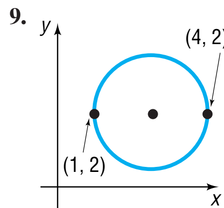
7.



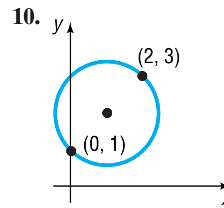
8.



9.



10.



En los problemas 11-22, escriba la forma estándar de la ecuación y la forma general de la ecuación de cada círculo de radio r y centro (h, k); grafique cada círculo.

11. $r = 2$; $(h, k) = (0, 0)$
12. $r = 3$; $(h, k) = (0, 0)$
13. $r = 1$; $(h, k) = (1, -1)$
14. $r = 2$; $(h, k) = (-2, 1)$
15. $r = 2$; $(h, k) = (0, 2)$
16. $r = 3$; $(h, k) = (1, 0)$
17. $r = 5$; $(h, k) = (4, -3)$
18. $r = 4$; $(h, k) = (2, -3)$
19. $r = 6$; $(h, k) = (-3, -6)$
20. $r = 5$; $(h, k) = (-5, 2)$
21. $r = 3$; $(h, k) = (0, -3)$
22. $r = 2$; $(h, k) = (-2, 0)$

En los problemas 23-34, a) encuentre el centro (h, k) y el radio r de cada círculo; b) grafique cada círculo; c) encuentre las intercepciones de las gráficas, si las hay.

23. $x^2 + y^2 = 4$

24. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

25. $2(x - 3)^2 + 2y^2 = 8$

26. $3(x + 1)^2 + 3(y - 1)^2 = 6$

27. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

28. $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$

29. $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$

30. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$

31. $x^2 + y^2 - x + 2y + 1 = 0$

32. $x^2 + y^2 + x + y - \frac{1}{2} = 0$

33. $2x^2 + 2y^2 - 12x + 8y - 24 = 0$

34. $2x^2 + 2y^2 + 8x + 7 = 0$

En los problemas 35-40, encuentre la forma general de la ecuación de cada círculo.

35. Centro en el origen y contiene el punto $(-3, 2)$

36. Centro en el punto $(1, 0)$ y contiene el punto $(-2, 3)$

37. Centro en el punto $(2, 3)$ y tangente al eje x.

38. Centro en el punto $(-3, 1)$ y tangente al eje y.

39. Un diámetro tiene puntos terminales en $(1, 4)$ y $(-3, 2)$

40. Un diámetro tiene puntos terminales en $(4, 3)$ y $(0,1)$

En los problemas 41-44, forme pares de la gráfica y la ecuación correcta.

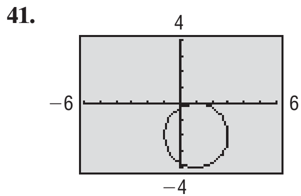
a) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$

b) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

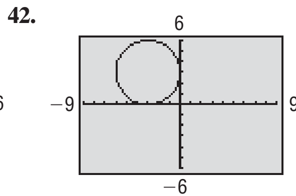
c) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

d) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

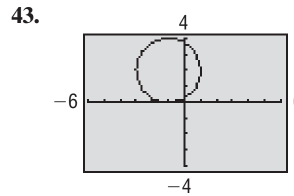
41.



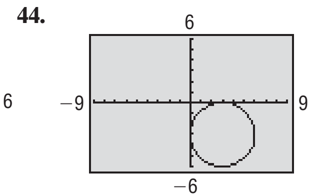
42.



43.

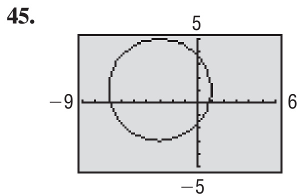


44.

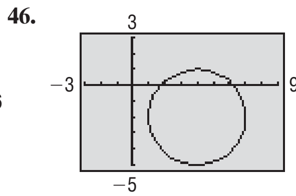


En los problemas 45-48, encuentre la forma estándar de la ecuación de cada círculo. Suponga que el centro tiene coordenadas enteras y que el radio es un entero.

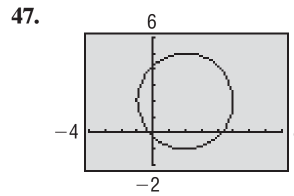
45.



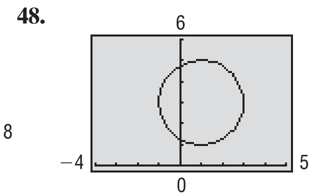
46.



47.



48.



49. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones puede tener la gráfica mostrada? (Es posible que haya más de una respuesta.)

a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$

b) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

c) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$

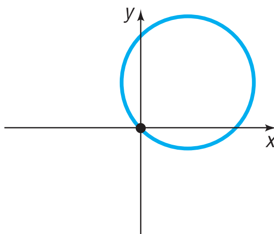
d) $(x + 2) + (y - 2)^2 = 8$

e) $x^2 + y^2 - 4x - 9y = 0$

f) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$

g) $x^2 + y^2 - 9x - 4y = 0$

h) $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 4$



50. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones puede tener la gráfica mostrada? (Es posible que haya más de una respuesta.)

a) $(x - 2)^2 + y^2 = 3$

b) $(x + 2)^2 + y^2 = 3$

c) $x^2 + (y - 2)^2 = 3$

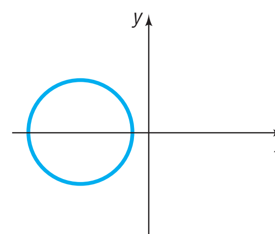
d) $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

e) $x^2 + y^2 + 10x + 16 = 0$

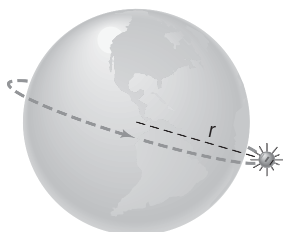
f) $x^2 + y^2 + 10x - 2y = 1$

g) $x^2 + y^2 + 9x + 10 = 0$

h) $x^2 + y^2 - 9x - 10 = 0$



51. Satélites del clima La Tierra se representa en el mapa de una porción del sistema solar de manera que su superficie es el círculo con ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4091 = 0$. Un satélite de clima da vueltas 0.6 unidades arriba de la Tierra con el centro de su órbita circular en el centro de la Tierra. Encuentre la ecuación para la órbita del satélite en este mapa.



Respuestas a "¿Está preparado?"

1. agregar; 4 **2.** $\{0, 4\}$ **3.** Verdadero

2.4 Rectas

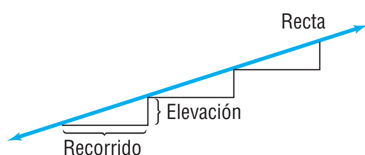
OBJETIVOS
1 Calcular e interpretar la pendiente de una recta
2 Graficar rectas dados un punto y la pendiente
3 Encontrar la ecuación de una recta vertical
4 Usar la forma punto-pendiente de una recta; identificar rectas horizontales
5 Encontrar la ecuación de una recta dados dos puntos
6 Escribir la ecuación de una recta en la forma pendiente-ordenada
7 Identificar la pendiente y la intercepción *y* de una recta a partir de su ecuación
8 Escribir la ecuación de una recta en la forma general

En esta sección se estudia cierto tipo de ecuaciones que contienen dos variables, llamadas *ecuaciones lineales*, y sus gráficas, líneas *rectas*.

Pendiente de una recta

1 Considere la escalera ilustrada en la figura 32. Cada escalón contiene exactamente el mismo **recorrido** horizontal y la misma **elevación** vertical. La razón de la elevación al recorrido se llama *pendiente*, es una medida numérica de la inclinación de la escalera. Por ejemplo, si el recorrido aumenta y la elevación no cambia, la escalera se vuelve menos inclinada. Si el recorrido no cambia y la elevación aumenta, la escalera queda más inclinada. La pendiente de una recta se define mejor en términos de sus coordenadas rectangulares.

Figura 32



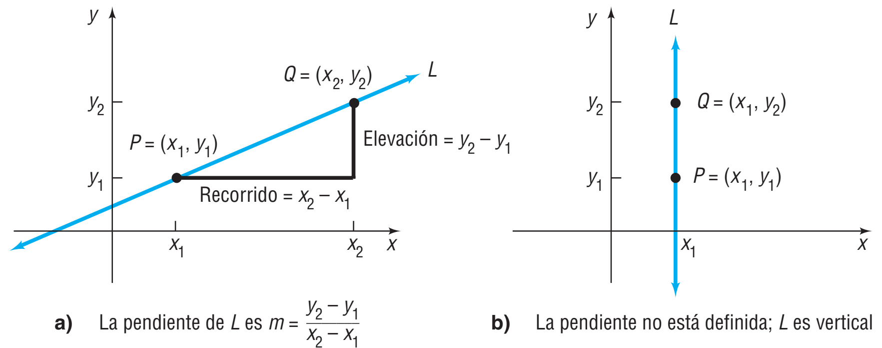
Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ dos puntos distintos. Si $x_1 \neq x_2$, la **pendiente** m de la línea no vertical L que contiene a P y Q se define por la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \neq x_2 \qquad \textbf{(1)}$$

Si $x_1 = x_2$, L es una **línea vertical** y la pendiente m de L **no está definida** (ya que esto resulta en un división entre 0).

La figura 33a) proporciona una ilustración de la pendiente de una recta no vertical; La figura 33b) ilustra una línea vertical.

Figura 33



a) La pendiente de L es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **b)** La pendiente no está definida; L es vertical

Como lo ilustra la figura 33a), la pendiente m de una recta no vertical se observa como

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}}$$

La pendiente m de una línea no vertical también se expresa como

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

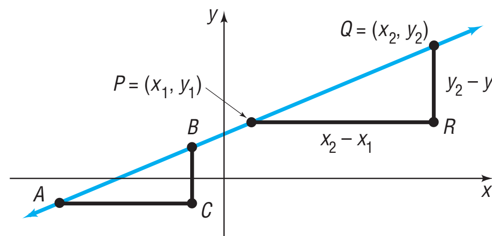
Es decir, la pendiente m de una recta no vertical L mide el cambio en y cuando x cambia de x_1 a x_2. Esto se llama **razón de cambio promedio** de y respecto a x.

Dos comentarios acerca del cálculo de la pendiente de una recta no vertical pueden ser útiles.

1. Cualesquiera dos puntos distintos en una recta se utilizan para calcular la pendiente de la recta. (Vea la justificación en la figura 34.)

Figura 34
Los triángulos *ABC* y *PQR* son similares (ángulos iguales). Entonces, las razones de lados correspondientes son proporcionales, así

$$\text{Pendiente usando } P \text{ y } Q = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \text{Pendiente usando } A \text{ y } B$$



2. La pendiente de una recta se calcula de $P = (x_1, y_1)$ a $Q = (x_2, y_2)$ o de Q a P porque

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

EJEMPLO 1 Encontrar e interpretar la pendiente de una recta que contiene dos puntos

La pendiente m de la recta que contiene los puntos $(1, 2)$ y $(5, -3)$ se calcula como

$$m = \frac{-3-2}{5-1} = \frac{-5}{4} = -\frac{5}{4} \quad \text{o como} \quad m = \frac{2-(-3)}{1-5} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

Para cada cambio de 4 unidades en x, y cambiará -5 unidades; es decir, si x aumenta 4 unidades, entonces y disminuye 5 unidades. La razón de cambio promedio de y respecto a x es $-\frac{5}{4}$. ◀


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 7 Y 13.

Para obtener una mejor idea del significado de la pendiente m de una recta L, considere el siguiente ejemplo.

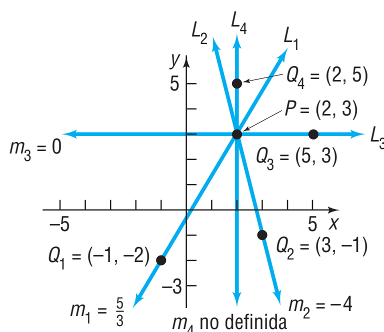
EJEMPLO 2 Pendientes de varias rectas que contienen el mismo punto (2, 3)

Calcule las pendientes de las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4 que contienen los siguientes pares de puntos. Grafique las cuatro líneas en el mismo conjunto de ejes coordenados.

$$\begin{array}{lll} L_1: & P = (2, 3) & Q_1 = (-1, -2) \\ L_2: & P = (2, 3) & Q_2 = (3, -1) \\ L_3: & P = (2, 3) & Q_3 = (5, 3) \\ L_4: & P = (2, 3) & Q_4 = (2, 5) \end{array}$$

Solución Sean m_1, m_2, m_3 y m_4 las pendientes de las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4, respectivamente. Entonces

Figura 35



$$m_1 = \frac{-2-3}{-1-2} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} \qquad \text{Elevación de 5 dividida entre recorrido de 3.}$$

$$m_2 = \frac{-1-3}{3-2} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$m_3 = \frac{3-3}{5-2} = \frac{0}{3} = 0$$

m_4 no está definida

Las gráficas de estas rectas están dadas en la figura 35. ◀

La figura 35 ilustra los siguientes hechos:

1. Cuando la pendiente de una recta es positiva, la recta se inclina hacia arriba de izquierda a derecha (L_1).
2. Cuando la pendiente de una recta es negativa, la recta se inclina hacia abajo de izquierda a derecha (L_2).
3. Cuando la pendiente es 0, la recta es horizontal (L_3).
4. Cuando la pendiente no está definida, la recta es la línea vertical (L_4).



Para ver el concepto

En la misma pantalla cuadrada, grafique las siguientes ecuaciones:

$Y_1 = 0$ La pendiente de la recta es 0.

$Y_2 = \frac{1}{4}x$ La pendiente de la recta es $\frac{1}{4}$.

$Y_3 = \frac{1}{2}x$ La pendiente de la recta es $\frac{1}{2}$.

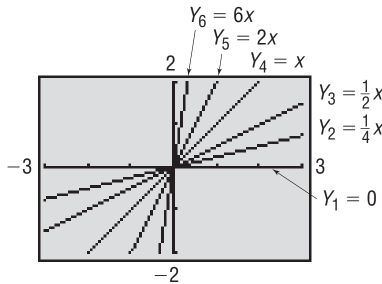
$Y_4 = x$ La pendiente de la recta es 1.

$Y_5 = 2x$ La pendiente de la recta es 2.

$Y_6 = 6x$ La pendiente de la recta es 6.

Vea la figura 36.

Figura 36





Para ver el concepto

En la misma pantalla cuadrada, grafique las siguientes ecuaciones:

$Y_1 = 0$ La pendiente de la recta es 0.

$Y_2 = -\frac{1}{4}x$ La pendiente de la recta es $-\frac{1}{4}$.

$Y_3 = -\frac{1}{2}x$ La pendiente de la recta es $-\frac{1}{2}$.

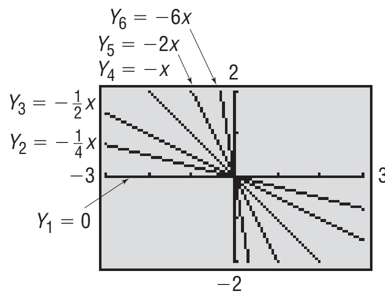
$Y_4 = -x$ La pendiente de la recta es −1.

$Y_5 = -2x$ La pendiente de la recta es −2.

$Y_6 = -6x$ La pendiente de la recta es −6.

Vea la figura 37.

Figura 37



Las figuras 36 y 37 ilustran que cuanto más cerca esté la recta de la posición vertical, mayor es la magnitud de la pendiente.



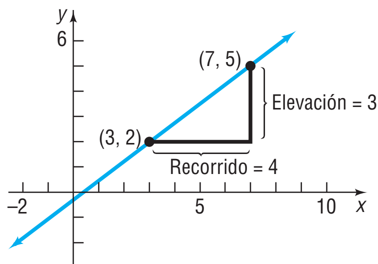
El siguiente ejemplo ilustra cómo se utiliza la pendiente para graficar la recta.

EJEMPLO 3 Gráfica de una recta dados un punto y la pendiente

Grafique la recta que contiene el punto (3, 2) y cuya pendiente es

a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{4}{5}$

Figura 38



Solución

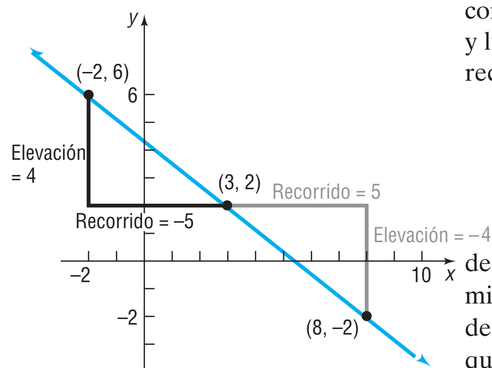
a) Pendiente $= \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}}$. El hecho de que la pendiente sea $\frac{3}{4}$ significa que por cada movimiento horizontal de 4 unidades a la derecha, habrá un movimiento vertical (elevación) de 3 unidades. Si comenzamos en el punto dado (3, 2) y nos movemos 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba, llegamos al punto (7, 5). Al dibujar la recta que pasa por este punto y el punto (3, 2), se obtiene la gráfica. Vea la figura 38.

b) El hecho de que la pendiente sea

$$-\frac{4}{5} = \frac{-4}{5} = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}}$$

significa que por cada movimiento horizontal de 5 unidades (recorrido = 5) a la derecha, habrá un movimiento vertical correspondiente de −4

Figura 39



unidades (elevación $= -4$, movimiento hacia abajo de 4 unidades). Si comenzamos en el punto $(3, 2)$ y nos movemos 5 unidades a la derecha y luego 4 unidades hacia abajo, llegamos al punto $(8, -2)$. Al dibujar la recta que pasa por estos puntos, se obtiene la gráfica. Vea la figura 39.

De forma alternativa, se establece

$$-\frac{4}{5} = \frac{4}{-5} = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}}$$

de manera que por cada movimiento horizontal de -5 unidades (movimiento a la izquierda) habrá un movimiento vertical correspondiente de 4 unidades (hacia arriba). Este enfoque nos lleva al punto en $(-2, 6)$, que también está en la gráfica mostrada en la figura 39. ◀

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 21 Y 27.

Ecuaciones de rectas

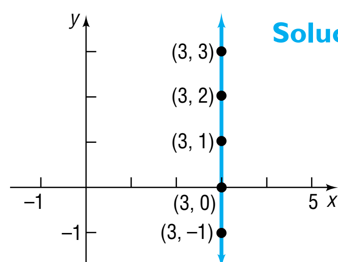


Una vez analizada la pendiente de una recta, se pueden derivar las ecuaciones de las rectas. Como se verá, existen varias formas de la ecuación de una recta. Comenzaremos por un ejemplo.

EJEMPLO 4 **Gráfica de una recta**

Grafique la ecuación: $x = 3$

Figura 40



Solución Se buscan todos los puntos (x, y) en el plano para los cuales $x = 3$. Sin importar qué coordenada y se use, la coordenada x correspondiente siempre será igual a 3. En consecuencia, la gráfica de la ecuación $x = 3$ es una línea vertical con intercepción x igual a 3 y pendiente no definida. Vea la figura 40. ◀

Como lo sugiere el ejemplo 4, se tiene el siguiente resultado:

Teorema

Ecuación de una recta vertical

Una recta vertical está dada por una ecuación de la forma

$$x = a$$

donde a es la intercepción x.

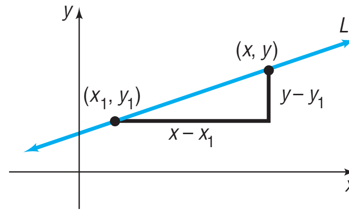


COMENTARIO: Para graficar una ecuación usando una calculadora gráfica, es necesario expresar la ecuación en la forma $y =$ expresión en x. Pero $x = 3$ no se puede establecer en esa forma. Para vencer este problema, la mayoría de los dispositivos de gráficas tienen una manera especial de dibujar líneas verticales. LINE, PLOT y VERT están entre las más comunes. Consulte su manual para determinar la metodología correcta para su dispositivo de graficación. ■

4 Sea L una recta no vertical con pendiente m que contiene el punto (x_1, y_1). Vea la figura 41. Para cualquier punto (x, y) en L, se tiene

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \text{o} \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

Figura 41



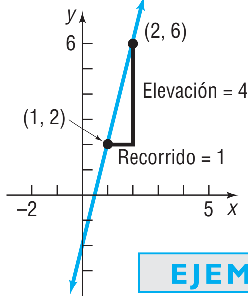
Teorema

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

La ecuación de una recta no vertical con pendiente m que contiene el punto (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (2)$$

Figura 42



EJEMPLO 5 Uso de la forma punto-pendiente de una recta

La ecuación de la recta con pendiente 4 y que contiene el punto (1, 2) se encuentra usando la forma punto−pendiente con $m = 4, x_1 = 1$ y $y_1 = 2$.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente.}$$
$$y - 2 = 4(x - 1) \qquad m = 4, x_1 = 1, y_1 = 2.$$

La figura 42 muestra la gráfica de esta recta. ◀

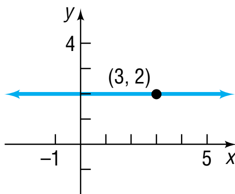
EJEMPLO 6 Ecuación de una recta horizontal

Encuentre la ecuación de una recta horizontal que contiene el punto (3, 2).

Solución La pendiente de una recta horizontal es 0. Para obtener la ecuación, se usa la forma punto−pendiente con $m = 0, x_1 = 3$ y $y_1 = 2$.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente.}$$
$$y - 2 = 0 \cdot (x - 3) \qquad m = 0, x_1 = 3, y_1 = 2.$$
$$y - 2 = 0$$
$$y = 2$$

Figura 43



Vea la gráfica en la figura 43. ◀

Como lo sugiere el ejemplo 6, se tiene el siguiente resultado:

Teorema

Ecuación de una recta horizontal

Una recta horizontal está dada por una ecuación de la forma

$$y = b$$

donde b es la intercepción y.

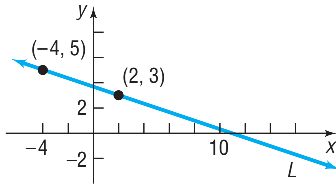
5 **EJEMPLO 7** **Ecuación de una recta dados dos puntos**

Encuentre la ecuación de una recta L que contiene los puntos $(2, 3)$ y $(-4, 5)$. Grafique la recta L.

Solución Como se dan dos puntos, primero debe calcularse la pendiente de la recta.

$$m = \frac{5 - 3}{-4 - 2} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Figura 44



Se usa el punto $(2, 3)$ y el hecho de que la pendiente $m = \frac{1}{3}$ para obtener la forma de punto-pendiente de la ecuación de la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{Forma punto-pendiente.}$$

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 2) \quad m = -\frac{1}{3},\ x_1 = 2,\ y_1 = 3.$$

Vea la gráfica en la figura 44. ◀

En la solución del ejemplo 7, se pudo haber usado el otro punto, $(-4, 5)$ en lugar del punto $(2, 3)$. La ecuación que se obtiene, aunque se ve diferente, es equivalente a la ecuación obtenida en el ejemplo. (Inténtelo.)

6 Otra ecuación útil para la recta se obtiene cuando se conocen la pendiente m e intercepción y igual a b. En este caso, se conocen tanto la pendiente m como el punto $(0, b)$ en la recta; se usa la forma punto-pendiente, ecuación (2), para obtener la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{Forma punto-pendiente.}\\
y - b &= m(x - 0) && x_1 = 0,\ y_1 = b\\
y - b &= mx && \text{Se simplifica.}\\
y &= mx + b && \text{Se despeja } y.
\end{aligned}
$$

Teorema

Forma pendiente-ordenada de la ecuación de una recta

La ecuación de una recta L con pendiente m e intercepción y igual a b es

$$y = mx + b \qquad \textbf{(3)}$$



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 33 (exprese su respuesta en la forma pendiente-ordenada).



Para ver el concepto

Para ver el papel que tiene la pendiente m, grafique las siguientes rectas en la misma pantalla cuadrada.

$$Y_1 = 2$$
$$Y_2 = x + 2$$
$$Y_3 = -x + 2$$
$$Y_4 = 3x + 2$$
$$Y_5 = -3x + 2$$

Vea la figura 45. ¿Qué concluye acerca de las rectas $y = mx + 2$?

Figura 45
$y = mx + 2$

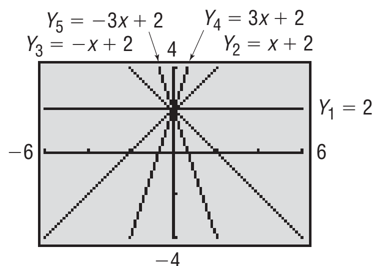
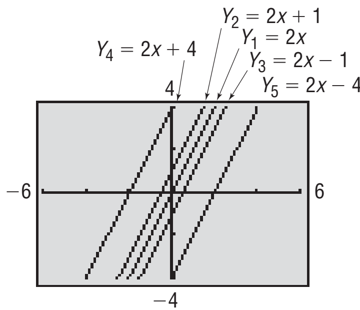


Figura 46
$y = 2x + b$





Para ver el concepto

Para ver el papel que tiene b, la intercepción y, grafique las siguientes rectas en la misma pantalla cuadrada

$$Y_1 = 2x$$
$$Y_2 = 2x + 1$$
$$Y_3 = 2x - 1$$
$$Y_4 = 2x + 4$$
$$Y_5 = 2x - 4$$

Vea la figura 46. ¿Qué concluye acerca de las rectas $y = 2x + b$?

7 Cuando la ecuación de una recta se escribe en la forma pendiente-ordenada, es sencillo encontrar la pendiente m y la intercepción y igual a b de la recta. Por ejemplo, suponga que la ecuación de una recta es

$$y = -2x + 3$$

Compárela con $y = mx + b$:

$$y = -2x + 3$$
$$\uparrow \quad \uparrow$$
$$y = mx + b$$

La pendiente de esta recta es -2 y su intercepción y es 3.

EJEMPLO 8 **La pendiente y la intercepción y**

Encuentre la pendiente m y la intercepción y igual a b de la recta cuya ecuación es $2x + 4y = 8$. Grafique la ecuación.

Solución Para obtener la pendiente y la intercepción y se transforma la ecuación en su forma pendiente-ordenada despejando y de ella.

$$2x + 4y = 8$$
$$4y = -2x + 8$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad \text{Despejar } y \text{ para obtener } y = mx + b.$$

El coeficiente de x, $-\frac{1}{2}$, es la pendiente, y la intercepción-y es 2.

La recta se grafica de dos maneras:

1. Use el hecho de que la intercepción y es 2 y la pendiente es $-\frac{1}{2}$. Luego, desde el punto $(0, 2)$, vaya a la derecha dos unidades y después una para abajo al punto $(2,1)$. Vea la figura 47.

Figura 47

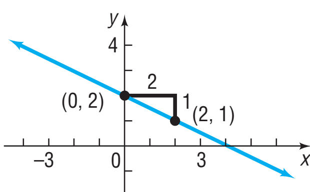
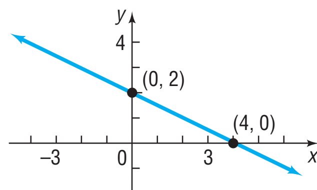


Figura 48



2. Localice las intercepciones. Como la intercepción y es 2, se sabe que ese punto es $(0, 2)$. Para obtener la intercepción x, se hace $y = 0$ y se despeja x. Cuando $y = 0$, se tiene

$$2x + 4y = 8$$
$$2x + 4 \cdot 0 = 8 \quad y = 0$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

Las intercepciones son $(4, 0)$ y $(0, 2)$. Vea la figura 48. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 57.

8 La forma de la ecuación de la recta en el ejemplo 8, $2x + 4y = 8$, se llama *forma general*.

La ecuación de una recta L está en la **forma general*** cuando está escrita como

$$Ax + By = C \quad \textbf{(4)}$$

donde A, B y C son números reales y A y B no son ambos 0.

Cada recta tiene una ecuación que es equivalente a una ecuación escrita en la forma general. Por ejemplo, una línea vertical cuya ecuación es

$$x = a$$

se escribe, en la forma general,

$$1 \cdot x + 0 \cdot y = a \quad A = 1, B = 0, C = a$$

Una recta horizontal cuya ecuación es

$$y = b$$

se escribe, en la forma general,

$$0 \cdot x + 1 \cdot y = b \quad A = 0, B = 1, C = b$$

Las rectas que no son verticales ni horizontales tiene ecuaciones generales de la forma

$$Ax + By = C \quad A \neq 0 \text{ y } B \neq 0$$

Como la ecuación de cualquier recta se puede escribir en la forma general, cualquier ecuación que se escribe en esta forma se llama **ecuación lineal**.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 41.

El siguiente ejemplo ilustra una situación típica que requiere el uso de la ecuación lineal.

*Algunos libros la llaman **forma estándar**.

EJEMPLO 9 Costo de operación de un automóvil

La American Automobile Association (AAA) ha determinado que el costo promedio de operar un auto de tamaño estándar, incluyendo gasolina, aceite, llantas y mantenimiento, aumentó a \$0.122 por milla en 2000.

a) Escriba una ecuación que relacione el costo promedio C, en dólares, de operar un auto de tamaño estándar y el número de millas x que se ha manejado.

b) ¿Cuál es el costo de manejar un auto durante 1000 millas?

c) ¿Cuál es el costo de manejar un auto durante 2000 millas?

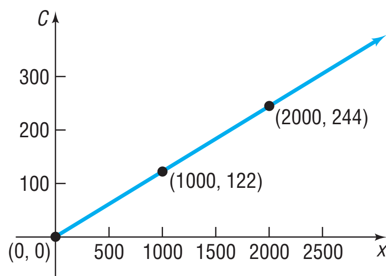
FUENTE: AAA *Traveler* Magazine

Solución a) Si x es el número de millas que se ha manejado un auto, entonces el costo promedio C, en dólares, es $0.122x$. Una ecuación que relaciona C y X es

$$C = 0.122x \qquad x \geq 0$$

El costo promedio por milla, \$0.122, es la pendiente de la recta $C = 0.122x$. En otras palabras, el costo aumenta en \$0.122 por cada milla adicional manejada. Vea la figura 49.

Figura 49



b) El costo de manejar un auto durante 1000 millas es

$$C = 0.122x = 0.122(1000) = \$122$$

c) El costo de manejar un auto durante 2000 millas es

$$C = 0.122x = 0.122(2000) = \$244$$



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 73.

Resumen

El análisis anterior acerca de las rectas y los círculos manejó dos tipos de problemas que se generalizan como sigue:

1. Dada una ecuación, clasifíquela y grafíquela.
2. Dada una gráfica o información acerca de una gráfica, encuentre su ecuación.

Este libro trata los dos tipos de problemas. Deben estudiarse las distintas ecuaciones, clasificarlas y graficarlas. Aunque la solución del segundo tipo de problema suele ser más difícil que la del primero, en muchos casos un dispositivo de graficación ayudaría a resolverlos.

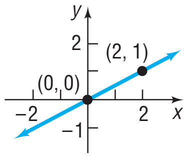
2.4 Evalúe su comprensión

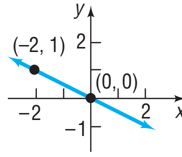
Conceptos y vocabulario

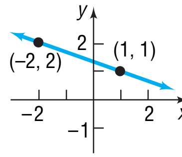
1. La pendiente de una recta vertical es _________; la pendiente de una recta horizontal es _________.
2. Para la recta $2x + 3y = 6$, la intercepción x es _________ y la intercepción y es _________.
3. Una recta horizontal está dada por una ecuación de la forma _________ donde b es la _________.
4. *Falso o verdadero:* las rectas verticales tienen pendiente no definida.
5. *Falso o verdadero:* la pendiente de la recta $2y = 3x + 5$ es 3.
6. *Falso o verdadero:* el punto $(1, 2)$ está en la recta $2x + y = 4$.

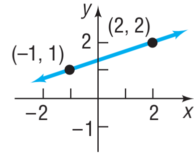
Ejercicios

En los problemas 7-10, a) encuentre la pendiente de la recta y b) interprete la pendiente.

7. 

8. 

9. 

10. 

En los problemas 11-18, grafique cada par de puntos y determine la pendiente de la recta que los contiene. Grafique la recta.

11. $(2, 3); (4, 0)$ **12.** $(4, 2); (3, 4)$ **13.** $(-2, 3); (2, 1)$ **14.** $(-1, 1); (2, 3)$

15. $(-3, -1); (2, -1)$ **16.** $(4, 2); (-5, 2)$ **17.** $(-1, 2); (-1, -2)$ **18.** $(2, 0); (2, 2)$

En los problemas 19-26 grafique la recta que contiene al punto P y tiene pendiente m.

19. $P = (1, 2); m = 3$ **20.** $P = (2, 1); m = 4$ **21.** $P = (2, 4); m = -\frac{3}{4}$

22. $P = (1, 3); m = -\frac{2}{5}$ **23.** $P = (-1, 3); m = 0$ **24.** $P = (2, -4); m = 0$

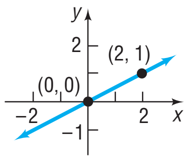
25. $P = (0, 3)$; pendiente no definida **26.** $P = (-2, 0)$; pendiente no definida

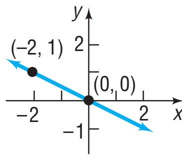
En los problemas 27-32 se dan la pendiente y un punto. Use esta información para localizar tres puntos adicionales en la recta. Las respuestas pueden variar. [**Sugerencia:** No es necesario encontrar la ecuación de la recta; vea el ejemplo 3.]

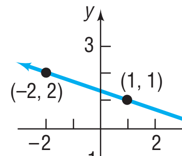
27. Pendiente 4; punto $(1, 2)$ **28.** Pendiente 2; punto $(-2, 3)$ **29.** Pendiente $-\frac{3}{2}$; punto $(2, -4)$

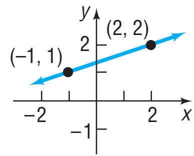
30. Pendiente $\frac{4}{3}$; punto $(-3, 2)$ **31.** Pendiente -2; punto $(-2, -3)$ **32.** Pendiente -1; punto $(4, 1)$

En los problemas 33-36, encuentre la ecuación de cada recta. Exprese su respuesta usando la forma general o la forma pendiente-ordenada de la ecuación de la recta, la que prefiera.

33. 

34. 

35. 

36. 

En los problemas 37-50, encuentre la ecuación de la recta con las propiedades dadas. Exprese su respuesta en la forma general o la forma pendiente-ordenada de la ecuación de la recta, la que prefiera.

37. Pendiente $= 3$; contiene el punto $(-2, 3)$ **38.** Pendiente $= 2$; contiene el punto $(4, -3)$

39. Pendiente $= -\frac{2}{3}$; contiene el punto $(1, -1)$ **40.** Pendiente $= \frac{1}{2}$; contiene el punto $(3, 1)$

41. Contiene los puntos $(1, 3)$ y $(-1, 2)$ **42.** Contiene los puntos $(-3, 4)$ y $(2, 5)$

43. Pendiente $= -3$; intercepción-$y = 3$ **44.** Pendiente $= -2$; intercepción-$y = -2$

45. Intercepción $x = 2$; intercepción $y = -1$ **46.** Intercepción $x = -4$; intercepción $y = 4$

47. Pendiente no definida; contiene el punto $(2, 4)$ **48.** Pendiente 0; contiene el punto $(3, 8)$

49. Horizontal; contiene el punto $(-3, 2)$ **50.** Vertical; contiene el punto $(4, -5)$

En los problemas 51-70, encuentre la pendiente y la intercepción y de cada recta. Grafíquela.

51. $y = 2x + 3$ **52.** $y = -3x + 4$ **53.** $\frac{1}{2}y = x - 1$ **54.** $\frac{1}{3}x + y = 2$

55. $y = \frac{1}{2}x + 2$ **56.** $y = 2x + \frac{1}{2}$ **57.** $x + 2y = 4$ **58.** $-x + 3y = 6$

59. $2x - 3y = 6$
60. $3x + 2y = 6$
61. $x + y = 1$
62. $x - y = 2$
63. $x = -4$
64. $y = -1$
65. $y = 5$
66. $x = 2$
67. $y - x = 0$
68. $x + y = 0$
69. $2y - 3x = 0$
70. $3x + 2y = 0$
71. Encuentre la ecuación del eje x.
72. Encuentre la ecuación del eje y.

---

73. Renta de camiones Una compañía renta camiones de mudanza por día y cobra \$29 más \$0.07 por milla. Escriba una ecuación que relacione el costo C, en dólares, de rentar el camión con el número x de millas recorridas. ¿Cuál es el costo de rentar el camión si se maneja 110 millas? ¿Y 230 millas?

74. Ecuación de costo Los **costos fijos** de operación de un negocio son los costos en que se incurre sin importar el nivel de producción. Los costos fijos incluyen renta, salarios fijos y costos de comprar maquinaria. Los **costos variables** al operar un negocio son los costos que cambian con el nivel de producción. Los costos variables incluyen materia prima, salario por horas y energía eléctrica. Suponga que un fabricante de pantalones de mezclilla tiene costos fijos de \$500 y costos variables de \$8 por cada pantalón que fabrica. Escriba una ecuación lineal que relacione el costo C, en dólares, de fabricar los pantalones con el número x de pantalones fabricados. ¿Cuál es el costo de fabricar 400 pantalones? ¿Y 740?

75. Costo de entrega a domicilio en domingo El costo para el *Chicago Tribune* de la entrega a domicilio en domingo es alrededor de \$0.53 por periódico, con costos fijos de \$1,070,000. Escriba una ecuación que relacione el costo C y el número x de periódicos repartidos.

FUENTE: Chicago Tribune, 2002.

76. Salario de un vendedor de automóviles Dan recibe \$375 cada semana por vender autos nuevos y usados con un distribuidor de Oak Lawn, Illinois. Además, recibe 5% de la ganancia sobre cualquier venta que genere. Escriba una ecuación que relacione el salario semanal S de Dan cuando tiene ventas que generan ganancias de x dólares.

77. Precio de energía eléctrica en Illinois Commonwealth Edison Company entrega la energía eléctrica a los clientes residenciales por un cargo mensual de \$7.58 más 8.275 centavos por horas-kilowatt hasta 400 horas-kilowatt.



a) Escriba una ecuación que relacione el cargo mensual C, en dólares, con el número x de horas-kilowatt usados en un mes, $0 \leq x \leq 400$.
b) Grafique esta ecuación.
c) ¿Cuál es el cargo mensual por usar 100 horas-kilowatt?
d) ¿Cuál es el cargo mensual por usar 300 horas-kilowatt?
e) Interprete la pendiente de la recta.

FUENTE: Commonwealth Edison Company, diciembre de 2002.

78. Tasas de energía eléctrica en Florida Florida Power & Light Company surte energía eléctrica a clientes residenciales por un cargo mensual de \$5.25 más 6.787 centavos por horas-kilowatt hasta 750 horas-kilowatt.

a) Escriba una ecuación que relacione el cargo mensual C, en dólares, con el número x de horas-kilowatt usados en un mes, $0 \leq x \leq 750$.
b) Grafique la ecuación.
c) ¿Cuál es el cargo mensual por usar 200 horas-kilowatt?
d) ¿Cuál es el cargo mensual por usar 500 horas-kilowatt?
e) Interprete la pendiente de la recta.

FUENTE: Florida Power & Light Company, enero de 2003.

79. Medición de temperatura La relación entre grados Celsius (°C) y grados Fahrenheit (°F) para medir la temperatura es lineal. Encuentre una ecuación que relacione °C y °F si 0°C corresponde a 32°F y 100°C corresponde a 212°F. Use la ecuación para encontrar la medida en Celsius de 70°F.

80. Medición de temperatura La escala Kelvin (K) para medir la temperatura se obtiene sumando 273 a la temperatura en grados Celsius.

a) Escriba una ecuación que relaciones K con °C.
b) Escriba una ecuación que relacione K con °F (vea el problema 79).

81. Promoción de productos Una compañía de cereales encuentra que el número de personas que comprarán uno de sus productos durante el primer mes de introducción tiene una relación lineal con la cantidad de dinero que gasta en publicidad. Si gasta \$40,000, entonces venderá 100,000 cajas de cereal, y si gasta \$60,000 venderá 200,000 cajas.

a) Escriba una ecuación que describa la relación entre la cantidad A gastada en publicidad y el número x de cajas vendidas.
b) ¿Cuánta publicidad se necesita para vender 300,000 cajas de cereal?
c) Interprete la pendiente.

82. Demuestre que una ecuación para una recta con intercepciones x y y diferentes de cero se escribe como

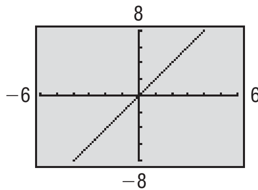
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

donde a es la intercepción x y b es la intercepción y. Esto se llama la **forma de intercepción** de la ecuación de la recta.

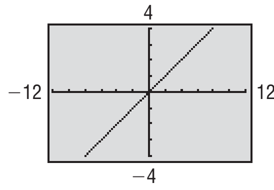
En los problemas 83-86, seleccione la ecuación correcta para cada gráfica.

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = \frac{x}{2}$ d) $y = 4x$

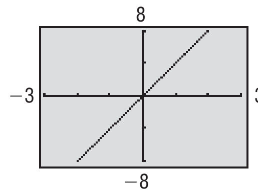
83.



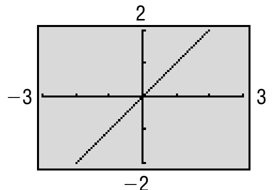
84.



85.

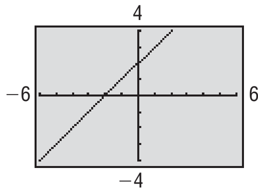


86.

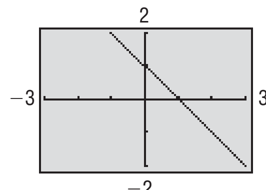


En los problemas 87-90, escriba la ecuación para cada recta. Exprese su respuesta en la forma general o la forma de pendiente-ordenada de la ecuación de una recta, la que prefiera.

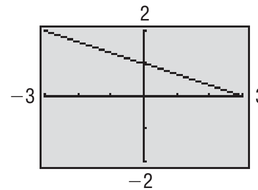
87.



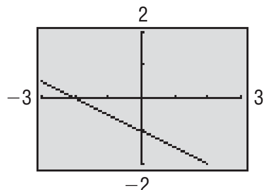
88.



89.

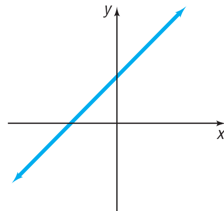


90.



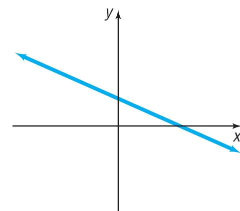
91. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones podría tener la gráfica mostrada? (Es posible que haya más de una respuesta.)

a) $2x + 3y = 6$
b) $-2x + 3y = 6$
c) $3x - 4y = -12$
d) $x - y = 1$
e) $x - y = -1$
f) $y = 3x - 5$
g) $y = 2x + 3$
h) $y = -3x + 3$



92. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones podría tener la gráfica mostrada? (Es posible que haya más de una respuesta.)

a) $2x + 3y = 6$
b) $2x - 3y = 6$
c) $3x + 4y = 12$
d) $x - y = 1$
e) $x - y = -1$
f) $y = -2x + 1$
g) $y = -\frac{1}{2}x + 10$
h) $y = x + 4$



---

93. ¿Qué forma de la ecuación de la recta prefiere usar? Justifique si opinión con un ejemplo que muestre que su elección es mejor que otra. Proporcione las razones.

94. ¿Toda recta puede expresarse en la forma intercepción-pendiente? Explique.

95. ¿Toda recta puede tener dos intercepciones diferentes? Explique. ¿Existen rectas que no tienen intercepciones?

96. ¿Qué diría acerca de dos rectas que tiene pendientes iguales e intercepciones y iguales?

97. ¿Qué diría acerca de dos rectas con la misma intercepción x y la misma intercepción y? Suponga que la intercepción x no es 0.

98. Si dos rectas tienen la misma pendiente, pero intercepciones x distintas, ¿tendrán la misma intercepción y?

99. Si dos rectas tienen la misma intercepción y, pero pendientes diferentes, ¿tendrán la misma intercepción x? ¿Cuál es la única manera de que esto suceda?

100. El símbolo aceptado que se usa para denotar la pendiente de una recta es m. Investigue el origen de este simbolismo. Comience por consultar un diccionario en francés y ver la palabra *monter*. Escriba un breve resumen de lo que encontró.

101. **Grado de un camino** El término *grado* se usa para describir la inclinación de una carretera. ¿Cuál sería la relación de este término con la idea de pendiente de una recta? Un grado de 4%, ¿es muy inclinado? Investigue los grados de algunos caminos montañosos y determine sus pendientes. Escriba un breve resumen de lo que encontró.

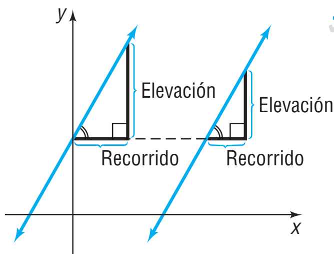


102. **Carpintería** Los carpinteros usan el término declive para describir la inclinación de escaleras y techos. ¿Cuál es la relación entre el declive y la pendiente? Investigue declives comunes para escaleras y techos. Escriba un breve resumen de lo que encontró.

2.5 Rectas paralelas y perpendiculares

OBJETIVOS
1. Definir rectas paralelas
2. Encontrar ecuaciones de rectas paralelas
3. Definir rectas perpendiculares
4. Encontrar ecuaciones para rectas perpendiculares

Figura 50



Rectas paralelas

1 Cuando dos rectas (en el plano) no se cruzan (es decir, no tienen puntos en común), se dice que son **paralelas**. Vea la figura 50. Ahí se dibujaron dos rectas y se construyeron dos triángulos rectángulos con lados paralelos a los ejes coordenados. Estas rectas son paralelas si y sólo si los triángulos rectángulos son similares. (¿Se da cuenta por qué? Dos ángulos son iguales.) Pero los triángulos son similares si y sólo si las razones de los lados correspondientes son iguales.

Esto sugiere el siguiente resultado:

Teorema

Criterio para rectas paralelas

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales y tienen diferentes intercepciones *y*.

El uso de las palabras "si y sólo si" en el teorema anterior significa que en realidad se hacen dos proposiciones, donde una es el recíproco de la otra.

Si dos rectas no verticales son paralelas, entonces sus pendientes son iguales y tienen intercepciones *y* diferentes.

Si dos rectas no verticales tienen pendientes iguales e intercepciones *y* diferentes, las rectas son paralelas.

Consulte en la figura 46, "Para ver el concepto", $y = 2x + b$, p. 188.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 5a).

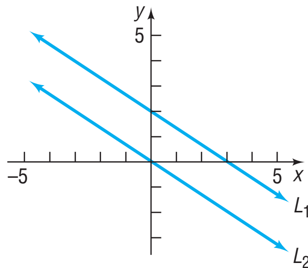
EJEMPLO 1 Para demostrar que dos rectas son paralelas

Demuestre que las rectas dadas por las siguientes ecuaciones son paralelas:

$$L_1:\quad 2x + 3y = 6 \qquad L_2:\quad 4x + 6y = 0$$

Solución Para determinar si estas rectas tienen pendientes iguales, se escribe cada ecuación en la forma pendiente-ordenada:

Figura 51



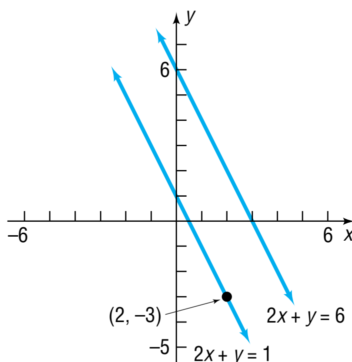
$$L_1:\quad 2x + 3y = 6 \qquad\qquad L_2:\quad 4x + 6y = 0$$
$$3y = -2x + 6 \qquad\qquad 6y = -4x$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 2 \qquad\qquad y = -\frac{2}{3}x$$
$$\text{Pendiente} = -\frac{2}{3} \qquad\qquad \text{Pendiente} = -\frac{2}{3}$$
$$\text{intercepción } y = 2 \qquad\qquad \text{intercepción } y = 0$$

Como estas rectas tienen la misma pendiente, $-\frac{2}{3}$, pero diferentes intercepciones y, las rectas son paralelas. Vea la figura 51. ◀

2 **EJEMPLO 2** Recta paralela a una recta dada

Encuentre la ecuación para la recta que contiene el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta $2x + y = 6$.

Figura 52



Solución Como las dos rectas deben ser paralelas, la pendiente de la recta que se busca es igual a la pendiente de la recta $2x + y = 6$. Comenzamos por escribir la ecuación de la recta $2x + y = 6$ en la forma pendiente-ordenada.

$$2x + y = 6$$
$$y = -2x + 6$$

La pendiente es -2. Como la recta que se busca contiene el punto $(2, -3)$, se usa la forma punto-pendiente para obtener

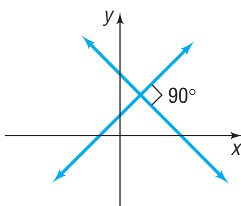
$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente.}$$
$$y + 3 = -2(x - 2) \qquad m = -2,\ x_1 = 2,\ y_1 = -3$$
$$y + 3 = -2x + 4$$
$$y = -2x + 1 \qquad \text{Forma pendiente-ordenada.}$$
$$2x + y = 1 \qquad \text{Forma general.}$$

La recta es paralela a la recta $2x + y = 6$ y contiene el punto $(2, -3)$. Vea la figura 52. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

Figura 53 Rectas perpendiculares



Rectas perpendiculares

3 Cuando dos rectas se cortan formando un ángulo recto (90°), se dice que son **perpendiculares**. Vea la figura 53.

El siguiente resultado da una condición algebraica, en términos de sus pendientes, para que dos rectas sean perpendiculares.

Teorema

Criterio para rectas perpendiculares

Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1.

Quizá considere que es más sencillo recordar la condición para que dos rectas no verticales sean perpendiculares observando que la igualdad $m_1m_2 = -1$ significa que m_1 y m_2 son recíprocos negativos entre sí; es decir

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{o} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

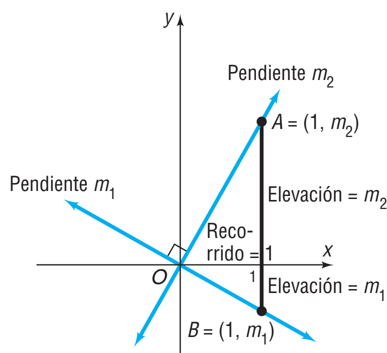
En este caso, se debe probar la parte de "sólo si" de la proposición:

Si dos rectas no verticales son perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es -1.

En el problema 41, se pide que demuestre la parte de "si" del teorema; esto es:

Si dos rectas no verticales tienen pendientes cuyo producto es -1, entonces las rectas son perpendiculares.

Figura 54



Demostración Sean m_1 y m_2 las pendientes de dos rectas. No hay pérdida de generalidad (es decir, no afecta al ángulo o a las pendientes) si las rectas se sitúan de manera que se encuentren en el origen. Vea la figura 54. El punto $A = (1, m_2)$ está en la recta que tiene pendiente m_2, y el punto $B = (1, m_1)$ está en la recta que tiene pendiente m_1. (¿Se da cuenta por qué esto debe cumplirse?)

Por la fórmula de la distancia, cada una de las siguientes distancias se escribe como

$$[d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2 = [d(A, B)]^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Por la fórmula de la distancia, cada una de las siguientes distancias se escribe como

$$[d(O, A)]^2 = (1 - 0)^2 + (m_2 - 0)^2 = 1 + m_2^2$$
$$[d(O, B)]^2 = (1 - 0)^2 + (m_1 - 0)^2 = 1 + m_1^2$$
$$[d(A, B)]^2 = (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2 = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$

Usando estos hechos en la ecuación (1) se obtiene

$$(1 + m_2^2) + (1 + m_1^2) = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$

que, después de simplificar, se escribe como

$$m_1m_2 = -1$$

Si las rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1 ■

EJEMPLO 3 Pendiente de la recta perpendicular a una recta dada

Si una recta tiene pendiente $\frac{3}{2}$, cualquier recta con pendiente $-\frac{2}{3}$ será perpendicular. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 5b).

4 **EJEMPLO 4** **Ecuación de una recta perpendicular a una recta dada**

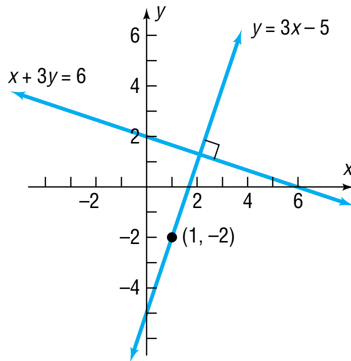
Encuentre una ecuación de la recta que contiene el punto $(1, -2)$ que es perpendicular a la recta $x + 3y = 6$. Grafique las dos rectas.

Solución Primero se escribe la ecuación de la recta dada en la forma pendiente-ordenada para encontrar su pendiente.

$$x + 3y = 6$$
$$3y = -x + 6 \quad \text{Se procede a despejar } y.$$
$$y = -\frac{1}{3}x + 2 \quad \text{Poner en la forma } y = mx + b.$$

La recta dada tiene pendiente $-\frac{1}{3}$. Cualquier recta perpendicular a ésta tendrá pendiente 3. Como se requiere que el punto $(1, -2)$ esté en esta recta con pendiente 3, se usa la forma de punto-pendiente de la ecuación de una recta.

Figura 55



$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{Forma punto-pendiente}$$
$$y - (-2) = 3(x - 1) \quad m = 3, x_1 = 1, y_1 = -2$$
$$y + 2 = 3(x - 1)$$

Para obtener otras formas de la ecuación, se procede como sigue:

$$y + 2 = 3x - 3$$
$$y = 3x - 5 \quad \text{Forma pendiente-ordenada}$$
$$3x - y = 5 \quad \text{Forma general}$$

La figura 55 muestra las gráficas. ◄



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.



ADVERTENCIA: Asegúrese de usar la pantalla cuadrada cuando grafique líneas perpendiculares. De otra manera, el ángulo entre las dos rectas aparecerá distorsionado ■

2.5 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Dos rectas no verticales tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Las rectas son paralelas si __________ y las ______________ son diferentes; las rectas son perpendiculares si _________.

2. Las rectas $y = 2x + 3$ y $y = ax + 5$ son paralelas si $a =$ _________.

3. Las rectas $y = 2x - 1$ y $y = ax + 2$ son perpendiculares si $a =$ _________.

4. *Falso o verdadero:* las rectas perpendiculares tienen pendientes que son recíprocos entre sí.

Ejercicios

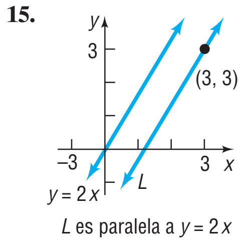
En los problemas 5-14 se da la ecuación de la recta L. Encuentre la pendiente de una recta que es a) paralela a L y b) perpendicular a L.

5. $y = 6x$ **6.** $y = -3x$ **7.** $y = -\frac{1}{2}x + 2$ **8.** $y = \frac{2}{3}x - 1$ **9.** $2x - 4y + 5 = 0$

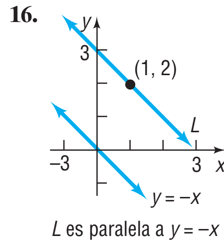
10. $3x + y = 4$ **11.** $3x + 5y - 10 = 0$ **12.** $4x - 3y + 7 = 0$ **13.** $x = 7$ **14.** $y = 8$

En los problemas 15-18, encuentre una ecuación para la recta L. Exprese su respuesta usando la forma general o de pendiente-ordenada de la ecuación de una recta, la que prefiera.

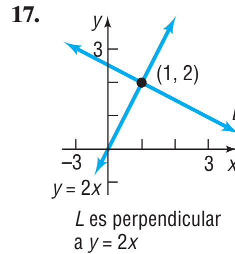
15.



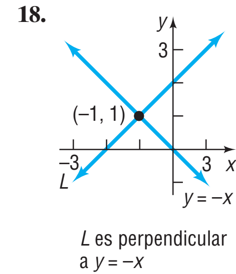
16.



17.



18.



En los problemas 19-30, encuentre la ecuación para la recta con las propiedades dadas. Exprese su respuesta en la forma general o de pendiente-ordenada de la ecuación de una recta, la que prefiera.

19. Paralela a la recta $y = 2x$; contiene el punto $(-1, 2)$

20. Paralela a la recta $y = -3x$; contiene el punto $(-1, 2)$

21. Paralela a la recta $2x - y = -2$; contiene el punto $(0, 0)$

22. Paralela a la recta $x - 2y = -5$; contiene el punto $(0, 0)$

23. Paralela a la recta $x = 5$; contiene el punto $(4, 2)$

24. Paralela a la recta $y = 5$; contiene el punto $(4, 2)$

25. Perpendicular a la recta $y = \frac{1}{2}x + 4$; contiene el punto $(1, -2)$

26. Perpendicular a la recta $y = 2x - 3$; contiene el punto $(1, -2)$

27. Perpendicular a la recta $2x + y = 2$; contiene el punto $(-3, 0)$

28. Perpendicular a la recta $x - 2y = -5$; contiene el punto $(0, 4)$

29. Perpendicular a la recta $x = 8$; contiene el punto $(3, 4)$

30. Perpendicular a la recta $y = 8$; contiene el punto $(3, 4)$

En los problemas 31-34 se dan las ecuaciones de dos rectas. Determine si son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

31. $y = 2x - 3$
$y = 2x + 4$

32. $y = \frac{1}{2}x - 3$
$y = -2x + 4$

33. $y = 4x + 5$
$y = -4x + 2$

34. $y = -2x + 3$
$y = -\frac{1}{2}x + 2$

35. Geometría Use las pendientes para demostrar que el triángulo cuyos vértices son $(-2, 5)$, $(1, 3)$ y $(-1, 0)$ es un triángulo rectángulo.

36. Geometría Use pendientes para demostrar que el cuadrilátero cuyos vértices son $(1, -1)$, $(4, 1)$, $(2, 2)$ y $(5, 4)$ es un paralelogramo.

37. Geometría Use las pendientes para demostrar que el cuadrilátero cuyos vértices son $(-1, 0)$, $(2, 3)$, $(1, -2)$ y $(4, 1)$ es un rectángulo.

38. Geometría Use las pendientes y la fórmula de la distancia para demostrar que el cuadrilátero cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(4, 2)$ y $(3, -1)$ es un cuadrado.

39. La figura siguiente muestra la gráfica de dos rectas paralelas. ¿Cuáles de los siguientes pares de ecuaciones pueden tener esta gráfica?

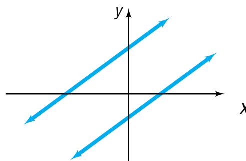
a) $x - 2y = 3$
$x + 2y = 7$

b) $x + y = 2$
$x + y = -1$

c) $x - y = -2$
$x - y = 1$

d) $x - y = -2$
$2x - 2y = -4$

e) $x + 2y = 2$
$x + 2y = -1$



40. La figura siguiente muestra la gráfica de dos rectas perpendiculares. ¿Cuáles de los siguientes pares de ecuaciones pueden tener esta gráfica?

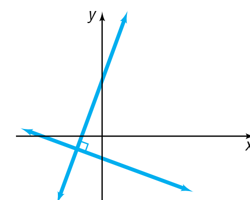
a) $y - 2x = 2$
$y + 2x = -1$

b) $y - 2x = 0$
$2y + x = 0$

c) $2y - x = 2$
$2y + x = -2$

d) $y - 2x = 2$
$x + 2y = -1$

e) $2x + y = -2$
$2y + x = -2$



41. Pruebe que si dos rectas no verticales tienen pendientes cuyo producto es -1, entonces las rectas son perpendiculares.

[**Sugerencia:** Vea la figura 54 y use el inverso del teorema de Pitágoras.]

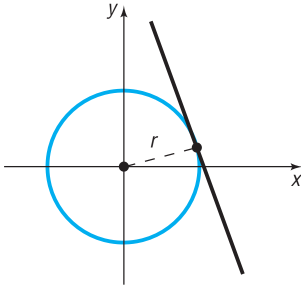
42. Geometría La **recta tangente** a un círculo se define como la recta que corta al círculo en un solo punto, llamado **punto de tangencia** (vea la figura). Si la ecuación del círculo es $x^2 + y^2 = r^2$ y la ecuación de la recta tangente es $y = mx + b$, demuestre que:

a) $r^2(1 + m^2) = b^2$

[**Sugerencia:** La ecuación cuadrática $x^2 + (mx + b)^2 = r^2$ tiene exactamente una solución.]

b) El punto de tangencia es $\left(\dfrac{-r^2m}{b}, \dfrac{r^2}{b}\right)$.

c) La recta tangente es perpendicular a la recta que contiene el centro del círculo y el punto de tangencia.



43. El **método griego** para encontrar la ecuación de la recta tangente a un círculo usa el hecho de que en cualquier punto sobre un círculo, la recta que contiene el radio y la recta tangente en ese punto son perpendiculares (vea el problema 42). Use este método para encontrar una ecuación de la tangente al círculo $x^2 + y^2 = 9$ en el punto $(1, 2\sqrt{2})$.

44. Use el método griego descrito en el problema 43 para encontrar una ecuación de la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ en el punto $(3, 2\sqrt{2} - 3)$.

45. Vea el problema 42. La recta $x - 2y = -4$ es tangente al círculo en $(0, 2)$. La recta $y = 2x - 7$ es tangente al mismo círculo en $(3, -1)$. Encuentre el centro del círculo.

46. Encuentre la ecuación de la recta que contiene los centros de los dos círculos

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$$

47. Demuestre que la recta que contiene los puntos (a, b) y (b, a), $a \neq b$, es perpendicular a la recta $y = x$. Además pruebe que el punto medio entre (a, b) y (b, a) está en la recta $y = x$.

48. La ecuación $2x - y = C$ define una **familia de rectas**, una recta para cada valor de C. En un mismo conjunto de ejes coordenados, grafique los miembros de la familia cuando $C = -4$, $C = 0$ y $C = 2$. ¿Podría obtener una conclusión acerca de cada miembro de la familia, a partir de la gráfica?

49. Trabaje de nuevo en el problema 48 para la familia de rectas $Cx + y = -4$.

50. Si un círculo de radio 2 se rueda a lo largo del eje x, ¿cuál es la ecuación de la trayectoria del centro del círculo?

2.6 Diagramas de dispersión; ajuste lineal de curvas

OBJETIVOS
1. Dibujar e interpretar los diagramas de dispersión
2. Distinguir entre relaciones lineales y no lineales
3. Usar un dispositivo de graficación para encontrar la recta de mejor ajuste.

Diagramas de dispersión

1 Una **relación** es una correspondencia entre dos conjuntos. Si x y y son dos elementos de estos conjuntos y si existe una relación entre x y y, entonces se dice que x **corresponde a** y o que y **depende de** x y se escribe $x \rightarrow y$. También se escribe $x \rightarrow y$ como el par ordenado (x, y). Aquí se hace referencia a y como la variable **dependiente** y x se llama la variable **independiente**.

Con frecuencia nos interesa especificar el tipo de relación (como con una ecuación) que pueda existir entre dos variables. El primer paso para encontrar esta relación es graficar los pares ordenados usando coordenadas rectangulares. La gráfica que se obtiene se llama **diagrama de dispersión**.

EJEMPLO 1 Dibujo de un diagrama de dispersión

Los datos dados en la tabla 6 representan la temperatura aparente contra la humedad relativa en una habitación cuya temperatura es 72° Fahrenheit.

Tabla 6

Humedad relativa (%), *x*	**Temperatura aparente °F, *y***	**(*x*, *y*)**
0	64	(0, 64)
10	65	(10, 65)
20	67	(20, 67)
30	68	(30, 68)
40	70	(40, 70)
50	71	(50, 71)
60	72	(60, 72)
70	73	(70, 73)
80	74	(80, 74)
90	75	(90, 75)
100	76	(100, 76)

a) Dibuje un diagrama de dispersión a mano.

b) Use una dispositivo de graficación para dibujar el diagrama de dispersión.*

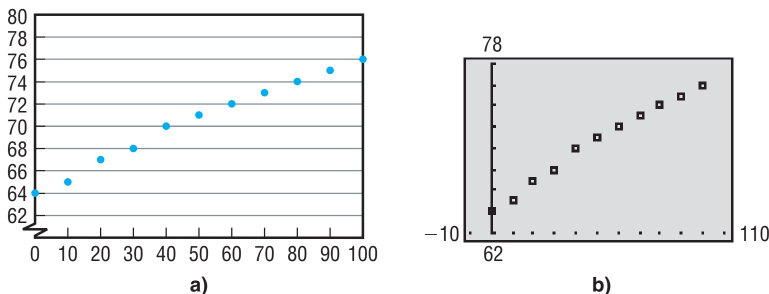
c) Describa qué ocurre con la temperatura aparente cuando aumenta la humedad relativa.

Solución

a) Para dibujar un diagrama de dispersión a mano, se grafican los pares ordenados enumerados en la tabla 6, con la humedad relativa como coordenada x y la temperatura aparente como coordenada y. Vea la figura 56a). Observe que los puntos en un diagrama de dispersión no se conectan.

b) La figura 56b) muestra un diagrama de dispersión obtenido usando una calculadora gráfica.

Figura 56



c) En los diagramas de dispersión se ve que, cuando la humedad relativa aumenta, la temperatura aparente aumenta. ◀

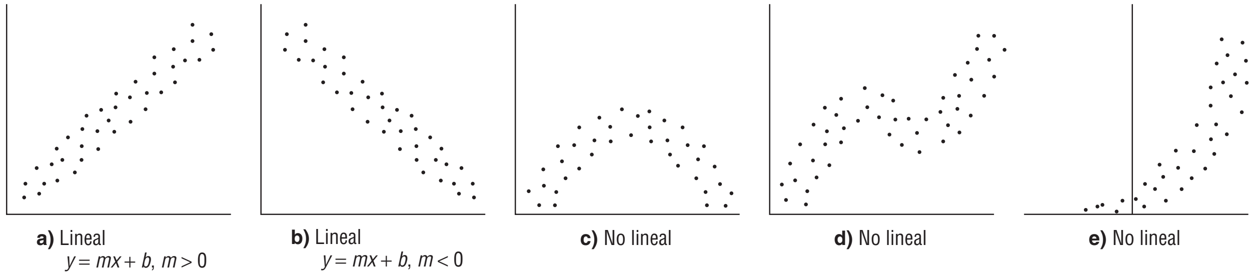
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9a).

*Consulte en su manual del usuario cómo hacerlo.

Ajuste de curvas

2 Los diagramas de dispersión se usan como ayuda para ver el tipo de relación que podría existir entre dos variables. En este libro, se analizará una variedad de relaciones diferentes que hay entre dos variables. Por ahora, nos concentramos en distinguir entre las relaciones lineales y no lineales. Vea la figura 57.

Figura 57

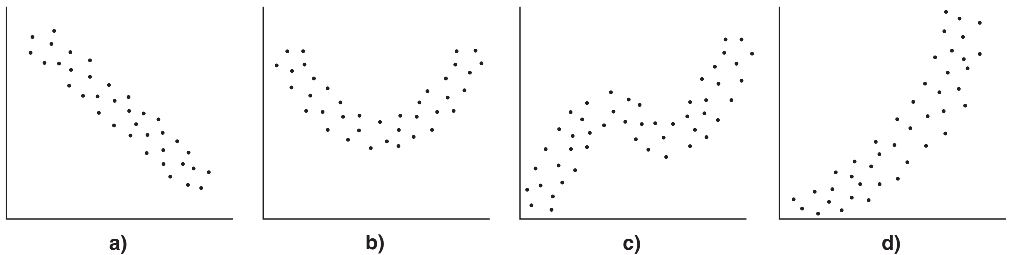


a) Lineal $y = mx + b, m > 0$ **b)** Lineal $y = mx + b, m < 0$ **c)** No lineal **d)** No lineal **e)** No lineal

EJEMPLO 2 Distinción entre relaciones lineales y no lineales

Determine si la relación entre las dos variables en la figura 58 es lineal o no lineal.

Figura 58



a) **b)** **c)** **d)**

Solución a) Lineal b) No lineal c) No lineal d) No lineal ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 3.

En esta sección se estudiarán los datos cuyos diagramas de dispersión implican que existe una relación lineal entre las dos variables. Los datos no lineales se estudiarán en capítulos posteriores.

Suponga que el diagrama de dispersión de un conjunto de datos parece tener una relación lineal, como en la figura 57a) o b). Tal vez se desee encontrar una ecuación que relacione las dos variables. Una manera de obtener una ecuación para este tipo de datos es dibujar una recta a través de dos puntos del diagrama de dispersión y estimar la ecuación de la recta.

EJEMPLO 3 Ecuación para datos relacionados linealmente

Usando los datos de la tabla 6 del ejemplo 1, seleccione dos puntos de los datos y encuentre una ecuación de la recta que contiene los dos puntos.

a) Grafique la recta en el diagrama de dispersión obtenido en el ejemplo 1a).

b) Grafique la recta en el diagrama de dispersión obtenido en el ejemplo 1b).

Solución Seleccione dos puntos, digamos (10, 65) y (70, 73). (Usted debe seleccionar sus propios puntos y completar la solución.) La pendiente de la recta que une los puntos (10, 65) y (70, 73) es

$$m = \frac{73 - 65}{70 - 10} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

La ecuación de la recta con pendiente $\frac{2}{15}$ y que pasa por (10, 65) se encuentra usando la forma punto-pendiente, con $m = \frac{2}{15}$, $x_1 = 10$, y $y_1 = 65$.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente}$$

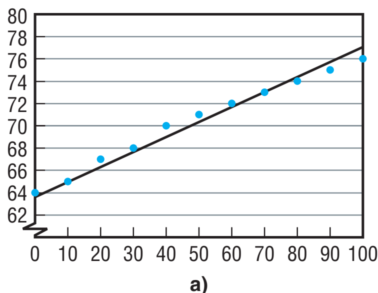
$$y - 65 = \frac{2}{15}(x - 10) \qquad m = \frac{2}{15}, x_1 = 10, y_1 = 65$$

$$y = \frac{2}{15}x + \frac{191}{3} \qquad y = mx + b$$

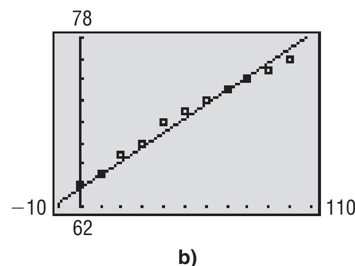
a) La figura 59a) muestra el diagrama de dispersión con la gráfica de la recta dibujada a mano.

b) La figura 59b) muestra el diagrama de dispersión con la gráfica de la recta usando un dispositivo de graficación.

Figura 59



a)



b)

◀


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 9b) Y c).



Recta del mejor ajuste


3 La recta obtenida en el ejemplo 3 depende de la selección de puntos, que variarán de una persona a otra. Entonces la recta encontrada puede ser diferente de la que usted encuentre. Aunque la recta encontrada en el ejemplo 3 parece "ajustarse" bien a los datos, quizá haya una recta que "se ajuste mejor". ¿Piensa que su recta se ajusta mejor a los datos? ¿Existe una recta que dé el *mejor ajuste*? Resulta que sí existe un método para encontrar la recta que se ajusta mejor a datos linealmente relacionados (llamada *recta del mejor ajuste*).*

*No se estudiarán en este libro las matemáticas que fundamentan las rectas de mejor ajuste. Casi todo los libros de estadística y muchos de álgebra lineal analizan el tema.



EJEMPLO 4 Recta del mejor ajuste

Usando los datos de la tabla 6 para el ejemplo 1:

a) Encuentre la recta que mejor se ajuste usando un dispositivo de graficación.
b) Grafique la recta de mejor ajuste en el diagrama de dispersión obtenido en el ejemplo 1b).
c) Interprete la pendiente de la recta de mejor ajuste.
d) Use la recta de mejor ajuste para predecir la temperatura aparente de una habitación cuya temperatura real es 72°F y la humedad relativa es 45%

Figura 60

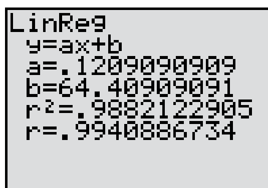
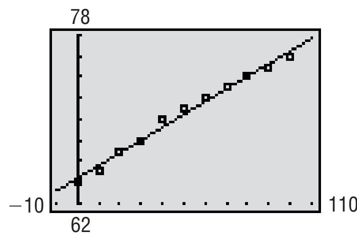


Figura 61



Solución

a) Las calculadoras gráficas contienen un programa integrado que encuentra la recta del mejor ajuste para una colección de puntos en un diagrama de dispersión. (Vea en su manual del usuario bajo "regresión lineal" o "recta del mejor ajuste" los detalles de cómo ejecutar el programa.) Una vez ejecutado el programa de regresión lineal, se obtienen los resultados que se muestran en la figura 60. La salida que proporciona la aplicación muestra la ecuación $y = ax + b$, donde a es la pendiente de la recta y b es la intercepción y. La recta de mejor ajuste que relaciona la humedad relativa con la temperatura aparente puede expresarse como la recta $y = 0.121x + 64.409$.

b) La figura 61 muestra la gráfica de la recta de mejor ajuste, junto con el diagrama de dispersión.

c) La pendiente de la recta de mejor ajuste es 0.121, que significa que por cada 1% de aumento en la humedad relativa, la temperatura aparente de la habitación se incrementa 0.121°F.

d) Sea $x = 45$ en la ecuación de la recta de mejor ajuste, se obtiene $y = 0.121(45) + 64.409 \approx 70°F$, que es la temperatura aparente en la habitación. ◀

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 9d) Y e).

La recta de mejor ajuste, ¿parece ser un buen ajuste? En otras palabras, ¿parece que la recta describe con exactitud la relación entre la temperatura y la humedad relativa?

Además, ¿qué tan "buena" es la recta de mejor ajuste? Las respuestas las da lo que se llama el *coeficiente de correlación*. Vea de nuevo la figura 60. La última línea de salida es $r = 0.994$. Este número, llamado **coeficiente de correlación**, r, $-1 \le r \le 1$, es una medida de la fuerza de la *relación lineal* que existe entre dos variables. Cuanto más cercano sea $|r|$ a 1 mejor es la relación lineal. Si r es cercano a 0, existe muy poca o ninguna relación lineal entre las variables. Un valor negativo de r, $r < 0$, indica que cuando x aumenta y disminuye; un valor positivo de r, $r > 0$, indica que cuando x aumenta y también aumenta. Los datos dados en el ejemplo 1 tienen un coeficiente de correlación de 0.994, lo que indica una relación lineal fuerte con pendiente positiva.

2.6 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

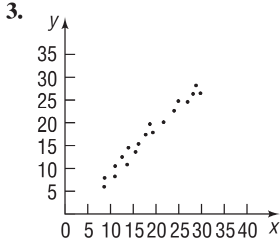
1. Un _________ _________ se usa como ayuda para ver qué tipo de relación, si la hay, puede existir entre dos variables.

2. *Falso o verdadero:* el coeficiente de correlación es una medida de la fuerza de una relación lineal entre dos variables y está entre −1 y 1, inclusive.

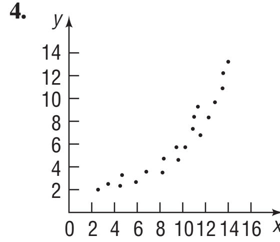
Ejercicios

En los problemas 3-8, examine el diagrama de dispersión y determine si el tipo de relación, si la hay, es lineal o no lineal.

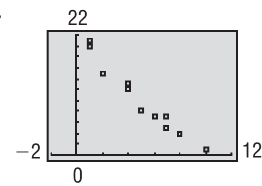

3.



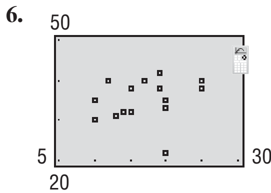
4.



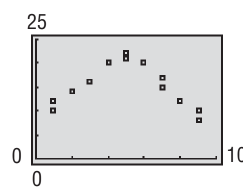

5.



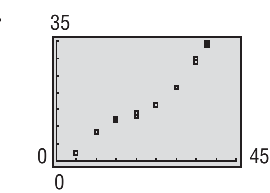

6.




7.




8.



En los problemas 9-14:

a) *Dibuje un diagrama de dispersión a mano.*
b) *Seleccione dos puntos del diagrama de dispersión y encuentre la ecuación de la recta que los contiene.**
c) *Grafique la recta encontrada en el inciso b) en el diagrama de dispersión.*
d) *Use un dispositivo de graficación para encontrar la recta de mejor ajuste.*
e) *Use un dispositivo de graficación para graficar la recta de mejor ajuste en el diagrama de dispersión.*


9.

x	3	4	5	6	7	8	9
y	4	6	7	10	12	14	16

10.

x	3	5	7	9	11	13
y	0	2	3	6	9	11

11.

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	0	1	4	5

12.

x	−2	−1	0	1	2
y	7	6	3	2	0

13.

x	−20	−17	−15	−14	−10
y	100	120	118	130	140

14.

x	−30	−27	−25	−20	−14
y	10	12	13	13	18

15. Ingreso disponible y de consumo Una economista desea estimar una recta que relacione los gastos de consumo personal C y el ingreso disponible I. Ambos C e I están en miles de dólares. Ella entrevista a ocho jefes de familia, con familias de 3 miembros y obtiene los datos mostrados. Sean I la variable independiente y C la variable dependiente.

a) Dibuje a mano un diagrama de dispersión.
b) Encuentre una recta que se ajuste a los datos.*
c) Interprete la pendiente. La pendiente de esta recta se llama **propensión marginal al consumo**.
d) Prediga el consumo de una familia cuyo ingreso disponible es $42,000 anuales.
e) Use un dispositivo de graficación para encontrar la recta de mejor ajuste para los datos.



I (000)	*C* (000)
20	16
20	18
18	13
27	21
36	27
37	26
45	36
50	39

*Las respuestas variarán. Usaremos el primero y último datos en la sección de respuestas.

16. Propensión marginal al ahorro La misma economista del problema 15 desea estimar una recta que relacione los ahorros S y el ingreso disponible I. Sean $S = I = C$ la variable dependiente e I la variable independiente.

a) Dibuje a mano un diagrama de dispersión.
b) Encuentre una recta que se ajuste a los datos.*
c) Interprete la pendiente. La pendiente de esta recta se llama **propensión marginal al ahorro**.
d) Prediga los ahorros de una familia cuyo ingreso es $42,000 anuales.
e) Use un dispositivo de graficación para encontrar la recta de mejor ajuste.

17. Evaluación hipotecaria La cantidad de dinero que una institución financiera le prestará depende principalmente de la tasa de interés y su ingreso anual. Los siguientes datos representan el ingreso anual I requerido por el banco para prestar L dólares a una tasa de interés de 7.5%, a 30 años.

Ingreso anual, I ($)	Cantidad del préstamo, L ($)
15,000	44,600
20,000	59,500
25,000	74,500
30,000	89,400
35,000	104,300
40,000	119,200
45,000	134,100
50,000	149,000
55,000	163,900
60,000	178,800
65,000	193,700
70,000	208,600

FUENTE: *Information Please Almanac*, 1999

Sea I la variable independiente y L la variable dependiente.

a) Use un dispositivo de graficación para dibujar un diagrama de dispersión de los datos.
b) Use un dispositivo de graficación para encontrar la recta de mejor ajuste para los datos.
c) Grafique la recta de menor ajuste en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso a).
d) Interprete la pendiente de la recta de mejor ajuste.
e) Determine la cantidad del préstamo para el que califica una persona si su ingreso anual es $42,000.

18. **Evaluación hipotecaria** La cantidad de dinero que una institución financiera le prestaría depende principalmente de la tasa de interés y su ingreso anual. Los siguientes datos representan el ingreso anual I requerido por un banco para prestar L dólares a una tasa de interés de 8.5%, a 30 años.

Ingreso anual, I ($)	Cantidad del préstamo, L ($)
15,000	40,600
20,000	54,100
25,000	67,700
30,000	81,200
35,000	94,800
40,000	108,300
45,000	121,900
50,000	135,400
55,000	149,000
60,000	162,500
65,000	176,100
70,000	189,600

FUENTE: *Information Please Almanac*, 1999

Sea I la variable independiente y L la variable dependiente.

a) Use un dispositivo de graficación para dibujar un diagrama de dispersión de los datos.
b) Use un dispositivo de graficación para encontrar la recta de mejor ajuste para los datos.
c) Grafique la recta de menor ajuste en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso a).
d) Interprete la pendiente de la recta de mejor ajuste.
e) Determine la cantidad del préstamo para el que califica una persona si su ingreso anual es $42,000.

19. Temperatura aparente de una habitación Los datos siguientes representan la temperatura aparente contra la humedad relativa en una habitación cuya temperatura real es 65° Fahrenheit.

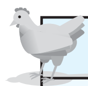
Humedad relativa, h (%)	Temperatura aparente, T (°F)
0	59
10	60
20	61
30	61
40	62
50	63
60	64
70	65
80	65
90	66
100	67

FUENTE: National Oceanic and Atmospheric Administration

Sean h la variable independiente y T la variable dependiente.

a) Use un dispositivo de graficación para dibujar un diagrama de dispersión de los datos.
b) Use un dispositivo de graficación para encontrar la recta de mejor ajuste para los datos.
c) Grafique la recta de mejor ajuste en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso a).
d) Interprete la pendiente de la recta de mejor ajuste.
e) Determine la temperatura aparente de una habitación cuya temperatura real es 65°F si la humedad relativa es 75%.


20. Periodo de gestación contra esperanza de vida Un investigador desea estimar la función lineal que relaciona el periodo de gestación de un animal G y su esperanza de vida L. Recolecta los datos mostrados en la tabla. Sean G la variable independiente y L la variable dependiente.
a) Use un dispositivo de graficación para dibujar un diagrama de dispersión de los datos.
b) Use un dispositivo de graficación para encontrar la recta de mejor ajuste para los datos.
c) Grafique la recta de mejor ajuste en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso a).
d) Interprete la pendiente de la recta de mejor ajuste.
e) Prediga la esperanza de vida de un animal cuyo periodo de gestación es 89 días.



Animal	Periodo de gestación (o incubación) G (días)	Esperanza de vida, L (años)
Gato	63	11
Gallina	22	7.5
Perro	63	11
Pato	28	10
Cabra	151	12
León	108	10
Loro	18	8
Cerdo	115	10
Conejo	31	7
Ardilla	44	9

FUENTE: ©2002 Time Inc. Reimpreso con autorización.

2.7 Variación

OBJETIVOS
1 Construir un modelo usando variación directa
2 Construir un modelo usando variación inversa
3 Construir un modelo usando variación conjunta o combinada

Cuando se desarrolla un modelo matemático para un problema real, con frecuencia incluye relaciones entre cantidades que se expresan en término de proporcionalidad:

La fuerza es proporcional a la aceleración.

Cuando un gas ideal se mantiene a temperatura constante, la presión y el volumen son inversamente proporcionales.

La fuerza de atracción ente dos cuerpos celestes es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.

El ingreso es directamente proporcional a las ventas.

Cada una de estas proposiciones ilustra la idea de **variación**, o la manera en que una cantidad varía en relación con otra cantidad. Las cantidades podrían variar *directamente, inversamente o conjuntamente*.

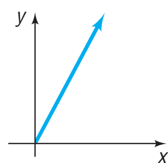
Variación directa


Sean x y y dos cantidades. Entonces y **varía directamente** con x, o y es **directamente proporcional a** x, si existe un número k diferente de cero tal que

$$y = kx$$

El número k recibe el nombre de **constante de proporcionalidad**.

Figura 62 $y = kx; k > 0, x \geq 0$



La gráfica de la figura 62 ilustra la relación entre y y x si y varía directamente con $k > 0$, $x \geq 0$. Observe que la constante de proporcionalidad es, de hecho, la pendiente de la recta.

Si se sabe que dos cantidades varían directamente, entonces conocer el valor de cada cantidad para un caso nos permite escribir una fórmula que sea cierta para todos los casos.

EJEMPLO 1 Pagos de hipoteca

Los pagos mensuales p de una hipoteca varían directamente con la cantidad de préstamo B. Si el pago mensual sobre una hipoteca a 30 años es \$6.65 por cada \$1000 de préstamo, encuentre la fórmula que relaciona el pago mensual p con la cantidad prestada B para una hipoteca en estos términos. Luego, encuentre el pago mensual p cuando la cantidad prestada es \$120,000.

Solución Como p varía directamente con B, se sabe que

$$p = kB$$

para alguna constante k. Debido a que $p = 6.65$ cuando $B = 1000$, se deduce que

$$6.65 = k(1000)$$
$$k = 0.00665$$

de manera que se tiene

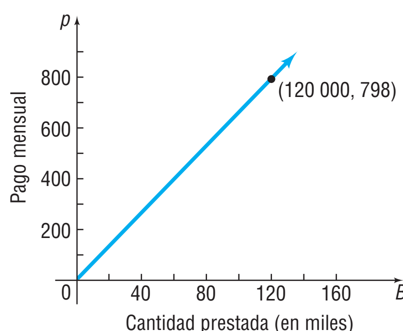
$$p = 0.00665B$$

En particular, cuando $B = \$120{,}000$, se encuentra que

$$p = 0.00665(\$120{,}000) = \$798$$

La figura 63 ilustra la relación entre el pago mensual p y la cantidad prestada B.

Figura 63





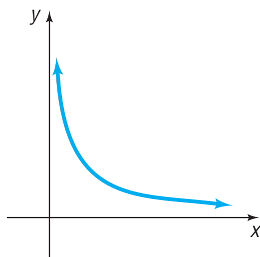
TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 3 Y 21.

Variación inversa


2 Sean x y y dos cantidades. Entonces y **varía inversamente** con x, o y es **inversamente proporcional a** x, si existe una constante k diferente de cero tal que

$$y = \frac{k}{x}$$

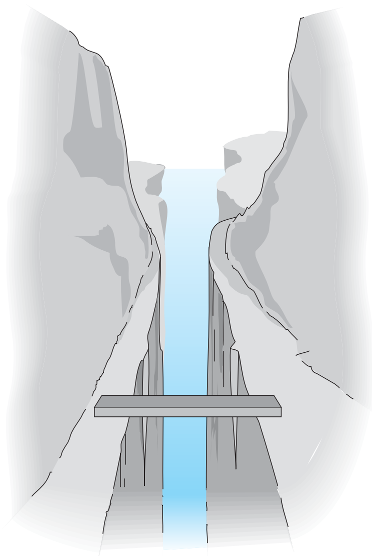
Figura 64 $y = \frac{k}{x}; k > 0, x > 0$



La gráfica de la figura 64 ilustra la relación entre y y x si y varía inversamente con $k > 0$, $x > 0$.

EJEMPLO 2 Peso máximo que puede soportar una tabla de pino

Figura 65



El peso máximo W que puede soportar con seguridad una tabla de 2 a 4 pulgadas varía inversamente con su longitud l. Vea la figura 65. Los experimentos indican que el peso máximo que soporta una tabla de pino de 2 por 4 pulgadas y 10 pies de largo es 500 libras. Escriba una fórmula general que relacione el peso máximo W (en libras) con la longitud (en pies). Encuentre el peso máximo W que soportaría con seguridad una tabla con 25 pies de largo.

Solución Como W varía inversamente con l, se sabe que

$$W = \frac{k}{l}$$

para alguna constante k. Puesto que $W = 500$ pies cuando $l = 10$, se tiene

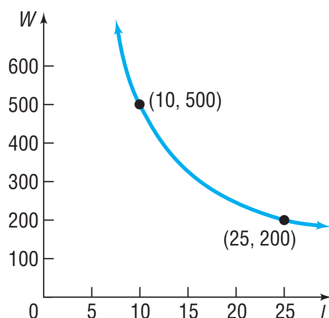
$$500 = \frac{k}{10}$$

$$k = 5000$$

Entonces, en todos los casos,

$$W = \frac{5000}{l}$$

Figura 66



En particular, el peso máximo W que puede soportar con seguridad una tabla de pino de 25 pies de longitud es

$$W = \frac{5000}{25} = 200 \text{ libras}$$

La figura 66 lustra la relación entre el peso W y la longitud l. ◀

En la variación directa o inversa, las cantidades que varían podrían estar elevadas a una potencia. Por ejemplo, al principio del siglo XVII, Johannes Kepler (1571-1630) descubrió que el cuadrado del periodo de revolución T alrededor del Sol varía directamente con el cubo de su distancia media a al Sol. Es decir, $T^2 = ka^3$, donde k es la constante de proporcionalidad.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

Variación conjunta y variación combinada



3 Cuando la cantidad variable Q es proporcional al producto de otras dos variables o más, se dice que Q **varía conjuntamente** con estas cantidades. Por último, pueden ocurrir combinaciones de variación directa y/o inversa. Por lo común, esto recibe el nombre de **variación combinada**.

Se verá un ejemplo

EJEMPLO 3 Pérdida de calor a través de la pared

La pérdida de calor por la pared varía conjuntamente con el área de la pared y la diferencia entre las temperaturas dentro y fuera, y varía inversamente con el grueso de la pared. Escriba una ecuación que relacione estas cantidades.

Solución Comenzamos por asignar símbolos para representar las cantidades:

L = pérdida de calor $\quad$ T = diferencia de temperatura

A = área de la pared $\quad$ d = grueso de la pared

Entonces

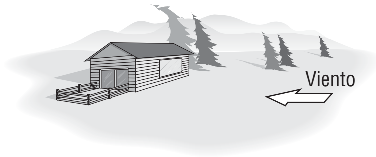
$$L = k\frac{AT}{d}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

EJEMPLO 4 Fuerza del aire en una ventana

Figura 67



La fuerza F del aire en una superficie plana, colocada a un ángulo recto con la dirección del viento, varía conjuntamente con el área A de la superficie y el cuadrado de la velocidad v del viento. Un viento de 30 millas por hora que sopla sobre una ventana de 4 a 5 pies tiene una fuerza de 150 libras. (Vea la figura 67). ¿Cuál es la fuerza sobre una ventana que mide 3 a 4 pies ocasionada por un viento de 50 millas por hora?

Solución Como F varía conjuntamente con A y v^2, se tiene

$$F = kAv^2$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Se sabe que $F = 150$ cuando $A = 3 \cdot 4 = 20$ y $v = 30$. Entonces se tiene

$$150 = k(20)(900) \qquad F = kAv^2, F = 150, A = 20, v = 30$$

$$k = \frac{1}{120}$$

Por lo tanto, la fórmula general es

$$F = \frac{1}{120}Av^2$$

Para un viento de 50 millas por hora que sopla sobre una ventana cuya área es $A = 3 \cdot 4 = 12$ pies cuadrados, la fuerza F es

$$F = \frac{1}{120}(12)(2500) = 250 \text{ libras}$$ ◀

2.7 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Si x y y son dos cantidades, entonces y es directamente proporcional a x si existe un número k diferente de cero tal que ________.

2. *Falso o verdadero:* si y varía directamente con x, entonces $y = \frac{k}{x}$, donde k es una constante.

Ejercicios

En los problemas 3-14, escriba una fórmula general para describir cada variación.

3. y varía directamente con x; $y = 2$ cuando $x = 10$
4. v varía directamente con t; $v = 16$ cuando $t = 2$
5. A varía directamente con x^2; $A = 4\pi$ cuando $x = 2$
6. V varía directamente con x^3; $V = 36\pi$ cuando $x = 3$
7. F varía inversamente con d^2; $F = 10$ cuando $d = 5$
8. y varía inversamente con $\sqrt{x}$; $y = 4$; $y = 4$ cuando $x = 9$
9. z varía directamente con la suma de cuadrados de x y y; $z = 5$ cuando $x = 3$ y $y = 4$
10. T varía conjuntamente con la raíz cúbica de x y el cuadrado de d; $T = 18$ cuando $x = 8$ y $d = 3$
11. M varía directamente con el cuadrado de d e inversamente con la raíz cuadrada de x; $M = 24$ cuando $x = 9$ y $d = 4$
12. z varía directamente con la suma del cubo de x y el cuadrado de y; $z = 1$ cuando $x = 2$ y $y = 3$
13. El cubo de z varía directamente con la suma de los cuadrados de x y y; $z = 2$ cuando $x = 9$ y $y = 4$
14. El cuadrado de T varía directamente con el cubo de a e inversamente con el cuadrado de d; $T = 2$ cuando $a = 2$ y $d = 4$

En los problemas 15-20, escriba una ecuación que relacione las cantidades.

15. Geometría El volumen V de una esfera varía directamente con el cubo de su radio r. La constante de proporcionalidad es $\frac{4\pi}{3}$.

16. Geometría El cuadrado de la longitud de la hipotenusa c de un triángulo rectángulo varía directamente con la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos a y b. La constante de proporcionalidad es 1.

17. Geometría El área A de un triángulo varía conjuntamente con las longitudes de la base b y la altura h. La constante de proporcionalidad es $\frac{1}{2}$.

18. Geometría El perímetro p de un rectángulo varía directamente con la suma de las longitudes de sus lados l y w. La constante de proporcionalidad es 2.

19. Física: ley de Newton La fuerza F (en newtons) de atracción entre dos cuerpos varía conjuntamente con sus masas m y M (en kilogramos) e inversamente con el cuadrado de la distancia d (en metros) entre ellos. La constante de proporcionalidad es $G = 6.67 \times 10^{-11}$.

20. Física: péndulo simple El **periodo** de un péndulo es el tiempo requerido para una oscilación; el péndulo se llama **simple** cuando el ángulo que forma con la vertical es menor que 5°. El periodo T de un péndulo simple (en segundos) varía directamente con el cuadrado de la longitud l (en pies). La constante de proporcionalidad es $\frac{2\pi}{\sqrt{32}}$.

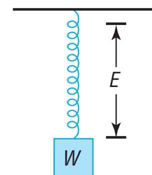
21. Pagos de hipoteca Los pagos mensuales p de una hipoteca varían directamente con la cantidad de préstamo. Si el pago mensual de una hipoteca a 30 años es \$6.49 por cada \$1000 prestados, encuentre una ecuación lineal que relacione el pago mensual p con la cantidad prestada B para una hipoteca en los mismo términos. Después encuentre el pago mensual p cuando la cantidad del préstamo B es \$145,000.

22. Pagos de hipoteca Los pagos mensuales p sobre una hipoteca varían directamente con la cantidad del préstamo B. Si los pagos mensuales sobre una hipoteca a 15 años es \$8.99 por cada \$1000 de préstamo, encuentre una ecuación lineal que relacione el pago mensual p con la cantidad prestada B para una hipoteca con los mismos términos. Luego encuentre el pago mensual p cuando la cantidad prestada B es \$175,000.

23. Física: objetos que caen La distancia s que cae un objeto es directamente proporcional al cuadrado del tiempo t de caída. Si un objeto cae 16 pies en 1 segundo, ¿cuánto cae en 3 segundos? ¿Cuánto tardará un objeto en caer 64 pies?

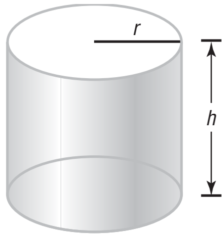
24. Física: objetos que caen La velocidad v de caída de objetos es directamente proporcional al tiempo t de caída. Si, después de 2 segundos, la velocidad del objeto es 64 pies por segundo, ¿cuál es su velocidad después de 3 segundos?

25. Física: resorte que se estira La elongación E de una báscula de resorte varía directamente con el peso W aplicado (vea la figura). Si $E = 3$ cuando $W = 20$, encuentre E cuando $W = 15$.

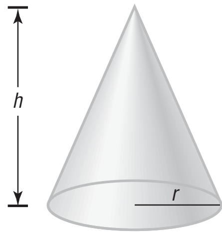


26. Física: resorte que vibra La razón de vibración de un resorte bajo tensión constante varía inversamente con la longitud del resorte. Si un resorte mide 48 pulgadas y vibra 256 veces por segundo, ¿cuál es la longitud de un resorte que vibra 576 veces por segundo?

27. Geometría El volumen V de un cilindro circular recto varía conjuntamente con el cuadrado de su radio r y su altura h. La constante de proporcionalidad es π. (Vea la figura). Escriba la ecuación para V.



28. Geometría El volumen V de un cono circular recto varía conjuntamente con el cuadrado de su radio r y su altura h. La constante de proporcionalidad es $\frac{\pi}{3}$. (Vea la figura). Escriba una ecuación para V.



29. Peso de un cuerpo El peso de un cuerpo sobre la superficie terrestre varía inversamente con el cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. Si cierto cuerpo pesa 55 libras cuando está a 3960 millas del centro de la Tierra, ¿cuál será su peso cuando está a 3965 millas del centro de la Tierra?

30. Fuerza del viento sobre una ventana La fuerza ejercida por el viento sobre una superficie plana varía conjuntamente con el área de la superficie y el cuadrado de la velocidad del viento. Si la fuerza sobre un área de 20 pies cuadrados es 11 libras cuando la velocidad del viento es 22 millas por hora, encuentre la fuerza sobre una superficie de 47.125 pies cuadrados cuando la velocidad del viento es 36.5 millas por hora.

31. Caballos de fuerza Los caballos de fuerza (hp) que puede trasmitir de manera segura un eje varían conjuntamente con su velocidad (en revoluciones por minuto, rpm) y el cubo de su diámetro. Si un eje de cierto material con 2 pulgadas de diámetro trasmite 36 hp a 75 rpm, ¿qué diámetro debe tener el eje con el fin de trasmitir 45 hp a 125 rpm?

32. Química: leyes de gases El volumen V de un gas ideal varía directamente con la temperatura T e inversamente con la presión P. Escriba una ecuación que relacione V, T y P usando k como la constante de proporcionalidad. Si un cilindro contiene oxígeno a una temperatura de 300 K y una presión de 15 atmósferas en un volumen de 100 litros, ¿cuál es la constante de proporcionalidad k? Si se introduce un pistón al cilindro, disminuyendo el volumen ocupado por el gas a 80 litros y elevando la temperatura a 310 K, ¿cuál es la presión del gas?

33. Física: energía cinética La energía cinética K de un objeto que se mueve varía conjuntamente con su masa m y el cuadrado de su velocidad v. Si un objeto que pesa 25 libras y se mueve con una velocidad de 100 pies por segundo tiene energía cinética de 400 libras-pie, encuentre su energía cinética cuando la velocidad es 150 pies por segundo,

34. Resistencia eléctrica de un alambre La resistencia eléctrica de un alambre varía directamente con la longitud del alambre e inversamente con el cuadrado de su diámetro. Si un alambre de 432 pies de largo y 4 milímetros de diámetro tiene una resistencia de 1.24 ohms, encuentre la longitud de un alambre del mismo material cuya resistencia es 1.44 ohms y cuyo diámetro es 3 milímetros.

35. Medición de la tensión de materiales La tensión en los materiales de una tubería sujeta a presión interna varía conjuntamente con la presión interna y el diámetro interno de la tubería e inversamente con el grueso de la tubería. La tensión es 100 libras por pulgada cuadrada cuando el diámetro es 5 pulgadas, el grueso es 0.75 pulgadas y la presión interna es 25 libra por pulgada cuadrada. Encuentre la tensión cuando la presión interna es 40 libras por pulgada cuadrada si el diámetro es 8 pulgadas y el grueso es 0.50 pulgadas.

36. Carga segura para una viga La carga máxima segura para una viga horizontal rectangular varía conjuntamente con el ancho de la viga e inversamente con su longitud. Si una viga de 8 pies soporta hasta 750 libras cuando tiene 4 pulgadas de ancho y 2 de grueso, ¿cuál es la carga máxima segura para una viga similar de 10 pies de largo, 6 pulgadas de ancho y 2 de grueso?

37. La fórmula de la página 208 atribuida a Johannes Kepler es una de las tres leyes de Kepler del movimiento planetario. Vaya a la biblioteca e investigue estas leyes. Escriba un breve resumen acerca de estas leyes y el lugar de Kepler en la historia.

38. Usando una situación que no se haya analizado en el libro, escriba un problema real que piense que incluye dos variables que varían directamente. Intercambie su problema con otro estudiante para obtener una solución y una crítica.

39. Usando una situación que no se haya analizado en el libro, escriba un problema real que piense que incluye dos variables que varían inversamente. Intercambie su problema con otro estudiante para obtener una solución y una crítica.

40. Usando una situación que no se haya analizado en el libro, escriba un problema real que piense que incluye dos variables que varían conjuntamente. Intercambie su problema con el de otro estudiante para obtener una solución y una crítica.

Repaso del capítulo

Conocimiento

Fórmulas

Distancia (p. 160)	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Punto medio (p. 162)	$(x, y) = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$
Pendiente (p. 181)	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ si $x_1 \neq x_2$; no definida si $x_1 = x_2$
Rectas paralelas (p. 194)	Pendientes iguales ($m_1 = m_2$) e intercepciones y diferentes ($b_1 \neq b_2$)
Rectas perpendiculares (p. 196)	Producto de pendientes es -1 ($m_1 \cdot m_2 = -1$)
Variación directa (p. 206)	$y = kx$
Variación inversa (p. 207)	$y = \dfrac{k}{x}$

Ecuaciones lineales y círculos

Línea vertical (p. 185)	$x = a$
Línea horizontal (p. 186)	$y = b$
Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta (p. 186)	$y - y_1 = m(x - x_1)$; m es la pendiente de la recta, (x_1, y_1) es el punto sobre la recta
Forma pendiente-ordenada de la ecuación de la recta (p. 187)	$y = mx + b$; m m es la pendiente de la recta, b es la intercepción y
Forma general de la ecuación de una recta (p. 189)	$Ax + By = C$; A, B no ambos 0
Forma estándar de la ecuación de un círculo (p. 176)	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$; r ; r es el radio del círculo, (h, k) es el centro del círculo
Ecuación del circulo unitario (p. 176)	$x^2 + y^2 = 1$
Forma general de la ecuación de un círculo (p. 178)	$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Objetivos

Sección		Debe ser capaz de...	Ejercicios de repaso
2.1	1	Usar la fórmula de la distancia (p. 159)	1a)-6a), 42, 43a), 44
	2	Usar la fórmula del punto medio (p. 162)	1b)-6b), 44
2.2	1	Graficar ecuaciones localizando puntos (p. 165)	7
	2	Encontrar las intercepciones de una gráfica (p. 169)	8
	3	Encontrar las intercepciones de una ecuación (p. 169)	9-16
	4	Probar la simetría de una ecuación respecto al eje x, el eje y y el origen (p. 171)	9-16
2.3	1	Escribir la forma estándar de la ecuación de un círculo (p. 175)	17-20
	2	Graficar un círculo (p. 176)	21-26
	3	Encontrar el centro y el radio de un círculo a partir de una ecuación en la forma general y graficarlo (p. 178)	23-26
2.4	1	Calcular e interpretar la pendiente de una recta (p. 181)	1c)-6c); 1d)-6d), 45
	2	Graficar rectas dados un punto y la pendiente (p. 184)	27, 28, 41
	3	Encontrar la ecuación de una línea vertical (p. 185)	29

	4	Usar la forma punto-pendiente de una recta; identificar rectas horizontales (p. 186)	27-28
	5	Encontrar la ecuación de una recta dados dos puntos (p. 187)	30-32
	6	Escribir la ecuación de una recta en la forma intercepción-pendiente (p. 187)	27-36
	7	Identificar la pendiente y la intercepción y de una recta a partir de su ecuación (p. 188)	37-40
	8	Escribir la ecuación de una recta en la forma general (p. 189)	27-36
2.5	1	Definir rectas paralelas (p. 194)	33-34
	2	Encontrar ecuaciones de rectas paralelas (p. 195)	35-36
	3	Definir rectas perpendiculares (p. 195)	35-36, 43
	4	Encontrar ecuaciones de rectas perpendiculares (p. 197)	35-36
2.6	1	Dibujar e interpretar diagramas de dispersión (p. 199)	51a)
	2	Distinguir entre relaciones lineales y no lineales (p. 201)	51b)
	3	Usar una dispositivo de graficación para encontrar la recta de mejor ajuste (p. 202)	51c)
2.7	1	Construir un modelo usando variación directa (p. 206)	46-47, 49
	2	Construir un modelo usando variación inversa (p. 207)	48
	3	Construir un modelo usando variación conjunta o combinada (p. 208)	49, 50

Ejercicios de repaso

Los problemas con asterisco (*) indican que el autor los sugiere para un examen de práctica.

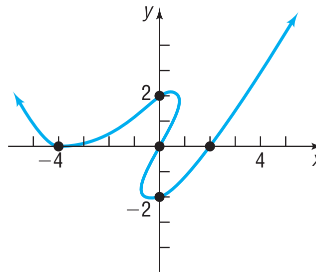
En los problemas 1-6, encuentre lo siguiente para cada par de puntos:

a) *La distancia entre los puntos*
b) *El punto medio del segmento de recta que conecta los puntos*
c) *La pendiente de la recta que conecta los puntos*
d) *Interprete la pendiente encontrada en el inciso c)*

1. $(0, 0); (4, 2)$ **2.** $(0, 0); (-4, 6)$ **3.** $(1, -1); (-2, 3)$ **4.** $(-2, 2); (1, 4)$ **5.** $(4, -4); (4, 8)$ **6.** $(-3, 4); (2, 4)$

* **7.** Grafique $y = x^2 + 4$ localizando los puntos.

8. Enumere las intercepciones de la gráfica mostrada enseguida.



En los problemas 9-16, enumere las intercepciones y las pruebas de simetría respecto al eje x, el eje y y el origen.

* **9.** $2x = 3y^2$ **10.** $y = 5x$ **11.** $x^2 + 4y^2 = 16$ **12.** $9x^2 - y^2 = 9$

13. $y = x^4 + 2x^2 + 1$ **14.** $y = x^3 - x$ **15.** $x^2 + x + y^2 + 2y = 0$ **16.** $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$

En los problemas 17-20, encuentre la forma estándar de la ecuación del círculo cuyo centro y radio están dados.

17. $(h, k) = (-2, 3); r = 4$ **18.** $(h, k) = (3, 4); r = 4$ ***19.** $(h, k) = (-1, -2); r = 1$ **20.** $(h, k) = (2, -4); r = 3$

En los problemas 21-26, encuentre el centro y el radio de cada círculo. Grafique cada uno.

21. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ **22.** $(x + 2)^2 + y^2 = 9$ ***23.** $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

24. $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ **25.** $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 0$ **26.** $2x^2 + 2y^2 - 4x = 0$

En los problemas 27-36, encuentre una ecuación de la recta que tiene las características dadas. Exprese su respuesta usando la forma general o la forma pendiente-ordenada de la ecuación de una recta, la que prefiera.

***27.** Pendiente $= -2$; contiene el punto $(3, -1)$

28. Pendiente $= 0$; contiene el punto $(-5, 4)$

29. Vertical; contiene el punto $(-3, 4)$

30. Intercepción $y = 2$; contiene el punto $(4, -5)$

31. Intercepción $y = -2$; contiene el punto $(5, -3)$

32. Contiene los puntos $(3, -4)$ y $(2, 1)$

33. Paralela a la recta $2x - 3y = -4$; contiene el punto $(-5, 3)$

34. Paralela a la recta $x + y = 2$; contiene el punto $(1, -3)$

***35.** Perpendicular a la recta $x + y = 2$; contiene el punto $(4, -3)$

36. Perpendicular a la recta $3x - y = -4$; contiene el punto $(-2, 4)$

En los problemas 37-40, encuentre la pendiente y la intercepción-y de cada recta. Grafique la recta indicando las intercepciones.

***37.** $4x - 5y = -20$ ***38.** $3x + 4y = 12$ **39.** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = -\frac{1}{6}$ **40.** $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 0$

---

41. Grafique la recta con pendiente $\frac{2}{3}$ que contiene el punto $(1, 2)$.

42. Demuestre que los puntos $A = (3, 4)$, $B = (1, 1)$ y $C = (-2, 3)$ son vértices de un triángulo isósceles.

43. Demuestre que los puntos $A = (-2, 0)$, $B = (-4, 4)$ y $C = (8, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo de dos maneras:

a) Usando el inverso del teorema de Pitágoras.

b) Usando las pendientes de las rectas que se unen en los vértices.

44. Los puntos terminales del diámetro de un círculo son $(-3, 2)$ y $(5, -6)$. Encuentre el centro y el radio del círculo. Escriba la ecuación general de este círculo.

45. Demuestre que los puntos $A = (2, 5)$, $B = (6, 1)$ y $C = (8, -1)$ están en una recta, usando las pendientes.

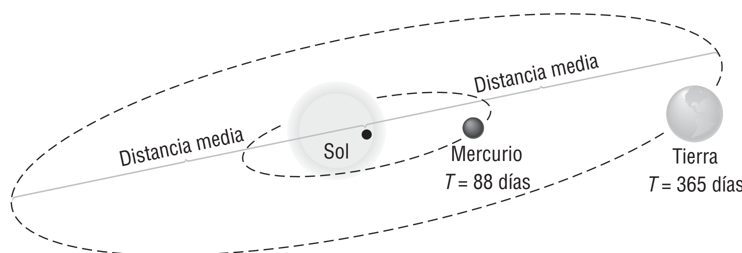
46. Pagos de hipoteca El pago mensual p de una hipoteca varía directamente con la cantidad prestada B. Si el pago mensual de una hipoteca a 30 años es $854.00 cuando el préstamo es de $130,000, encuentre una función lineal que relacione el pago mensual p con la cantidad prestada B para una hipoteca en los mismos términos. Después encuentre el pago mensual p cuando la cantidad del préstamo B es $165,000.

***47. Función de ingreso** En la gasolinera Esso de la esquina, el ingreso R varía directamente con el número g de galones de gasolina vendidos. Si el ingreso es $15.93 cuando se venden 13.5 galones de gasolina, encuentre una ecuación que relacione el ingreso R con el número de galons de gasolina g vendidos. Después encuentre el ingreso R cuando se venden 11.2 galones de gasolina.

48. Peso de un cuerpo El peso de un cuerpo varía inversamente con el cuadrado de su distancia al centro de la Tierra. Suponiendo que el radio de la Tierra es 3960 millas, ¿cuánto pesará un hombre a una altitud de 1 milla sobre la superficie de la Tierra si pesa 200 libras en la superficie terrestre?

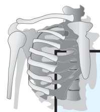
---

49. Tercera ley de Kepler del movimiento planetario La tercera ley de Kepler del movimiento de los planetas establece que el cuadrado del periodo de revolución T de un planeta varía directamente con el cubo de su distancia media a al Sol. Si la distancia media de la Tierra al Sol es 93 millones de millas, ¿cuál es la distancia del planeta Mercurio al Sol, dado que Mercurio tiene un año de 88 días?



50. Resistencia de un conductor La resistencia (en ohms) de un conductor circular varía directamente con la longitud del conductor e inversamente con el cuadrado del radio del conductor. Si 50 pies de cable con radio de 6×10^{-3} pulgadas tiene una resistencia de 10 ohms, ¿cuál sería la resistencia de 100 pies del mismo cable si el radio se incrementa a 7×10^{-3} pulgadas?

***51. Longitud de huesos** Una investigación realizada en la NASA por la Dra. Emily R. Moorey-Holton, midió la longitud del húmero derecho y la tibia derecha de 11 ratas que se mandaron al espacio en el Spacelab Life Science 2. Se recolectaron los siguientes datos.



Húmero derecho (mm), x	Tibia derecha (mm), y
24.80	36.05
24.59	35.57
24.59	35.57
24.29	34.58
23.81	34.20
24.87	34.73
25.90	37.38
26.11	37.96
26.63	37.46
26.31	37.75
26.84	38.50

FUENTE: NASA Life Sciences Data Archive

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos manejando la longitud del húmero derecho como la variable independiente.

b) Con base en el diagrama de dispersión, ¿piensa que existe una relación lineal entre la longitud del húmero derecho y la longitud de la tibia derecha?

c) Si dos variables parecen tener una relación lineal, use un dispositivo de graficación para encontrar la recta que mejor se ajusta que relacione la longitud del húmero derecho y la longitud de la tibia derecha.

d) Prediga la longitud de la tibia derecha de una rata cuyo húmero derecho tiene 26.5 mm.

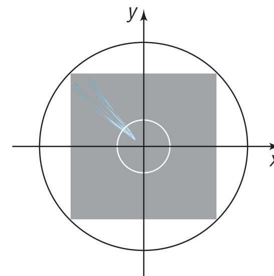
52. Cree cuatro problemas que tenga que resolver dados dos puntos $(-3, 4)$ y $(6, 1)$. Cada problema debe involucrar un concepto diferente. Asegúrese de establecer con claridad sus instrucciones.

53. Describa cada una de las siguientes gráficas en el plano xy. Proporcione una justificación.

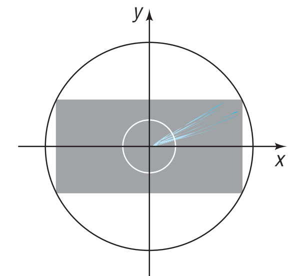
a) $x = 0$
b) $y = 0$
c) $x + y = 0$
d) $xy = 0$
e) $x^2 + y^2 = 0$

54. Suponga que tiene un campo rectangular que requiere riego. Su sistema de riego consiste en un brazo de longitud variable que gira de manera que el patrón de riego es un círculo. Decida dónde colocar el brazo y qué longitud debe tener para que se riegue todo el campo con la mayor eficiencia. ¿Cuando es deseable usar más de un brazo?

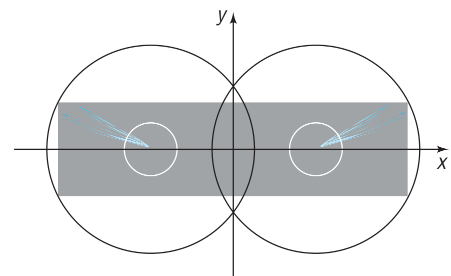
[**Sugerencia:** Utilice un sistema de coordenadas rectangulares posicionado como se muestra en las figuras siguientes. Escriba una ecuación para el o los círculos que marca el o los brazos del sistema de riego.]



Campo cuadrado



Campo rectangular, un brazo



Campo rectangular, dos brazos

Proyectos del capítulo



1. **Análisis de acciones** La beta, β, de una acción representa el riesgo relativo de la acción comparado con una canasta de acciones del mercado, como el Índice Beta 500 de Standard and Poor. Beta se calcula encontrando la pendiente de la recta que mejor se ajusta a la tasa de rendimiento de la acción y la tasa de rendimiento 500 de S&P. Las tasas de rendimiento se calculan cada semana.
   a) Encuentre el precio de cierre semanal de su acción favorita y el de 500 de S&P para 20 semanas. Una buena fuente está en Internet en *http://finance.yahoo.com*.
   b) Calcule la tasa de rendimiento calculando el porcentaje de cambio semanal en el precio de costo de su acción y el porcentaje de cambio semanal en el 500 S&P usando la siguiente fórmula:

   $$\% \text{ de cambio semanal} = \frac{P_2 - P_1}{P_1}$$

   donde P_1 es el precio de la última semana y P_2 es el precio de la semana.
   c) Usando un dispositivo de graficación, encuentre la recta del mejor ajuste, manejando la tasa de rendimiento semanal de 500 S&P como la variable independiente y la tasa de rendimiento semanal de su acción como la variable dependiente.
   d) ¿Cuál es la beta de su acción?
   e) Compare su resultado con el de la *Value Line Investment Survey* que se encuentra en su biblioteca. ¿Cuál sería la razón de las diferencias?

Los siguientes proyectos están disponibles en www.prenhall.com/sulivan

2. **Project at Motorola** ***Mobile Phone Usage***
3. **Economics** ***Isocost Lines***

Repaso acumulativo

En los problemas 1-8, encuentre las soluciones reales de cada ecuación.

1. $3x - 5 = 0$ **2.** $x^2 - x - 12 = 0$

3. $2x^2 - 5x - 3 = 0$ **4.** $x^2 - 2x - 2 = 0$

5. $x^2 + 2x + 5 = 0$ **6.** $\sqrt{2x + 1} = 3$

7. $|x - 2| = 1$ **8.** $\sqrt{x^2 + 4x} = 2$

En los problemas 9 y 10, resuelva cada ecuación en el sistema de números complejos.

9. $x^2 = -9$ **10.** $x^2 + 2x + 5 = 0$

En los problemas 11-14, resuelva cada desigualdad. Grafique el conjunto de soluciones.

11. $2x - 3 \leq 7$ **12.** $-1 < x + 4 < 5$

13. $|x - 2| \leq 1$ **14.** $|2 + x| > 3$

15. Encuentre la distancia entre los puntos $P = (-1, 3)$ y $Q = (4, -2)$. Encuentre el punto medio del segmento de recta de P a Q.

16. ¿Cuál de los siguientes puntos están en la gráfica de $y = x^3 - 3x + 1$?
a) $(-2, -1)$ b) $(2, 3)$ c) $(3, 1)$

17. Bosqueje la gráfica de $y = x^2$.

18. Encuentre la ecuación de la recta que contiene los puntos $(-1, 4)$ y $(2, -2)$. Exprese su respuesta en la forma de pendiente-ordenada.

19. Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y = 2x + 1$ y que contiene el punto $(3, 5)$. Exprese su respuesta en la forma de pendiente-ordenada *y* grafique la recta.

20. Grafique la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$.

3 Funciones y sus gráficas

Los teléfonos portátiles toman fuerza

Datos del censo 2000 muestran un incremento en el uso de teléfonos celulares

20 de enero.– Los datos muestran que el número de propietarios de teléfonos celulares saltó de apenas arriba de 5.2 millones en 1990 a cerca de 110 millones en 2000, un incremento de 20 veces en sólo 10 años.

Varios factores impulsan el crecimiento fenomenal, uno de los cuales es la disminución de costos. Los datos observan que el costo promedio mensual del teléfono celular casi bajó a la mitad, de $81 a un poco más de $45, en la última década.

La investigación de Celular Telecommunications and Internet Association (CTIA) en Washington, DC, publicada por el Census Bureau de Estados Unidos en: *Statistical Abstract of the United States, 2001*, señala la rápida adopción de la tecnología celular como la razón clave del crecimiento.

"La industria de telefonía celular ha mostrado un incremento asombroso en la década", dice Glenn King, jefe del área de compendio estadístico del Commerce Department que produce la publicación. Resalta que había sólo 55 millones de usuarios en 1997: "Se han duplicado en los últimos tres años nada más".

"Al disminuir el costo de servicio, el celular está al alcance de todos", dice Charles Govin, un analista veterano de Forrester Research. "Las personas pueden estar en contacto en cualquier momento y desde cualquier lugar que lo deseen".

Por Paul Eng, abcNEWS.com

—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO

CONTENIDO

3.1 Funciones
3.2 Gráfica de una función
3.3 Propiedades de las funciones
3.4 Biblioteca de las funciones; funciones definidas por partes
3.5 Técnicas para graficar: transformaciones
3.6 Modelos matemáticos: construcción de funciones
Repaso del capítulo
Proyectos del capítulo
Repaso acumulativo

3.1 Funciones

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Intervalos (sección 1.5, pp. 125-126)
- Solución de desigualdades (sección 1.5, pp. 129-133)
- Evaluación de expresiones algebraicas, dominio de una variable (Repaso, sección R.2, pp. 20-21)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 228.

OBJETIVOS
1 Determinar si una relación representa una función
2 Encontrar el valor de una función
3 Encontrar el dominio de una función
4 Formar la suma, la diferencia, el producto o el cociente de dos funciones

1 Una **relación** es una correspondencia entre dos conjuntos. Si x y y son dos elementos de estos conjuntos y si existe una relación entre x y y, entonces se dice que x **corresponde** a y o que y **depende de** x y escribimos $x \to y$. También, $x \to y$ se escribe como el par ordenado (x, y).

EJEMPLO 1 Ejemplo de una relación

La figura 1 describe una relación entre cuatro individuos y sus cumpleaños. La relación podría ser "nació el". Entonces Katy corresponde al 20 de junio, Dan corresponde al 4 de septiembre, etcétera. Al usar pares ordenados, esta relación se expresa como

$$\{(\text{Katy}, 20/\text{jun}), (\text{Dan}, 4/\text{sep}), (\text{Patrick}, 31/\text{dic}), (\text{Phoebe}, 31/\text{dic})\}$$

Figura 1



Con frecuencia nos interesa especificar qué tipo de relación (como una ecuación) existe entre las dos variables. Por ejemplo, la relación del ingreso R que resulta de la venta de x artículos en \$10 cada uno se expresa por la ecuación $R = 10x$. Si se conoce el número de artículos vendidos, se calcula el ingreso usando la ecuación $R = 10x$. Esta ecuación es un ejemplo de una *función*.

Como otro ejemplo, suponga que un trozo de hielo (estalactita) cae de un edificio desde 64 pies de altura. Según una ley de la física, la distancia s (en pies) del hielo al suelo después de t segundos está dada (aproximadamente) por la fórmula $s = 64 - 16t^2$. Cuando $t = 0$ segundos, el hielo está a $s = 64$ pies del suelo. Después de 1 segundo, el hielo está a $s = 64 - 16(1)^2 = 48$ pies del suelo. Después de 2 segundos, el hielo pega en el suelo. La fórmula $s = 64 - 16t^2$ proporciona una manera de encontrar la distancia s en cualquier tiempo t $(0 \le t \le 2)$. Existe una correspondencia entre cada tiempo t en el intervalo $0 \le t \le 2$ y la distancia s. Se dice que la distancia es una función del tiempo t porque:

1. Existe una correspondencia entre el conjunto de tiempos y el conjunto de distancias.

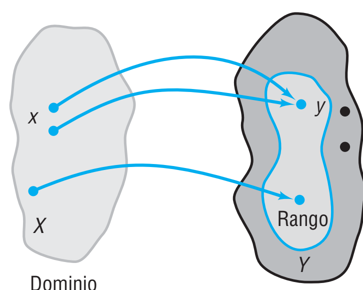
2. Existe exactamente una distancia s obtenida para cualquier tiempo t en el intervalo $0 \leq t \leq 2$.

Ahora se dará la definición de una función.

Definición de función

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos.* Una **función** de X a Y es una relación que asocia a cada elemento de X exactamente un elemento de Y.

Figura 2



El conjunto X se llama **dominio** de la función. Para cada elemento x en X, el elemento correspondiente y en Y se llama **valor** de la función en x, o imagen de x. El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio se llama **rango** de la función. Vea la figura 2.

Como es posible que haya algunos elementos en Y que no son imagen de una x en X, se deduce que el rango de una función puede ser un subconjunto de Y, como se muestra en la figura 2.

No todas las relaciones entre dos conjuntos son funciones. El siguiente ejemplo muestra cómo determinar si una relación es función o no.

EJEMPLO 2

Determinar si una relación representa una función

Determinar si las relaciones siguientes representan funciones

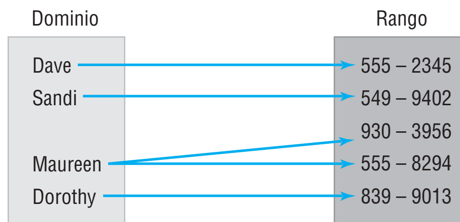
a) Vea la figura 3. Para esta relación, el dominio representa cuatro individuos y el rango representa sus días de nacimiento.

Figura 3



b) Vea la figura 4. Para esta relación, el dominio representa los empleados de Autos Usados de Sam y el rango representa sus números telefónicos.

Figura 4



*Por lo común, los conjuntos X y Y serán conjuntos de número reales. También pueden ser conjuntos de números complejos y entonces se habrá definido una función compleja. En el sentido amplio de la definición (debida a Lejeune Dirichlet), X y Y pueden ser cualesquiera dos conjuntos.

Solución a) La relación en la figura 3 es una función porque cada elemento en el dominio corresponde a exactamente un elemento en el rango. Observe que más de un elemento en el dominio podría corresponder al mismo elemento en la imagen (Phoebe y Patrick nacieron el mismo día del año).

b) La relación de la figura 4 no es una función porque cada elemento en el dominio no corresponde a exactamente un elemento en el rango. Maureen tiene dos números telefónicos; por lo tanto, si se elige a Maureen del dominio, no se le puede asignar un solo número telefónico. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 15.

En palabras
Para una función, ninguna entrada tiene más de una salida.

En palabras
Para una función, el dominio es el conjunto de datos o entradas, y el rango es el conjunto de salidas o resultados.

La idea que fundamenta una función es que es predecible. Si la entrada se conoce, se usa la función para determinar la salida. Las que "no son funciones" no son predecibles. Regrese a la figura 3. Los datos son {Katy, Dan, Patrick, Phoebe}. La correspondencia es "nació el" y las salidas son {20 de junio, 4 de septiembre, 31 de diciembre}. Si se pregunta "¿cuándo cumple años Katy?", se usa la correspondencia para contestar "el 20 de junio". Ahora considere la figura 4. Si se pregunta ¿cuál es el número de teléfono de Maureen?", no se da una sola respuesta, porque se obtienen dos salidas de la entrada "Maureen". Por esta razón, la relación de la figura 4 no es una función.

Se pensaría que una función es un conjunto de pares ordenados (x, y) en el que no hay dos pares cuyo primer elemento sea igual, y cuyo segundo elemento sea diferente. El conjunto de todos los primeros elementos x es el dominio de la función y el conjunto de todos los segundos elementos es la imagen. Cada elemento x en el dominio corresponde a exactamente un elemento y en la imagen.

EJEMPLO 3 Determinar si una relación representa una función

Determine si cada relación representa una función. Si es una función, establezca el dominio y el rango.

a) $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$

b) $\{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (6, 10)\}$

c) $\{(-3, 9), (-2, 4), (0, 0), (1, 1), (-3, 8)\}$

Solución a) Esta relación es una función porque no existen pares ordenados con el mismo primer elemento y diferente segundo elemento. El dominio de esta función es $\{1, 2, 3, 4\}$ y su imagen es $\{4, 5, 6, 7\}$.

b) Esta relación es una función porque no existen pares ordenados con el mismo primer elemento y diferente segundo elemento. El dominio de esta función es $\{1, 2, 3, 6\}$ y su imagen es $\{4, 5, 10\}$.

c) Esta relación no es una función porque hay dos pares ordenados, $(-3, 9)$ y $(-3, 8)$ con el mismo primer elemento y diferentes segundos elementos. ◀

En el ejemplo 3*b*), observe que 1 y 2 en el dominio tienen cada uno la misma imagen en el rango. Esto no viola la definición de una función; dos primeros elementos diferentes pueden tener el mismo segundo elemento. Una violación de la definición ocurre cuando dos pares ordenados tienen el mismo primer elemento y diferentes segundos elementos, como en el ejemplo 3*c*).


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

El ejemplo 2*a*) muestra que una función podría estar definida por alguna correspondencia entre dos conjuntos. Los ejemplos 3*a*) y 3*b*) muestran que una función puede estar definida por un conjunto de pares ordenados. Una función también estaría definida por una ecuación en dos variables, normalmente denotadas por x y y.

EJEMPLO 4 Ejemplo de función

Considere la función definida por la ecuación

$$y = 2x - 5, \qquad 1 \leq x \leq 6$$

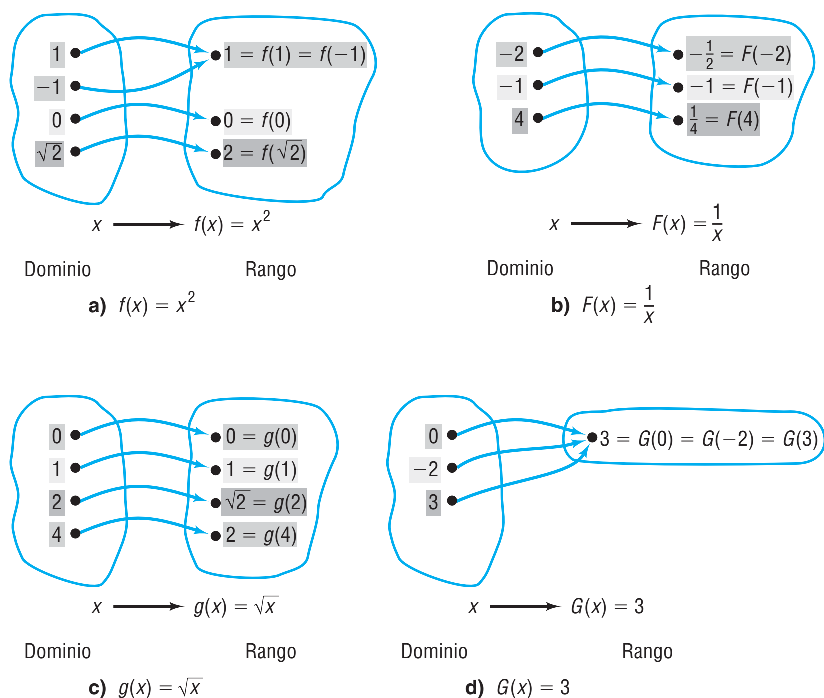
Observe que a cada entrada x corresponde exactamente una salida y. Por ejemplo, si $x = 1$, entonces $y = 2(1) - 5 = -3$. Si $x = 3$, entonces $y = 2(3) - 5 = 1$. Por esto, la ecuación es una función. Como las entradas están restringidas a los números reales entre 1 y 6, inclusive, el dominio de la función es $\{x | 1 \leq x \leq 6\}$. La función especifica que para obtener la imagen de x se multiplica x por 2 y luego se resta 5 de este producto. ◀

Notación de funciones

2 Con frecuencia las funciones se denotan por letras como f, F, g, G y otras. Si f es una función, entonces para cada número x en su dominio, la imagen correspondiente en el rango está designada por el símbolo $f(x)$, leído "f de x". Se hace referencia a $f(x)$ como el **valor de f en el número x**; $f(x)$ es el número que se obtiene cuando x está dado y se aplica la función f; $f(x)$ *no* significa "f multiplicado por x". Por ejemplo, la función dada en el ejemplo 4 se escribe como $y = f(x) = 2x - 5$, $1 \leq x \leq 6$. Entonces, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2$.

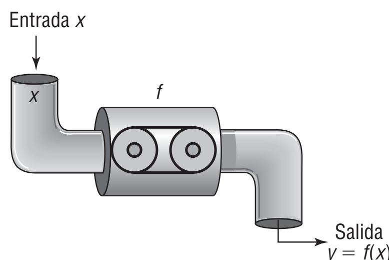
La figura 5 ilustra algunas otras funciones. Observe que, en todas las funciones, para cada x en el dominio hay un valor en el rango.

Figura 5



a) $f(x) = x^2$ **b)** $F(x) = \frac{1}{x}$ **c)** $g(x) = \sqrt{x}$ **d)** $G(x) = 3$

Figura 6



En ocasiones es útil pensar en una función f como en una máquina que recibe como entrada un número del dominio, lo manipula y produce el valor. Vea la figura 6.

Las restricciones de esta máquina de entrada/salida son las siguientes:

1. Sólo acepta números del dominio de la función.
2. Para cada entrada, existe exactamente una salida (que podría repetirse para diferentes entradas).

Para una función $y = f(x)$, la variable x se llama **variable independiente**, porque se le asigna cualquiera de los valores permitidos del dominio. La variable y se llama **variable dependiente**, porque su valor depende de x.

Cualquier símbolo se utiliza para representar las variables independiente y dependiente. Por ejemplo, si f es la *función cubo*, entonces f puede escribirse como $f(x) = x^3$ o $f(t) = t^3$ o $f(z) = z^3$. Las tres funciones son la misma. Cada una indica elevar al cubo la variable independiente. En la práctica, los símbolos usados para las variables independiente y dependiente se basan en el uso común, como usar C para el costo en los negocios.

La variable independiente también se llama **argumento** de la función. Pensar en la variable como en un argumento ayuda a encontrar el valor de una función. Por ejemplo, si f es la función definida por $f(x) = x^3$, entonces f nos dice que se eleve al cubo el argumento. Así, $f(2)$ significa elevar 2 al cubo, $f(a)$ quiere decir elevar el número a al cubo, y $f(x + h)$ indica el cubo de la cantidad $x + h$.

EJEMPLO 5 Encontrar los valores de una función

Para la función f definida por $f(x) = 2x^2 - 3x$, evalúe

a) $f(3)$ b) $f(x) + f(3)$ c) $f(-x)$

d) $-f(x)$ e) $f(x + 3)$ f) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$

Solución a) Se sustituye 3 en lugar de x en la ecuación de f para obtener

$$f(3) = 2(3)^2 - 3(3) = 18 - 9 = 9$$

b) $f(x) + f(3) = (2x^2 - 3x) + (9) = 2x^2 - 3x + 9$

c) Se sustituye $-x$ en lugar de x en la ecuación de f,

$$f(-x) = 2(-x)^2 - 3(-x) = 2x^2 + 3x$$

d) $-f(x) = -(2x^2 - 3x) = -2x^2 + 3x$

e) $f(x + 3) = 2(x + 3)^2 - 3(x + 3)$ Observe el uso de paréntesis.

$$= 2(x^2 + 6x + 9) - 3x - 9$$

$$= 2x^2 + 12x + 18 - 3x - 9$$

$$= 2x^2 + 9x + 9$$

f) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[2(x+h)^2 - 3(x+h)] - [2x^2 - 3x]}{h}$$

↑ $f(x + h) = 2(x + h)^2 - 3(x + h)$

$$= \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 3x - 3h - 2x^2 + 3x}{h}$$ Simplificar.

$$= \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3h - 2x^2}{h}$$

$$= \frac{4xh + 2h^2 - 3h}{h}$$

$$= \frac{h(4x + 2h - 3)}{h}$$ Factorizar h.

$$= 4x + 2h - 3$$ Cancelar h. ◀

Observe que en este ejemplo $f(x + 3) \neq f(x) + f(3)$ y $f(-x) \neq -f(x)$.



La expresión en el inciso *f*) se llama **cociente de diferencias** de *f*, una expresión importante en cálculo.



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 27 Y 73.

Casi todas las calculadoras traen teclas especiales que permiten encontrar el valor de ciertas funciones de uso común. Por ejemplo, debe poder encontrar la función elevar al cuadrado $f(x) = x^2$, la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, la función recíproco $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, y muchas otras que se estudiarán más adelante (como ln x y log x). Verifique en su calculadora los resultados del ejemplo 6 siguiente.

EJEMPLO 6 Encontrar los valores de una función en una calculadora

a) $f(x) = x^2; \quad f(1.234) = 1.522756$

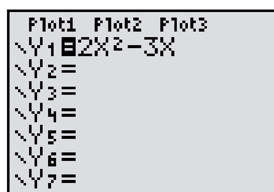
b) $F(x) = \frac{1}{x}; \quad F(1.234) = 0.8103727715$

c) $g(x) = \sqrt{x}; \quad g(1.234) = 1.110855526$ ◀



COMENTARIO: Puede usar las calculadoras con gráficas para evaluar cualquier función que desee. La figura 7 muestra el resultado obtenido en el ejemplo 5*a*) en una calculadora gráfica TI-83, donde la función que se evaluó es $f(x) = 2x^2 - 3x$, en Y_1.*

Figura 7





■

*Consulte en su manual del propietario las teclas requeridas.

Forma implícita de una función

En general, cuando una función f está definida por una ecuación en x y y, se dice que la función f está dada de manera **implícita**. Si es posible resolver la ecuación para y en términos de x, entonces se escribe $y = f(x)$ y se dice que la función está en forma **explícita**. Por ejemplo

Forma implícita	**Forma explícita**
$3x + y = 5$	$y = f(x) = -3x + 5$
$x^2 - y = 6$	$y = f(x) = x^2 - 6$
$xy = 4$	$y = f(x) = \dfrac{4}{x}$

No todas las ecuaciones en x y y definen una función $y = f(x)$. Si se despeja y de una ecuación y se obtienen dos valores o más de y para una x dada, entonces la ecuación no define una función.

EJEMPLO 7 Determinar si una ecuación es una función

Determine si la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es una función.

Solución Para determinar si la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, que define el círculo unitario, es una función, es necesario despejar y de la ecuación.

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y^2 = 1 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \quad \text{Método de la raíz cuadrada}$$

Para valores de x entre -1 y 1, se obtienen dos valores de y. Esto significa que la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ no define una función. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 41.


COMENTARIO: La forma explícita de una función es la forma que requiere una calculadora gráfica. ¿Ahora se da cuenta por qué es necesario graficar un círculo en dos partes? ■

A continuación se da un resumen de algunos hechos importantes que debe recordar de una función f.

Resumen

Hechos importantes de las funciones

a) Para cada x en el dominio de f, existe exactamente una imagen $f(x)$ en el rango; sin embargo, un elemento en el rango puede ser resultado de más de una x en el dominio.
b) f es el símbolo que se usa para denotar una función. Es el símbolo de la ecuación que se utiliza para obtener a partir de una x en el dominio una $f(x)$ en el rango.
c) Si $y = f(x)$, entonces x se llama variable independiente o argumento de f, y y se llama variable dependiente o valor de f en x.

Dominio de una función

3 A menudo el dominio de una función f no se especifica; más bien sólo se da la ecuación que define la función. En esos casos, la convención es que el dominio de f es el conjunto más grande de números reales para el que el valor de $f(x)$ es un número real. El dominio de una función f es el mismo que el dominio de la variable x en la expresión $f(x)$.

EJEMPLO 8 **Encontrar el dominio de una función**

Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 5x$ b) $g(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$ c) $h(t) = \sqrt{4 - 3t}$

Solución

a) La función dice que se eleve al cuadrado un número y luego se sume cinco veces el número. Como estas operaciones se realizan para cualquier número real, se concluye que el dominio de f es todos los números reales.

b) La función g indica dividir $3x$ entre $x^2 - 4$. Como la división entre 0 no está definida, el denominador $x^2 - 4$ no debe ser 0, de manera que x no puede ser igual a -2 o 2. El dominio de la función g es $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2\}$.

c) La función h dice que se obtenga la raíz cuadrada de $4 - 3t$. Pero sólo números no negativos tienen raíces cuadradas reales, de modo que la expresión dentro de la raíz debe ser no negativa. Esto requiere que

$$\begin{aligned} 4 - 3t &\geq 0 \\ -3t &\geq -4 \\ t &\leq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

El dominio de h es $\left\{t \mid t \leq \frac{4}{3}\right\}$ o el intervalo $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right]$. ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 51.

Si x está en el dominio de una función f, se dice que ***f* está definida en *x*** o que ***f*(*x*) existe**. Si x no está en el dominio de f, se dice que ***f* no está definida en *x*** o que ***f*(*x*) no existe**. Por ejemplo, si $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, entonces $f(0)$ existe, pero $f(1)$ y $f(-1)$ no existen. (¿Por qué?)

No se ha dicho mucho acerca de encontrar el rango de una función. La razón es que cuando una función está definida por una ecuación muchas veces es difícil encontrar el rango.* Por lo tanto, nos conformaremos con encontrar sólo el dominio de una función cuando sólo se da la regla para la función. Se expresará el dominio de la función mediante desigualdades, la notación de intervalos, la notación de conjuntos, o palabras, lo que sea más conveniente.

Aplicaciones

Cuando se utilizan funciones en las aplicaciones, el dominio podría estar restringido por las consideraciones físicas o geométricas. Por ejemplo, el dominio de la función f definida por $f(x) = x^2$ es el conjunto de todos los nú-

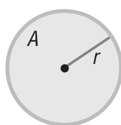
*En la sección 5.2 se estudiará una manera de encontrar el rango para una clase especial de funciones.

meros reales. Sin embargo, si f se usa para obtener el área de un cuadrado cuando se conoce la longitud x de un lado, entonces debemos restringir el dominio de la función a los números reales positivos, ya que la longitud de un lado no puede ser 0 o negativa.

EJEMPLO 9 Área de un círculo

Exprese el área de un círculo como función de su radio.

Figura 8



Solución Vea la figura 8. Se sabe que la fórmula para el área A de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. Si se usa r para representar la variable independiente y A representa la variable dependiente, la función que expresa esta relación es

$$A(r) = \pi r^2$$

En este contexto, el dominio es $\{r|r > 0\}$. (¿Por qué?) ◀

Observe que en la solución del ejemplo 9 se usó el símbolo A de dos maneras: para dar nombre a la función y como el símbolo de la variable dependiente. Este doble uso es común en las aplicaciones y no debe causar problemas.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 85.

Operaciones de funciones

4 Ahora se introducen algunas operaciones para las funciones. Se verá que las funciones, como los números, se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Por ejemplo, si $f(x) = x^2 + 9$ y $g(x) = 3x + 5$, entonces

$$f(x) + g(x) = (x^2 + 9) + (3x + 5) = x^2 + 3x + 14$$

La nueva función $y = x^2 + 3x + 14$ se llama *función suma* $f + g$. De manera similar,

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 9)(3x + 5) = 3x^3 + 5x^2 + 27x + 45$$

La nueva función $y = 3x^3 + 5x^2 + 27x + 45$ se llama *función producto* $f \cdot g$.

A continuación se dan las definiciones generales.

Si f y g son funciones:

La **suma** $f + g$ es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El dominio de $f + g$ consiste en todos los números x que están en los dominios de las dos funciones f y g.

La **diferencia** $f - g$ es la función definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

El dominio de $f - g$ consiste en todos los números x que están en los dominios de las dos funciones f y g.

El producto $\boldsymbol{f \cdot g}$ es la función definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

El dominio de $f \cdot g$ consiste en los números x que están en el dominio de ambas, f y g.

El **cociente** $\dfrac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$ es la función definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad g(x) \neq 0$$

El dominio de $\dfrac{f}{g}$ consiste en todos los números x para los que $g(x) \neq 0$ están en los dominios tanto de f como de g.

EJEMPLO 10

Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones definidas como

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x}{x-1}$$

Encuentre lo siguiente y determine el dominio en cada caso.

a) $(f + g)(x)$ b) $(f - g)(x)$ c) $(f \cdot g)(x)$ d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

Solución El dominio de f es $\{x | x \neq -2\}$ y el dominio de g es $\{x | x \neq 1\}$.

a) $$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} + \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2 + 3x - 1}{(x+2)(x-1)}$$

El dominio de $f + g$ consiste en los números x que están en los dominios de ambas f y g. Por lo tanto, el dominio de $f + g$ es $\{x | x \neq -2, x \neq 1\}$.

b) $$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} - \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{-(x^2 + x + 1)}{(x+2)(x-1)}$$

El dominio de $f - g$ consiste en los números x que están en los dominios de ambas f y g. Por lo tanto, el dominio de $f - g$ es $\{x | x \neq -2, x \neq 1\}$.

c) $$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x}{(x+2)(x-1)}$$

El dominio de $f \cdot g$ consiste en los números x que están en los dominios de ambas f y g. Por lo tanto, el dominio de $f \cdot g$ es $\{x | x \neq -2, x \neq 1\}$.

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\dfrac{1}{x+2}}{\dfrac{x}{x-1}} = \dfrac{1}{x+2} \cdot \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{x-1}{x(x+2)}$

El dominio de $\dfrac{f}{g}$ consiste en los números x para los que $g(x) \neq 0$ que están en los dominios de ambas f y g. Como $g(x) = 0$ cuando $x = 0$, se excluye 0 al igual que -2 y 1. El dominio de $\dfrac{f}{g}$ es $\{x | x \neq -2, x \neq 0, x \neq 1\}$.

◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 61.



En cálculo, en ocasiones es útil ver una función complicada como la suma, la diferencia, el producto o el cociente de funciones más sencillas. Por ejemplo,

$F(x) = x^2 + \sqrt{x}$ es la suma de $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

$H(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ es el cociente de $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x^2 + 1$.

Resumen

Se da aquí una lista del vocabulario importante introducido en esta sección, con una breve descripción de cada término.

Función	Una relación entre dos conjuntos de números reales tal que a cada número x en el primer conjunto, el dominio, le corresponde exactamente un número y en el segundo conjunto.
	Un conjunto de pares ordenados (x, y) o $(x, f(x))$ en donde ningún primer elemento se aparea con dos segundos elementos diferentes.
	El rango de una función es el conjunto de valores y de la función para los valores x en el dominio.
	Una función f se define de manera implícita por una ecuación que involucra a x y y o de manera explícita escribiendo $y = f(x)$.
Dominio no especificado	Si una función f está definida por una ecuación y no se especifica el dominio, entonces este dominio se tomará como el conjunto más grande de números reales para el que la ecuación define un número real.
Notación de funciones	$y = f(x)$
	f es un símbolo para la función.
	x es la variable independiente o argumento.
	y es la variable dependiente.
	$f(x)$ es el valor de la función en x, o la imagen de x.

3.1 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. La desigualdad $-1 < x < 3$ se escribe en la notación de intervalos como _________. (pp. 125-126)

2. Si $x = -2$, el valor de la expresión $3x^2 - 5x + \dfrac{1}{x}$ es _________. (pp. 20-21)

3. El dominio de la variable en la expresión $\dfrac{x-3}{x+4}$ es _________. (pp. 20–21)

4. Resuelva la desigualdad: $3 - 2x > 5$. Grafique el conjunto de soluciones. (pp. 129–133)

Conceptos y vocabulario

5. Si f es una función definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces x se llama variable _________ y y es la variable _________.

6. El conjunto de todas las imágenes de los elementos en el dominio de una función se llama _________.

7. Si el dominio de f es todos los números reales en el intervalo $[0, 7]$ y el dominio de g es todos los números reales en el intervalo $[-2, 5]$, el dominio de $f + g$ es todos los números reales en el intervalo _________.

8. El dominio de $\frac{f}{g}$ consiste en los números x tales que $g(x)$ ________ 0, que están en los dominios de ambas _______ y _________.

9. Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^3$, entonces _________________ $= x^3 - (x + 1)$.

10. *Falso o verdadero:* toda relación es una función.

11. *Falso o verdadero:* el dominio de $(f \cdot g)(x)$ consiste en los números x que están en los dominios de ambas, f y g.

12. *Falso o verdadero:* la variable independiente algunas veces recibe el nombre de argumento de la función.

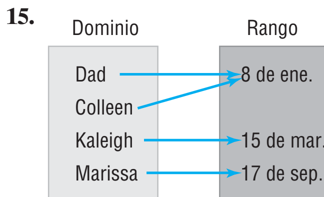
13. *Falso o verdadero:* si no se especifica el dominio de una función f, entonces el dominio de f se toma como el conjunto de números reales.

14. *Falso o verdadero:* el dominio de la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$ es $\{x | x \neq \pm 2\}$.

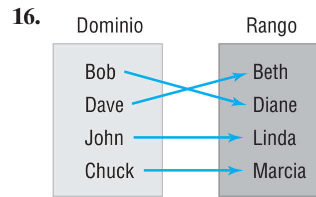
Ejercicios

En los problemas 15-26, determine si cada relación representa una función. Para cada función, establezca el dominio y el rango.

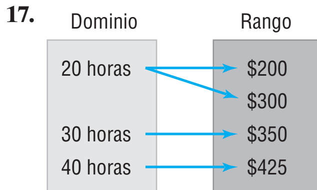
15.



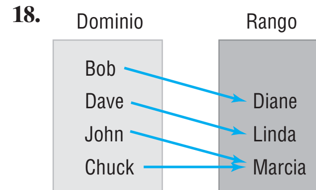
16.



17.



18.



19. $\{(2, 6), (-3, 6), (4, 9), (2, 10)\}$

20. $\{(-2, 5), (-1, 3), (3, 7), (4, 12)\}$

21. $\{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$

22. $\{(0, -2), (1, 3), (2, 3), (3, 7)\}$

23. $\{(-2, 4), (-2, 6), (0, 3), (3, 7)\}$

24. $\{(-4, 4), (-3, 3), (-2, 2), (-1, 1), (-4, 0)\}$

25. $\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

26. $\{(-2, 16), (-1, 4), (0, 3), (1, 4)\}$

En los problemas 27-34, encuentre los valores siguientes para cada función.

a) $f(0)$ b) $f(1)$ c) $f(-1)$ d) $f(-x)$ e) $-f(x)$ f) $f(x + 1)$ g) $f(2x)$ (h) $f(x + h)$

27. $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$

28. $f(x) = -2x^2 + x - 1$

29. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

30. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 4}$

31. $f(x) = |x| + 4$

32. $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

33. $f(x) = \frac{2x + 1}{3x - 5}$

34. $f(x) = 1 - \frac{1}{(x + 2)^2}$

En los problemas 35-46, determine si la ecuación es una función.

35. $y = x^2$

36. $y = x^3$

37. $y = \frac{1}{x}$

38. $y = |x|$

39. $y^2 = 4 - x^2$

40. $y = \pm\sqrt{1 - 2x}$

41. $x = y^2$

42. $x + y^2 = 1$

43. $y = 2x^2 - 3x + 4$

44. $y = \frac{3x - 1}{x + 2}$

45. $2x^2 + 3y^2 = 1$

46. $x^2 - 4y^2 = 1$

En los problemas 47-60, encuentre el dominio de cada función.

47. $f(x) = -5x + 4$ **48.** $f(x) = x^2 + 2$ **49.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **50.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

51. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 16}$ **52.** $h(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ **53.** $F(x) = \dfrac{x - 2}{x^3 + x}$ **54.** $G(x) = \dfrac{x + 4}{x^3 - 4x}$

55. $h(x) = \sqrt{3x - 12}$ **56.** $G(x) = \sqrt{1 - x}$ **57.** $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x - 9}}$ **58.** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x - 4}}$

59. $p(x) = \sqrt{\dfrac{2}{x - 1}}$ **60.** $q(x) = \sqrt{-x - 2}$

En los problemas 61-70, para las funciones dadas f y g, encuentre las siguientes funciones y establezca el dominio de cada una.

a) $f + g$ b) $f - g$ c) $f \cdot g$ d) $\dfrac{f}{g}$

61. $f(x) = 3x + 4;\quad g(x) = 2x - 3$

62. $f(x) = 2x + 1;\quad g(x) = 3x - 2$

63. $f(x) = x - 1;\quad g(x) = 2x^2$

64. $f(x) = 2x^2 + 3;\quad g(x) = 4x^3 + 1$

65. $f(x) = \sqrt{x};\quad g(x) = 3x - 5$

66. $f(x) = |x|;\quad g(x) = x$

67. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x};\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

68. $f(x) = \sqrt{x - 2};\quad g(x) = \sqrt{4 - x}$

69. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{3x - 2};\quad g(x) = \dfrac{4x}{3x - 2}$

70. $f(x) = \sqrt{x + 1};\quad g(x) = \dfrac{2}{x}$

71. Dados $f(x) = 3x + 1$ y $(f + g)(x) = 6 - \dfrac{1}{2}x$, encuentre la función g.

72. Dados $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - x}$, encuentre la función g.

En los problemas 73-78, encuentre el cociente de diferencias f, es decir, encuentre $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$, *para cada función. Simplifique.*

73. $f(x) = 4x + 3$ **74.** $f(x) = -3x + 1$ **75.** $f(x) = x^2 - x + 4$

76. $f(x) = x^2 + 5x - 1$ **77.** $f(x) = x^3 - 2$ **78.** $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

79. Si $f(x) = 2x^3 + Ax^2 + 4x - 5$ y $f(2) = 5$, ¿cuál es el valor de A?

80. Si $f(x) = 3x^2 - Bx + 4$ y $f(-1) = 12$, ¿cuál es el valor de B?

81. Si $f(x) = \dfrac{3x + 8}{2x - A}$ y $f(0) = 2$, ¿cuál es el valor de A?

82. Si $f(x) = \dfrac{2x - B}{3x + 4}$ y $f(2) = \dfrac{1}{2}$, ¿cuál es el valor de B?

83. Si $f(x) = \dfrac{2x - A}{x - 3}$ y $f(4) = 0$, ¿cuál es el valor de A? ¿Dónde no está definida f?

84. Si $f(x) = \dfrac{x - B}{x - A}$, $f(2) = 0$, y $f(1)$ no está definida, ¿cuáles son los valores de A y B?

85. Geometría Exprese el área A de un rectángulo como una función del largo x si el largo del rectángulo es el doble del ancho.

86. Geometría Exprese el área A de un triángulo rectángulo isósceles como una función de la longitud x de los lados iguales.

87. Construcción de funciones Exprese el salario bruto G de una persona que gana $10 por hora, como una función del número x de horas trabajadas.

88. Construcción de funciones Tiffany, una vendedora por comisiones, gana un salario base de $100 más $10 por artículo vendido. Exprese su salario bruto G como una función del número x de artículos vendidos.

89. Efecto de la gravedad en la Tierra Si una roca cae en la Tierra desde una altura de 20 metros, la altura H (en metros) después de x segundos es aproximadamente

$$H(x) = 20 - 4.9x^2$$

a) ¿Cuál es la altura de la roca cuando $x = 1$ segundo, $x = 1.1$ segundos, $x = 1.2$ segundos, $x = 1.3$ segundos?
b) ¿Cuándo está la roca a una altura de 15 metros, 10 metros, 5 metros?
c) ¿Cuándo pega la roca en la Tierra?

90. Efecto de la gravedad en Júpiter Si una roca cae en el planeta Júpiter desde una altura de 20 metros, su altura H (en metros) después de x segundos es aproximadamente

$$H(x) = 20 - 13x^2$$

a) ¿Cuál es la altura de la roca cuando $x = 1$ segundo, $x = 1.1$ segundos, $x = 1.2$ segundos?
b) ¿Cuándo está la roca a una altura de 15 metros, 10 metros, 5 metros?

c) ¿Cuándo pega la roca en la superficie?



91. Costo de un viaje trasatlántico Un Boeing 747 cruza el océano Atlántico (3000 millas) a una velocidad aérea de 500 millas por hora. El costo C (en dólares) por pasajero está dado por

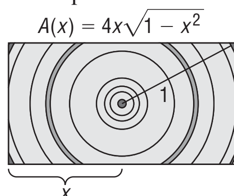
$$C(x) = 100 + \frac{x}{10} + \frac{36{,}000}{x}$$

donde x es la velocidad en tierra (velocidad aérea ± viento).

a) ¿Cuál es el costo por pasajero para condiciones de quietud (ausencia de viento)?
b) Cuál es el costo por pasajero con viento en contra de 50 millas por hora?
c) ¿Cuál es el costo por pasajero con viento de cola de 100 millas por hora?
d) ¿Cuál es el costo por pasajero con viento en contra de 100 millas por hora?

92. Área de sección cruzada El área de sección cruzada del corte de una viga obtenida a partir de un tronco con radio de 1 pie está dada por la función $A(x) = 4x\sqrt{1 - x^2}$, donde x representa la longitud de la mitad de la base de la viga. Vea la figura. Determine el área de la sección cruzada de la viga si la longitud de la mitad de la base es la siguiente:

a) un tercio de un pie
b) medio pie
c) dos tercios de un pie



93. Economía La **tasa de participación** es el número de personas en la fuerza de trabajo dividida entre la población civil (excluye militares). Sean $L(x)$ el tamaño de la fuerza de trabajo en el año x y $P(x)$ la población civil en el año x. Determine una función que represente la tasa de participación como una función de x.

94. Crimen Suponga que $V(x)$ es el número de crímenes violentos cometidos en el año x y $P(x)$ es el número de crímenes a la propiedad cometidos en el año x. Determine una función T que represente el total combinado de crímenes violentos y a la propiedad en el año x.

95. Cuidado de la salud Suponga que $P(x)$ representa el porcentaje de ingresos gastados en el cuidado de la salud en el año x y que $I(x)$ es el ingreso en el año x. Determine una función H que represente los gastos totales en cuidado de la salud en el año x.

96. Impuestos Suponga que $I(x)$ es el ingreso de un individuo en el año x antes de impuestos y $T(x)$ es el impuesto que paga el año x. Determine una función N que represente el ingreso neto de la persona (ingreso después de impuestos) en el año x.

97. Algunas funciones f tienen la propiedad de que $f(a + b) = fa) + fb)$ para todos los números reales a y b. ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen esta propiedad?

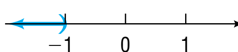
a) $h(x) = 2x$ b) $g(x) = x^2$
c) $F(x) = 5x - 2$ d) $G(x) = \frac{1}{x}$

98. ¿Son las mismas las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$? Explique.

99. Investigue en la historia, cuando apareció por primera vez el uso de la función $y = f(x)$.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $(-1, 3)$ **2.** 21.5
3. $\{x|x \neq -4\}$ **4.** $\{x|x < -1\}$



3.2 Gráfica de una función

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Gráficas de ecuaciones (sección 2.2, pp. 165-168)
- Intercepciones (sección 2.2, pp. 169-170)



Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 236.

OBJETIVOS
1 Identificar la gráfica de una función
2 Obtener información de o acerca de la gráfica de una función

Con frecuencia en las aplicaciones, una gráfica muestra con mayor claridad la relación entre dos variables que, digamos, una ecuación o una tabla. Por ejemplo, la tabla 1 contiene el precio por acción de IBM al cierre de cada

Tabla 1

Fecha	Precios al cierre del mes ($)
6/30/02	72.00
7/31/02	66.40
8/31/02	75.38
9/30/02	60.36
10/31/02	74.56
11/30/02	87.10
12/31/02	77.36
1/31/03	78.20
2/28/03	77.95
3/31/03	78.43
4/30/03	84.90
5/31/03	88.04
6/30/03	82.50

mes de 30/06/02 a 30/06/03. Si se grafican estos datos usando la fecha como coordenada x y el precio como coordenada y, y luego se conectan los puntos, se obtiene la figura 9.

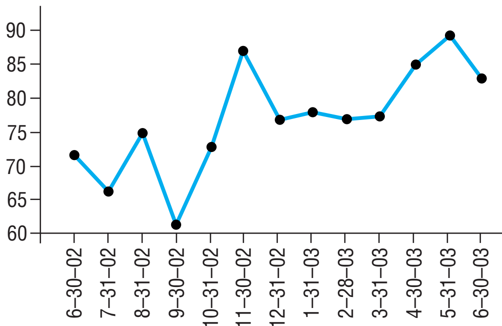


Figura 9
Precios al cierre del mes de las acciones de IBM de 30/06/02 a 30/06/03

Se observa en la gráfica que el precio de la acción subió con rapidez del 30/9/02 al 30/11/02 y bajó entre el 31/8/02 y 30/9/02. La gráfica también muestra que el precio más bajo ocurrió al final de septiembre de 2002, mientras que el más alto ocurrió al final de mayo de 2003. Las ecuaciones y tablas, por otro lado, suelen requerir ciertos cálculos e interpretación antes de que se pueda "ver" este tipo de información.

Vea de nuevo la figura 9. La gráfica muestra que para cada fecha en el eje horizontal x existe sólo un precio en el eje vertical. La gráfica representa una función, aunque no está dada la regla exacta para ir de la fecha al precio.

Cuando una función está definida por una ecuación en x y y, la **gráfica de la función** es la gráfica de la ecuación, es decir, el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy que satisfacen esa ecuación.



COMENTARIO: Cuando se selecciona la pantalla rectangular para graficar una función, los valores *X*min y *X*max dan el dominio que se desea ver, mientras que *Y*min y *Y*max dan el rango que se desea ver. Estas características no suelen representar el dominio y el rango reales de la función. ■



No toda colección de puntos en el plano xy representa la gráfica de una función. Recuerde que, para una función, cada número x en el dominio tiene exactamente una imagen y en el rango. Esto significa que la gráfica de una función no puede contener dos puntos con la misma coordenada x y diferentes coordenadas y. Por lo tanto, la gráfica de una función debe satisfacer la siguiente **prueba de la recta vertical**.

Teorema

Prueba de la recta vertical

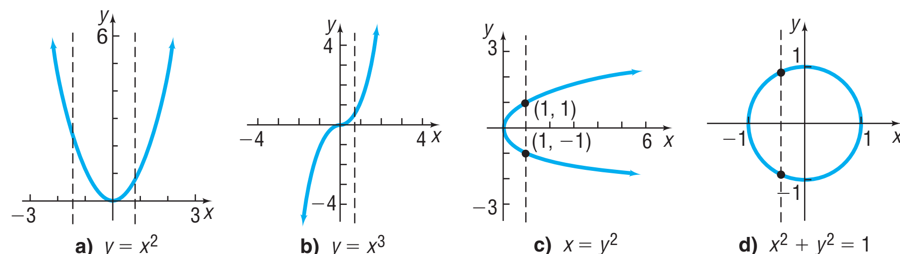
Un conjunto de puntos en el plano xy es la gráfica de una función si y sólo si toda recta vertical cruza la gráfica a lo más en un punto.

En otras palabras, si una recta vertical cruza una gráfica en más de un punto, la gráfica no corresponde a una función.

EJEMPLO 1 Identificar la gráfica de una función

¿Cuáles gráficas en la figura 10 son gráficas de funciones?

Figura 10



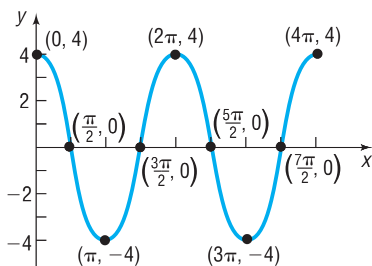
Solución Las gráficas de las figuras 10*a*) y 10*b*) son gráficas de funciones, porque toda recta vertical cruza cada gráfica cuando mucho en un punto. Las gráficas 10*c*) y 10*d*) no son gráficas de funciones, porque existe una línea vertical que cruza cada gráfica en más de un punto. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 15.

2 Si (x, y) es un punto en la gráfica de una función f, entonces y es el valor de f en x, es decir, $y = f(x)$. El ejemplo que sigue ilustra cómo obtener información acerca de la función si su gráfica está dada.

EJEMPLO 2 Información a partir de la gráfica de una función

Figura 11



Sea f la función cuya gráfica está dada en la figura 11. (La gráfica de f podría representar la distancia a la que está un péndulo de su posición de *reposo*. Los valores negativos de y significan que el péndulo está a la izquierda de la posición de reposo y los valores positivos de y significan que está a la derecha de esa posición).

a) ¿Cuáles son los valores de $f(0)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ y $f(3\pi)$?
b) ¿Cuál es el dominio de f?
c) ¿Cuál es el rango de f?
d) Enumere las intercepciones. (Recuerde que son los puntos, si los hay, donde la gráfica cruza o toca los ejes coordenados).
e) ¿Con qué frecuencia la recta $y = 2$ cruza la gráfica?
f) ¿Para qué valores de x, $f(x) = -4$?
g) ¿Para qué valores de x, $f(x) > 0$?

Solución a) Como (0,4) está en la gráfica de f, la coordenada y, 4, es el valor de f en la coordenada x, 0, es decir, $f(0) = 4$. De manera similar, se encuentra que cuando $x = \frac{3\pi}{2}$ entonces $y = 0$, o sea $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$. Cuando $x = 3\pi$, entonces $y = -4$, de modo que $f(3\pi) = -4$.

b) Para determinar el dominio de f, se observa que los puntos de la gráfica f tienen coordenada x entre 0 y 4π, inclusive; y para cada número x en-

tre 0 y 4π, existe un punto $(x, f(x))$ en la gráfica. El dominio de f es $\{x | 0 \leq x \leq 4\pi\}$ o el intervalo $[0, 4\pi]$.

c) Todos los puntos en la gráfica tienen coordenada y entre -4 y 4, inclusive, y para cada número y de éstos, existe al menos un número x en el dominio. El rango de f es $\{y | -4 \leq y \leq 4\}$ o el intervalo $[-4, 4]$.

d) Las intercepciones son

$$(0, 4), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{2}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{7\pi}{2}, 0\right).$$

e) Si se dibuja la recta horizontal $y = 2$ en la gráfica de la figura 11, se encuentra que cruza la gráfica cuatro veces.

f) Como $(\pi, -4)$ y $(3\pi, -4)$ son los únicos puntos en la gráfica para los que $y = f(x) = -4$, se tiene que $f(x) = -4$ cuando $x = \pi$ y $x = 3\pi$.

g) Para determinar dónde $f(x) > 0$, se ve la figura 11 y se especifican los valores de x para los cuales la coordenada y es positiva. Esto ocurre en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right]$. Usando la notación de desigualdades, $f(x) > 0$ para $0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ y $\frac{7\pi}{2} < x \leq 4\pi$. ◀

Cuando se conoce la gráfica de una función, su dominio podría verse como la sombra creada por la gráfica sobre el eje x, por rayos verticales de luz. Su rango puede verse como la sombra creada por la gráfica sobre el eje y por rayos horizontales de luz. Intente esta técnica con la gráfica de la figura 11.

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 9 Y 13.

EJEMPLO 3 Información acerca de la gráfica de una función

Considere la función: $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

a) El punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ¿está en la gráfica de f?

b) Si $x = -1$, ¿cuál es el valor de $f(x)$? ¿Cuál es el punto en la gráfica de f?

c) Si $f(x) = 2$, ¿cuánto vale x? ¿Cuál es el punto en la gráfica de f?

Solución a) Cuando $x = 1$, entonces

$$f(x) = \frac{x}{x + 2}$$
$$f(1) = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

El punto $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ está en la gráfica de f; el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ no lo está.

b) Si $x = -1$, entonces

$$f(x) = \frac{x}{x + 2}$$
$$f(-1) = \frac{-1}{-1 + 2} = -1$$

El punto $(-1, -1)$ está en la gráfica de f.

c) Si $f(x) = 2$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \\ \frac{x}{x+2} &= 2 \\ x &= 2(x+2) && \text{Multiplicar ambos lados por } x+2. \\ x &= 2x + 4 && \text{Eliminar paréntesis.} \\ x &= -4 && \text{Despejar } x. \end{aligned}$$

Si $f(x) = 2$, entonces $x = -4$, el punto $(-2, 4)$ está en la gráfica de f. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.

EJEMPLO 4 Función de costo promedio

El costo promedio $\overline{C}$ de fabricar x computadoras por día está dado por la función

$$\overline{C}(x) = 0.56x^2 - 34.39x + 1212.57 + \frac{20{,}000}{x}$$

Determine el costo promedio de fabricar:

a) 30 computadoras en un día
b) 40 computadoras en un día
c) 50 computadoras en un día



d) Grafique la función $\overline{C} = \overline{C}(x)$, $0 < x \leq 80$.
e) Elabore una TABLA con TblStart = 1 y ΔTbl = 1.* ¿Qué valor de x minimiza el costo promedio?

Solución a) El costo promedio de fabricar $x = 30$ computadoras es

$$\overline{C}(30) = 0.56(30)^2 - 34.39(30) + 1212.57 + \frac{20{,}000}{30} = \$1351.54$$

b) El costo promedio de fabricar $x = 40$ computadores es

$$\overline{C}(40) = 0.56(40)^2 - 34.39(40) + 1212.57 + \frac{20{,}000}{40} = \$1232.97$$

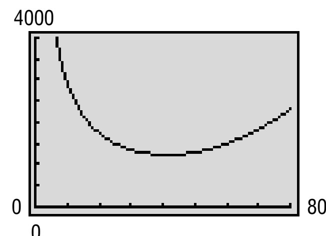
c) El costo promedio de fabricar $x = 50$ computadoras es

$$\overline{C}(50) = 0.56(50)^2 - 34.39(50) + 1212.57 + \frac{20{,}000}{50} = \$1293.07$$



d) Vea la gráfica de $\overline{C} = \overline{C}(x)$ en la figura 12.

Figura 12





e) Con la función $\overline{C} = \overline{C}(x)$ en Y_1, se crea la tabla 2. Se recorre hacia abajo hasta encontrar un valor de x para el que Y_1 sea el más pequeño. La

*Verifique en su manual del propietario las teclas que debe usar.

tabla 3 muestra que fabricar $x = 41$ computadoras minimiza el costo promedio en $1231.74 por computadora.

Tabla 2

X	Y1	
1	21179	
2	11146	
3	7781.1	
4	6084	
5	5054.6	
6	4359.7	
7	3856.4	

Y1■.56X²-34.39X...

Tabla 3

X	Y1	
38	1240.7	
39	1235.9	
40	1233	
41	1231.7	
42	1232.2	
43	1234.4	
44	1238.1	

Y1=1231.74487805

◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

Resumen

Gráfica de una función La colección de puntos (x, y) que satisfacen la ecuación $y = f(x)$.
Una colección de puntos es la gráfica de una función siempre que toda recta vertical cruce a la gráfica cuando mucho en un punto (prueba de la recta vertical).

3.2 Evalúe su compresión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Las intercepciones de la ecuación $x^2 + 4y^2 = 16$ son __________. (pp. 169-170)

2. *Falso o verdadero:* el punto $(-2, 3)$ está en la gráfica de la ecuación $x = 2y - 2$. (pp. 165-168)

Conceptos y vocabulario

3. Un conjunto de puntos en el plano xy es la gráfica de una función si y sólo si toda recta _________ cruza la gráfica cuando más en un punto.

4. Si el punto $(5, -3)$ es un punto en la gráfica de f, entonces $f($ __________ $) =$ _____________.

5. Encuentre a tal que el punto $(-1, 2)$ esté en la gráfica de $f(x) = ax^2 + 4$.

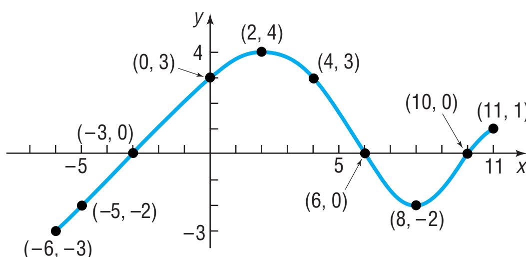
6. *Falso o verdadero:* una función puede tener más de una intercepción y.

7. *Falso o verdadero:* la gráfica de una función $y = f(x)$ siempre cruza el eje y.

8. *Falso o verdadero:* la intercepción y de la gráfica de una función $y = f(x)$, cuyo dominio es todos los números reales, es $f(0)$.

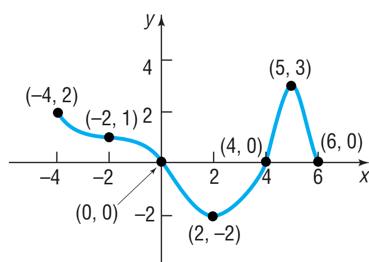
Ejercicios

9. Utilice la gráfica de la función f dada en seguida para responder los incisos *a*) a *n*).



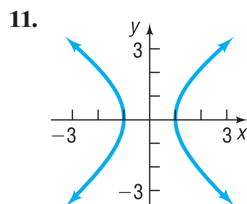
a) Encuentre $f(0)$ y $f(-6)$.
b) Encuentre $f(6)$ y $f(11)$.
c) ¿$f(3)$ es positivo o negativo?
d) ¿$f(-4)$ es positivo o negativo?
e) ¿Para qué números x es $f(x) = 0$?
f) ¿Para qué números x es $f(x) > 0$?
g) ¿Cuál es el dominio de f?
h) ¿Cuál es el rango de f?
i) ¿Cuáles son las intercepciones x?
j) ¿Cuál es la intercepción y?
k) ¿Con qué frecuencia la recta $y = \frac{1}{2}$ intersecta la gráfica?
l) ¿Con qué frecuencia la recta $x = 5$ intersecta la gráfica?
m) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) = 3$?
n) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) = -2$?

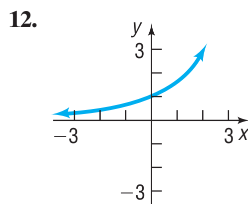
10. Use la gráfica de la función f dada en seguida para responder los incisos *a*) a *n*).

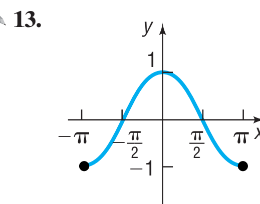


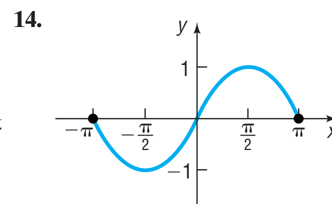
a) Encuentre $f(0)$ y $f(6)$.
b) Encuentre $f(2)$ y $f(-2)$.
c) ¿$f(3)$ es positivo o negativo?
d) ¿$f(-1)$ es positivo o negativo?
e) ¿Para qué números x es $f(x) = 0$?
f) ¿Para qué números x es $f(x) < 0$?
g) ¿Cuál es el dominio de f?
h) ¿Cuál es el rango de f?
i) ¿Cuáles son las intercepciones x?
j) ¿Cuál es la intercepción y?
k) ¿Con qué frecuencia la recta $y = -1$ intersecta la gráfica?
l) ¿Con qué frecuencia la recta $x = 1$ intersecta la gráfica?
m) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) = 3$?
n) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) = -2$?

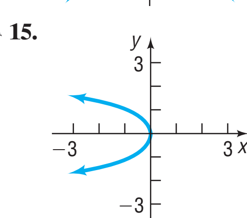
En los problemas 11-22, determine si la gráfica corresponde a una función usando la prueba de la recta vertical. Si lo es, use la gráfica para encontrar:
a) *su dominio y rango,*
b) *las intercepciones, si las hay,*
c) *cualquier simetría respecto del eje x, el eje y y el origen.*

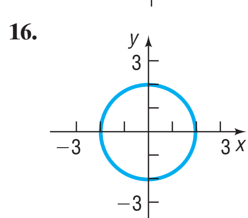
11.


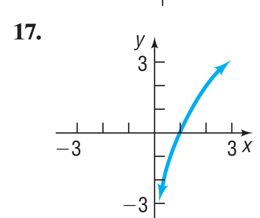
12.


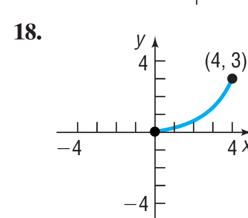
13.


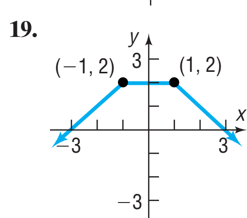
14.


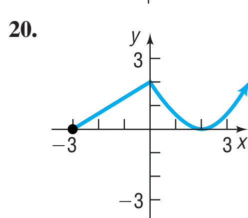
15.


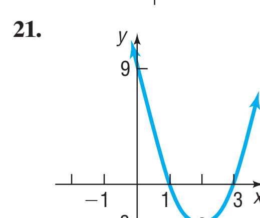
16.


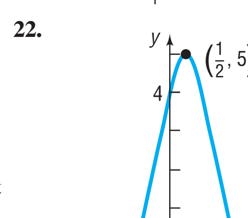
17.


18.


19.


20.


21.


22.


En los problemas 23-28, conteste las preguntas acerca de la función dada.

23. $f(x) = 2x^2 - x - 1$
a) ¿Está el punto $(-1, 2)$ en la gráfica f?
b) Si $x = 2$, ¿cuál es el valor de $f(x)$? ¿Cuál es el punto en la gráfica de f?
c) Si $f(x) = -1$, ¿cuál es el valor de x? ¿Qué punto o puntos están en la gráfica de f?
d) ¿Cuál es el dominio de f?
e) Enumere las intercepciones x, si las hay, de la gráfica f.
f) Dé la intercepción y, si hay una, de la gráfica f.

24. $f(x) = -3x^2 + 5x$
a) ¿Está el punto $(-1, 2)$ en la gráfica f?
b) Si $x = -2$, ¿cuál es el valor de $f(x)$? ¿Cuál es el punto en la gráfica de f?
c) Si $f(x) = -2$, ¿cuál es el valor de x? ¿Qué punto o puntos están en la gráfica de f?
d) ¿Cuál es el dominio de f?
e) Enumere las intercepciones x, si las hay, de la gráfica f.
f) Dé la intercepción y, si hay una, de la gráfica f.

25. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 6}$

a) ¿Está el punto $(3, 14)$ en la gráfica f?
b) Si $x = 4$, ¿cuál es el valor de $f(x)$? ¿Cuál es el punto en la gráfica de f?
c) Si $f(x) = 2$, ¿cuál es el valor de x? ¿Qué punto o puntos están en la gráfica de f?
d) ¿Cuál es el dominio de f?
e)Enumere las intercepciones x, si las hay, de la gráfica f.
f) Dé la intercepción y, si hay una, de la gráfica f.

26. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x + 4}$

a) ¿Está el punto $\left(1, \dfrac{3}{5}\right)$ en la gráfica f?
b) Si $x = 0$, ¿cuál es el valor de $f(x)$? ¿Cuál es el punto en la gráfica de f?
c) Si $f(x) = \dfrac{1}{2}$, ¿cuál es el valor de x? ¿Qué punto o puntos están en la gráfica de f?
d) ¿Cuál es el dominio de f?
e) Enumere las intercepciones x, si las hay, de la gráfica f.
f) Dé la intercepción y, si hay una, de la gráfica f.

27. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^4 + 1}$

a) ¿Está el punto $(-1, 1)$ en la gráfica f?
b) Si $x = 2$, ¿cuál es el valor de $f(x)$? ¿Cuál es el punto en la gráfica de f?
c) Si $f(x) = 1$, ¿cuál es el valor de x? ¿Qué punto o puntos están en la gráfica de f?
d) ¿Cuál es el dominio de f?
e) Enumere las intercepciones x, si las hay, de la gráfica f.
f) Dé la intercepción y, si hay una, de la gráfica f.

28. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 2}$

a) ¿Está el punto $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{2}{3}\right)$ en la gráfica f?
b) Si $x = 4$, ¿cuál es el valor de $f(x)$? ¿Cuál es el punto en la gráfica de f?
c) Si $f(x) = 1$, ¿cuál es el valor de x? ¿Qué punto o puntos están en la gráfica de f?
d) ¿Cuál es el dominio de f?
e) Enumere las intercepciones x, si las hay, de la gráfica f.
f) Dé la intercepción y, si hay una, de la gráfica f.

29. Movimiento de una pelota de golf Se le pega a una pelota de golf con una velocidad inicial de 130 pies por segundo a una inclinación de 45º con la horizontal. En física, se establece que la altura h de la pelota de golf está dada por la función

$$h(x) = \frac{-32x^2}{130^2} + x$$

donde x es la distancia horizontal que recorre la pelota de golf.



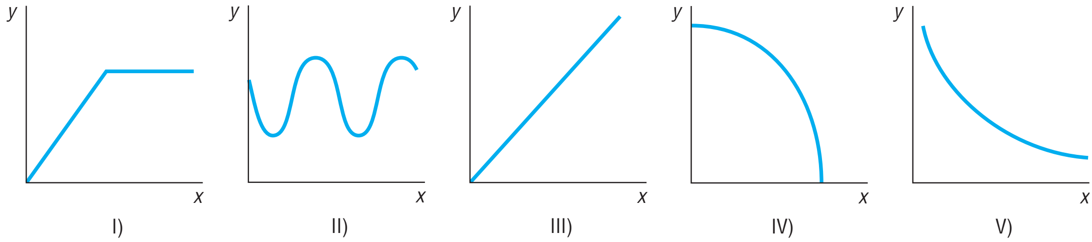
a) Determine la altura de la pelota de golf cuando que ha recorrido 100 pies.
b) ¿Cuál es la altura cuando ha recorrido 300 pies?
c) ¿Cuál es la altura cuando ha recorrido 500 pies?
d) ¿A qué distancia choca con el suelo?
e) Grafique la función $h = h(x)$.
f) Use un dispositivo de graficación para determinar la distancia que ha recorrido la pelota cuando su altura es de 90 pies.
g) Elabore una TABLA con TblStart = 0 y ΔTbl = 25. Redondeado a los 25 pies más cercanos, ¿qué distancia recorre la pelota antes de alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?
h) Ajuste el valor de ΔTbl hasta que pueda determinar la distancia, con 1 pie de error máximo, que recorre la pelota antes de alcanzar la altura máxima.

30. Efecto de la elevación en el peso Si un objeto pesa m libras a nivel del mar, entonces su peso W (en libras) a una altura de h millas sobre el nivel del mar se aproxima por

$$W(h) = m\left(\frac{4000}{4000 + h}\right)^2$$

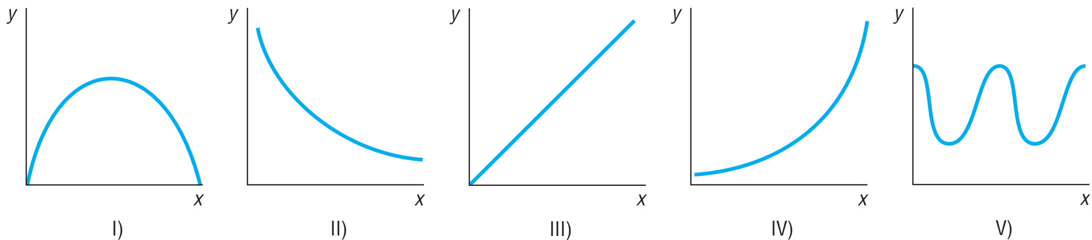
a) Si Amy pesa 120 libras a nivel del mar, ¿cuánto pesará en el Pico de Pike que está a 14,110 pies sobre el nivel del mar?
b) Use un dispositivo de graficación para graficar la función $W = W(h)$. Use $m = 120$
c) Elabore una tabla con TblStart = 0 y ΔTbl = 0.5 para ver cómo varía el peso W cuando h cambia de 0 a 5 millas.
d) ¿A qué altura pesará Amy 119.5 libras?
e) ¿Es razonable su repuesta al inciso d)?

31. Para cada función diga qué gráfica describe mejor la situación. Analice la razón de su elección.
a) El costo de construir una casa como función de los pies cuadrados de construcción
b) La altura de un huevo que se deja caer desde lo alto de un edificio de 300 pies como función del tiempo
c) La altura de una persona como función del tiempo
d) La demanda de Big Macs como función del precio
e) La altura de un niño en un columpio como función del tiempo.



32. Diga qué gráfica describe mejor la situación para cada función. Analice la razón de su elección.

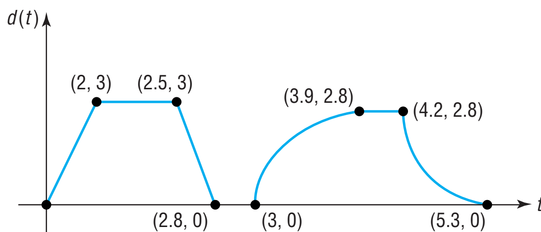
a) La temperatura de un plato de sopa como función del tiempo
b) El número de horas de luz natural por día en un periodo de 2 años
c) La población de Florida como función del tiempo
d) La distancia de un auto que viaja a velocidad constante como función del tiempo
e) La altura de una pelota de golf lanzada con el palo 7 como función del tiempo



33. Considere la siguiente situación: Bárbara decide salir a caminar. Sale de su casa, camina 2 cuadras en 5 minutos a velocidad constante y se da cuenta que olvidó cerrar con llave. Entonces Bárbara corre a casa en 1 minuto. En la puerta le toma 1 minuto encontrar las llaves y cerrar bien. Camina 5 cuadras en 15 minutos y luego decide correr de regreso. Le toma 7 minutos llegar a casa. Dibuje una gráfica de la distancia entre Bárbara y su casa (en cuadras) como función del tiempo.

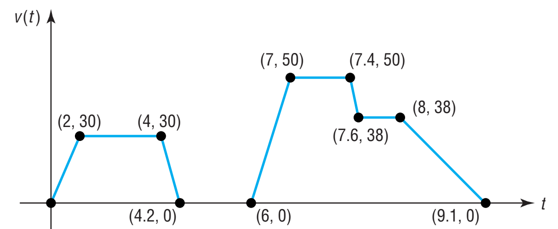
34. Considere el siguiente escenario: a Jayne le gusta andar en bicicleta por el bosque. En un bosque de reserva ecológica, se monta en su bicicleta y sube por un camino inclinado de 2000 pies en 10 minutos. Luego el camino baja durante 3 minutos. Los siguientes 5000 pies son planos y cubre la distancia en 20 minutos. Descansa 15 minutos. Después recorre 10,000 pies en 30 minutos. Dibuje una gráfica de la distancia recorrida por Jayne (en pies) como función del tiempo.

35. El siguiente bosquejo representa la distancia d (en millas) entre Kevin y su casa como función del tiempo t (en horas). Conteste la preguntas con base en la gráfica. En los incisos *a*) a *g*), ¿cuántas horas pasan y qué tan lejos está Kevin de su casa durante este tiempo?



a) De $t = 0$ a $t = 2$
b) De $t = 2$ a $t = 2.5$
c) De $t = 2.5$ a $t = 2.8$
d) De $t = 2.8$ a $t = 3$
e) De $t = 3$ a $t = 3.9$
f) De $t = 3.9$ a $t = 4.2$
g) De $t = 4.2$ a $t = 5.3$
h) ¿Cuál es la mayor distancia que Kevin está de su casa?
i) ¿Cuántas veces regresa Kevin a su casa?

36. El siguiente bosquejo representa la velocidad v (en millas por hora) del auto de Michael como función del tiempo t (en minutos).



a) ¿En qué intervalo viaja Michael más rápido?
b) En qué intervalo(s) tiene una velocidad de cero?
c) ¿Cuál es la velocidad de Michael entre 0 y 2 minutos?
d) ¿Cuál es la velocidad de Michael entre 4.2 y 6 minutos?
e) ¿Cuál es la velocidad de Michael entre 7 y 7.4 minutos?
f) ¿Cuándo va a velocidad constante?

37. Dibuje una gráfica de una función cuyo dominio es $\{x|-3 \leq x \leq 8, \quad x \neq 5\}$ y cuyo rango es $\{y|-1 \leq y \leq 2, \quad y \neq 0\}$. ¿Qué punto(s) en el rectángulo $-3 \leq x \leq 8, -1 \leq y \leq 2$ no pueden estar en la gráfica? Compare su gráfica con las de otros compañeros. ¿Qué diferencias observa?

38. Describa cómo procedería para encontrar el dominio y el rango de una función si le dan su gráfica. ¿En qué cambiaría su estrategia si, en lugar de la gráfica, le dieran la ecuación que define la función?

39. ¿Cuántas intercepciones x tiene la grafica de una función? ¿Cuántas intercepciones y tiene?

40. ¿Una gráfica que consiste en un solo punto corresponde a una función? Si es así, podría escribir la ecuación de esa función?

41. ¿Existe una función cuya gráfica es simétrica respecto del eje x? Explique.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $(-4, 0), (4, 0), (0, -2), (0, 2)$

2. Falso

3.3 Propiedades de las funciones

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Intervalos (sección 1.5, pp. 125-126)
- Pendiente de una recta (sección 2.4, pp. 181-183)
- Forma punto-pendiente de una recta (sección 2.4, p. 186)
- Pruebas de simetría de una ecuación (sección 2.2, pp. 170-173)
- Intercepciones (sección 2.2, pp. 169-170)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 248.

OBJETIVOS
1 Determinar funciones pares e impares a partir de una gráfica
2 Identificar las funciones pares e impares a partir de una ecuación
3 Usar una gráfica para determinar si una función es creciente, decreciente o constante
4 Utilizar una gráfica para localizar máximos y mínimos
5 Utilizar una gráfica para aproximar los máximos y mínimos locales y determinar si una función es creciente o decreciente
6 Encontrar la tasa de cambio promedio de una función

Es más sencillo obtener la gráfica de una función $y = f(x)$ si se conocen ciertas propiedades de la función y el impacto de estas propiedades en la forma que toma la gráfica. En esta sección se describen algunas propiedades de las funciones que se usarán en capítulos subsecuentes.

Se comienza por las nociones familiares de intercepción y simetría.

Intercepciones

Si $x = 0$ está en el dominio de una función $y = f(x)$, entonces la intercepción y de la gráfica de f es el valor de f en 0, que es $f(0)$. Las intercepciones x de la gráfica de f, si las hay, son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

Las intercepciones x de la gráfica de una función se llaman **ceros de f**.

Funciones par e impar

1 Las palabras *par* e *impar*, cuando se aplican a una función f, describen la simetría que existe para la gráfica de la función.

Una función f es par si y sólo si, cuando el punto (x, y) está en la gráfica de f, entonces el punto $(-x, y)$ también está en la gráfica de f. Usando la notación de funciones, una función par se define como sigue:

Una función f es **par** si, para todo número x en su dominio, el número $-x$ también está en el dominio y

$$f(-x) = f(x)$$

Una función f es impar si y sólo si, cuando el punto (x, y) está en la gráfica de f, entonces el punto $(-x, -y)$ también está en la gráfica de f. Usando la notación de funciones, una función impar se define como sigue:

Una función f es **impar** si, para todo número x en su dominio, el número $-x$ también está en el dominio y

$$f(-x) = -f(x)$$

Consulte la sección 2.2, donde se enumeran las pruebas de simetría. Los siguientes resultados son entonces evidentes.

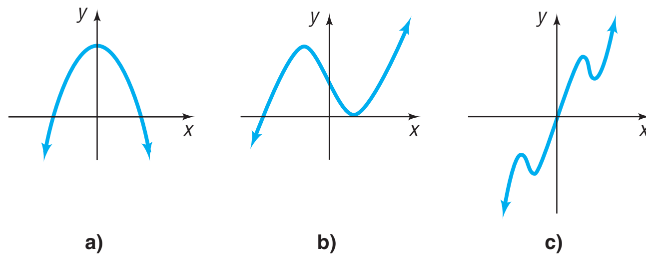
Teorema

Una función es par si y sólo si su gráfica es simétrica respecto del eje y. Una función es impar si y sólo si su gráfica es simétrica respecto del origen.

EJEMPLO 1 Determinar si una función es par o impar a partir de la gráfica

Determine si cada gráfica dada en la figura 13 es la gráfica de una función par, una función impar o una función que no es par ni impar.

Figura 13



Solución La gráfica de la figura 13*a*) es de una función par, porque la gráfica es simétrica respecto del eje y. La función que corresponde a la figura 13*b*) no es par ni impar porque no es simétrica respecto del eje y o del origen. La función cuya gráfica es la dada en la figura 13*c*) es impar, porque su gráfica es simétrica respecto del origen ◀



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 21a), b) Y d).



En el ejemplo siguiente, se usan técnicas algebraicas para verificar si una función dada es par, impar o ninguna de las dos.

EJEMPLO 2 Identificar algebraicamente las funciones pares e impares

Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna. Después determine si la gráfica es simétrica respecto del eje y o respecto del origen.

a) $f(x) = x^2 - 5$ b) $g(x) = x^3 - 1$

c) $h(x) = 5x^3 - x$ d) $F(x) = |x|$

Solución

a) Para determinar si f es par, impar o ninguna, se sustituye x por $-x$ en $f(x) = x^2 - 5$. Entonces

$$f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5 = f(x)$$

Como $f(-x) = f(x)$, se concluye que f es una función par, y la gráfica es simétrica respecto del eje y.

b) Se sustituye x por $-x$ en $g(x) = x^3 - 1$. Entonces

$$g(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1$$

Como $g(-x) \neq g(x)$ y $g(-x) \neq -g(x) = -(x^3 - 1) = -x^3 + 1$, se concluye que g no es par ni impar. La gráfica no es simétrica respecto del eje y ni respecto del origen.

c) Se sustituye x por $-x$ en $h(x) = 5x^3 + x$. Entonces

$$h(-x) = 5(-x)^3 - (-x) = -5x^3 + x = -(5x^3 - x) = -h(x)$$

Como $h(-x) = -h(x)$, h es una función impar y su gráfica es simétrica respecto del origen.

d) Se sustituye x por $-x$ en $F(x) = |x|$. Entonces

$$F(-x) = |-x| = |-1| \cdot |x| = |x| = F(x)$$

Como $F(-x) = F(x)$, F es una función par, y la gráfica de F es simétrica respecto del eje y. ◀

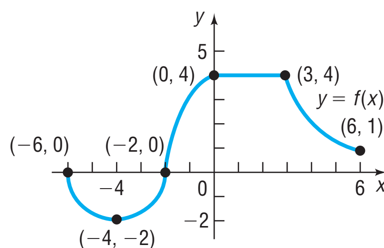
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

Funciones creciente y decreciente



Considere la gráfica dada en la figura 14. Si observa esta gráfica de izquierda a derecha, verá que unas partes de la gráfica suben, otras partes bajan y otras más son horizontales. En estos casos, la función se describe como *creciente, decreciente* o *constante*, respectivamente.

Figura 14



EJEMPLO 3 Determinar en qué parte es creciente, decreciente o constante una función, a partir de su gráfica

¿Dónde es creciente la función de la figura 14? ¿Dónde es decreciente? ¿Dónde es constante?

Solución Para contestar la pregunta de dónde es creciente la función, dónde es decreciente y dónde constante, se usan desigualdades estrictas que involucran a la variable x, o se usan intervalos abiertos* de las coordenadas x. La gráfica en la figura 14 sube (es creciente) del punto $(-4, -2)$ al punto $(0, 4)$, de manera que concluimos que es creciente en el intervalo abierto $(-4, 0)$ o para $-4 < x < 0$. La gráfica baja (decrece) del punto $(-6, 0)$ al punto $(-4, -2)$ y del punto $(3, 4)$ al punto $(6, 1)$. Concluimos que la gráfica es decreciente en los intervalos abiertos $(-6, -4)$ y $(3, 6)$ o para $-6 < x < -4$ y $3 < x < 6$. La gráfica es constante en el intervalo abierto $(0, 3)$ o para $0 < x < 3$. ◀

Las siguientes son definiciones más precisas:

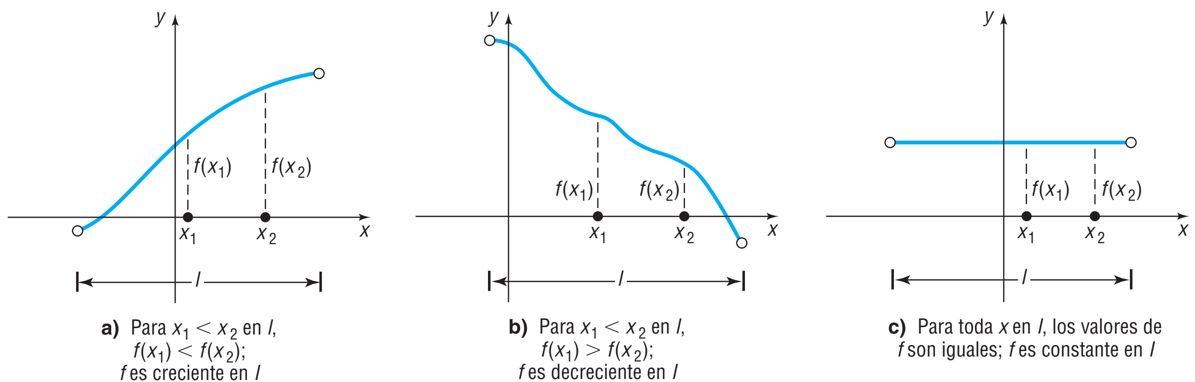
Una función f es **creciente** en un intervalo abierto I si, para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f es **decreciente** en un intervalo I, si para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) > f(x_2)$.

Una función f es **constante** en un intervalo abierto I si, para toda elección de x en I, los valores de $f(x)$ son iguales.

La figura 15 ilustra las definiciones. La gráfica de una función creciente va hacia arriba de izquierda a derecha, la gráfica de una función decreciente va hacia abajo de izquierda a derecha y la gráfica de una función constante permanece a una altura fija.

Figura 15



a) Para $x_1 < x_2$ en I, $f(x_1) < f(x_2)$; f es creciente en I

b) Para $x_1 < x_2$ en I, $f(x_1) > f(x_2)$; f es decreciente en I

c) Para toda x en I, los valores de f son iguales; f es constante en I



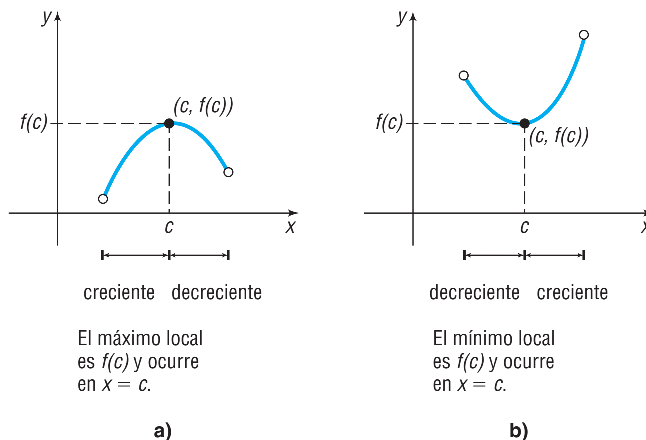
TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 11, 13, 15 Y 21c).

*El intervalo abierto (a, b) consiste en todos los números reales x para los que $a < x < b$. Vea la sección 1.5 si es necesario.

Máximo local; mínimo local

4 Cuando la gráfica de una función es creciente a la izquierda de $x = c$ y decreciente a la derecha de $x = c$, entonces el valor de f en c es el más grande. Este valor se llama *máximo local* de f. Vea la figura 16*a*).

Figura 16



Cuando la gráfica de una función es decreciente a la izquierda de $x = c$ y creciente a la derecha de $x = c$, entonces en c el valor de f es el menor. Este valor se llama *mínimo local* de f. Vea la figura 16*b*).

Una función f tiene un **máximo local en *c*** si existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que, para toda $x \neq c$ en I, $f(x) <$ *f*c). *f*c) se llama **máximo local de *f***.

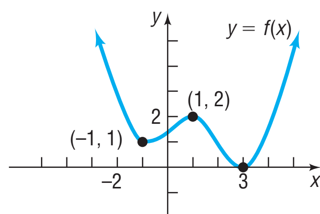
Una función f tiene un **mínimo local en *c*** si existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que, para toda $x \neq c$ en I, $f(x) >$ *f*c). *f*c) se llama **mínimo local de *f***.

Si f tiene un máximo local c, entonces el valor de f en c es mayor que los valores de f cerca de c, si f tiene un mínimo local en c, entonces el valor de f en c es menor que los valores de f cerca de c, entonces el valor de f en c es menor que los valores de f cerca de c. La palabra *local* se usa para sugerir que es sólo cerca de c que el valor de f es el mayor o el menor.

EJEMPLO 4

Encontrar los máximos locales y mínimos locales a partir de la gráfica de una función y determinar dónde la función es creciente, decreciente o constante

Figura 17



La figura 17 muestra la gráfica de una función f.

a) ¿En qué número(s), si lo hay, tiene f un máximo local?
b) ¿Cuáles son los máximos locales?
c) ¿En qué número(s), si los hay, tiene f un mínimo local?
d) ¿Cuáles son los mínimos locales?

e) Enumere los intervalos en los que f es creciente. Enumere los intervalos en los que f es decreciente.

Solución El dominio de f es el conjunto de números reales.

a) f tiene un máximo local en 1, ya que para toda x cercana a 1, $x \neq 1$, se tiene $f(x) < f(1)$.

b) El máximo local es $f(1) = 2$.

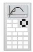
c) f tiene un mínimo local en -1 y en 3.

d) Los mínimos locales son $f(-1)$ y $f(3) = 0$.

e) La función cuya gráfica está dada en la figura 17 es creciente en el intervalo $(-1, 1)$. La función también es creciente para todos los valores de x mayores que 3. Es decir, la función es creciente en los intervalos $(-1, 1)$ y $(3, \infty)$ o para $-1 < x < 1$ y $x > 3$. La función es decreciente para todos los valores de x menores que 1. La función también es decreciente en el intervalo $(1, 3)$. Es decir, la función es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, 3)$ o para $x < -1$ y $1 < x < 3$. ◀


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 17 Y 19.

5  Para localizar el valor exacto en el que la función f tiene un máximo o mínimo local, suele requerirse cálculo. Sin embargo, es posible utilizar una dispositivo de graficación para aproximar estos valores con las características de MAXIMUM y MINIMUM.*



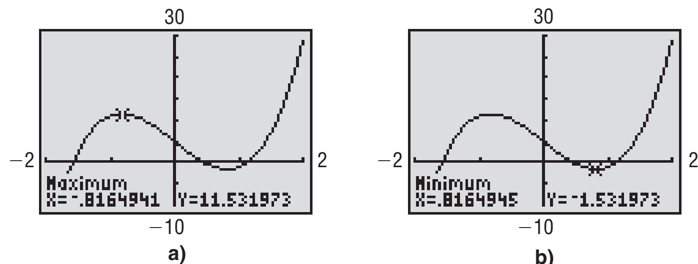
EJEMPLO 5 Uso de un dispositivo gráfico para aproximar máximos y mínimos locales, y determinar dónde es creciente o decreciente una función

a) Utilice un dispositivo gráfico para graficar $f(x) = 6x^3 - 12x + 5$ para $-2 < x < 2$. Aproxime los puntos donde f tiene máximos y mínimos locales.

b) Determine dónde es creciente o decreciente la función f.

Solución a) Los dispositivos de gráficas tienen la propiedad de encontrar el punto máximo o mínimo de una gráfica dentro de un intervalo dado. Grafique la función f para $-2 < x < 2$. Use MAXIMUM para encontrar que el máximo local es 11.53 y ocurre en $x = -0.82$, redondeado a dos decimales. Vea la figura 18a). Use MINIMUM para encontrar que el mínimo local es -1.53 y ocurre en $x = 0.82$, redondeado a dos decimales. Vea la figura 18b).

Figura 18



*Consulte en su manual del propietario las teclas adecuadas.

b) Al observar las figuras 18*a*) y *b*), se ve que la gráfica de f sube (crece) de $x = -2$ a $x = -0.82$ y de $x = 0.82$ a $x = 2$, por lo que f es creciente en los intervalos $(-2, -0.82)$ y $(0.82, 2)$ o para $-2 < x < -0.82$ y $0.82 < x < 2$. La gráfica baja (decrece) de $x = -0.82$, a $x = 0.82$, entonces f es decreciente en el intervalo $(-0.82, 0.82)$ o para $-0.82 < x < 0.82$. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 59.

Tasa de cambio promedio

6 En la sección 2.4 se dijo que la pendiente de una recta se podría interpretar como la tasa de cambio. Con frecuencia nos interesa la tasa a la que las funciones cambian. Para encontrar la tasa de cambio promedio de una función entre dos puntos de su gráfica, se calcula la pendiente de la recta que contiene los dos puntos.

Si c está en el dominio de una función $y = f(x)$, la **tasa de cambio promedio de f** entre c y x está definida como

$$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \qquad x \neq c \quad \textbf{(1)}$$



En cálculo, esta expresión se llama **cociente de diferencias** de f en c.

Recuerde que el símbolo Δy en (1) es el "cambio en y" y Δx es el "cambio en x". La tasa de cambio promedio de f es el cambio en y dividido entre el cambio en x.

EJEMPLO 6 Encontrar la tasa de cambio promedio

Encuentre la tasa de cambio promedio de $f(x) = 3x^2$:

a) De 1 a 3 *b*) De 1 a 5 *c*) De 1 a 7

Solución a) La tasa de cambio promedio de $f(x) = 3x^2$ de 1 a 3 es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{27 - 3}{3 - 1} = \frac{24}{2} = 12$$

b) La tasa de cambio promedio de $f(x) = 3x^2$ de 1 a 5 es

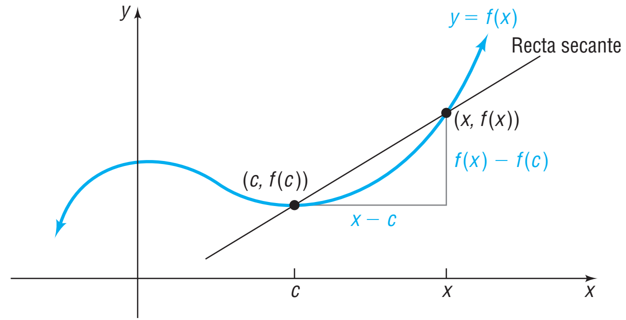
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{75 - 3}{5 - 1} = \frac{72}{4} = 18$$

c) La tasa de cambio promedio de $f(x) = 3x^2$ entre 1 y 7 es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{147 - 3}{7 - 1} = \frac{144}{6} = 24$$ ◀

La tasa de cambio promedio de una función tiene una interpretación geométrica importante. Vea la gráfica de $y = f(x)$ en la figura 19. Se etique-

Figura 19



taron dos puntos en la gráfica: $(c, f(c))$ y $(x, f(x))$. La recta que contiene estos puntos se llama **recta secante**; su pendiente es

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Teorema

Pendiente de la recta secante

La tasa de cambio promedio de una función es igual a la pendiente de la recta secante que contiene a los dos puntos en su gráfica.

EJEMPLO 7 Encontrar la tasa de cambio promedio de una función

a) Encontrar la tasa de cambio promedio de $f(x) = 2x^2 - 3x$ entre 1 y x.

b) Utilice este resultado para encontrar la pendiente de la recta secante que contiene a $(1, f(1))$ y $(2, f(2))$.

c) Encontrar una ecuación de esta recta secante.

Solución a) La tasa de cambio promedio de f entre 1 y x es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \qquad x \neq 1$$

$$= \frac{(2x^2 - 3x) - (-1)}{x - 1} \qquad f(x) = 2x^2 - 3x;\ f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3(1) = -1$$

$$= \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{(2x - 1)(x - 1)}{x - 1} \qquad \text{Factorizar el numerador.}$$

$$= 2x - 1 \qquad x \neq 1;\ \text{cancelar } x - 1$$

b) La pendiente de la recta secante que contiene a $(1, f(1))$ y $(2, f(2))$ es la tasa de cambio promedio de f de 1 a 2. Usando $x = 2$ en el inciso *a*), se obtiene $m_{\text{seg}} = 2(2) - 1 = 3$.

c) Utilice la forma punto-pendiente para encontrar la ecuación de la recta secante.

$$y - y_1 = m_{\text{sec}}(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente de la recta secante}$$

$$y + 1 = 3(x - 1) \qquad x_1 = 1,\ y_1 = f(1) = -1;\ m_{\text{sec}} = 3$$

$$y + 1 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 4 \qquad \text{Forma intercepción-pendiente de la secante}$$

◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

3.3 Evalúe su comprensión

"'¿Está preparado?" *Las respuestas están dadas al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas indicadas en azul.*

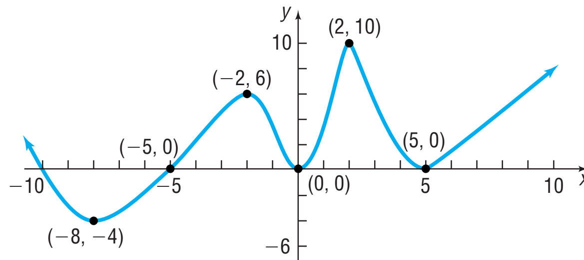
1. El intervalo [2, 5] se escribe como la desigualdad __________. (pp. 125–126)
2. La pendiente de la recta que contiene a los puntos $(-2, 3)$ y $(3, 8)$ es __________. (pp. 181–183)
3. Verifique la simetría respecto del eje x, el eje y y el origen de la ecuación $y = 2x^2 + 3$. (pp. 170–173)
4. Escriba la forma punto-pendiente de la recta con pendiente 5 que contiene el punto $(3, -2)$. (p. 186)
5. Las intercepciones de la ecuación $y = x^2 - 9$ son __________. (pp. 169–170)

Conceptos y vocabulario

6. Una función f es ____________ en un intervalo abierto I si para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) < f(x_2)$.
7. Una función _________________ f es aquella para la que $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f; una función _____________ f es aquella para la que $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f.
8. *Falso o verdadero:* una función f es decreciente en un intervalo abierto I si, para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) > f(x_2)$.
9. *Falso o verdadero:* una función f tiene un máximo local en c si existe un intervalo abierto I que contenga a c tal que, para toda $x \neq c$ en I, $f(x) < fc)$.
10. *Falso o verdadero:* las funciones pares tienen gráficas que son simétricas respecto del origen.

Ejercicios

En los problemas 11-20, use la gráfica de la función f dada a continuación.

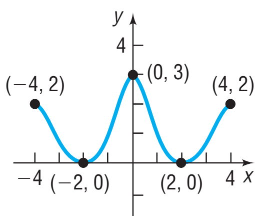


11. ¿Es creciente la función f en el intervalo $(-8, -2)$?
12. ¿Es decreciente la función f en el intervalo $(-8, -2)$?
13. ¿Es creciente la función f en el intervalo $(2, 10)$?
14. ¿Es decreciente la función f en el intervalo $(2, 5)$?
15. Enumere los intervalos en los que f es creciente.
16. Enumere los intervalos en los que f es decreciente.
17. ¿Existe un máximo local en 2? si es así, ¿cuál es?
18. ¿Existe un máximo local en 5? si es así, ¿cuál es?
19. Proporcione los números para los que f tiene un máximo local. ¿Cuáles son esos máximos locales?
20. Proporcione los números para los que f tiene un mínimo local. ¿Cuáles son esos mínimos locales?

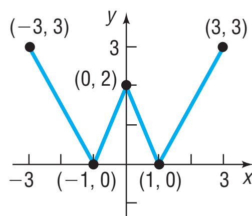
En los problemas 21-28 se da la gráfica de una función. Utilice la gráfica para encontrar:

a) *Las intercepciones, si las hay*
b) *Su dominio y rango*
c) *Los intervalos en los que es creciente, decreciente o constante*
d) *Si es par, impar o ninguna de las dos*

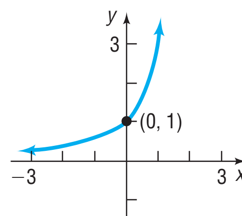
21.



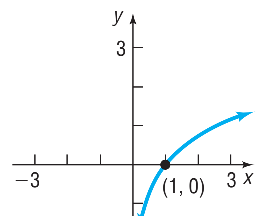
22.



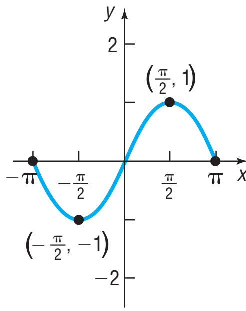
23.



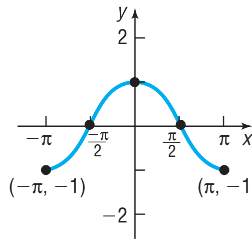
24.



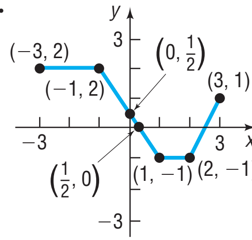
25.



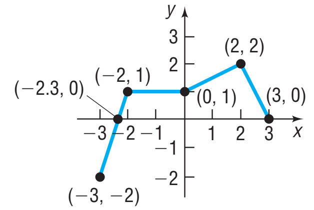
26.



27.



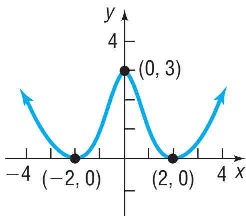
28.



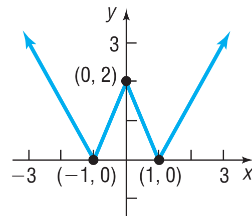
En los problemas 29-32, se da la gráfica de una función f. Use esta gráfica para encontrar:

a) *Los números, si lo hay, en los que f tiene un máximo local. ¿Cuáles son esos máximos locales?*
b) *Los números, si los hay, en los que f tiene un mínimo local. ¿Cuáles son estos mínimos locales?*

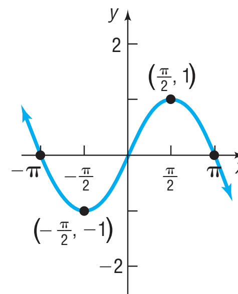
29.



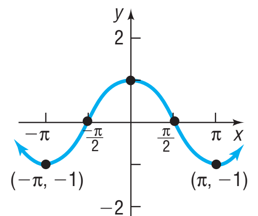
30.



31.



32.



33. Encuentre la tasa de cambio promedio de $f(x) = -2x^2 + 4$:
a) de 0 a 2
b) de 1 a 3
c) de 1 a 4

34. Encuentre la tasa de cambio promedio de $f(x) = -x^3 + 1$:
a) de 0 a 2
b) de 1 a 3
c) de −1 a 1

En los problemas 35-46,

a) *Para cada función encuentre la tasa de cambio promedio de f entre 1 y x:*

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, \qquad x \neq 1$$

b) *Use el resultado del inciso a) para calcular la tasa de cambio promedio de f de* $x = 1$ *a* $x = 2$. *Asegúrese de simplificar.*
c) *Encuentre una ecuación de la recta secante que contiene a* $(1, f(1))$ *y* $(2, f(2))$.

35. $f(x) = 5x$
36. $f(x) = -4x$
37. $f(x) = 1 - 3x$
38. $f(x) = x^2 + 1$
39. $f(x) = x^2 - 2x$
40. $f(x) = x - 2x^2$
41. $f(x) = x^3 - x$
42. $f(x) = x^3 + x$
43. $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}$
44. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
45. $f(x) = \sqrt{x}$
46. $f(x) = \sqrt{x + 3}$

En los problemas 47-58, determine algebraicamente si cada función es par, impar o ninguna.

47. $f(x) = 4x^3$
48. $f(x) = 2x^4 - x^2$
49. $g(x) = -3x^2 - 5$
50. $h(x) = 3x^3 + 5$
51. $F(x) = \sqrt[3]{x}$
52. $G(x) = \sqrt{x}$
53. $f(x) = x + |x|$
54. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 1}$
55. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$
56. $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
57. $h(x) = \dfrac{-x^3}{3x^2 - 9}$
58. $F(x) = \dfrac{2x}{|x|}$

En los problemas 59-66, use un dispositivo gráfico para graficar cada función en el intervalo indicado y aproximar los máximos y mínimos locales. Determine dónde crece y decrece la función. Redondee las respuestas a dos lugares decimales.

59. $f(x) = x^3 - 3x + 2 \quad (-2, 2)$
60. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5 \quad (-1, 3)$

61. $f(x) = x^5 - x^3 \quad (-2, 2)$

62. $f(x) = x^4 - x^2 \quad (-2, 2)$

63. $f(x) = -0.2x^3 - 0.6x^2 + 4x - 6 \quad (-6, 4)$

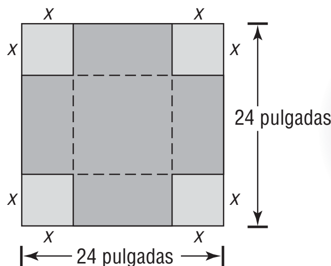
64. $f(x) = -0.4x^3 + 0.6x^2 + 3x - 2 \quad (-4, 5)$

65. $f(x) = 0.25x^4 + 0.3x^3 - 0.9x^2 + 3 \quad (-3, 2)$

66. $f(x) = -0.4x^4 - 0.5x^3 + 0.8x^2 - 2 \quad (-3, 2)$

---

67. Construcción de una caja abierta Debe construirse una caja abierta con base cuadrada a partir de una pieza cuadrada de cartón de 24 pulgadas de lado, cortando un cuadrada en cada esquina y doblando los lados hacia arriba (vea la figura).





a) Exprese el volumen V de la caja como función de la longitud x del lado del corte cuadrado en cada esquina.
b) ¿Cuál es el volumen si se cortan cuadrados de 3 pulgadas?
c) ¿Cuál es el volumen si cortan cuadrados de 10 pulgadas?
d) Grafique $V = V(x)$. ¿Para qué valores de x se obtiene el mayor V?

68. Construcción de una caja abierta Se necesita que una caja abierta tenga un volumen de 10 pies cúbicos.
a) Exprese la cantidad A de material utilizado para hacer esa caja como función de la longitud x del lado del cuadrado de la base.
b) ¿Cuánto material se requiere para una base de 1 pie por 1 pie?
c) ¿Cuánto material se requiere para una base de 2 pies por 2 pies?
d) Grafique $A = A(x)$. ¿Para qué valores de x se tiene que A es el más pequeño?

69. Altura máxima de una pelota La altura s de una pelota (en pies) lanzada con una velocidad inicial de 80 pies por segundo desde una altura inicial de 6 pies está dada como función del tiempo t (en segundos) por

$$s(t) = -16t^2 + 80t + 6$$

a) Grafique s.
b) Determine el tiempo en el que la altura es máxima.
c) ¿Cuál es la altura máxima?

70. Costo promedio mínimo El costo promedio de producir x podadoras motorizadas por hora está dado por

$$\overline{C}(x) = 0.3x^2 + 21x - 251 + \frac{2500}{x}$$

a) Grafique $\overline{C}$.
b) Determine el número de podadoras que deben producirse para minimizar el costo promedio.
c) ¿Cuál es el costo promedio mínimo?

71. Para la función $f(x) = x^2$, calcule cada tasa de cambio promedio:
a) De 0 a 1
b) De 0 a 0.5
c) De 0 a 0.1
d) De 0 a 0.01
e) De 0 a 0.001
f) Grafique cada una de las rectas secantes
g) ¿Qué parece que sucede con las rectas secantes?
h) ¿Qué ocurre con las pendientes de las secantes? ¿Hay algún número al que se acercan? ¿Cuál es este número?

72. Para la función $f(x) = x^2$, calcule cada tasa de cambio promedio:
a) De 1 a 2
b) De 1 a 1.5
c) De 1 a 1.1
d) De 1 a 1.01
e) De 1 a 1.001
f) Grafique cada una de las rectas secantes
g) ¿Qué parece que sucede con las rectas secantes?
h) ¿Qué ocurre con las pendientes de las secantes? ¿Hay algún número al que se acercan? ¿Cuál es este número?

73. Dibuje la gráfica de una función que tenga las siguientes características. Dominio: todos los números reales; rango: todos los números reales; intercepciones: $(0, -3)$ y $(2, 0)$; un máximo local de -2 en -1; un mínimo local de -6 en 2. Compare la gráfica con la de sus compañeros. Comente las diferencias.

74. Trabaje de nuevo el problema 73 con las información adicional que sigue: creciente en $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$; decreciente en $(-1, 2)$. De nuevo compare su gráfica con las de sus compañeros y comente las diferencias.

75. ¿Cuántas intercepciones x en un intervalo tiene una función definida en ese intervalo? Explique.

76. Suponga que un amigo no entiende la idea de funciones crecientes y decrecientes. Proporcione una explicación completa con gráficas que le aclare la idea.

77. ¿Puede una función ser tanto par como impar?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $2 \le x \le 5$ **2.** 1 **3.** eje y **4.** $y + 2 = 5(x - 3)$ **5.** $(-3, 0), (3, 0), (0, -9)$

3.4 Biblioteca de las funciones; funciones definidas por partes

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Intercepciones (sección 2.2, pp. 169-170)
- Gráficas de ecuaciones clave (sección 2.2; ejemplo 3, p. 167, ejemplo 4, p. 168. ejemplo 5, p. 168, y ejemplo 12, p. 173)



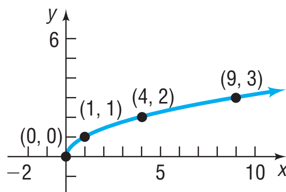
Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 258.

OBJETIVOS
1 Graficar las funciones dadas en la biblioteca de funciones
2 Graficar funciones definidas por partes

Ahora se introducen algunas funciones para agregar a la lista de funciones importantes; se comienza con la *función raíz cuadrada*.

En la sección 2.2 se graficó la ecuación $x = y^2$. Si se despeja y y se restringe de manera que $y \geq 0$, la ecuación $x = y^2$, $y \geq 0$, se escribe como $y = f(x) = \sqrt{x}$. La figura 20 muestra una gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

Figura 20
$f(x) = \sqrt{x}$



Con base en la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, se tienen las siguientes propiedades.

Propiedades de $f(x) = \sqrt{x}$

1. La intercepción x de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ es 0. La intercepción y de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ también es 0.
2. La función no es par ni impar.
3. Es creciente en el intervalo $(0, \infty)$
4. Tiene un mínimo local de 0 en $x = 0$.

EJEMPLO 1 **Gráfica de la función raíz cúbica**

a) Determine si $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es par, impar o ninguna de las dos. Establezca si la gráfica de f es simétrica respecto del eje y o simétrica respecto del origen.
b) Determine las intercepciones, si las hay, de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
c) Grafique $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Solución a) Dado que

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$$

la función es impar. La gráfica d f es simétrica respecto del origen.

b) La intercepción y es $f(0) = \sqrt[3]{0} = 0$. La intercepción x se encuentra resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$
$$\sqrt[3]{x} = 0 \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$
$$x = 0 \quad \text{Elevar al cubo ambos lados de la ecuación.}$$

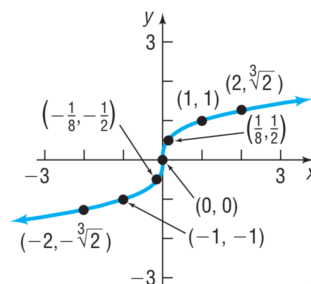
La intercepción x también es 0.

c) Se usa la función para formar la tabla 4 y obtener algunos puntos de la gráfica. Debido a la simetría respecto del origen, sólo es necesario encontrar puntos (x, y) para los cuales $x \geq 0$. La figura 21 muestra la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Tabla 4

x	$y = f(x) = \sqrt[3]{x}$	(x, y)
0	0	(0, 0)
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$
1	1	(1, 1)
2	$\sqrt[3]{2} \approx 1.26$	$(2, \sqrt[3]{2})$
8	2	(8, 2)

Figura 21



De los resultados del ejemplo 1 y la figura 21; se tienen las siguientes propiedades de la función raíz cúbica.

Propiedades de $f(x) = \sqrt[3]{x}$

1. La intercepción x de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es 0. La intercepción y de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ también es 0.
2. La función es impar.
3. Es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
4. No tiene mínimo ni máximos locales.

EJEMPLO 2 Gráfica de la función valor absoluto

a) Determine si $f(x) = |x|$ es par, impar o ninguna de las dos. Establezca si la gráfica de f es simétrica respecto del eje y o respecto del origen.

b) Determine las intercepciones, si las hay, de la gráfica de $f(x) = |x|$.

c) Grafique $f(x) = |x|$.

Solución a) Dado que

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

la función es par. La gráfica de f es simétrica respecto del eje y.

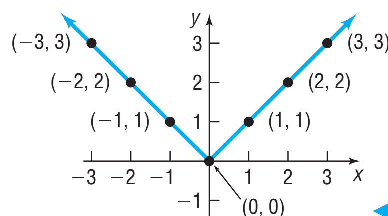
b) La intercepción-y es $f(0) = |0| = 0$. La intercepción-x se encuentra resolviendo la ecuación $f(x) = |x| = 0$. Entonces la intercepción-x es 0.

c) Se usa la función para formar la tabla 5 y obtener algunos puntos de la gráfica. Dada la simetría respecto del eje y, sólo es necesario encontrar puntos (x, y) tales que $x \geq 0$. La figura 22 muestra la gráfica de $f(x) = |x|$.

Tabla 5

x	$y = f(x) = \|x\|$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)
3	3	(3, 3)

Figura 22



De los resultados del ejemplo 2 y la figura 22, se tienen las siguientes propiedades de la función valor absoluto.

Propiedades de $f(x) = |x|$

1. La intercepción x de la gráfica de $f(x) = |x|$ es 0. La intercepción y de la gráfica de $f(x) = |x|$ también es 0.
2. La función es par.
3. Es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. Es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.
4. Tiene un mínimo local de 0 en $x = 0$.



Para ver el concepto

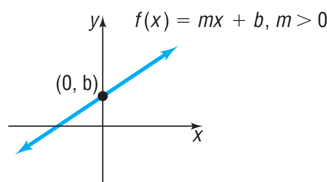
Grafique $y = |x|$ en una pantalla cuadrada y compare lo que ve con la figura 22. Observe que algunas calculadoras con gráficas usan los símbolos abs(x) para el valor absoluto. Si su calculadora no tiene la función valor absoluto integrada, grafique $y = |x|$ considerando el hecho de que $|x| = \sqrt{x^2}$.

Biblioteca de funciones



Ahora se proporciona un resumen de las funciones clave que se han estudiado. Al revisar la lista, preste atención a las propiedades de cada función, en particular a la forma de cada gráfica. Conocer estas gráficas constituye el fundamento de las técnicas avanzadas para graficar.

Figura 23



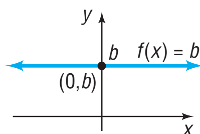
Función lineal

$$f(x) = mx + b, \text{ donde } m \text{ y } b \text{ son números reales}$$

Vea la figura 23.

El dominio de una **función lineal** es el conjunto de todos los números reales. La gráfica de esta función es una recta no vertical con pendiente m e intercepción y en b. Una función lineal es creciente si $m > 0$, decreciente si $m < 0$ y constante si $m = 0$.

Figura 24



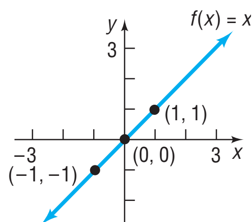
Función constante

$$f(x) = b, \text{ donde } b \text{ es un número real}$$

Vea la figura 24.

Una **función constante** es una función lineal especial ($m = 0$). Su dominio es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto que consiste en un solo número b. Su gráfica es una recta horizontal cuya intercepción y es b. La función constante es impar y su gráfica es constante en todo su dominio.

Figura 25
Función identidad



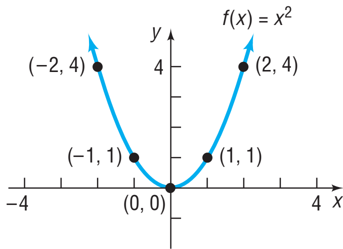
Función identidad

$$f(x) = x$$

Vea la figura 25.

La **función identidad** también es una función lineal especial. Su dominio es el conjunto de todos los números reales lo mismo que su rango. Si su gráfica es una recta cuya pendiente es $m = 1$ y cuya intercepción y es 0. La recta consiste en todos los puntos para los que la coordenada x es igual a la coordenada y. La función identidad es una función impar, creciente en todo su dominio. Observe que la gráfica bisecta los cuadrantes I y III.

Figura 26
Función cuadrado



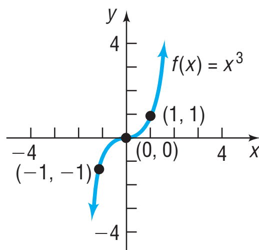
Función cuadrado

$$f(x) = x^2$$

Vea la figura 26.

El dominio de la **función cuadrado *f*** es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de números reales no negativos. La gráfica de esta función es una parábola cuya intercepción está en (0, 0). La función cuadrado es una función par que decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

Figura 27
Función cubo



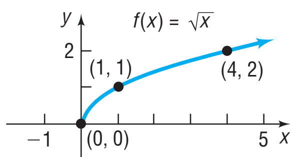
Función cubo

$$f(x) = x^3$$

Vea la función 27.

El dominio y el rango de la **función cubo** es el conjunto de todos los números reales. La intercepción de la gráfica está en (0, 0). La función cubo es impar y es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Figura 28
Función raíz cuadrada



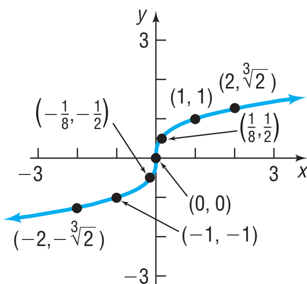
Función raíz cuadrada

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Vea la figura 28.

El dominio y rango de la **función raíz cuadrada** son el conjunto de números reales no negativos. La intercepción de la gráfica está en (0, 0). La función raíz cuadrada no es par ni impar, y es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

Figura 29
Función raíz cúbica



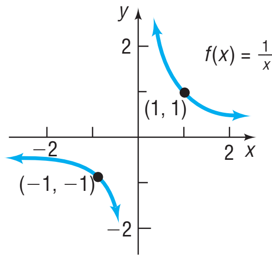
Función raíz cúbica

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Vea la figura 29.

El dominio y el rango de la **función raíz cúbica** es el conjunto de todos los números reales. La intercepción de la gráfica está en (0, 0). La función raíz cúbica es una función impar que es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Figura 30
Función recíproca



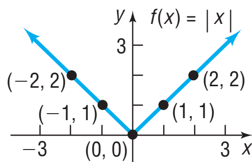
Función recíproca

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Consulte en el ejemplo 12, p. 173, el análisis de la ecuación $y = \dfrac{1}{x}$. Vea la figura 30.

El dominio y rango de la **función recíproco** es el conjunto de todos los números reales diferentes de cero. La gráfica no tiene intercepciones. La función recíproco es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ y es una función impar.

Figura 31
Función valor absoluto



Función valor absoluto

$$f(x) = |x|$$

Vea la figura 31.

El dominio de la **función valor absoluto** es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de números reales no negativos. La intercepción de la gráfica está en $(0, 0)$. Si $x \geq 0$, entonces $f(x) = x$, y la gráfica de f es parte de la recta $y = x$; si $x < 0$, entonces $f(x) = -x$, y la gráfica de f es parte de la recta $y = -x$. La función valor absoluto es una función par; es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

La notación $\text{ent}(x)$ indica el entero más grande que es menor o igual que x. Por ejemplo,

$$\text{ent}(1) = 1 \quad \text{ent}(2.5) = 2 \quad \text{ent}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{ent}\left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \quad \text{ent}(\pi) = 3$$

Este tipo de correspondencia ocurre con suficiente frecuencia en matemáticas como para darle un nombre.

Tabla 6

x	**y = f(x) = ent(x)**	**(x, y)**
-1	-1	$(-1, -1)$
$-\frac{1}{2}$	-1	$\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$
$-\frac{1}{4}$	-1	$\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$
0	0	$(0, 0)$
$\frac{1}{4}$	0	$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$
$\frac{1}{2}$	0	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
$\frac{3}{4}$	0	$\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

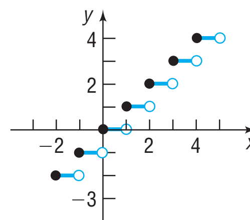
Función máximo entero

$$f(x) = \text{ent}(x) = \text{entero más grande que es menor o igual que } x$$

Nota: Algunos libros usan la notación $f(x) = [\![x]\!]$ en lugar de $\text{ent}(x)$.

La gráfica de $f(x) = \text{ent}(x)$ se obtiene graficando varios puntos. Vea la tabla 6. Para valores de x, $-1 \leq x < 0$, el valor de $f(x) = \text{ent}(x)$ es -1; para valores de x, $0 \leq x < 1$, el valor de f es 0. Vea la gráfica en la figura 32.

Figura 32
Función máximo entero



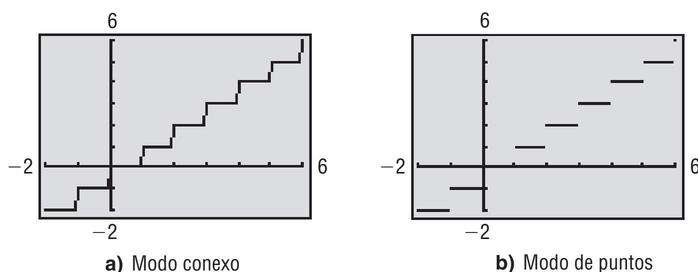
El dominio de la **función máximo entero** es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de enteros. La intercepción y de la gráfica es 0. Las intercepciones x están en el intervalo $[0, 1)$. La función máximo entero no es par ni impar. Es una constante en cada intervalo de la forma $[k, k + 1)$, para k entero. En la figura 32 se usa un punto grueso para indicar, por ejemplo, que $x = 1$, el valor de f es $f(1) = 1$; se usa un círculo hueco para indicar que la función no toma el valor de 0 en $x = 1$.

De la gráfica de la función máximo entero, se observa por qué también se llama **función escalón**. En $x = 0, x = \pm 1, x = \pm 2$, etcétera, esta función exhibe lo que se llama una *discontinuidad*, es decir, en los valores enteros, la gráfica de pronto "salta" de un valor a otro sin tomar los valores intermedios. Por ejemplo, a la izquierda inmediata de $x = 3$, las coordenadas y son 2, y a la derecha inmediata de $x = 3$, las coordenadas y son 3.



COMENTARIO: Al graficar una función, se puede elegir ya sea el **modo conexo**, en el que los puntos graficados en la pantalla estén conectados, haciendo que la gráfica aparezca sin cortes, o el **modo de puntos**, en donde sólo aparecen los puntos graficados. Al trazar la función máximo entero, con un dispositivo de graficación, es necesario estar en el **modo de puntos**. Esto evita que la aplicación "conecte los puntos" cuando $f(x)$ cambia de un valor entero al siguiente. Vea la figura 33.

Figura 33
$f(x) = \text{ent}(x)$



a) Modo conexo **b)** Modo de puntos ■

Las funciones analizadas hasta ahora son básicas. Siempre que encuentre una de ellas, debe ver una imagen mental de su gráfica. Por ejemplo, si se encuentra con la función $f(x) = x^2$, debe ver en su mente una imagen parecida a la figura 26.



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 9 A 16.

Funciones definidas por partes



2 Algunas veces una función se define de manera diferente en distintas partes del dominio. Por ejemplo, la función valor absoluto $f(x) = |x|$ en realidad está definida por dos ecuaciones: $f(x) = x$ si $x \geq 0$ y $f(x) = -x$ si $x < 0$. Por conveniencia, en general estas dos ecuaciones se combinan en una expresión como

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cuando las funciones están definidas por más de una ecuación, se llaman funciones **definidas por partes**.

Se verá otro ejemplo de una función definida por partes.

EJEMPLO 3 Análisis de una función definida por partes

La función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Encuentre $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$.
b) Determine el dominio de f.
c) Grafique f.
d) Use la gráfica para encontrar el rango de f.

Solución a) Para encontrar $f(0)$ se observa que cuando $x = 0$ la ecuación de f está dada por $f(x) = -x + 1$. De manera que se tiene

$$f(0) = -0 + 1 = 1$$

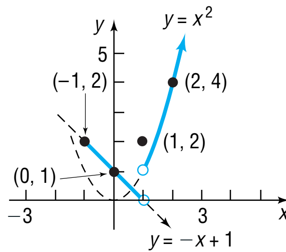
Cuando $x = 1$, la ecuación de f es $f(x) = 2$. Entonces

$$f(1) = 2$$

Cuando $x = 2$, la ecuación de f es $f(x) = x^2$. Así,

$$f(2) = 2^2 = 4$$

Figura 34



b) Para encontrar el dominio de f se ve su definición. Se concluye que el dominio de f es $\{x|x \ge -1\}$, o el intervalo $[-1, \infty)$.

c) Para graficar f, se grafica "cada parte". Primero se grafica la recta $y = -x + 1$ y se conserva sólo la parte para la que $-1 \le x < 1$. Luego se grafica el punto $(1, 2)$ porque, cuando $x = 1$, $f(x) = 2$. Por último, se grafica la parábola $y = x^2$ y se mantienen sólo la parte para la que $x > 1$. Vea la figura 34.

d) De la gráfica, se concluye que el rango de f es $\{y|y > 0\}$, o el intervalo $(0, \infty)$. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

EJEMPLO 4 Costo de energía eléctrica

En mayo de 2003, la compañía Commonwealth Edison entregaba electricidad a las residencias por un cargo mensual de \$7.58 más 8.275¢ por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 400 kWh usados en el mes y 6.574¢ por kWh por todo consumo mayor que 400 kWh en el mes.

a) ¿Cuál es el cargo por un consumo de 300 kWh en un mes?
b) ¿Cuál es el cargo por un consumo de 700 kWh en un mes?
c) Si C es el cargo mensual por x kWh, exprese C como función de x.

FUENTE: Commonwealth Edison Co., Chicago, Illinois, 2003.

Solución a) Por 300 kWh, el cargo es \$7.58 más 8.275¢ = \$0.08275 por kWh. Es decir,

$$\text{Cargo} = \$7.58 + \$0.08275(300) = \$32.41$$

b) Por 700 kWh, el cargo es \$7.58 más 8.275¢ por kWh por los primeros 400 kWh más 6.574¢ por kWh por los 300 kWh que exceden 400. Esto es

$$\text{Cargo} = \$7.58 + \$0.08275(400) + \$0.06574(300) = \$60.40$$

c) Si $0 \leq x \leq 400$, el cargo mensual C (en dólares) se determina multiplicando x por \$0.08275 y sumando el cargo mensual por cliente de \$7.58. Así, si $0 \leq x \leq 400$ kWh, entonces $C(x) = 0.08275x + 7.58$. Para $x > 400$, el cargo es $0.08275(400) + 7.58 + 0.06574(x - 400)$, ya que $x - 400$ es igual al consumo excedente de 400 kWh, lo cual cuesta \$0.06574 por kWh. Es decir, si $x > 400$, entonces

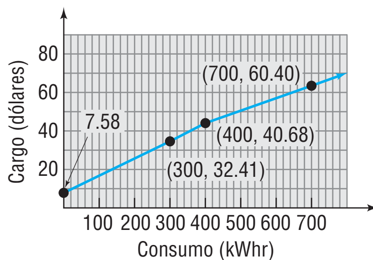
$$\begin{aligned} C(x) &= 0.08275(400) + 7.58 + 0.06574(x - 400) \\ &= 40.68 + 0.06574(x - 400) \\ &= 0.06574x + 14.38 \end{aligned}$$

La regla para calcular C sigue las dos ecuaciones siguientes:

$$C(x) = \begin{cases} 0.08275x + 7.58 & \text{si } 0 \leq x \leq 400 \\ 0.06574x + 14.38 & \text{si } x > 400 \end{cases}$$

Vea la gráfica en la figura 35. ◄

Figura 35



3.4 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtuvo una respuesta errónea, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Bosqueje la gráfica $y = \sqrt{x}$. (pp. 167–168)

2. Bosqueje la gráfica $y = \frac{1}{x}$. (p. 173)

3. Enumere las intercepciones de la ecuación $y = x^3 - 8$. (pp. 169–170)

Conceptos y vocabulario

4. La gráfica de $f(x) = mx + b$ es decreciente si m es _________ que cero.

5. Cuando las funciones están definidas por más de una ecuación se llaman funciones ___________ ___________ ___________.

6. *Falso o verdadero:* la función cubo es impar y es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

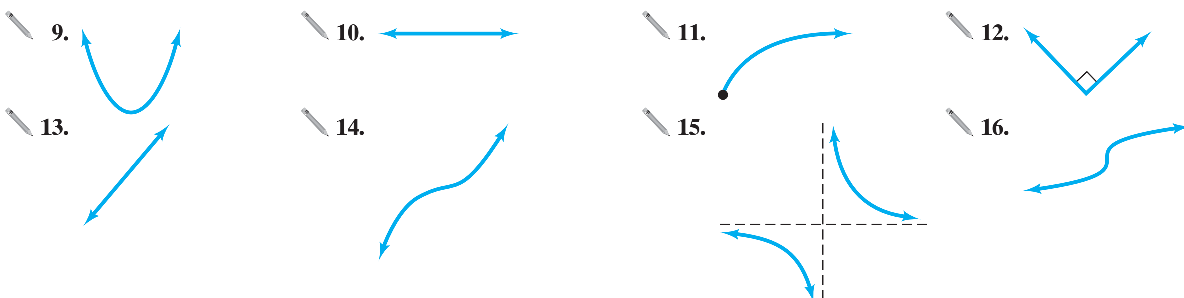
7. *Falso o verdadero:* la función raíz cúbica es impar y decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

8. *Falso o verdadero:* el dominio y el rango de la función recíproca es el conjunto de todos los números reales.

Ejercicios

En los problemas 9-16, forme el par de la gráfica y la función enumerada cuya gráfica se parezca más a la dada.

A. Función constante *B. Función lineal* *C. Función cuadrada*
D. Función cubo *E. Función cuadrática* *F. Función recíproco*
G. Función valor absoluto *H. Función raíz cúbica*



En los problemas 17-24, bosqueje la gráfica de cada función. Asegúrese de etiquetar tres puntos de la gráfica.

17. $f(x) = x$ **18.** $f(x) = x^2$ **19.** $f(x) = x^3$ **20.** $f(x) = \sqrt{x}$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **22.** $f(x) = |x|$ **23.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **24.** $f(x) = 3$

25. Si $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

encuentre: a) $f(-2)$ b) $f(0)$ c) $f(2)$

26. Si $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

encuentre: a) $f(-1)$ b) $f(0)$ c) $f(1)$

27. Si $f(x) = \text{ent}(2x)$, encuentre: *a)* $f(1.2)$ *b)* $f(1.6)$ *c)* $f(-1.8)$

28. Si $f(x) = \text{ent}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, encuentre: *a)* $f(-1)$ *b)* $f(0)$ *c)* $f(1)$

En los problemas 29-40,

a) *Encuentre el dominio de cada función*
b) *Localice las intercepciones*
c) *Grafique cada función*
d) *Con base en la gráfica, encuentre el rango*

29. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & x < 1 \\ 3x - 2 & x \geq 1 \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < -2 \\ -2x - 3 & x \geq -2 \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & -2 \leq x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & -3 \leq x < 0 \\ -3 & x = 0 \\ -5x & x > 0 \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

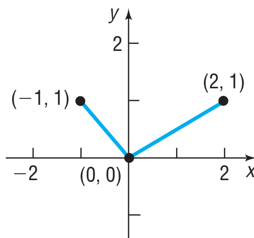
38. $f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

39. $f(x) = 2\,\text{ent}(x)$

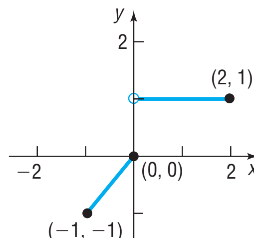
40. $f(x) = \text{ent}(2x)$

En los problemas 41-44 se da la gráfica de una función definida por partes. Escriba una definición para cada función.

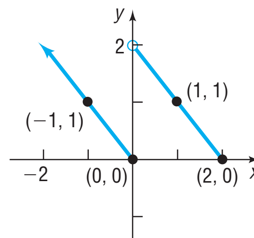
41.



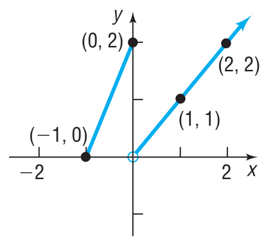
42.



43.



44.



45. Servicio de celular Sprint PCS ofrece un plan mensual de celular por $39.99. Incluye 350 minutos a cualquier hora más $0.25 por minuto por los minutos adicionales. Se usa la siguiente función para calcular el costo mensual para un suscriptor

$$C(x) = \begin{cases} 39.99 & \text{si } 0 < x \leq 350 \\ 0.25x - 47.51 & \text{si } x > 350 \end{cases}$$

donde x es el número de minutos usados a cualquier hora. Calcule el costo mensual de un teléfono celular si se usan los siguientes minutos:

a) 200 b) 365 c) 351

46. Carta por primera clase Según el servicio postal en Estados Unidos, el correo de primera clase se usa para correspondencia personal y de negocios. Cualquier artículo que se envíe por correo, se podría enviar por primera clase. Incluye tarjetas postales, cartas, sobres grandes y paquetes pequeños. El peso máximo es 13 onzas. Se usa la siguiente función para calcular el costo de enviar por correo una carta en primera clase,

$$C(x) = \begin{cases} 0.37 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0.23\,\text{ent}(x) + 0.37 & \text{si } 1 < x \leq 13 \end{cases}$$

donde x es el peso del paquete en onzas. Calcule el costo de enviar un paquete en primera clase para los siguientes pesos:

a) Una carta que pesa 4.3 onzas
b) Una postal que pesa 0.4 onzas
c) Un paquete que pesa 12.2 onzas

47. Costo del gas natural En mayo de 2003, la compañía Peoples Gas tenía los siguientes precios por el consumo de gas natural en residencias unifamiliares.

Cargo de servicio mensual	\$9.45
Cargo de servicio por unidad térmica	
Primeras 50 unidades térmicas	\$0.36375/unid. térmica
Más de 50 unidades térmicas	\$0.11445/unid. térmica
Cargo por gas	\$0.6338/unid. térmica

a) ¿Cuál es el cargo por usar 50 unidades térmicas en un mes?
b) ¿Cuál es el cargo por usar 500 unidades térmicas en un mes?
c) Construya una función que relacione el cargo mensual C por x unidades térmicas de gas.
d) Grafique esta función.

FUENTE: The Peoples Gas Company, Chicago, Illinois, 2003.

48. Costo del gas natural En mayo de 2003, Nicor Gas tenía los siguientes precios por el consumo de gas natural en residencias unifamiliares.

Cargo de servicio mensual	\$6.45
Cargos de distribución	
Primeras 20 unidades térmicas	\$0.2012/unid. térmica
Siguientes 30 unidades térmicas	\$0.1117/unid. térmica
Más de 50 unidades térmicas	\$0.0374/unid. térmica
Cargo por gas	\$0.7268/ unid. térmica

a) ¿Cuál es el cargo por usar 40 unidades térmicas en un mes?
b) ¿Cuál es el cargo por usar 202 unidades térmicas en un mes?
c) Construya una función que dé el cargo mensual C por x unidades térmicas de gas.
d) Grafique esta función.

FUENTE: Nicor Gas, Aurora, Illinois, 2003.

49. Impuesto sobre la renta La tabla que sigue contiene dos planes de tasas de impuestos. Si x es igual al ingreso gravable y y es el impuesto a pagar, construya una función $y = f(x)$ para el plan X.

PLANES DE TASAS DE IMPUESTOS 2003 REVISADOS

Plan X—	Si el ingreso gravable: Es mayor que	Pero no mayor que	El impuesto es — Entonces: Esta cantidad	Más este %	Del excedente de
Soltero	\$0	\$7,000	\$0.00	10%	\$0.00
	\$7,000	\$28,400	\$700.00	15%	\$7,000
	\$28,400	\$68,800	\$3,910.00	25%	\$28,400
	\$68,800	\$143,500	\$14,010.00	28%	\$68,800
	\$143,500	\$311,950	\$34,926.00	33%	\$143,500
	\$311,950	—	\$90,514.50	35%	\$311,950

Plan Y-1—	Si el ingreso gravable: Es mayor que	Pero no mayor que	El impuesto es — Entonces: Esta cantidad	Más este %	Del excedente de
Casados declarando juntos o viuda(o) que califica	\$0	\$14,000	\$0.00	10%	\$0.00
	\$14,000	\$56,800	\$1,400.00	15%	\$14,000
	\$56,800	\$114,650	\$7,820.00	25%	\$56,800
	\$114,650	\$174,700	\$22,282.50	28%	\$114,650
	\$174,700	\$311,950	\$39,096.50	33%	\$174,700
	\$311,950	—	\$84,389.00	35%	\$311,950

FUENTE: Internal Revenue Service

50. Impuesto sobre la renta Vea los planes de tasas de impuestos 2003 revisados. Si x es igual al ingreso gravable y y es igual al impuesto a pagar, construya una función $y = f(x)$ para el plan Y-1.

51. Costo de transporte de bienes Una compañía de camiones de carga transporta bienes entre Chicago y Nueva York, una distancia de 960 millas. La política de la compañía es cobrar, por cada libra, \$0.50 por milla en las primeras 100 millas, \$0.40 por milla en las siguientes 300 millas, \$0.25 por milla en las siguientes 400 millas y sin cargo las 160 millas restantes.

a) Grafique la relación entre el costo de transporte en dólares y el millaje en toda la ruta de 960 millas.
b) Encuentre el costo como función del millaje para tiradas entre 100 y 400 millas de Chicago.
c) Encuentre el costo como función de las millas para transportes entre 400 y 800 millas desde Chicago.

52. Costos de renta de autos La tarifa semanal para la renta de un auto económico en Florida a National Car Rental® es de \$95 por semana. Los días adicionales cuestan \$24 por día hasta que el costo por la renta diaria exceda la tasa semanal, en cuyo caso se aplica esta tasa semanal. Encuentre el costo C de rentar un auto económico como una función definida por partes del número de días x de renta, donde $7 \le x \le 14$. Grafique esta función.
Nota: Cualquier parte de un día cuenta como día completo.

53. Pagos mínimos en tarjetas de crédito Quienes tienen tarjetas de crédito de bancos, tiendas de departamentos, líneas aéreas, etcétera, reciben sus facturas mensuales que establecen la cantidad mínima que deben pagar a más tardar en un fecha dada. El mínimo depende de la deuda total. Una de estas compañías de tarjetas de crédito usa las siguientes reglas: para una deuda menor que $10, debe pagarse el total. Para una deuda de al menos $10 pero menor de $500, el mínimo a pagar es $10. Hay un mínimo de $30 para una deuda de $500 o más y menor que $1000, un mínimo de $50 para una deuda de $1000 o más y menor que $1500 y un mínimo de $70 para deudas de $1500 o más. Encuentre la función *f* que describe los pagos mínimos para una deuda de *x* dólares. Grafique *f*.

54. Pagos de interés para tarjetas de crédito Consulte el problema 53. El usuario de la tarjeta de crédito pagará cualquier cantidad entre el pago mínimo y la deuda total. La empresa que emite la tarjeta cobra al tarjethabiente un interés de 1.5% mensual por los primeros $1000 de deuda y 1% mensual por cualquier saldo excedente a $1000. Encuentre la función *g* que da el interés cobrado por mes sobre un saldo de *x* dólares. Grafique *g*.

55. Factor de viento El factor de viento representa la temperatura del aire equivalente con una velocidad de viento estándar que produce la misma pérdida de calor que la temperatura y velocidad del viento dados. Una fórmula para calcular la temperatura equivalente es

$$W = \begin{cases} t & 0 \le v < 1.79 \\ 33 - \dfrac{(10.45 + 10\sqrt{v} - v)(33 - t)}{22.04} & 1.79 \le v \le 20 \\ 33 - 1.5958(33 - t) & v > 20 \end{cases}$$

donde v representa la velocidad del viento (en metros por segundo) y *t* representa la temperatura del aire (°C). Calcule el factor de viento para lo siguiente:

a) Una temperatura del aire de 10°C y una velocidad del viento de 1 metro por segundo (m/s)
b) Una temperatura de 10°C y una velocidad del viento de 5 m/s
c) Una temperatura de 10°C y una velocidad del viento de 15 m/s
d) Una temperatura de 10°C y una velocidad del viento de 25 m/s
e) Explique el significado físico de la ecuación que corresponde a $0 \le v < 1.79$.
f) Explique el significado físico de la ecuación correspondiente a $v > 20$.

56. Factor de viento Trabaje de nuevo en el problema 55*a*) a *d*) para una temperatura del aire de −10°C.

57. Exploración Grafique $y = x^2$. Luego en la misma pantalla de la gráfica $y = x^2 + 2$, seguido de $y = x^2 + 4$, seguido de $y = x^2 - 2$. ¿Qué patrón observa? ¿Puede predecir la gráfica de $y = x^2 - 4$? ¿Y de $y = x^2 + 5$?

58. Exploración Grafique $y = x^2$. Después en la misma pantalla grafique $y = (x - 2)^2$, seguido de $y = (x - 4)^2$, seguido de $y = (x + 2)^2$. ¿Qué patrón observa? ¿Puede predecir la gráfica de $y = (x + 4)^2$? ¿Y de $y = (x - 5)^2$?

59. Exploración Grafique $y = |x|$. Luego en la misma pantalla grafique $y = 2|x|$, seguido de $y = 4|x|$, seguido de $y = \frac{1}{2}|x|$. ¿Qué patrón observa? ¿Puede predecir la gráfica $y = \frac{1}{4}|x|$? ¿Y de $y = 5|x|$?

60. Exploración Grafique $y = x^2$. Luego en la misma pantalla grafique $y = -x^2$. ¿Qué patrón observa? Ahora intente $y = |x|$ y $y = -|x|$. ¿Cuál es su conclusión?

61. Exploración Grafique $y = \sqrt{x}$. Luego en la misma pantalla grafique $y = \sqrt{-x}$. ¿Qué patrón observa? Ahora intente $y = 2x + 1$ y $y = 2(-x) + 1$. ¿Cuál es su conclusión?

62. Exploración Grafique $y = x^3$. Luego en la misma pantalla grafique $y = (x - 1)^3 + 2$. ¿Pudo haber predicho el resultado?

63. Exploración Grafique $y = x^2$, $y = x^4$ y $y = x^6$ en la misma pantalla. ¿Qué observa parecido en cada gráfica? ¿Qué observa diferente?

64. Exploración Grafique $y = x^3$, $y = x^5$ y $y = x^7$ en la misma pantalla. ¿Qué observa parecido en cada gráfica? ¿Qué observa diferente?

65. Considere la ecuación

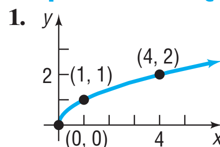
$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

¿Es ésta una función? ¿Cuál es el dominio? ¿Cuál es el rango? ¿Cuál es su intercepción *y*, si la hay? ¿Cuáles son sus intercepciones *x*, si las hay? ¿Es par, impar o ninguna? ¿Cómo describiría su gráfica?

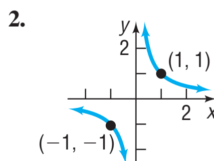
66. Defina algunas funciones que pasen por (0, 0) y (1, 1) y sean crecientes para $x \ge 0$. Comience su lista con $y = \sqrt{x}$, $y = x$ y $y = x^2$. ¿Puede proponer un resultado general acerca de esas funciones?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1.



2.



3. (0, −8), (2, 0)

3.5 Técnicas para graficar: transformaciones

OBJETIVOS
1 Graficar funciones usando traslación horizontal y vertical
2 Graficar funciones usando compresión y estiramiento
3 Graficar funciones usando reflexiones en los ejes

En este punto, si le piden que grafique cualquiera de las funciones definidas por $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$, o $y = \frac{1}{x}$, su respuesta debe ser, "sí, reconozco estas funciones y sé cuál es la forma general de sus gráficas". (Si ésta no es su respuesta, revise la sección anterior, figuras 25 a 31.)

Algunas veces nos piden graficar una función que es "casi" como una que sabemos graficar. En esta sección se estudian algunas de estas funciones y se desarrollan técnicas para graficarlas. En conjunto, estas técnicas se conocen como **transformaciones**.

1 Traslación vertical

EJEMPLO 1 Traslación vertical hacia arriba

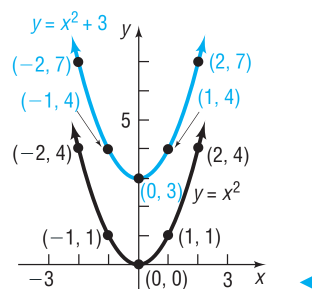
Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para obtener la gráfica de $g(x) = x^2 + 3$.

Solución Se comienza por obtener algunos puntos en las gráficas de f y g. Por ejemplo, cuando $x = 0$, entonces $y = f(0) = 0$ y $y = g(0) = 3$. Cuando $x = 1$, entonces $y = f(1) = 1$ y $y = g(1) = 4$. La tabla 7 enumera estos y otros puntos en cada gráfica. Se concluye que la gráfica de g es idéntica a la de f, excepto que está corrida hacia arriba 3 unidades. Vea la figura 36.

Tabla 7

x	$y = f(x) = x^2$	$y = g(x) = x^2 + 3$
−2	4	7
−1	1	4
0	0	3
1	1	4
2	4	7

Figura 36



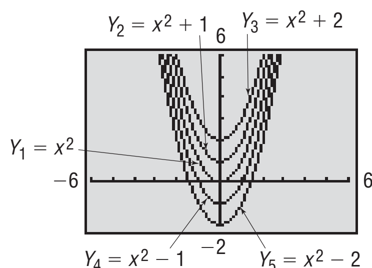
Para ver el concepto



En la misma pantalla, grafique cada una de las siguientes funciones:

$Y_1 = x^2$
$Y_2 = x^2 + 1$
$Y_3 = x^2 + 2$
$Y_4 = x^2 - 1$
$Y_5 = x^2 - 2$

Figura 37



La figura 37 ilustra las gráficas. Debe haber observado un patrón general. Con $Y_1 = x^2$ en la pantalla, la gráfica de $Y_2 = x^2 + 1$ es idéntica a la de $Y_1 = x^2$, excepto que está corrida verticalmente 1 unidad hacia arriba. De manera similar, $Y_3 = x^2 + 2$ es idéntica a la de $Y_1 = x^2$, excepto por el corrimiento vertical de 2 unidades hacia arriba. La gráfica de $Y_4 = x^2 + 1$ es idéntica a la de $Y_1 = x^2$ excepto que tiene un corrimiento vertical de 1 unidad hacia abajo.

Se llega a la siguiente conclusión:

Si se suma un número real k al lado derecho de la función $y = f(x)$, la gráfica de la nueva función $y = f(x) + k$ es la gráfica de f **trasladada verticalmente hacia arriba** (si $k > 0$) o **hacia abajo** (si $k < 0$).

Se verá otro ejemplo.

EJEMPLO 2 Traslación vertical hacia abajo

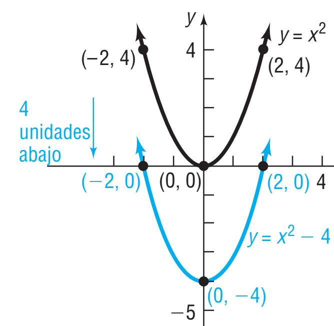
Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para obtener la gráfica de $g(x) = x^2 - 4$.

Solución La tabla 8 da algunos puntos en las gráficas de f y g. Observe que cada coordenada y de g está 4 unidades abajo de la coordenada y correspondiente de f. La gráfica de g es idéntica a la de f, excepto que está corrida 4 unidades hacia abajo. Vea la figura 38.

Tabla 8

x	$y = f(x) = x^2$	$y = g(x) = x^2 - 4$
−2	4	0
−1	1	−3
0	0	−4
1	1	−3
2	4	0

Figura 38



◄


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 35.

Traslación horizontal

EJEMPLO 3 Traslación horizontal a la derecha

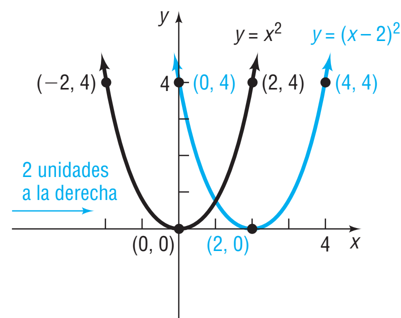
Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para obtener la gráfica de $g(x) = (x - 2)^2$.

Solución La función $g(x) = (x - 2)^2$ es en esencia una función cuadrada. La tabla 9 da algunos puntos en las gráficas de f y g. Observe que cuando $f(x) = 0$, entonces $x = 0$ y cuando $g(x) = 0$, entonces $x = 2$. Además, cuando $f(x) = 4$, entonces $x = -2$ o 2, y si $g(x) = 4$, entonces $x = 0$ o 4. Se concluye que la gráfica de g es idéntica a la de f, excepto que esta corrida 2 unidades a la derecha. Vea la figura 39.

Tabla 9

x	$y = f(x) = x^2$	$y = g(x) = (x - 2)^2$
−2	4	16
0	0	4
2	4	0
4	16	4

Figura 39



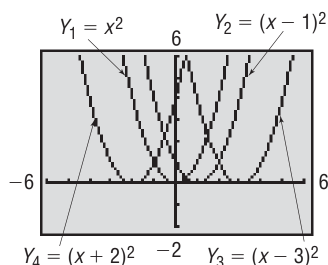


Para ver el concepto

En la misma pantalla, grafique cada una de las siguientes funciones:

$$Y_1 = x^2$$
$$Y_2 = (x - 1)^2$$
$$Y_3 = (x - 3)^2$$
$$Y_4 = (x + 2)^2$$

Figura 40



La figura 40 ilustra las gráficas.

Debe haber observado el siguiente patrón. Con la gráfica de $Y_1 = x^2$ en la pantalla, la gráfica de $Y_2 = (x - 1)^2$ es idéntica a la de $Y_1 = x^2$, excepto por la traslación horizontal 1 unidad a la derecha. De manera similar, la gráfica de $Y_3 = (x - 3)^2$ es idéntica a la de $Y_1 = x^2$, excepto que está corrida horizontalmente 3 unidades a la derecha. Por último, la gráfica de $Y_4 = (x + 2)^2$ es igual a la de $Y_1 = x^2$, excepto por el corrimiento horizontal 2 unidades a la izquierda.

Se llega a la siguiente conclusión.

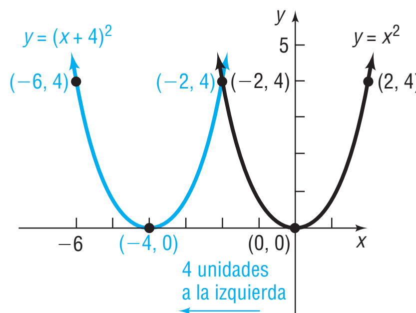
> Si el argumento x de una función f se sustituye por $x - h$, h un número real, la gráfica de la nueva función $y = f(x - h)$ es la gráfica de f **trasladada horizontalmente a la izquierda** (si $h < 0$) o **a la derecha** (si $h > 0$).

EJEMPLO 4 Traslación horizontal a la izquierda

Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para obtener la gráfica de $g(x) = (x + 4)^2$.

Solución De nuevo la función $g(x) = (x + 4)^2$ es en esencia una función cuadrada. Su gráfica es la misma que la de f, excepto por el corrimiento horizontal 4 unidades a la izquierda. (¿Por qué? $(x + 4)^2 = [x - (-4)]^2$.) Vea la figura 41.

Figura 41



◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

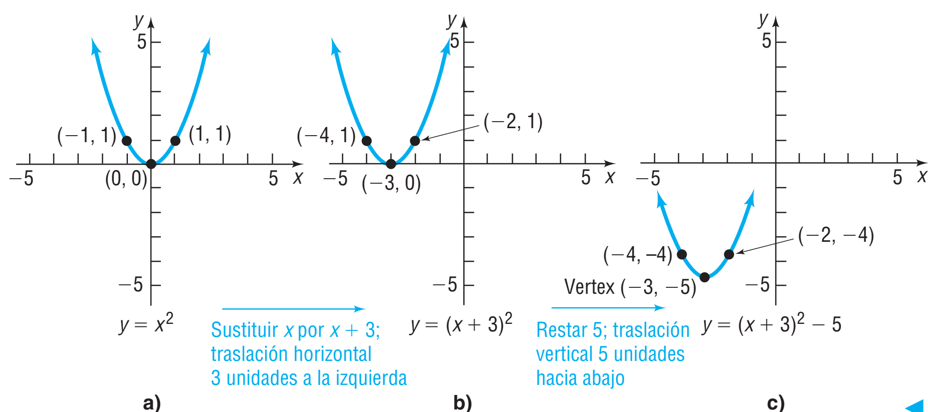
En ocasiones se combinan las traslaciones horizontal y vertical.

EJEMPLO 5 Combinación de traslaciones vertical y horizontal

Grafique la función: $f(x) = (x + 3)^2 - 5$

Solución Se grafica f por pasos. Primero, se observa que la regla para f es en esencia una función cuadrada, y comenzamos con la gráfica de la función $y = x^2$ como se muestra en la figura 42*a*). Luego para obtener la gráfica de $y = (x + 3)^2$, se corre la gráfica de $y = x^2$ horizontalmente 3 unidades a la izquierda. Vea la figura 42*b*). Por último, para obtener la gráfica de $y = (x + 3)^2 - 5$, se corre la gráfica de $y = (x + 3)^2$ verticalmente 5 unidades hacia abajo. Vea la figura 42*c*). Note los puntos graficados en cada caso. El uso de puntos clave ayuda a seguir los pasos de la transformación que tiene lugar.

Figura 42



◀



COMPROBACIÓN: Grafique $Y_1 - f(x) - (x + 3)^2 - 5$ y compare la gráfica con la figura 42*c*).

En el ejemplo 5, si se hubiera hecho primero la traslación vertical, seguida de la horizontal, la gráfica final habría sido la misma. Inténtelo.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 41.

2 Compresión y estiramiento

EJEMPLO 6 Estiramiento vertical

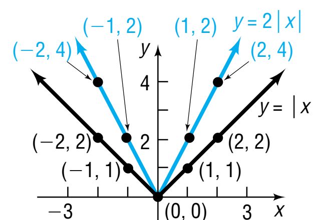
Use la gráfica de $f(x) = |x|$ para obtener la gráfica de $g(x) = 2|x|$.

Solución Para ver la relación entre las gráficas f y g, se forma la tabla 10 con los puntos de cada gráfica. Para cada x, la coordenada y de un punto en la gráfica de g es el doble de la coordenada correspondiente en la gráfica de f. La gráfica de $f(x) = |x|$ está estirada verticalmente por un factor de 2 [por ejemplo, de (1, 1) a (1, 2)] para obtener la gráfica de $g(x) = 2|x|$. Vea la figura 43.

Tabla 10

x	$y = f(x) = \|x\|$	$y = g(x) = 2\|x\|$
−2	2	4
−1	1	2
0	0	0
1	1	2
2	2	4

Figura 43



EJEMPLO 7 Compresión vertical

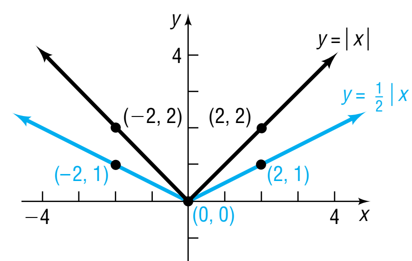
Use la gráfica de $f(x) = |x|$ para obtener la gráfica de $g(x) = \frac{1}{2}|x|$.

Solución Para cada x, la coordenada en la gráfica de g es la mitad de la coordenada correspondiente en la gráfica de f. La gráfica de $f(x) = |x|$ se comprime verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$ [por ejemplo, de (2, 2) a (2, 1)] para obtener la gráfica de $g(x) = \frac{1}{2}|x|$. Vea la tabla 11 y la figura 44.

Tabla 11

x	$y = f(x) = \|x\|$	$y = g(x) = \frac{1}{2}\|x\|$
−2	2	1
−1	1	$\frac{1}{2}$
0	0	0
1	1	$\frac{1}{2}$
2	2	1

Figura 44



Cuando el lado derecho de una función $y = f(x)$ se multiplica por un número positivo a, la gráfica de la nueva función $y = af(x)$ se obtiene multiplicando cada coordenada y de $y = f(x)$ por a. Si $0 < a < 1$ se obtiene una **compresión vertical** y si $a > 1$, se obtiene un **estiramiento vertical**.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 43.

¿Qué ocurre si el argumento x de una función $y = f(x)$ se multiplica por un número positivo a, creando una nueva función $y = f(ax)$? Para encontrar la respuesta, se ve primero la siguiente exploración.

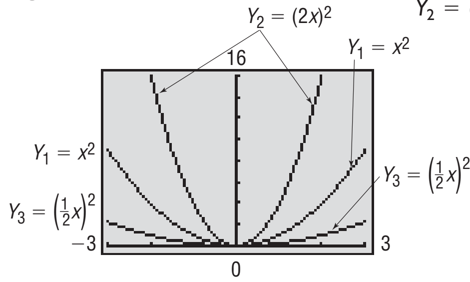


Exploración

En la misma pantalla, grafique cada una de las siguientes funciones:

$$Y_1 = f(x) = x^2$$
$$Y_2 = f(2x) = (2x)^2$$
$$Y_3 = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

Figura 45



RESULTADO Debe haber obtenido la gráfica mostrada en la figura 45. La gráfica de $Y_2 = (2x)^2$ es la gráfica de $Y_1 = x^2$ comprimida horizontalmente. Vea la tabla 12.

Tabla 12

X	Y1	Y2
0	0	0
.5	.25	1
1	1	4
2	4	16
4	16	64
8	64	256
16	256	1024

Y2■(2X)²

a)

X	Y1	Y3
0	0	0
.5	.25	.0625
1	1	.25
2	4	1
4	16	4
8	64	16
16	256	64

Y3■(X/2)²

b)

Observe que (1, 1), (2, 4), (4, 16) y (16, 256) son puntos en la gráfica de $Y_1 = x^2$. También (0.5, 1), (1, 4), (2, 16) y (8, 256) son puntos en la gráfica de $Y_2 = (2x)^2$. Para cada coordenada y, la coordenada x en la gráfica de Y_2 es $\frac{1}{2}$ de la coordenada de Y_1. La gráfica de $Y_2 = (2x)^2$ se obtiene multiplicando la coordenada x de cada punto en la gráfica de $Y_1 = x^2$ por $\frac{1}{2}$.

La gráfica de $Y_3 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ es la gráfica de $Y_1 = x^2$ estirada horizontalmente. Vea la tabla 12b). Observe que (0.5, 0.25), (1, 1), (2,4) y (4, 16) son puntos en la gráfica de $Y_1 = x^2$. También (1, 0.25), (2, 1), (4, 4) y (8, 16) son puntos en la gráfica de $Y_3 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$. Para cada coordenada y, la coordenada x en la gráfica de Y_3 es el doble de la coordenada x en Y_1. La gráfica de $Y_3 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ se obtiene multiplicando la coordenada x de cada punto en la gráfica de $Y_1 = x^2$ por un factor de 2.

> Si el argumento x de una función $y = f(x)$ se multiplica por un número positivo a, la gráfica de la nueva función $y = f(ax)$ se obtiene multiplicando cada coordenada x de $y = f(x)$ por $\frac{1}{a}$. Se obtiene una **compresión horizontal** si $a > 1$, y se ocurre un **estiramiento horizontal** si $0 < a < 1$.

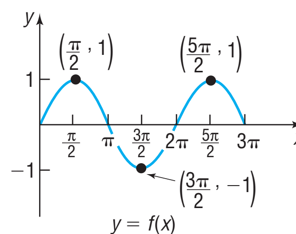
Se verá un ejemplo.

EJEMPLO 8 Graficar usando estiramiento y compresión

La gráfica de $y = f(x)$ está dada en la figura 46. Use esta gráfica para encontrar las gráficas de:

a) $y = 3f(x)$ b) $y = f(3x)$

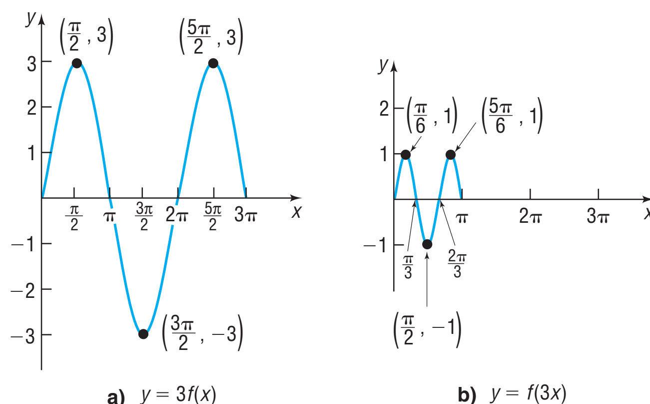
Figura 46



Solución a) La gráfica de $y = 3f(x)$ se obtiene multiplicando cada coordenada y de $y = f(x)$ por un factor de 3. Vea la figura 47*a*).

b) La gráfica de $y = f(3x)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ multiplicando cada coordenada x de $y = f(x)$ por un factor de $\frac{1}{3}$. Vea la figura 47*b*).

Figura 47



◀


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 65e) Y g).

3 Reflexiones en el eje *x* y el eje *y*

EJEMPLO 9 Reflexión en el eje *x*

Grafique la función: $f(x) = -x^2$

Solución Se comienza con la gráfica de $y = x^2$, como se muestra en la figura 48. Para cada punto (x, y) en la gráfica de $y = x^2$, el punto $(x, -y)$ está en la gráfica de $y = -x^2$, como se indica en la tabla 13. Se dibuja la gráfica de $y = -x^2$ reflejando la gráfica de $y = x^2$ en el eje x. Vea la figura 48.

Figura 48

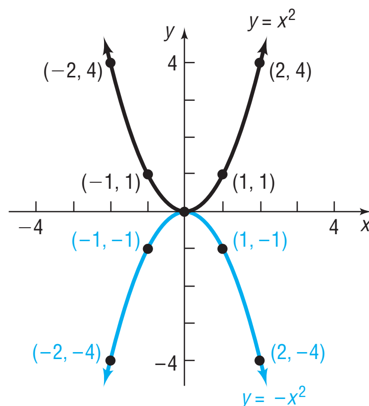


Tabla 13

x	$y = x^2$	$y = -x^2$
−2	4	−4
−1	1	−1
0	0	0
1	1	−1
2	4	−4

◀

Cuando el lado derecho de la función $y = f(x)$ se multiplica por −1, la gráfica de la nueva función $y = -f(x)$ es la **reflexión en el eje *x*** de la gráfica de la función $y = f(x)$.

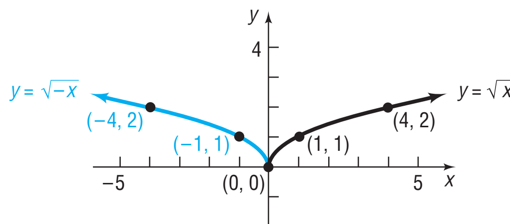

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

EJEMPLO 10 **Reflexión en el eje y**

Grafique la función: $f(x) = \sqrt{-x}$

Solución Primero observe que el dominio de f consiste en todos los números reales x para los cuales $-x \geq 0$ o, de manera equivalente, $x \leq 0$. Para obtener la gráfica de $f(x) = \sqrt{-x}$, se comienza con la gráfica de $y = \sqrt{x}$, como se muestra en la figura 49. Para cada punto (x, y) en la gráfica de $y = \sqrt{x}$, el punto $(-x, y)$ está en la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = \sqrt{x}$ en el eje y. Vea la figura 49.

Figura 49



◄

Cuando se conoce la gráfica de la función $y = f(x)$, la gráfica de la nueva función $y = f(-x)$ es la **reflexión en el eje y** de la gráfica de $y = f(x)$.

Resumen

Resumen de las técnicas para graficar

La tabla 14 resume los procedimientos para graficar que se han estudiado.

Tabla 14

Para graficar:	Dibujar la gráfica de f y:	Cambio funcional en $f(x)$
Traslación vertical		
$y = f(x) + k,\quad k > 0$	Subir k unidades la gráfica de f.	Sumar k a $f(x)$.
$y = f(x) - k,\quad k > 0$	Bajar k unidades la gráfica de f.	Restar k de $f(x)$.
Traslación horizontal		
$y = f(x + h),\quad h > 0$	Correr la gráfica de f, k unidades a la izquierda.	Sustituir x por $x + h$.
$y = f(x - h),\quad h > 0$	Correr la gráfica de f, k unidades a la derecha.	Sustituir x por $x - h$.
Compresión o estiramiento		
$y = af(x),\quad a > 0$	Multiplicar por a cada coordenada y de $y = f(x)$. Estirar verticalmente la gráfica de f si $a > 1$. Comprimir verticalmente la gráfica de f si $0 < a < 1$.	Multiplicar $f(x)$ por a.
$y = f(ax),\quad a > 0$	Multiplicar por $\frac{1}{a}$ cada coordenada x de $y = f(x)$. Estirar la gráfica de f horizontalmente si $0 < a < 1$. Comprimir la gráfica de f horizontalmente si $a > 1$.	Sustituir x por ax.
Reflexión en el eje x		
$y = -f(x)$	Reflejar la gráfica de f en el eje x.	Multiplicar $f(x)$ por -1.
Reflexión en el eje y		
$y = f(-x)$	Reflejar la gráfica de f en el eje y.	Sustituir x por $-x$.

Los ejemplos que siguen combinan algunos de los procedimientos descritos en esta sección para obtener la gráfica requerida.

EJEMPLO 11 Determinar la función obtenida después de una serie de transformaciones

Encuentre la función que se grafica después de aplicar tres transformaciones a la gráfica de $y = |x|$.

1. Correr 2 unidades a la izquierda.
2. Correr 3 unidades hacia arriba.
3. Reflejar en el eje y.

Solución

1. Correr 2 unidades a la izquierda: sustituir x por $x + 2$. $\quad y = |x + 2|$
2. Correr 3 unidades hacia arriba: sumar 3. $\quad y = |x + 2| + 3$
3. Reflejar en el eje y: sustituir x por $-x$. $\quad y = |-x + 2| + 3$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

EJEMPLO 12 Combinación de procedimientos para graficar

Graficar la función: $f(x) = \dfrac{3}{x - 2} + 1$

Solución Se usan los siguientes pasos para obtener la gráfica de f:

PASO 1: $y = \dfrac{1}{x}$ — *Función recíproco.*

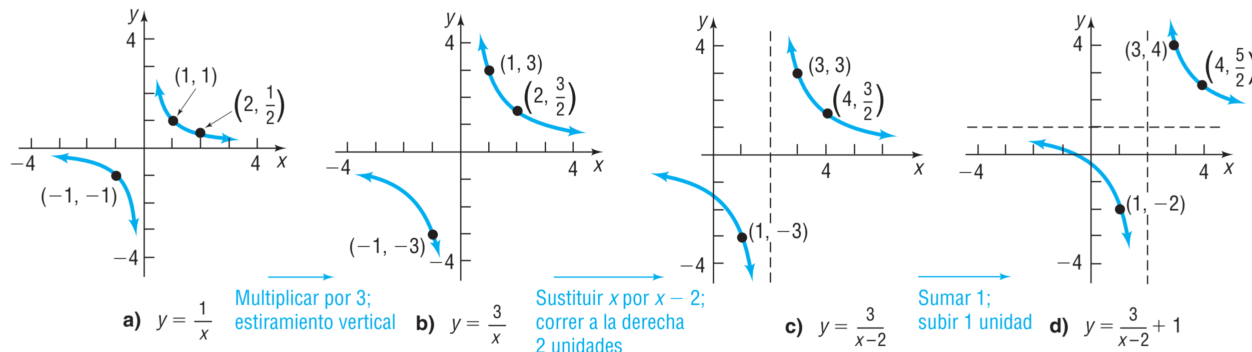
PASO 2: $y = \dfrac{3}{x}$ — *Multiplicar por 3; estirar verticalmente la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ por un factor de 3*

PASO 3: $y = \dfrac{3}{x - 2}$ — *Sustituir x por $x - 2$; traslación horizontal a la derecha 2 unidades*

PASO 4: $y = \dfrac{3}{x - 2} + 1$ — *Sumar 1; subir 1 unidad*

Vea la figura 50.

Figura 50



◀

Otro orden de los pasos mostrados en el ejemplo 12 también daría como resultado la gráfica *f*. Por ejemplo, intente éste:

PASO 1: $y = \dfrac{1}{x}$ Función recíproco.

PASO 2: $y = \dfrac{1}{x - 2}$ Sustituir x por $x - 2$; correr 2 unidades a la derecha.

PASO 3: $y = \dfrac{3}{x - 2}$ Multiplicar por 3; estirar verticalmente la gráfica de $y = \dfrac{1}{x - 2}$ por un factor de 3

PASO 4: $y = \dfrac{3}{x - 2} + 1$ Sumar 1; subir 1 unidad.

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 57.

EJEMPLO 13 Combinación de procedimientos para graficar

Grafique la función: $f(x) = \sqrt{1 - x} + 2$

Solución Se usan los siguientes pasos para obtener la gráfica de $y = \sqrt{1 - x} + 2$:

PASO 1: $y = \sqrt{x}$ Función raíz cuadrada

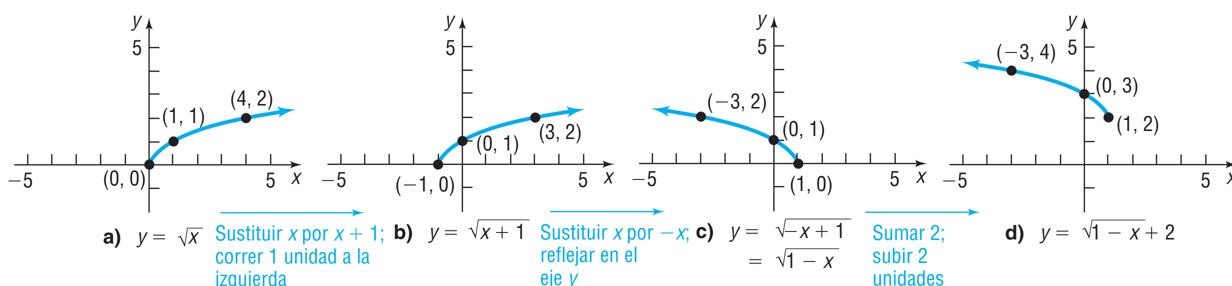
PASO 2: $y = \sqrt{x + 1}$ Sustituir x por $x + 1$; correr 1 unidad a la izquierda

PASO 3: $y = \sqrt{-x + 1} = \sqrt{1 - x}$ Sustituir x por $-x$; reflejar en el eje y

PASO 4: $y = \sqrt{1 - x} + 2$ Sumar 2; subir 2 unidades

Vea la figura 51.

Figura 51



◀

3.5 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Suponga que se conoce la gráfica de una función *f*. Entonces la gráfica de $y = f(x - 2)$ se obtiene mediante una traslación _________ de la gráfica de *f* a la _________ de 2 unidades.

2. Suponga que se conoce la gráfica de una función *f*. Entonces la gráfica de $y = f(-x)$ se obtiene reflejando en el eje ___________ la gráfica de la función $y = f(x)$.

3. Suponga que las intercepciones x de la gráfica de $y = f(x)$ son -2, 1 y 5. Las intercepciones x de $y = f(x + 3)$ son _____________, ____________ y ____________.

4. *Falso o verdadero:* la gráfica de $y = -f(x)$ es la reflexión en el eje x de la gráfica de $y = f(x)$.

5. *Falso o verdadero:* para obtener la gráfica de $y = f(x + 2) - 3$, la gráfica de $y = f(x)$ se traslada horizontalmente 2 unidades a la derecha y verticalmente 3 unidades hacia abajo.

6. *Falso o verdadero:* suponga que las intercepciones x de la gráfica de $y = f(x)$ son -3 y 2. Entonces las intercepciones x de la gráfica de $y = 2f(x)$ son -3 y 2.

Ejercicios

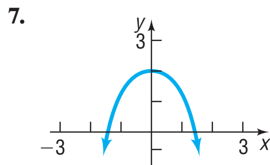
En los problemas 7-18, encuentre la gráfica que corresponde a cada una de las siguientes funciones.

A. $y = x^2 + 2$ B. $y = -x^2 + 2$ C. $y = |x| + 2$ D. $y = -|x| + 2$

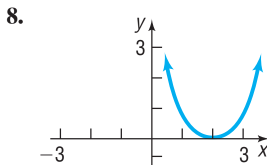
E. $y = (x - 2)^2$ F. $y = -(x + 2)^2$ G. $y = |x - 2|$ H. $y = -|x + 2|$

I. $y = 2x^2$ J. $y = -2x^2$ K. $y = 2|x|$ L. $y = -2|x|$

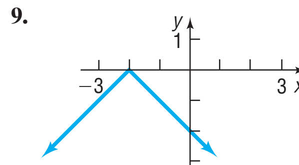
7.



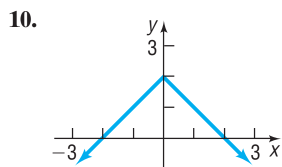
8.



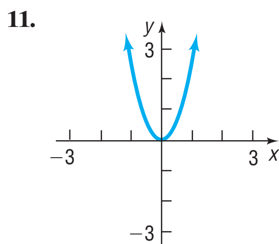
9.



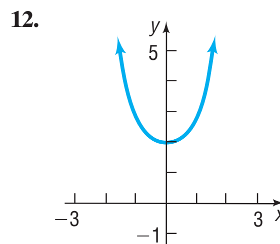
10.



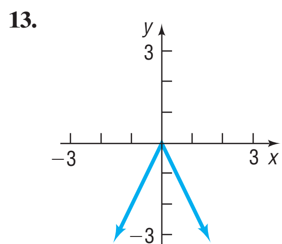
11.



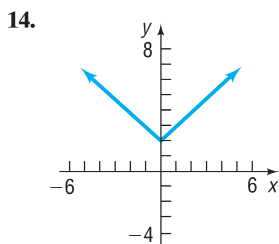
12.



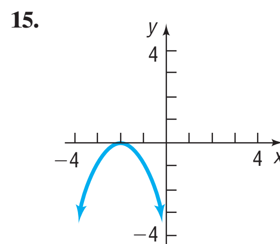
13.



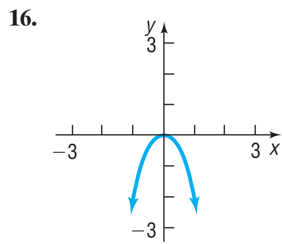
14.



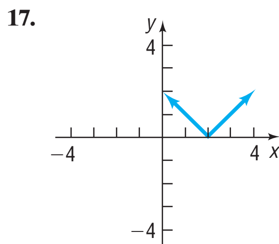
15.



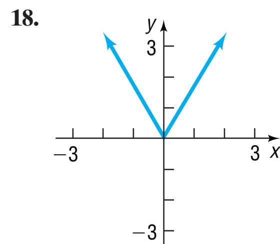
16.



17.



18.



En los problemas 19-26, escriba la función cuya gráfica corresponde a $y = x^3$, pero ésta:

19. Trasladada a la derecha 4 unidades

20. Trasladada a la izquierda 4 unidades

21. Trasladada hacia arriba 4 unidades

22. Trasladada hacia abajo 4 unidades

23. Reflejada en el eje y

24. Reflejada en el eje x

25. Estirada verticalmente por un factor de 4

26. Estirada horizontalmente por un factor de 4

En los problemas 27-30, encuentre la función que se grafica después de aplicar las transformaciones siguientes a la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

27. 1) Subir 2 unidades
2) Reflejar en el eje x
3) Reflejar en el eje y

28. 1) Reflejar en el eje x
2) Subir 3 unidades
3) Bajar 2 unidades

29. 1) Reflejar en el eje x
2) Subir 2 unidades
3) Correr 3 unidades a la izquierda

30. 1) Subir 2 unidades
2) Reflejar en el eje y
3) Correr 3 unidades a la izquierda

31. Si (3, 0) es un punto de la gráfica de $y = f(x)$, ¿cuál de los siguientes debe estar en la gráfica de $y = -f(x)$?
a) (0, 3) b) (0, −3)
c) (3, 0) d) (−3, 0)

32. Si (3, 0) es un punto en la gráfica de $y = f(x)$, ¿cuál de los siguientes debe estar en la gráfica de $y = f(-x)$?
a) (0, 3) b) (0, −3)
c) (3, 0) d) (−3, 0)

33. Si (0, 3) es un punto en la gráfica de $y = f(x)$, ¿cuál de los siguientes debe estar en la gráfica de $y = 2f(x)$?
a) (0, 3) b) (0, 2)
c) (0, 6) d) (6, 0)

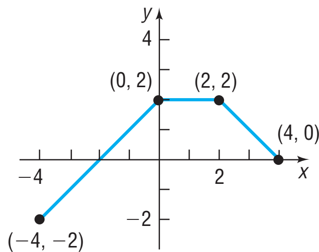
34. Si (3, 0) es un punto en la gráfica de $y = f(x)$, ¿cuál de los siguientes debe estar en la gráfica de $y = \frac{1}{2}f(x)$?
a) (3, 0) b) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$
c) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ d) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

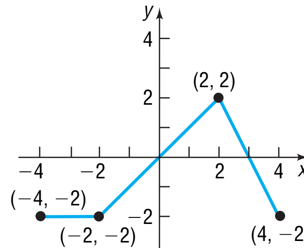
En los problemas 35-64, grafique cada función usando las técnicas de traslación, compresión, estiramiento y/o reflexión. Comience con la gráfica de la función básica (por ejemplo $y = x^2$) y muestre todos los pasos.

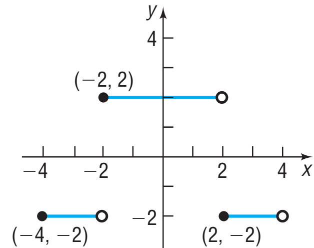
35. $f(x) = x^2 - 1$
36. $f(x) = x^2 + 4$
37. $g(x) = x^3 + 1$
38. $g(x) = x^3 - 1$
39. $h(x) = \sqrt{x - 2}$
40. $h(x) = \sqrt{x + 1}$
41. $f(x) = (x - 1)^3 + 2$
42. $f(x) = (x + 2)^3 - 3$
43. $g(x) = 4\sqrt{x}$
44. $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
45. $h(x) = \frac{1}{2x}$
46. $h(x) = 3\sqrt[3]{x}$
47. $f(x) = -\sqrt[3]{x}$
48. $f(x) = -\sqrt{x}$
49. $g(x) = |-x|$
50. $g(x) = \sqrt[3]{-x}$
51. $h(x) = -x^3 + 2$
52. $h(x) = \frac{1}{-x} + 2$
53. $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$
54. $f(x) = 3(x - 2)^2 + 1$
55. $g(x) = \sqrt{x - 2} + 1$
56. $g(x) = |x + 1| - 3$
57. $h(x) = \sqrt{-x} - 2$
58. $h(x) = \frac{4}{x} + 2$
59. $f(x) = -(x + 1)^3 - 1$
60. $f(x) = -4\sqrt{x - 1}$
61. $g(x) = 2|1 - x|$
62. $g(x) = 4\sqrt{2 - x}$
63. $h(x) = 2\,\text{ent}(x - 1)$
64. $h(x) = \text{ent}(-x)$

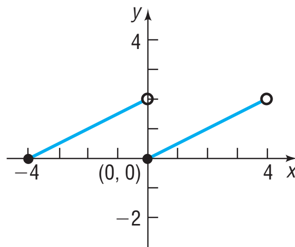
En los problemas 65-70 se ilustra la gráfica de la función f. Use esa gráfica como primer paso para graficar cada una de las siguientes funciones.

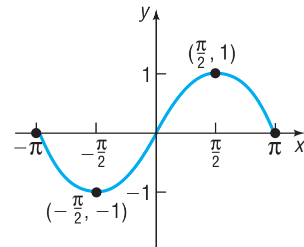
a) $F(x) = f(x) + 3$ b) $G(x) = f(x + 2)$ c) $P(x) = -f(x)$ d) $H(x) = f(x + 1) - 2$
e) $Q(x) = \frac{1}{2}f(x)$ f) $g(x) = f(-x)$ g) $h(x) = f(2x)$

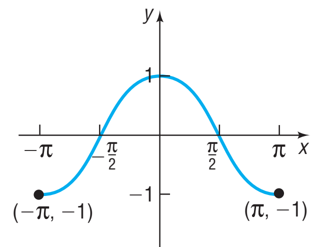
65.


66.


67.


68.


69.


70.


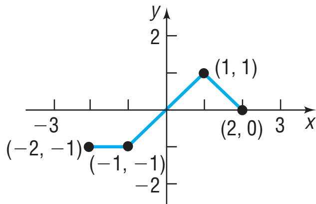
71. Exploración

a) Use un dispositivo de graficación para graficar $y = x + 1$ y $y = |x + 1|$.
b) Grafique $y = 4 - x^2$ y $y = |4 - x^2|$.
c) Grafique $y = x^3 + x$ y $y = |x^3 + x|$.
d) ¿Qué concluye acerca de la relación entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$?

72. Exploración

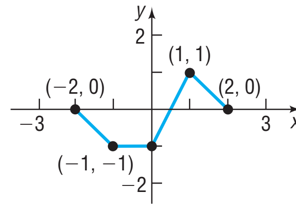
a) Use un dispositivo de graficación para graficar $y = x + 1$ y $y = |x| + 1$.
b) Grafique $y = 4 - x^2$ y $y = 4 - |x|^2$.
c) Grafique $y = x^3 + x$ y $y = |x|^3 + |x|$.
d) ¿Qué concluye acerca de la relación entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$?

73. La gráfica de una función *f* se ilustra en la figura.



a) Dibuje la gráfica de $y = |f(x)|$.
b) Dibuje la gráfica de $y = f(|x|)$.

74. La gráfica de una función *f* se ilustra en la figura.



a) Dibuje la gráfica de $y = |f(x)|$.
b) Dibuje la gráfica de $y = f(|x|)$.

En los problemas 75-80, complete el cuadrado de cada expresión cuadrática. Luego grafique cada función usando las técnicas de traslación. (Si es necesario, *consulte la sección 1.2* *para repasar cómo completar cuadrados.)*

75. $f(x) = x^2 + 2x$
76. $f(x) = x^2 - 6x$
77. $f(x) = x^2 - 8x + 1$
78. $f(x) = x^2 + 4x + 2$
79. $f(x) = x^2 + x + 1$
80. $f(x) = x^2 - x + 1$

81. La ecuación $y = (x - c)^2$ define una *familia de parábolas*, una parábola por cada valor de c. En un conjunto de ejes coordenados, grafique los miembros de la familia para $c = 0$, $c = 3$ y $c = -2$.

82. Repita el problema 81 para la familia de parábolas $y = x^2 + c$.

83. Medición de temperatura La relación entre las escalas de grados Celsius (°C) y Fahrenheit (°F) para medir la temperatura está dada por la ecuación

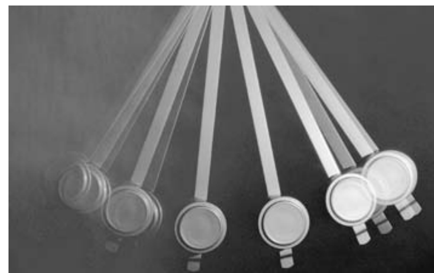
$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

La relación entre las escalas Celsius (°C) y Kelvin (K) es $K = C + 273$. Grafique la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$ usando grados Fahrenheit en el eje y y grados Celsius en el eje x. Utilice las técnicas introducidas en esta sección para obtener la gráfica que muestra la relación entre las temperaturas Kelvin y Fahrenheit.

84. Periodo de un péndulo El periodo T (en segundos) de un péndulo simple es una función de su longitud (en pies) definida por la ecuación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde $g \approx 32.2$ pies por segundo es la aceleración de la gravedad.



a) Use un dispositivo de graficación para graficar la función $T = T(l)$.
b) Ahora grafique las funciones $T = T(l + 1)$, $T = T(l + 2)$ y $T = T(l + 3)$.
c) Analice por qué al alargar la longitud l cambia el periodo T.
d) Ahora grafique las funciones $T = T(2l)$, $T = T(3l)$ y $T = T(4l)$.
e) Analice por qué multiplicar la longitud l por factores de 2, 3 y 4 cambia el periodo.

85. Ganancias de compañía de puros Las ganancias diarias de una compañía por la venta de x puros están dadas por

$$p(x) = -0.05x^2 + 100x - 2000$$

El gobierno desea establecer un impuesto sobre los puros (que suele llamarse *impuesto del pecado*) que dé a la compañía la opción de pagar un impuesto fijo de $10,000 por día o un impuesto de 10% sobre las ganancias. Como jefe de finanzas de la compañía, debe decidir qué tipo de impuesto es la mejor opción.

a) En la misma pantalla, grafique $Y_1 = p(x) - 10{,}000$ y $Y_2 = (1 - 0.10)p(x)$.

b) Con base en la gráfica, ¿qué opción seleccionaría?, ¿por qué?

c) Usando la terminología aprendida en esta sección, describa cada gráfica en términos de la gráfica de $p(x)$.

d) Suponga que el gobierno ofrece la opción de pagar un impuesto fijo de $4800 o un impuesto de 10% sobre las ganancias. ¿Cuál seleccionaría? ¿Por qué?

86. Suponga que se conoce la gráfica de una función *f*. Explique en qué difiere la gráfica de $y = 4f(x)$ de la gráfica de $y = f(4x)$.

3.6 Modelos matemáticos: construcción de funciones

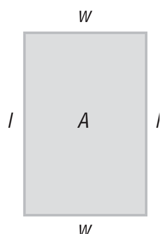
OBJETIVOS 1 Construir y analizar funciones

1 Los problemas reales con frecuencia se representan con modelos matemáticos que involucran funciones. Estas funciones deben desarrollarse o construirse con base en la información dada. Al desarrollar funciones, debe poderse traducir la descripción verbal en el lenguaje de las matemáticas. Esto se hace asignando símbolos para representar las variables independiente y dependiente, y luego encontrar la función o la regla que relaciona estas variables.

EJEMPLO 1 Área de un rectángulo con perímetro fijo

El perímetro de un rectángulo es de 50 pies. Exprese su área A como función de la longitud l de un lado.

Figura 52



Solución Consulte la figura 52. Si el largo del rectángulo es l y si w es el ancho, entonces la suma de las longitudes de los lados es el perímetro, 50.

$$\begin{aligned} l + w + l + w &= 50 \\ 2l + 2w &= 50 \\ l + w &= 25 \\ w &= 25 - l \end{aligned}$$

El área A es el largo multiplicado por el ancho, entonces

$$A = lw = l(25 - l)$$

El área A como función de l es

$$A(l) = l(25 - l)$$

Observe que se usa el símbolo A como la variable dependiente y como nombre de la función que relaciona el largo l con el área. Como se mencionó, este doble uso es común en las aplicaciones y no debe causar dificultades.

EJEMPLO 2 Economía: ecuación de la demanda

En economía, el ingreso R se define como la cantidad de dinero recibido por la venta de un producto y es igual al precio unitario de venta p del producto por el número x de unidades de hecho vendidas. Esto es,

$$R = xp$$

En economía, la ley de la demanda establece que p y x están relacionadas: cuando una aumenta la otra disminuye. Suponga que p y x tienen la siguiente relación dada por la **ecuación de demanda**:

$$p = -\frac{1}{10}x + 20, \qquad 0 \leq x \leq 200$$

Exprese el ingreso R como función del número x de unidades vendidas.

Solución Como $R = xp$ y $p = -\frac{1}{10}x + 20$, se deduce que

$$R(x) = xp = x\left(-\frac{1}{10}x + 20\right) = -\frac{1}{10}x^2 + 20x$$ ◀

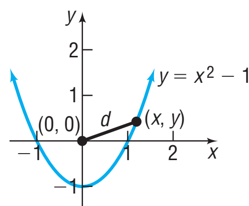
TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 3.

EJEMPLO 3 Encontrar la distancia del origen a un punto en la gráfica

Sea $P = (x, y)$ un punto en la gráfica de $y = x^2 - 1$.

a) Exprese la distancia d de P al origen O como función de x.
b) ¿Cuánto vale d si $x = 0$?
c) ¿Cuánto vale d si $x = 1$?
d) ¿Cuánto vale d si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$?
e) Use un dispositivo de graficación para graficar la función $d = d(x), x \geq 0$. Redondeado a dos decimales, encuentre el valor(es) de x en donde d tiene un mínimo local. [Esto da el (los) punto(s) en la gráfica de $y = x^2 - 1$ más cercano al origen.]

Figura 53



Solución a) La figura 53 ilustra la gráfica. La distancia d de P a O es

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como P es un punto en la gráfica de $y = x^2 - 1$, se tiene

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Se ha expresado la distancia d como función de x.

b) Si $x = 0$, la distancia d es

$$d(0) = \sqrt{1} = 1$$

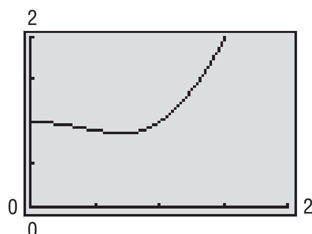
c) Si $x = 1$, la distancia d es

$$d(1) = \sqrt{1 - 1 + 1} = 1$$

d) Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la distancia d es

$$d\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Figura 54





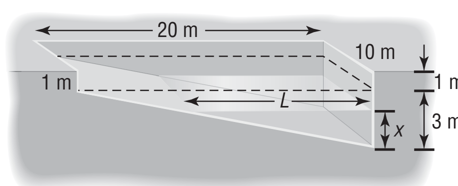
e) La figura 54 muestra la gráfica de $Y_1 = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$. Usando la característica MINIMUM en una calculadora gráfica, se encuentra que cuando $x \approx 0.71$, el valor de d es el más pequeño ($d \approx 0.87$ redondeado a dos decimales es un mínimo local). Por simetría, se deduce que cuando $x \approx -0.71$, el valor de d también es un mínimo local. ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

EJEMPLO 4 Llenado de una alberca

Una alberca rectangular de 20 metros de largo y 10 metros de ancho tiene 4 metros de profundidad en un lado y 1 metro en el otro. La figura 55 ilustra una sección cruzada de la alberca. El agua se bombea a la alberca a una altura de 3 metros en el lado hondo.

Figura 55



a) Encuentre una función que exprese el volumen V del agua en la alberca como función de la altura x del agua en el lado hondo.

b) Encuentre el volumen cuando la altura es de 1 metro.

c) Encuentre el volumen cuando la altura es de 2 metros.

d) Use una dispositivo de graficación para graficar la función $V = V(x)$. ¿A qué altura del agua el volumen es de 20 metros cúbicos? ¿Y de 100 m^3?

Solución a) Sea L la distancia (en metros) medida al nivel del agua del lado hondo al otro lado. Observe que L y x forman los lados de un triángulo similar al triángulo cuyos lados son de 20 metros por 3 metros. Entonces. L y x están relacionados por la ecuación

$$\frac{L}{x} = \frac{20}{3} \quad \text{o} \quad L = \frac{20x}{3}, \qquad 0 \leq x \leq 3$$

El volumen v del agua en la alberca en cualquier tiempo es

$$V = \begin{pmatrix}\text{área triangular de la} \\ \text{sección cruzada}\end{pmatrix}(\text{ancho}) = \left(\frac{1}{2}Lx\right)(10) \quad \text{metros cúbicos}$$

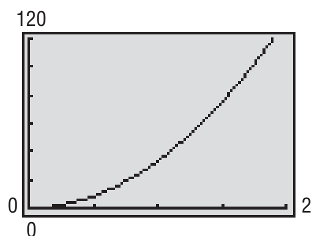
Como $L = \frac{20x}{3}$, se tiene

$$V(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{20x}{3} \cdot x\right)(10) = \frac{100}{3}x^2 \quad \text{metros cúbicos}$$

b) Cuando la altura de x del agua es 1 metro, el volumen $V = V(x)$ es

$$V(1) = \frac{100}{3} \cdot 1^2 = 33\frac{1}{3} \quad \text{metros cúbicos}$$

Figura 56



c) Cuando la altura x del agua es de 2 metros, el volumen $V = V(x)$ es

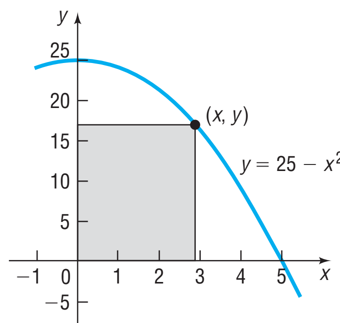
$$V(2) = \frac{100}{3} \cdot 2^2 = \frac{400}{3} = 133\frac{1}{3} \quad \text{metros cúbicos}$$

d) Vea la figura 56. Use TRACE. Cuando $x \approx 0.77$ metros, el volumen es de 20 metros cúbicos. Cuando $x \approx 1.73$ metros el volumen es de 100 metros cúbicos. ◀

EJEMPLO 5 Área de un rectángulo

Un rectángulo tiene una esquina en la gráfica de $y = 25 - x^2$, otra en el origen, una tercera en el lado positivo del eje y y la cuarta en el lado positivo del eje x. Vea la figura 57.

Figura 57



a) Exprese el área de A de un rectángulo como función de x.

b) ¿Cuál es el dominio de A?

c) Grafique $A = A(x)$.

d) ¿Para qué valor de x es máxima el área?

Solución

a) El área A del rectángulo es $A = xy$, donde $y = 25 - x^2$. Al sustituir esta expresión por y, se obtiene $A(x) = x(25 - x^2) = 25x - x^3$.

b) Como x representa un lado del rectángulo, se tiene $x > 0$. Además, el área debe ser positiva, de modo que $y = 25 - x^2 > 0$, que implica que $x^2 < 25$ o $-5 < x < 5$. Al combinar estas restricciones, se tiene el dominio de A como $\{x \mid 0 < x < 5\}$ o $(0, 5)$ si se usa la notación de intervalos.

c) Vea la gráfica de $A(x)$ en la figura 58.

d) Al usar MAXIMUM, se encuentra que el área tienen máximo de 48.11 en $x = 2.89$, redondeados a dos decimales. Vea la figura 59.

Figura 58

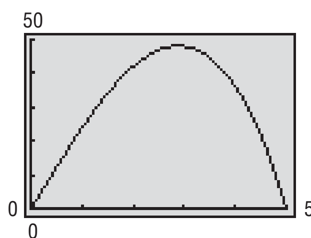
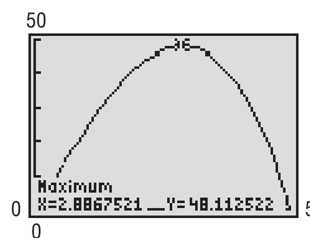


Figura 59



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 15.

EJEMPLO 6 Hacer un corral para bebé*

Un fabricante de corrales para bebé hace un modelo cuadrado que se abre por una esquina y se fija a un ángulo recto a una pared o, quizás, a la lateral de una casa. Si cada lado tiene 3 pies de largo, la configuración abierta duplica el área disponible para que el bebé juegue de 9 a 18 pies cuadrados. Vea la figura 60.

*Adaptado de Proceedings, *Summer Conference for College Teachers en Applied Mathematics* (University of Missouri, Rolla), 1971.

Ahora suponga que se colocan bisagras en las esquinas exteriores para permitir una configuración como se muestra en la figura 61.

Figura 60

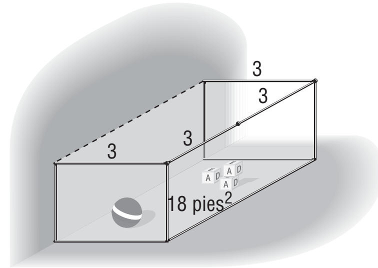
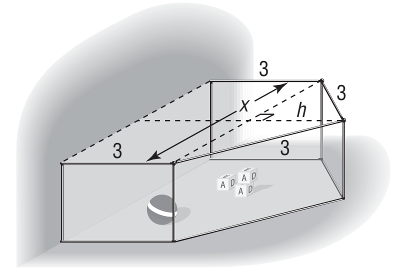


Figura 61



a) Exprese el área A de esta configuración como función de la distancia x entre los dos lados paralelos.

b) Encuentre el dominio de A.

c) Encuentre A si $x = 5$.



d) Grafique $A = A(x)$. ¿Qué valor de x da el valor más grande del área? ¿Cuál es el área máxima?

Solución a) Vea la figura 61. El área A que se busca consiste en el área de un rectángulo (de ancho 3 y largo x) y el área de un triángulo isósceles (con base x y dos lados iguales de longitud 3). La altura h del triángulo se encuentra mediante el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = 3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 9 - \frac{x^2}{4} = \frac{36 - x^2}{4}$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}$$

El área A rodeada por el corral es

$$A = \text{área del rectángulo} + \text{área del triángulo} = 3x + \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}\right)$$

$$A(x) = 3x + \frac{x\sqrt{36 - x^2}}{4}$$

Ahora el área está expresada como función de x.

b) Para encontrar el dominio de A, observamos primero que $x > 0$, ya que x es una longitud. Además, la expresión dentro de la raíz debe ser positiva, de modo que

$$36 - x^2 > 0$$
$$x^2 < 36$$
$$-6 < x < 6$$

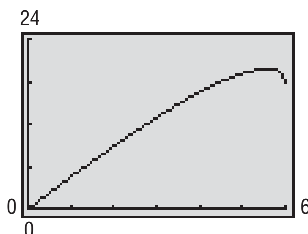
Al combinar estas restricciones, se encuentra que el dominio de A es $0 < x < 6$, o $(0, 6)$ en la notación de intervalos.

c) Si $x = 5$, el área es

$$A(5) = 3(5) + \frac{5}{4}\sqrt{36 - (5)^2} \approx 19.15 \text{ pies cuadrados}$$

Si el ancho del corral es 5 pies, su área es 19.15 pies cuadrados.

Figura 62





d) Vea la figura 62. El área máxima es alrededor de 19.82 pies cuadrados, obtenida cuando $x \approx 5.58$ pies. ◀

3.6 Evalúe su comprensión

Ejercicios

1. Volumen de un cilindro El volumen V de un cilindro circular recto con altura h y radio r es $V = \pi r^2 h$. Si la altura es el doble del radio, exprese el volumen V como una función de r.

2. Volumen de un cono El volumen V de un cono circular recto es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Si la altura es el doble del radio, exprese el volumen V como una función de r.

3. Ecuación de demanda El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto obedecen la ecuación de la demanda

$$p = -\frac{1}{6}x + 100, \qquad 0 \leq x \leq 600$$

a) Exprese el ingreso R como función de x. (Recuerde que $R = xp$.)
b) ¿Cuál es el ingreso si se venden 200 unidades?
c) Grafique la función del ingreso usando un dispositivo de graficación.
d) ¿Qué cantidad x maximiza el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?
e) ¿Qué precio debe cobrar la compañía para maximizar el ingreso?

4. Ecuación de demanda El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto obedece la ecuación de la demanda

$$p = -\frac{1}{3}x + 100, \qquad 0 \leq x \leq 300$$

a) Exprese el ingreso R como función de x.
b) ¿Cuál es el ingreso si se venden 100 unidades?
c) Grafique la función del ingreso usando una aplicación de gráficas.
d) ¿Qué cantidad x maximiza el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?
e) ¿Qué precio debe cobrar la compañía para maximizar el ingreso?

5. Ecuación de demanda El precio p y la cantidad x vendida de cierto producto obedecen a la ecuación de demanda

$$x = -5p + 100, \qquad 0 \leq p \leq 20$$

a) Exprese el ingreso R como función de x.
b) ¿Cuál es el ingreso si se venden 15 unidades?
c) Grafique la función del ingreso con una aplicación de gráficas.
d) ¿Cuál es la cantidad x que maximiza el ingreso? ¿Cuál es el máximo ingreso?
e) ¿Qué precio debe cobrar la compañía para maximizar el ingreso?

6. Ecuación de demanda El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto obedecen a la ecuación de demanda

$$x = -20p + 500, \qquad 0 \leq p \leq 25$$

a) Exprese el ingreso R como función de x.
b) ¿Cuál es el ingreso si se venden 20 unidades?
c) Grafique la función del ingreso con un dispositivo de graficación.
d) ¿Qué cantidad x maximiza el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?
e) ¿Qué precio debe cobrar la compañía para maximizar el ingreso?

7. Cerca de un campo rectangular David dispone de 400 yardas de cerca y desea rodear una área rectangular.
a) Exprese el área A del rectángulo como función del ancho x del rectángulo.
b) ¿Cuál es el dominio de A?
c) Grafique $A = A(x)$ usando un dispositivo de graficación. ¿Para qué valor de x es más grande el área?

8. Cerca de un campo rectangular junto a un río Beth tiene 3000 pies de cerca disponibles para cercar un campo rectangular. Un río corre a un lado del campo, de modo que sólo tres lados requieren cerca.
a) Exprese el área A del rectángulo como función de x, donde x es la longitud del lado paralelo al río.
b) Grafique $A = A(x)$ con un dispositivo de graficación. ¿Para qué valor de x es mayor el área?

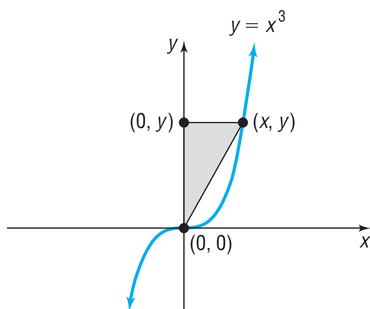
9. Sea $P = (x, y)$ un punto en la gráfica de $y = x^2 - 8$.
a) Exprese la distancia d de P al origen como una función de x.
b) ¿Cuánto vale d si $x = 0$?
c) ¿Cuánto vale d si $x = -1$?
d) Use un dispositivo de graficación para graficar $d = d(x)$.
e) ¿Para qué valores de x se obtiene la menor distancia?

10. Sea $P = (x, y)$ un punto en la gráfica de $y = x^2 - 8$.
a) Exprese la distancia d de P al punto $(0, -1)$ como una función de x.
b) ¿Cuál es el valor de d si $x = 0$?
c) ¿Cuál es el valor de d si $x = -1$?
d) Use un dispositivo de graficación para graficar $d = d(x)$.
e) ¿Para qué valores de x se obtiene la menor distancia d?

11. Sea $P = (x, y)$ un punto en la gráfica de $y = \sqrt{x}$.
a) Exprese la distancia d de P al punto $(1, 0)$ como una función de x.
b) Use un dispositivo de graficación para graficar $d = d(x)$.
c) ¿Para qué valores de x se obtiene la menor distancia d?

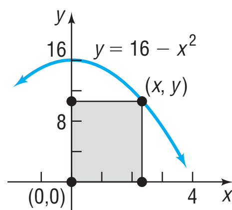
12. Sea $P = (x, y)$ un punto en la gráfica de $y = \frac{1}{x}$.
a) Exprese la distancia d de P al origen como función de x.
b) Use un dispositivo de graficación para graficar $d = d(x)$.
c) ¿Para qué valores de x se obtiene la menor distancia d?

13. Un triángulo rectángulo tiene un vértice en la gráfica de $y = x^3, x > 0$, en (x, y), otro en el origen y el tercero en el lado positivo del eje y en $(0, y)$, como se muestra en la figura. Exprese el área A del triángulo como función de x.



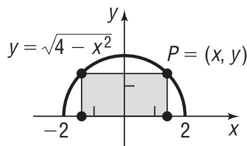
14. Un triángulo rectángulo tiene un vértice sobre la gráfica de $y = 9 - x^2, x > 0$, en (x, y), otro en el origen y el tercero en el lado positivo del eje x en $(x, 0)$. Exprese el área A del triángulo como función de x.

15. Un rectángulo tiene una esquina sobre la gráfica de $y = 16 - x^2$, otra en el origen, una tercera en el lado positivo del eje y y la cuarta en el lado positivo del eje x (vea la figura).



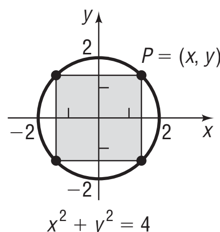
a) Exprese el área A del rectángulo como función de x.
b) ¿Cuál es el dominio de A?
c) Grafique $A = A(x)$. ¿Para qué valor de x se obtiene la mayor A?

16. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 2 (vea la figura). Sea $P = (x, y)$ el punto en el cuadrante 1 que es un vértice del rectángulo y está sobre el círculo.



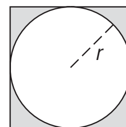
a) Exprese el área A del rectángulo como función de x.
b) Exprese el perímetro p del rectángulo como función de x.
c) Grafique $A = A(x)$. ¿Para qué valor de x es mayor A?
d) Grafique $p = p(x)$. ¿Para qué valor de x es mayor p?

17. Un rectángulo está inscrito en un círculo de radio 2 (vea la figura). Sea $P = (x, y)$ un punto en el cuadrante I que es un vértice del rectángulo y está en el círculo.



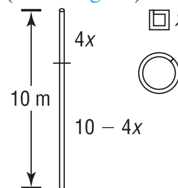
a) Exprese el área A del rectángulo como función de x.
b) Exprese el perímetro p del rectángulo como función de x.
c) Grafique $A = A(x)$. ¿Para qué valor de x es mayor A?
d) Grafique $p = p(x)$. ¿Para qué valor de x es mayor p?

18. Un círculo de radio r está inscrito en un cuadrado (vea la figura).



a) Exprese el área A del cuadrado como función del radio r del círculo.
b) Exprese el perímetro p del cuadrado como función de r.

19. Un alambre de 10 metros de largo se va a cortar en dos partes. Una parte se formará como un cuadrado y la otra como un círculo (vea la figura).



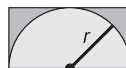
a) Exprese el área total A encerrada por las partes de alambre como función de la longitud x de un lado del cuadrado.
b) ¿Cuál es el dominio de A?
c) Grafique $A = A(x)$. ¿Para qué valor de x es menor A?

20. Un alambre de 10 metros de largo debe cortarse en dos piezas. Una pieza se formará como un triángulo equilátero y la otra como un círculo.
a) Exprese el área total A rodeada por las piezas de alambre como función de la longitud x de un lado del triángulo equilátero.
b) ¿Cuál es el dominio de A?
c) Grafique $A = A(x)$. ¿Para qué valor de x es menor A?

21. Un alambre de longitud x se coloca formando un círculo.
a) Exprese la circunferencia del círculo como función de x.
b) Exprese el área del cuadrado como función de x.

22. Un alambre de longitud x se dobla con la forma de un cuadrado.
a) Exprese el perímetro del cuadrado como función de x.
b) Exprese el área del cuadrado como función de x.

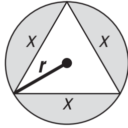
23. Un semicírculo de radio r está inscrito en un rectángulo de manera que el diámetro del semicírculo es el largo del rectángulo (vea la figura).



a) Exprese el área A del rectángulo como función del radio r del semicírculo.
b) Exprese el perímetro p del rectángulo como función de r.

24. Un triángulo equilátero está inscrito en un círculo de radio r. Vea la figura. Exprese la circunferencia C del círculo como función de la longitud x del lado del triángulo.

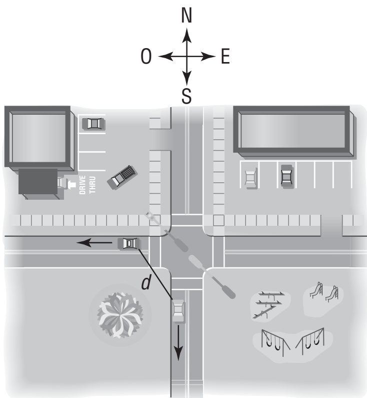
[**Sugerencia:** Primero muestre que $r^2 = \frac{x^2}{3}$.]



25. Un triángulo equilátero está inscrito en un círculo de radio r. Vea la figura anterior. Exprese el área A que está dentro del círculo, pero fuera del triángulo, como función de la longitud x de un lado del triángulo.

26. Dos autos salen de una intersección al mismo tiempo. Uno se dirige al sur a una velocidad constante de 30 millas por hora, y el otro va al oeste a una velocidad constante de 40 millas por hora (vea la figura). Exprese la distancia d entre los autos como función del tiempo t.

[**Sugerencia:** Los autos salen de la intersección en $t = 0$.]



27. Dos autos se acercan a una intersección. Uno está 2 millas al sur de ella y se mueve a una velocidad constante de 30 millas por hora. Al mismo tiempo, el otro auto está 3 millas al este de la intersección y se mueve a una velocidad constante de 40 millas por hora.

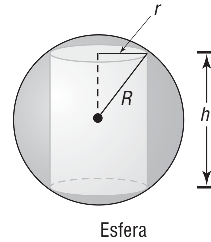
a) Exprese la distancia d entre los autos como función del tiempo t.

[**Sugerencia:** En $t = 0$, los autos están a 2 millas al sur y 3 millas al este de la intersección, respectivamente.]

b) Utilice un dispositivo de graficación para graficar $d = d(t)$. ¿Para qué valor de t se obtiene la menor d?

28. Cilindro inscrito en una esfera Inscriba un cilindro circular recto con altura h y radio r en una esfera de radio fijo R. Vea la ilustración. Expresse el volumen V del cilindro como función de h.

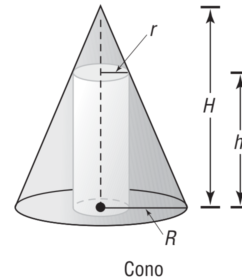
[**Sugerencia:** $V = \pi r^2 h$. Observe también el triángulo rectángulo.]



Esfera

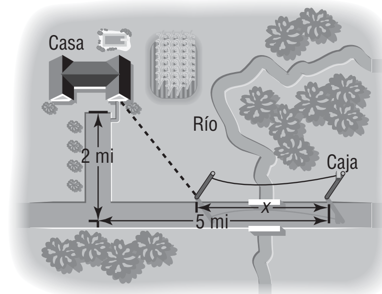
29. Cilindro inscrito en un cono Inscriba un cilindro circular de altura h y radio r en un cono de radio fijo R y altura fija H. Vea la ilustración. Exprese el volumen V del cilindro como función de r.

[**Sugerencia:** $V = \pi r^2 h$. Observe también los triángulos semejantes.]



Cono

30. Instalación de TV por cable Se pide a MetroMedia Cable que proporcione el servicio a un cliente cuya casa está localizada a 2 millas del camino dónde está tendido el cable. La caja de conexión más cercana está a 5 millas por el camino (vea la figura).



a) Si el costo de la instalación es \$10 por milla a lo largo del camino y \$14 por milla fuera del camino, exprese el costo total C de instalación como función de la distancia x (en millas) de la caja de conexión al punto donde el cable sale del camino. Dé el dominio.

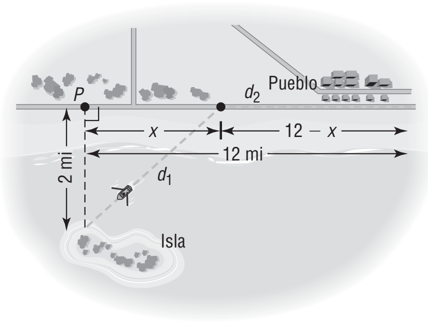
b) Calcule el costo si $x = 1$ milla.

c) Calcule el costo si $x = 3$ millas.

d) Grafique la función $C = C(x)$. Use TRACE para ver cómo varía el costo cuando x cambia de 0 a 5.

e) ¿Cuál es el valor de x que da el menor costo?

31. Tiempo requerido para ir de una isla a un pueblo Una isla está a 2 millas del punto P más cercano en una costa recta. Un pueblo está a 12 millas de P por la costa. Vea la ilustración.



a) Si una persona rema a una velocidad promedio de 3 millas por hora y la misma persona camina 5 millas por hora, exprese el tiempo T que toma ir de la isla al pueblo como función de la distancia x de P a donde la persona llega remando.

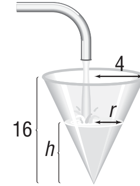
b) ¿Cuál es el dominio de T?

c) ¿Cuánto tiempo toma ir de la isla al pueblo si la persona llega remando a 4 millas de P?

d) ¿Cuánto tiempo toma si la persona llega remando a 8 millas del punto P?

32. Se sirve agua en un contenedor con forma de cono circular recto con radio de 4 pies y altura de 16 pies (vea la figura). Exprese el volumen V del agua en el cono como una función de la altura h del agua.

[**Sugerencia:** El volumen V del cono de radio r y altura h es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.]



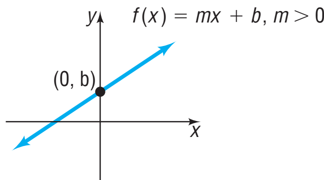
Repaso del capítulo

Biblioteca de funciones

Función lineal (p. 253)

$f(x) = mx + b$

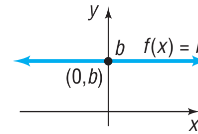
La gráfica es una línea recta con pendiente m e intercepción y igual a b.



Función constante (p. 253)

$f(x) = b$

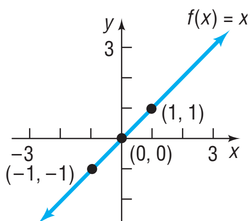
La gráfica es una recta horizontal con intercepción y igual a b.



Función identidad (p. 253)

$f(x) = x$

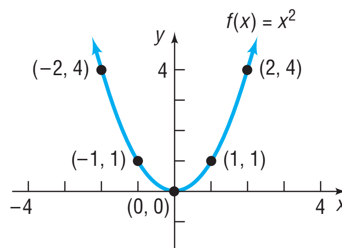
La gráfica es una recta con pendiente 1 e intercepción y igual a 0.



Función cuadrado (p. 254)

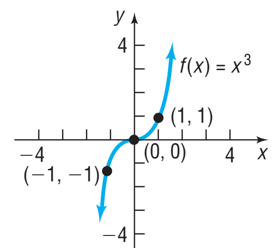
$f(x) = x^2$

La gráfica es una parábola con intercepción en $(0, 0)$.



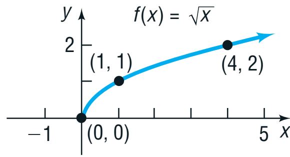
Función cubo (p. 254)

$f(x) = x^3$



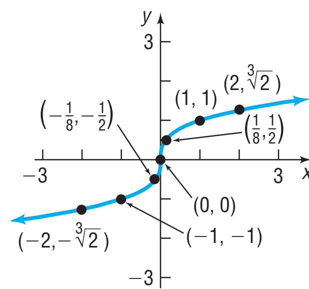
Función raíz cuadrada (p. 254)

$f(x) = \sqrt{x}$



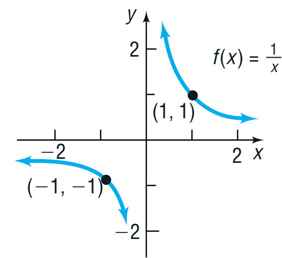
Función raíz cúbica (p. 254)

$f(x) = \sqrt[3]{x}$



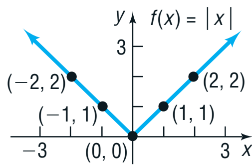
Función recíproco (p. 255)

$f(x) = \dfrac{1}{x}$



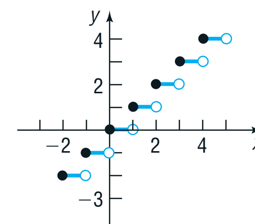
Función valor absoluto (p. 255)

$f(x) = |x|$



Función máximo entero (p. 255)

$f(x) = \text{int}(x)$



Conocimiento

Función (pp. 219-222)

Una relación entre dos conjuntos de números reales tal que cada número x en el primer conjunto, el dominio, tiene exactamente un número y correspondiente en el segundo conjunto. El rango es el conjunto de valores y de la función para los valores x en el dominio.

x es la variable independiente; y es la variable dependiente.

Una función también se puede caracterizar como un conjunto de pares ordenados (x, y) o $(x, f(x))$ en donde ningún primer elemento se aparea con dos segundos elementos diferentes.

Notación de funciones (pp. 221-223)

$y = f(x)$

f es un símbolo para la función.

x es el argumento, o variable independiente.

y es la variable dependiente.

$f(x)$ es el valor de la función en x, o la imagen de x.

Una función f se define de manera implícita por una ecuación que involucra a x e y o de manera explícita escribiendo $y = f(x)$.

Cociente de diferencias de *f* (p. 223)

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$$

Dominio (p. 225)

Si no se especifica el dominio de una función f, será el conjunto más grande de números reales para los que $f(x)$ es un número real.

Prueba de la recta vertical (p. 232)

Un conjunto de puntos en el plano es la gráfica de una función si y sólo si toda recta vertical cruza a la gráfica en a lo más un punto.

Función par *f* (p. 241)

$f(-x) = f(x)$ para toda x en el domino ($-x$ también debe estar en el dominio).

Función impar *f* (p. 241)

$f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio ($-x$ también debe estar en el dominio).

Función creciente (p. 243)
Una función f es creciente en un intervalo abierto I si, para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$.

Función decreciente (p. 243)
Una función f es decreciente en un intervalo abierto I si, para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$.

Función constante (p. 243)
Una función f es constante en un intervalo I si, para toda elección de x en I, los valores de $f(x)$ son iguales.

Máximo local (p. 244)
Una función f tiene un máximo local en c si existe un intervalo abierto I que contiene a c de manera que, para toda $x \neq c$ en I, $f(x) < fc)$.

Mínimo local (p. 244)
Una función f tiene un mínimo local en c si existe un intervalo abierto I que contiene a c de manera que, para toda $x \neq c$ en I, $f(x) > fc)$.

Tasa de cambio promedio de una función (p. 246)
La tasa de cambio promedio de f de c a x es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \qquad x \neq c$$

Objetivos

Sección		Debe ser capaz de...	Ejercicios de repaso
3.1	1	Determinar si una relación representa una función (p. 218)	1, 2
	2	Encontrar el valor de una función (p. 221)	3–8, 23–24, 67–70
	3	Encontrar el dominio de una función (p. 225)	1, 9–16, 17–22, 63a)–66a)
	4	Formar la suma, resta, producto o cociente de dos funciones (p. 226)	17–22
3.2	1	Identificar la gráfica de una función (p. 232)	47
	2	Obtener información a partir de o acerca de la gráfica de una función (p. 233)	25a)–e); 26a)–e); 27a), d), f); 28a), d), f)
3.3	1	Determinar si es función par o impar a partir de la gráfica (p. 240)	27(e); 28e)
	2	Identificar funciones pares e impares a partir de la ecuación (p. 241)	29–36
	3	Usar una gráfica para determinar si una función es creciente, decreciente o constante (p. 242)	27b), 28b)
	4	Usar una gráfica para localizar máximos y mínimos (p. 244)	27c), 28c)
	5	Usar un dispositivo de graficación para aproximar máximos y mínimos locales y para determinar dónde una función es creciente o decreciente (p. 245)	37–40
	6	Encontrar la tasa de cambio promedio de una función (p. 246)	41–46
3.4	1	Graficar las funciones dadas en la biblioteca de funciones (p. 253)	48–50
	2	Graficar funciones definidas por partes (p. 256)	63c)–66c)
3.5	1	Graficar funciones usando traslación horizontal y vertical (p. 262)	25f); 26f), g); 51, 52, 55–62
	2	Graficar funciones usando compresión y estiramiento (p. 265)	25g), 26h), 53, 54, 61, 62
	3	Graficar funciones usando reflexión en el eje x y el eje y (p. 268)	25h), 53, 57, 58, 62
3.6	1	Construir y analizar funciones (p. 275)	67–68, 71–78

Ejercicios de repaso *Los números de problemas con asterisco indican la sugerencia del autor para un examen de práctica.*

En los problemas 1 y 2, determine si cada relación representa una función. Para cada función, establezca el dominio y el rango.

1. $\{(-1, 0), (2, 3), (4, 0)\}$

2. $\{(4, -1), (2, 1), (4, 2)\}$

En los problemas 3-8, encuentre lo siguiente para cada función:

a) $f(2)$ b) $f(-2)$ c) $f(-x)$ d) $-f(x)$ (e) $f(x - 2)$ (f) $f(2x)$

***3.** $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

5. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

6. $f(x) = |x^2 - 4|$

7. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$

En los problemas 9-16, encuentre el dominio de cada función.

9. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

10. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x - 2}$

11. $f(x) = \sqrt{2 - x}$

12. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

13. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{|x|}$

14. $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$

***15.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x - 3}$

16. $F(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 4}$

En los problemas 17-22, encuentre $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, y $\dfrac{f}{g}$ para cada par de funciones. Establezca el dominio de cada una.

17. $f(x) = 2 - x;\quad g(x) = 3x + 1$

18. $f(x) = 2x - 1;\quad g(x) = 2x + 1$

19. $f(x) = 3x^2 + x + 1;\quad g(x) = 3x$

20. $f(x) = 3x;\quad g(x) = 1 + x + x^2$

***21.** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1};\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3};\quad g(x) = \dfrac{3}{x}$

En los problemas 23 y 24, encuentre el cociente de diferencias de cada función f; es decir, encuentre

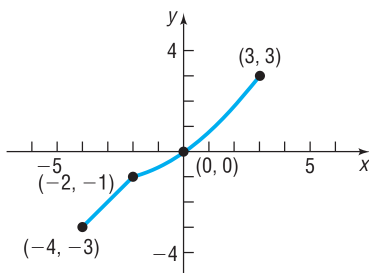
$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$$

23. $f(x) = -2x^2 + x + 1$

24. $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

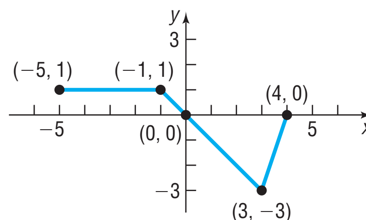
25. Use la gráfica de la función f mostrada:

a) Encuentre el dominio y el rango de f.
b) Enumere las intercepciones.
c) Encuentre $f(-2)$.
d) Para qué valores de x ocurre $f(x) = -3$?
e) Resuelva $f(x) > 0$.
f) Grafique $y = f(x - 3)$.
g) Grafique $y = f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$.
h) Grafique $y = -f(x)$.



26. Use la gráfica de la función g mostrada:

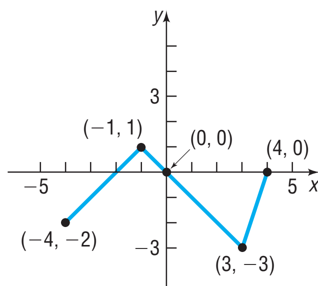
a) Encuentre el dominio y rango de g.
b) Encuentre $g(-1)$.
c) Enumere las intercepciones
d) Para qué valor de x ocurre $g(x) = -3$?
e) Resuelva $g(x) > 0$.
f) Grafique $y = g(x - 2)$.
g) Grafique $y = g(x) + 1$.
h) Grafique $y = 2g(x)$.



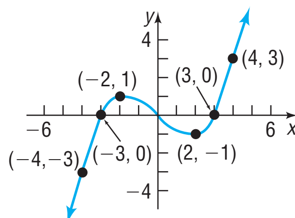
En los problemas 27 y 28, use la gráfica de la función f para encontrar:

a) *El dominio y el rango de f*
b) *Los intervalos para los que f es creciente, decreciente o constante*
c) *Los mínimos y máximos locales*
d) *Si la gráfica es simétrica respecto de los ejes x, y, o el origen*
e) *Si la función es par, impar o ninguna de las dos*
f) *Las intercepciones, si las hay*

27.



28.



En los problemas 29-36, determine (algebraicamente) si la función dada es par, impar o ninguna de las dos.

29. $f(x) = x^3 - 4x$ **30.** $g(x) = \frac{4 + x^2}{1 + x^4}$ **31.** $h(x) = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} + 1$ **32.** $F(x) = \sqrt{1 - x^3}$

33. $G(x) = 1 - x + x^3$ **34.** $H(x) = 1 + x + x^2$ ***35.** $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ **36.** $g(x) = \frac{1 + x^2}{x^3}$

En los problemas 37-40, use un dispositivo de graficación para graficar cada función en el intervalo indicado. Aproxime los máximos y mínimos locales. Determine dónde es creciente o decreciente la función.

***37.** $f(x) = 2x^3 - 5x + 1 \quad (-3, 3)$
38. $f(x) = -x^3 + 3x - 5 \quad (-3, 3)$
39. $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x + 1 \quad (-2, 3)$
40. $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 4x + 3 \quad (-2, 3)$

En los problemas 41 y 42, encuentre la tasa de cambio promedio de f:

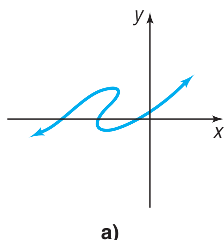
a) *De 1 a 2* b) *De 0 a 1* c) *De 2 a 4*

41. $f(x) = 8x^2 - x$
42. $f(x) = 2x^3 + x$

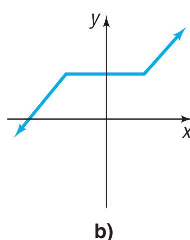
En los problemas 43-46, encuentre la tasa de cambio promedio de 2 a x para cada función f. Simplifique el resultado.

43. $f(x) = 2 - 5x$ **44.** $f(x) = 2x^2 + 7$ ***45.** $f(x) = 3x - 4x^2$ **46.** $f(x) = x^2 - 3x + 2$

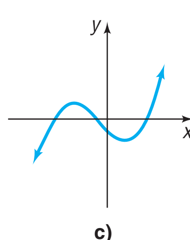
47. Diga cuál de las siguientes son gráficas de funciones.



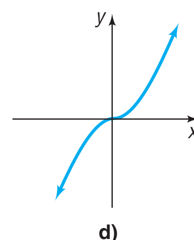
a)



b)



c)



d)

En los problemas 48-50, bosqueje la gráfica de cada función. Etiquete al menos tres puntos.

48. $f(x) = |x|$ **49.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **50.** $f(x) = \sqrt{x}$

En los problemas 51-62, grafique cada función usando las técnicas de traslación, compresión y estiramiento, y reflexión. Identifique cualquier intercepción en la gráfica. Establezca el dominio y basado en la gráfica, encuentre el rango.

51. $F(x) = |x| - 4$ **52.** $f(x) = |x| + 4$ **53.** $g(x) = -2|x|$ **54.** $g(x) = \frac{1}{2}|x|$

***55.** $h(x) = \sqrt{x - 1}$ **56.** $h(x) = \sqrt{x} - 1$ ***57.** $f(x) = \sqrt{1 - x}$ **58.** $f(x) = -\sqrt{x + 3}$

59. $h(x) = (x - 1)^2 + 2$ **60.** $h(x) = (x + 2)^2 - 3$ **61.** $g(x) = 3(x - 1)^3 + 1$ **62.** $g(x) = -2(x + 2)^3 - 8$

En los problemas 63-66:

a) *Encuentre el dominio de cada función.*
b) *Localice las intercepciones, si las hay.*
c) *Grafique cada función.*
d) *A partir de la gráfica, encuentre el rango.*

*63. $f(x) = \begin{cases} 3x & -2 < x \le 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$

64. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & -3 < x < 0 \\ 3x - 1 & x \ge 0 \end{cases}$

65. $f(x) = \begin{cases} x & -4 \le x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 3x & x > 0 \end{cases}$

66. $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \le x \le 2 \\ 2x - 1 & x > 2 \end{cases}$

*67. Dado que f es lineal, $f(4) = -5$ y $f(0) = 3$, escriba la ecuación que define a f.

68. Dado que g es una función lineal con pendiente $= -4$ y $g(-2) = 2$, escriba la ecuación que define a g.

69. Una función f está definida por

$$f(x) = \frac{Ax + 5}{6x - 2}$$

Si $f(1) = 4$, encuentre A

70. Una función g está definida por

$$g(x) = \frac{A}{x} + \frac{8}{x^2}$$

Si $g(-1) = 0$, encuentre A.

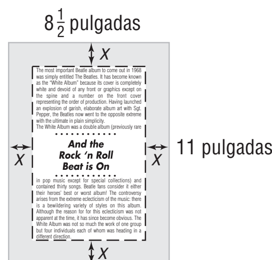
---

71. Conversión de la temperatura La temperatura T del aire es aproximadamente una función lineal de la altitud h para altitudes dentro de los 10,000 metros de la superficie terrestre. Si la temperatura en la superficie es 30°C y la temperatura a los 10,000 metros es 5°C, encuentre la función $T = T(h)$.

72. Velocidad como función del tiempo La velocidad v (en pies por segundo) de un auto es una función lineal del tiempo t (en segundos) para $10 < t < 30$. Si después de cada segundo la velocidad del auto aumenta 5 pies por segundo y si después de 20 segundos la velocidad es de 80 pies por segundo, ¿qué tan rápido va el auto después de 30 segundos? Encuentre la función $v = v(t)$.

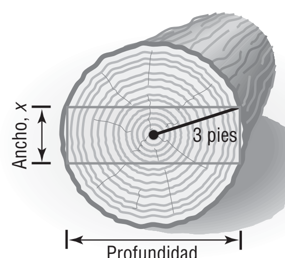
73. Esferas El volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; el área S de la superficie de esta esfera es $S = 4\pi r^2$. Exprese el volumen V como función del área S de la superficie. Si la superficie se duplica, ¿cuánto cambia el volumen?

74. Diseño de una página Una página con dimensiones de $8\frac{1}{2}$ pulgadas por 11 pulgadas tiene un margen uniforme de ancho x alrededor de la parte impresa de la página, como se muestra en la figura.



a) Escriba una fórmula para el área A de la parte impresa de la página como función del ancho x del margen.
b) Dé el dominio y el rango de A.
c) Encuentre el área de la parte impresa para márgenes de 1, 1.2 y 1.5 pulgadas.
d) Grafique la función $A = A(x)$.
e) Use TRACE para determinar qué márgenes deben usarse para obtener áreas de 70 pulgadas cuadradas y 50 pulgadas cuadradas.

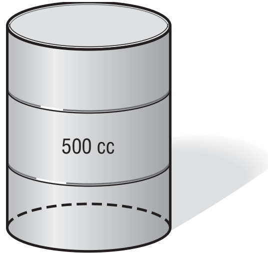
75. Resistencia de una viga La resistencia de una viga de madera rectangular es proporcional al producto del ancho y el cubo de su profundidad (vea la figura). Si la viga debe cortarse de un tronco con forma de cilindro de 3 pies de radio, exprese la resistencia S de la viga como función del ancho x, ¿Cuál es el dominio de S?



76. Material necesario para hacer un tambor Se requiere que un tambor de acero con forma de cilindro circular recto tenga un volumen de 100 pies cúbicos.

a) Exprese la cantidad de material requerido para hacer el tambor como función del radio r del cilindro.
b) ¿Cuánto material se requiere si el tambor tiene 3 pies de radio?
c) ¿Cuánto material se requiere si el tambor tiene 4 pies de radio?
d) ¿Cuánto material se requiere si el tambor tiene 5 pies de radio?
e) Grafique $A = A(r)$. ¿Para qué valor de r es menor A?

77. Costo de un tambor Se requiere que un tambor con forma de cilindro circular recto tenga un volumen de 500 centímetros cúbicos. Las partes de arriba y abajo están hechas de un material que cuesta 6¢ por centímetro cuadrado; el material de los lados cuesta 4¢ por centímetro cuadrado.



a) Exprese el costo total C del material como función del radio r del cilindro.
b) ¿Cuál es el costo si el radio es de 4 cm?
c) ¿Cuál es el costo si el radio es de 8 cm?
d) Grafique $C = C(r)$. ¿Qué valor de r da el menor costo C?

78. Construcción de una caja cerrada Una caja cerrada con base cuadrada debe tener un volumen de 10 pies cúbicos.
a) Exprese la cantidad de material A usada para hacer esa caja como función de la longitud x del lado de la base.
b) ¿Cuánto material se requiere con una base de 1 pie por 1 pie?
c) ¿Cuánto material se requiere con una base de 2 pies por 2 pies?
d) Grafique $A = A(x)$. ¿Qué valor de x es A menor?

Proyectos del capítulo



1. **Servicios de teléfono celular** Al comprar un teléfono celular, debe buscar en varios lugares para determinar los mejores precios y servicios que se apliquen a su situación. Suponga que quiere actualizar su modelo de celular. Debe reunir la siguiente información de los servicios:

Nokia 5165	\$19.99 por el teléfono
Ericsson A1228di	Sin costo (después de reembolso de \$20 por correo)

Opción 1: \$29.99 por 250 minutos/horas pico, sin límite en noches y fin de semana; minutos en horas pico adicionales, \$0.45 por minuto.
Opción 2: \$39.99 por 400 minutos horas pico, sin límite en noches y fines de semana; minutos en horas pico adicionales, \$0.45 por minuto.
Opción 3: \$49.99 por 600 minutos horas pico, sin límite en noches y fin de semana; minutos horas pico adicionales, \$0.35 por minuto.

Para calificar para estos precios de teléfonos, debe firmar un contrato por dos años.
a) Enumere todas las combinaciones de teléfono y servicios.
b) Determine el costo total de cada combinación descrita en el inciso *a*) para la vigencia del contrato (24 meses), suponiendo que se mantiene dentro de los minutos en horas pico que proporciona cada contrato.
c) Si espera usar 260 minutos en horas pico por mes, ¿qué opción proporciona el mejor precio? Si espera usar 320 minutos en horas pico, ¿qué opción es la mejor?
d) Si espera usar 410 minutos en horas pico por mes, ¿qué opción proporciona el mejor precio? Si espera usar 450 minutos en horas pico, ¿qué opción es la mejor?
e) El cargo mensual incluye un número específico de minutos en horas pico. Escriba una función para cada opción disponible, donde C es el costo mensual y x es el número de minutos en horas pico usados.
f) Grafique las funciones correspondientes a cada opción.
g) En qué punto la opción 2 se convierte en mejor opción que la 1?
h) En qué punto la opción 3 se convierte en mejor opción que la 2?

Este proyecto se basa en información dada en un anuncio de "Cingular Wireless" en el periódico *Denton Record Chronicle*, del 11 de septiembre de 2001.

Los siguientes proyectos están disponibles en www.prenhall.com/sullivan

2. **Project at Motorola** *Pricing Wireless Services*
3. **Cost of Cable**
4. **Oil Spill**

Repaso acumulativo

En los problemas 1-8, encuentre las soluciones reales de cada ecuación.

1. $-5x + 4 = 0$

2. $x^2 - 7x + 12 = 0$

3. $3x^2 - 5x - 2 = 0$

4. $4x^2 + 4x + 1 = 0$

5. $4x^2 - 2x + 4 = 0$

6. $\sqrt[3]{1 - x} = 2$

7. $\sqrt[5]{1 - x} = 2$

8. $|2 - 3x| = 1$

9. En el sistema de números complejos, resuelva $4x^2 - 2x + 4 = 0$.

10. Resuelva la desigualdad $-2 < 3x - 5 < 7$. Grafique el conjunto de soluciones.

En los problemas 11-14, grafique cada ecuación.

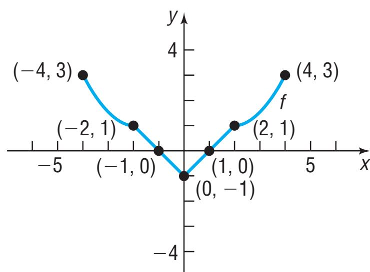
11. $-3x + 4y = 12$

12. $f(x) = 3x + 12$

13. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$

14. $f(x) = (x + 1)^2 - 3$

15. Para la gráfica de la función f mostrada:
   a) Encuentre el dominio y el rango de f.
   b) Encuentre las intercepciones.
   c) ¿Es la gráfica de la función f simétrica respecto del eje x, el eje y o el origen?



   d) Encuentre $f(2)$.
   e) Para qué valor(es) de x ocurre $f(x) = 3$?
   f) Resuelva $f(x) < 0$.
   g) Grafique $y = f(x + 2)$
   h) Grafique $y = f(-x)$.
   i) Grafique $y = 2f(x)$.
   j) Es f par, impar o ninguna de las dos?
   k) Encuentre el (los) intervalo(s) en que f es creciente.
   l) Encuentre el (los) intervalo(s) en que f es decreciente.
   m) Encuentre máximos y mínimos locales.
   n) Encuentre la tasa de cambio promedio de f de 1 a 4.

16. Productividad contra ganancias Los siguientes datos representan la ganancia promedio por hora y la productividad (producción por hora) de los trabajadores para los años 1986-1995. Sea la productividad x la variable independiente y la ganancia promedio por hora y, la variable dependiente.

Productividad	Ganancia promedio × hora
94.2	8.76
94.1	8.98
94.6	9.28
95.3	9.66
96.1	10.01
96.7	10.32
100	10.57
100.2	10.83
100.7	11.12
100.8	11.44

FUENTE: Bureau of Labor Statistics.

   a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.
   b) Dibuje la recta del punto (94.2, 8.76) a (96.7, 10.32) en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso *a*).
   c) Encuentre la tasa de cambio promedio de la ganancia por hora y la productividad entre 94.2 y 96.7.
   d) Interprete la tasa de cambio promedio encontrada en el inciso c).
   e) Dibuje una recta del punto (96.7, 10.32) a (100.8, 11.44) en el diagrama de dispersión del inciso a).
   f) Encuentre la tasa de cambio promedio de la ganancia por hora y la productividad entre 96.7 y 100.8.
   g) Interprete la tasa de cambio promedio encontrada en el inciso f).
   h) ¿Qué ocurre con la tasa de cambio promedio de las ganancias por hora cuando la productividad aumenta?

4 Polinomios y funciones racionales

CONTENIDO

4.1 Funciones y modelos cuadráticos

4.2 Funciones polinomiales

4.3 Funciones racionales I

4.4 Funciones racionales II: análisis de gráficas

4.5 Desigualdades de polinomios y racionales

4.6 Ceros reales de una función polinomial

4.7 Ceros complejos; teorema fundamental del álgebra

Repaso del capítulo

Proyectos del capítulo

Repaso acumulativo

Choque de fierro

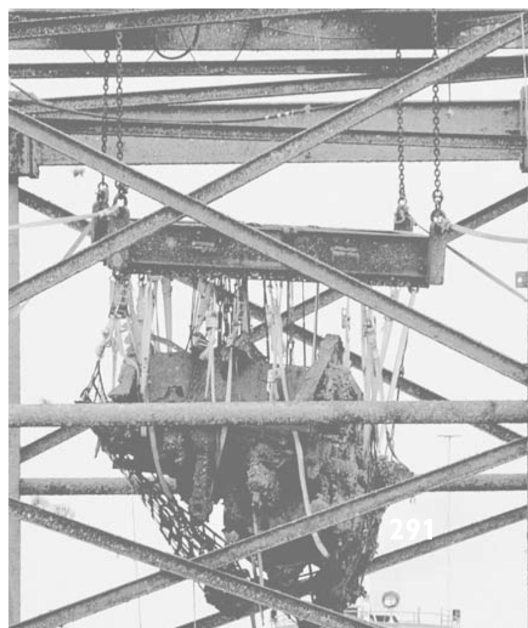
Ciento cuarenta años después de que quedaron en silencio sus cañones, la torreta del acorazado *Monitor* de la Unión fue sacada del mar la semana pasada, con todos sus secretos. Ahora los científicos esperan descubrir los misterios del barco que, en una sola batalla, terminó con la era de los navíos de madera.

La torreta

Ericsson obtuvo docenas de patentes tan sólo para las características de la torreta. Pesaba más de 120 toneladas sin el cañón, y se sostenía en su lugar por su propio peso. La torreta se manejaba mediante engranes abajo del piso y podía dar 2.5 revoluciones por minuto. Una tripulación de 17 hombres y dos oficiales manejaban los cañones en el espacio de 20 pies de diámetro.

(Tomado de *Clash of Iron*, páginas 54-55, de *Time*, 19 de agosto de 2002, ©2002 Time Inc. Reimpreso con permiso).

—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO.



4.1 Funciones y modelos cuadráticos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Intercepciones (sección 2.2, pp. 169-170)
- Solución de ecuaciones cuadráticas (sección 1.2, pp. 96–99, 101–105)
- Completar el cuadrado (sección 1.2, p. 99)
- Técnicas para graficar: transformaciones (sección 3.5, pp. 262–271)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 306.

OBJETIVOS
1. Graficar una función cuadrática usando transformaciones
2. Identificar el vértice y el eje de simetría de una función cuadrática
3. Graficar una función cuadrática usando sus vértices, ejes e intercepciones.
4. Utilizar los valores máximo y mínimo de una función cuadrática para resolver problemas aplicados
5. Utilizar una calculadora gráfica para encontrar la función cuadrática de mejor ajuste para los datos

Funciones cuadráticas

Una *función cuadrática* es una función que está definida por un polinomio de segundo grado en una variable.

Una **función cuadrática** es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \textbf{(1)}$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. El dominio de una función cuadrática es el conjunto de todos los números reales.

Muchas aplicaciones requieren el conocimiento de funciones cuadráticas. Por ejemplo, suponga que Texas Instruments recolecta los datos mostrados en la tabla 1, que relaciona el número de calculadoras vendidas con precio p por calculadora. Como el precio de un producto determina la cantidad que se vende, se maneja el precio como la variable independiente. La relación entre el número x de calculadoras vendidas y el precio p por calculadora se aproxima por la ecuación lineal

$$x = 21{,}000 - 150p$$

Tabla 1

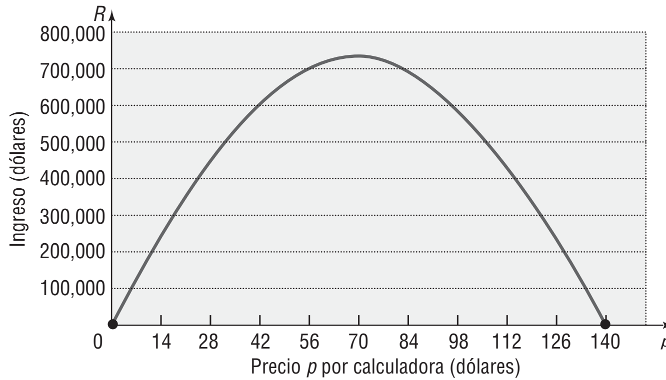
Precio por calculadora, p (dólares)	Número de calculadoras, x
60	11,100
65	10,115
70	9,652
75	8,731
80	8,087
85	7,205
90	6,439

Entonces el ingreso R derivado de vender x calculadoras al precio p por calculadora es

$$\begin{aligned} R &= xp \\ R(p) &= (21{,}000 - 150p)p \\ &= -150p^2 + 21{,}000p \end{aligned}$$

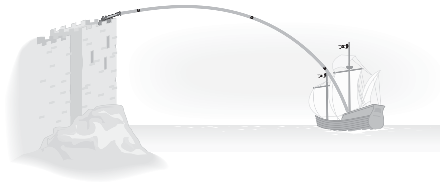
De modo que el ingreso R es una función cuadrática del precio p. La figura 1 ilustra la gráfica de esta función de ingresos, cuyo dominio es $0 \leq p \leq 140$, ya que tanto x como p deben ser no negativos. Más adelante en esta sección se determinará el precio p que maximiza el ingreso.

Figura 1
Gráfica de una función de ingresos: $R = -150p^2 + 21{,}000p$



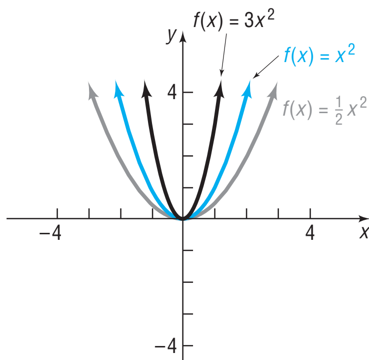
Una segunda situación en la que aparece una función cuadrática se refiere al movimiento de un proyectil. Con base en la segunda ley de Newton del movimiento (fuerza es igual a la masa por aceleración, $F = ma$), se demuestra que, si se ignora la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil lanzado hacia arriba con cierta inclinación respecto de la horizontal es la gráfica de una función cuadrática. Vea una ilustración en la figura 2. Más adelante se analizará la trayectoria de un proyectil.

Figura 2
Trayectoria de una bala de cañón



Gráficas de funciones cuadráticas

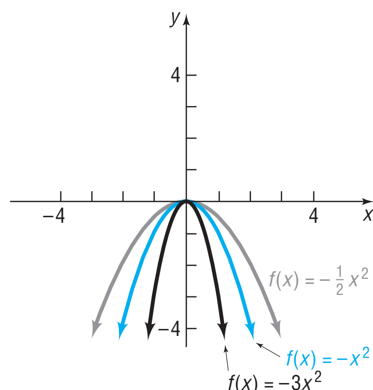
Figura 3



Se sabe cómo graficar la función cuadrática $f(x) = x^2$. La figura 3 muestra la gráfica de tres funciones de la forma $f(x) = ax^2$, $a > 0$, para $a = 1$, $a = \dfrac{1}{2}$, y $a = 3$. Observe que cuanto más grande es el valor de a, más "angosta" es la gráfica, y cuanto más pequeño es el valor de a, más "ancha" es la gráfica.

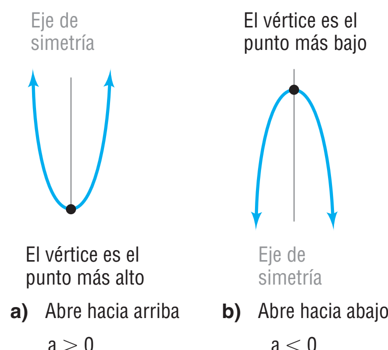
La figura 4 en la página 294 muestra las gráficas de $f(x) = ax^2$ para $a < 0$. Observe que estas gráficas son reflexiones en el eje x de las gráficas de la figura 3. Con base en los resultados de estas dos figuras, se obtienen algunas conclusiones generales de la gráfica de $f(x) = ax^2$. Primero, al aumentar $|a|$ la gráfica se hace más *angosta* (estiramiento vertical), y cuando $|a|$ se acerca a cero, la gráfica se hace más *ancha* (compresión vertical). Segundo, si a es positiva, entonces la gráfica se abre *hacia arriba* y si a es negativa la gráfica se abre *hacia abajo*.

Figura 4



Las gráficas de las figuras 3 y 4 son gráficas típicas de todas las funciones cuadráticas, que se llaman **parábolas**.* Vea la figura 5, donde se ilustran dos parábolas. La de la izquierda **abre hacia arriba** y tiene un punto más bajo; la de la derecha **abre hacia abajo** y tiene un punto más alto. El punto más bajo (o el más alto) se llama **vértice**. La línea vertical que pasa por el vértice en cada parábola de la figura 5 se llama **eje de simetría** (algunas veces se abrevia a **eje**) de la parábola. Como la parábola es simétrica respecto de su eje, el eje de simetría de la parábola se utiliza para encontrar otros puntos de la parábola.

Figura 5
Gráficas de una función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$



Las parábolas mostradas en la figura 5 son gráficas de funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Observe que los ejes coordenados no se incluyen en la figura. Dependiendo de los valores de a, b y c, los ejes podrían estar en cualquier lugar. El hecho importante es que, excepto tal vez por la compresión o el estiramiento, la forma de la gráfica de una función cuadrática será como la de las parábolas de la figura 5.



En el siguiente ejemplo se usa la técnica de la sección 3.5 para graficar una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Al hacerlo, se completará el cuadrado y se escribirá la función f en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

EJEMPLO 1 Gráfica de una función cuadrática usando transformaciones

Grafique la función $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$. Encuentre el vértice y el eje de simetría.

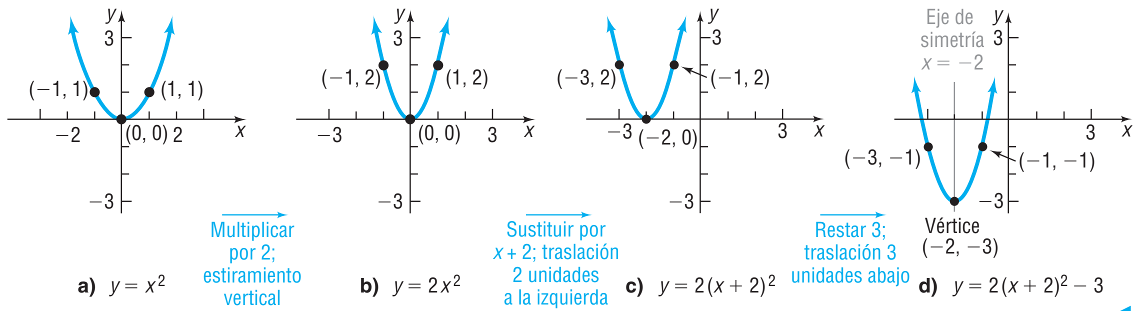
Solución Se comienza por completar el cuadrado en el lado derecho.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 8x + 5 \\ &= 2(x^2 + 4x) + 5 && \text{Factorizar el 2 de } 2x^2 + 8x. \\ &= 2(x^2 + 4x + 4) + 5 - 8 && \text{Completar el cuadrado en } 2(x^2 + 4x). \\ &= 2(x + 2)^2 - 3 && \text{Observar que el factor 2 requiere sumar y restar 8.} \end{aligned} \quad (2)$$

La gráfica de f se obtiene en tres etapas, como se muestra en la figura 6. Ahora compare esta gráfica con la gráfica de la figura 5*a*). La gráfica de $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$ es una parábola que abre hacia arriba y tiene su vértice (punto más bajo) en $(-2, -3)$. Su eje de simetría es la recta $x = -2$.

*Más adelante en el libro, se estudiarán las parábolas usando una definición geométrica.

Figura 6





COMPROBACIÓN: Grafique $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$ y use el comando MINIMUM para localizar sus vértices.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

El método usado en el ejemplo 1 se usa para graficar cualquier función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && \text{Factorizar } a \text{ de } ax^2 + bx. \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) && \text{C completar el cuadrado sumando y restando } a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right). \text{ ¡Cuidado en este paso!} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} && c - \frac{b^2}{4a} = c \cdot \frac{4a}{4a} - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Con base en estos resultados, se concluye lo siguiente:

Si $h = -\dfrac{b}{2a}$ y $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, entonces

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k \qquad \textbf{(3)}$$

La gráfica de f es la parábola $y = ax^2$ corrida h unidades horizontales y k unidades verticales. Como resultado, el vértice está en (h, k), y la gráfica abre hacia arriba si $a > 0$ y abajo si $a < 0$. El eje de simetría es la recta vertical $x = h$.

Por ejemplo, compare la ecuación (3) con la ecuación (2) del ejemplo 1.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x + 2)^2 - 3 \\ &= a(x - h)^2 + k \end{aligned}$$

Se concluye que $a = 2$, de manera que la gráfica abre hacia arriba. Además, se encuentra que $h = -2$ y $k = -3$, por lo que el vértice está en $(-2, -3)$.

2 No se requiere completar el cuadrado para obtener el vértice. En casi todos los casos, es más fácil obtener el vértice de una función cuadrática f recordando que su eje coordenado es $h = -\dfrac{b}{2a}$. La coordenada y se encuentra entonces evaluando f en $-\dfrac{b}{2a}$.

Estas observaciones se resumen como sigue:

Propiedades de la gráfica de una función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0$$

$$\text{Vértice} = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) \quad \text{eje de simetría: la recta } x = -\frac{b}{2a} \qquad \textbf{(4)}$$

La parábola abre hacia arriba si $a > 0$; el vértice es un punto mínimo.
La parábola abre hacia abajo $a < 0$; el vértice es un punto máximo.

EJEMPLO 2 Localización de un vértice sin graficar

Sin dibujar la gráfica, localice el vértice y el eje de simetría de la parábola definida por $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$. ¿Hacia dónde abre?

Solución Para esta función cuadrática, $a = -3$, $b = 6$, y $c = 1$. La coordenada x del vértice es

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-6} = 1$$

La coordenada y del vértice es, por lo tanto

$$k = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(1) = -3 + 6 + 1 = 4$$

El vértice se localiza en el punto $(1, 4)$. El eje de simetría es la recta $x = 1$. Por último, como $a = -3 < 0$, la parábola abre hacia abajo. ◀



La información que se reúne en el ejemplo 2, junto con la localización de las intercepciones, suele proporcionar suficiente información para graficar la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. La intercepción y es el valor de f en $x = 0$, es decir, $f(0) = c$.

Las intercepciones x, si las hay, se encuentran al resolver la ecuación cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

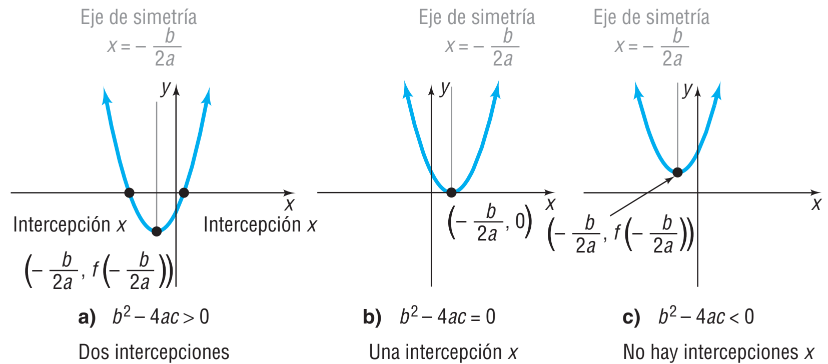
Esta ecuación tiene dos, una o ninguna solución real, dependiendo de si el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo, 0 o negativo. Según el valor del discriminante, la gráfica de f tiene las siguientes intercepciones x:

Intercepciones x de una función cuadrática

1. Si el discriminante $b^2 - 4ac > 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos intercepciones x diferentes, esto es, cruza el eje x en dos lugares.
2. Si el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene una intercepción x y toca al eje x en su vértice.
3. Si el discriminante $b^2 - 4ac < 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ no tiene intercepción x por lo que no toca ni cruza el eje x.

La figura 7 ilustra estas posibilidades para parábolas que abren arriba.

Figura 7
$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0$



EJEMPLO 3 Gráfica de una función cuadrática usando su vértice, eje e intercepciones

Use la información del ejemplo 2 y la localización de las intercepciones para graficar $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$.

Solución En el ejemplo 2, se encontró que el vértice era (1, 4) y el eje de simetría $x = 1$. La intercepción y se encuentra haciendo $x = 0$. La intercepción y es $f(0) = 1$. Las intercepciones x se encuentran resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. Esto da la ecuación

$$-3x^2 + 6x + 1 = 0 \qquad a = -3, b = 6, c = 1$$

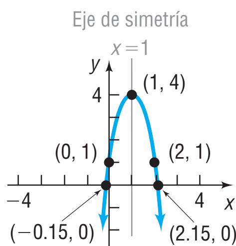
El discriminante $b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-3)(1) = 36 + 12 = 48 > 0$, de manera que la ecuación tiene dos soluciones reales y la gráfica tiene dos intercepciones x. Usando la fórmula cuadrática, se encuentra que

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{48}}{-6} = \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{-6} \approx -0.15$$

y

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{48}}{-6} = \frac{-6 - 4\sqrt{3}}{-6} \approx 2.15$$

Figura 8



Las intercepciones x son aproximadamente -0.15 y 2.15.

La gráfica se ilustra en la figura 8. Observe que se usó la intercepción y y el eje de simetría, $x = 1$, para obtener el punto adicional (2, 1) en la gráfica. ◀



GRAFIQUE LA FUNCIÓN DEL EJEMPLO 3 USANDO EL MÉTODO PRESENTADO EN EL EJEMPLO 1.



¿CUÁL DE LOS DOS MÉTODOS PREFIERE? EXPONGA SUS RAZONES.



COMPROBACIÓN: Grafique $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$. Use ROOT o ZERO para localizar las dos intercepciones x y use MAXIMUM para localizar el vértice.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 35.

Si la gráfica de una función cuadrática tiene una sola intercepción x o ninguna, casi siempre es necesario graficar un punto adicional para obtener la gráfica.

EJEMPLO 4 Gráfica de una función cuadrática usando su vértice, eje e intercepciones

Grafique $f(x) = x^2 - 6x + 9$ determinando si la gráfica abre hacia arriba o hacia abajo. Encuentre su vértice, eje de simetría, intercepciones y e intercepciones x, si las hay.

Solución Para $f(x) = x^2 - 6x + 9$, se tiene $a = 1$, $b = -6$ y $c = 9$. Como $a = 1 > 0$, la parábola abre hacia arriba. La coordenada x del vértice es

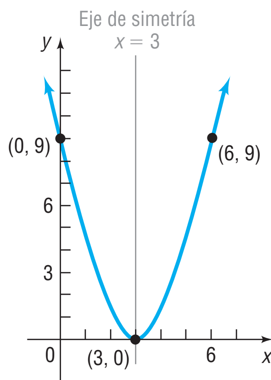
$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3$$

La coordenada y del vértice es

$$k = f(3) = (3)^2 - 6(3) + 9 = 0$$

De manera que el vértice está en $(3, 0)$. El eje de simetría es la recta $x = 3$. La intercepción y es $f(0) = 9$. Como el vértice $(3, 0)$ está en el eje x, la gráfica toca el eje x en la intercepción x. Usando el eje de simetría y la intercepción y en $(0, 9)$, se localiza el punto adicional $(6, 9)$ en la gráfica. Vea la figura 9. ◀

Figura 9





GRAFIQUE AHORA LA FUNCIÓN DEL EJEMPLO 4 USANDO EL MÉTODO PRESENTADO EN EL EJEMPLO 1. CUÁL DE LOS DOS MÉTODOS PREFIERE. PROPORCIONE SUS RAZONES.

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 43.

EJEMPLO 5 Gráfica de una función cuadrática usando su vértice, eje e intercepciones

Grafique $f(x) = 2x^2 + x + 1$ determinando si la gráfica abre hacia arriba o hacia abajo. Encuentre su vértice, eje de simetría, intercepción y e intercepciones x, si las hay.

Solución Para $f(x) = 2x^2 + x + 1$, se tiene $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$. Como $a = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba. La coordenada x del vértice es

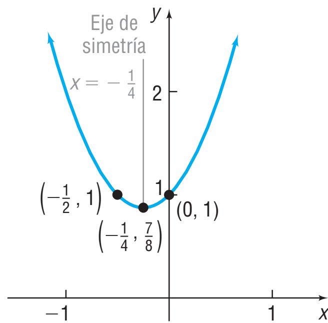
$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4}$$

La coordenada y del vértice es

$$k = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{16}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{7}{8}$$

De manera que el vértice está en $\left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)$. El eje de simetría es la recta $x = -\frac{1}{4}$. La intercepción y es $f(0) = 1$. Las intercepciones-x, si las hay, obe-

Figura 10



decen la ecuación $2x^2 + x + 1 = 0$. Como el discriminante $b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(1) = -7 < 0$, esta ecuación no tiene soluciones reales y, por lo tanto, la gráfica no tiene intercepciones x. Se usa el punto $(0, 1)$ y el eje de simetría $x = -1/4$ para localizar el punto adicional $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ en la gráfica Vea la figura 10. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

Dado el vértice y un punto adicional en la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se utiliza

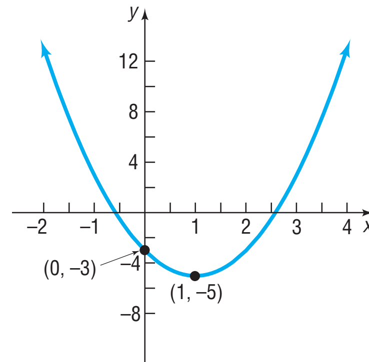
$$f(x) = a(x - h)^2 + k \qquad \textbf{(5)}$$

donde (h, k) es el vértice, para obtener la función cuadrática.

EJEMPLO 6 Encontrar la función cuadrática dado su vértice y un punto

Determine la función cuadrática cuyo vértice es $(1, -5)$ y cuya intercepción y es -3. La gráfica de la parábola se muestra en la figura 11.

Figura 11



Solución El vértice es $(1, -5)$, de manera que $h = 1$ y $k = -5$. Se sustituyen estos valores en la ecuación (5).

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \qquad \text{Ecuación (5)}$$
$$f(x) = a(x - 1)^2 - 5 \qquad h = 1, k = -5$$

Para determinar el valor de a, se usa el hecho de que $f(0) = -3$ (la intercepción y).

$$f(x) = a(x - 1)^2 - 5$$
$$-3 = a(0 - 1)^2 - 5 \qquad x = 0, y = f(0) = -3$$
$$-3 = a - 5$$
$$a = 2$$

La función cuadrática cuya gráfica se muestra en la figura 11 es

$$f(x) = 2(x - 1)^2 - 5 = 2x^2 - 4x - 3$$ ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

Resumen

Pasos para graficar un función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

Opción 1

PASO 1: Completar el cuadrado en x para escribir la función cuadrática en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

PASO 2: Graficar la función en etapas usando transformaciones.

Opción 2

PASO 1: Determinar el vértice $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.

PASO 2: Determinar el eje de simetría, $x = -\dfrac{b}{2a}$.

PASO 3: Determinar la intercepción y, $f(0)$.

PASO 4: a) Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la gráfica de la función cuadrática tiene dos intercepciones x, que se encuentran resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
b) Si $b^2 - 4ac = 0$, el vértice es la intercepción x.
c) Si $b^2 - 4ac < 0$, no hay intercepciones x.

PASO 5: Determinar un punto adicional si $b^2 - 4ac \leq 0$ usando la intercepción y y el eje de simetría.

PASO 6: Graficar los puntos y dibujar la gráfica.

Modelos cuadráticos

4 Cuando un modelo matemático lleva a una función cuadrática, las propiedades de esta función cuadrática ofrecen información importante acerca del modelo. Por ejemplo, para una función cuadrática del ingreso, es posible determinar el ingreso máximo; mientras que para una función cuadrática del costo, se puede encontrar el costo mínimo.

Para ver por qué, recuerde que la gráfica de una función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

es una parábola con vértice en $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$. Este vértice es el punto más alto de la gráfica si $a < 0$ y el punto más bajo de la gráfica si $a > 0$. Si el vértice es el punto más alto ($a < 0$), entonces $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ es el **valor máximo** de f. Si el vértice es el punto más bajo ($a > 0$), entonces $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ es el **valor mínimo** de f.

Esta propiedad de la gráfica de una función cuadrática permite responder preguntas que involucran optimización (encontrar los valores mínimo o máximo) en los modelos que involucran funciones cuadráticas.

EJEMPLO 7 Valor máximo o mínimo de una función cuadrática

Determine si la función cuadrática

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

tiene un valor máximo o mínimo. Luego encuentre ese valor.

Solución Se compara $f(x) = x^2 - 4x + 7$ para $f(x) = ax^2 + c$. Se concluye que a = 1, $b = 7$. Como $a > 0$, la gráfica de f abre hacia arriba, de manera que el vértice es un punto mínimo. El valor mínimo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

$a = 1, b = -4$

El valor mínimo es

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(2) = 2^2 - 4(2) + 7 = 4 - 8 + 7 = 3$$

◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 61.

EJEMPLO 8 Maximización del ingreso

El departamento de mercadotecnia en Texas Instruments ha encontrado que, cuando ciertas calculadoras se venden a un precio unitario de p dólares, el ingreso R (en dólares) como una función del precio p es

$$R(p) = -150p^2 + 21{,}000p$$

¿Qué precio unitario debe establecerse para maximizar el ingreso? Si se cobra este precio, ¿cuál es el ingreso máximo?

Solución El ingreso R es

$$R(p) = -150p^2 + 21{,}000p \qquad R(p) = ap^2 + bp + c$$

La función R es una función cuadrática con $a = -150$, $b = 21{,}000$ y $c = 0$. Como $a < 0$, el vértice es el punto más alto de la parábola. El ingreso R es entonces un máximo cuando el precio p es

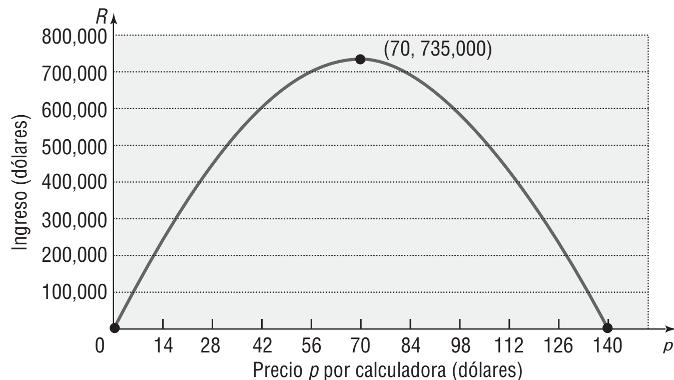
$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{21{,}000}{2(-150)} = \frac{-21{,}000}{-300} = \$70.00$$

El ingreso máximo R es

$$R(70) = -150(70)^2 + 21{,}000(70) = \$735{,}000$$

Vea una ilustración en la figura 12.

Figura 12



◀

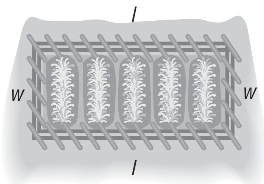


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 69.

EJEMPLO 9 Maximizar el área encerrada por una cerca

Un granjero tiene 2000 yardas de cerca para encerrar un campo rectangular. ¿Cuál es la mayor área que puede encerrarse?

Figura 13



Solución La figura 13 ilustra la situación. La cerca disponible representa el perímetro del rectángulo. Si l es el largo y w es el ancho, entonces

$$\text{perímetro} = 2l + 2w = 2000$$

$$2l + 2w = 2000 \tag{6}$$

El área del rectángulo es

$$A = lw$$

Para expresar A en términos de una sola variable, se despeja w de la ecuación (6) y se sustituye el resultado en $A = lw$. Entonces A contiene la variable l. [También se despeja l de la ecuación (6) y se expresa A sólo en términos de w Inténtelo].

$$2l + 2w = 2000 \quad \text{Ecuación (6)}$$

$$2w = 2000 - 2l \quad \text{Despejar } w.$$

$$w = \frac{2000 - 2l}{2} = 1000 - l$$

Entonces el área A es

$$A = lw = l(1000 - l) = -l^2 + 1000l$$

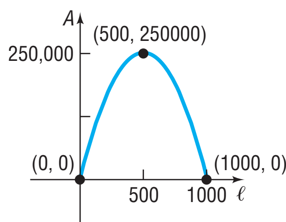
Ahora bien, A es una función cuadrática en l.

$$A(l) = -l^2 + 1000l \quad a = -1,\ b = 1000,\ c = 0$$

Como $a < 0$, el vértice es un punto máximo de la gráfica de A. El valor máximo ocurre en

$$l = -\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2(-1)} = 500$$

Figura 14



El valor máximo de A es

$$A\left(-\frac{b}{2a}\right) = A(500) = -500^2 + 1000(500)$$

$$= -250{,}000 + 500{,}000 = 250{,}000$$

El área más grande que se puede encerrar con 2000 yardas de cerca con forma de rectángulo es de 250,000 yardas cuadradas. ◀

La figura 14 muestra que la gráfica de $A(l) = -l^2 + 1000l$.

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 75.

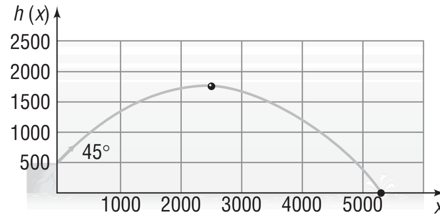
EJEMPLO 10 Analizar el movimiento de un proyectil

Se dispara un proyectil desde un acantilado 500 pies sobre la superficie del agua con una inclinación de 45° con la horizontal, con una velocidad de escape de 400 pies por segundo. En física, está establecido que la altura h del proyectil sobre el nivel del agua está dada por

$$h(x) = \frac{-32x^2}{(400)^2} + x + 500$$

donde x es la distancia horizontal medida en pies del proyectil desde la base del acantilado. Vea la figura 15.

Figura 15



a) Encuentre la altura máxima del proyectil.
b) ¿Qué tan lejos de la base del acantilado chocará el proyectil con el agua?

Solución a) La altura del proyectil está dada por una función cuadrática.

$$h(x) = \frac{-32x^2}{(400)^2} + x + 500 = \frac{-1}{5000}x^2 + x + 500$$

Se busca el valor máximo de h. Como el valor máximo se obtiene en el vértice, se calcula

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\left(\frac{-1}{5000}\right)} = \frac{5000}{2} = 2500$$

La altura máxima del proyectil es

$$h(2500) = \frac{-1}{5000}(2500)^2 + 2500 + 500$$
$$= -1250 + 2500 + 500 = 1750 \text{ pies}$$

b) El proyectil choca con el agua cuando la altura es cero. Para encontrar la distancia recorrida x, se necesita para resolver la ecuación

$$h(x) = \frac{-1}{5000}x^2 + x + 500 = 0$$

Se usa la fórmula cuadrática con

$$b^2 - 4ac = 1 - 4\left(\frac{-1}{5000}\right)(500) = 1.4$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1.4}}{2\left(\frac{-1}{5000}\right)} \approx \begin{cases} -458 \\ 5458 \end{cases}$$

Se descarta la solución negativa y se encuentra que el proyectil choca con el agua a una distancia cercana a 5458 pies de la base del acantilado. ◀

Para ver el concepto



Grafique

$$h(x) = \frac{-1}{5000}x^2 + x + 500, \qquad 0 \le x \le 5500$$

Use MÁXIMUM para encontrar la altura máxima del proyectil, y use ROOT O ZERO para encontrar la distancia desde la base del acantilado al lugar donde el proyectil llega al agua. Compare sus resultados con los obtenidos en el ejemplo. TRACE la trayectoria del proyectil. ¿Qué tan lejos de la base del acantilado está el proyectil cuando su altura es de 1000 pies y 1500 pies, respectivamente?

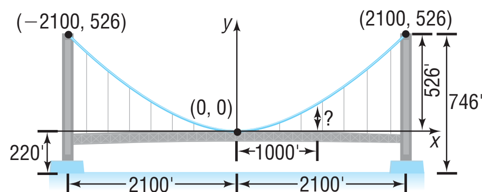
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 79.

EJEMPLO 11 El puente Golden Gate

El Golden Gate, un puente suspendido, abarca la entrada de la Bahía de San Francisco. Sus torres de 746 pies de alto están separadas 4200 pies. El puente está suspendido por dos grandes cables de más de 3 pies de diámetro; la amplia carretera está 220 pies sobre el nivel del agua. Los cables tienen forma parabólica y tocan la superficie del camino en el centro del puente. Encuentre la altura del cable que está a una distancia de 1000 pies del centro.

Solución Se comienza por elegir la colocación de los ejes coordenados de modo que el eje x coincida con la superficie del camino y el origen coincida con el centro del puente. Como resultado, las dos torres quedan verticales (altura $746 - 220 = 526$ pies arriba del camino) y se localizan a 2100 pies del centro. Además, el cable, que tiene forma de parábola, se extiende desde las torres, abre hacia arriba y tiene su vértice en $(0, 0)$. Como se ilustra en la figura 16, la elección de la colocación de los ejes permite identificar la ecuación de la parábola como $y = ax^2$, $a > 0$. También se observa que los puntos $(-2100, 526)$ y $(2100, 526)$ están en la gráfica.

Figura 16



Con base en estos hechos, se puede encontrar el valor de a en $y = ax^2$.

$$y = ax^2$$
$$526 = a(2100)^2 \qquad y = 526;\ x = 2100$$
$$a = \frac{526}{(2100)^2}$$

Por lo tanto, la ecuación de la parábola es

$$y = \frac{526}{(2100)^2}x^2$$

La altura del cable cuando $x = 1000$ es

$$y = \frac{526}{(2100)^2}(1000)^2 \approx 119.3 \text{ pies}$$

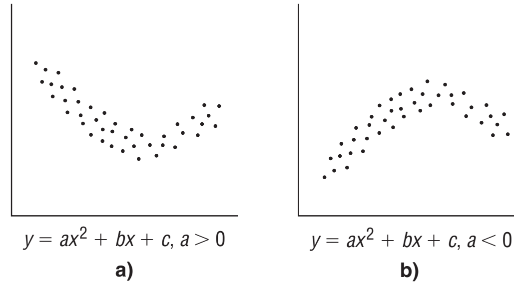
El cable está a 119.3 pies de altura a una distancia de 1000 pies del centro del puente. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 81.

Ajuste de una función cuadrática a los datos

5 En la sección 2.6 se encontró la recta del mejor ajuste para datos que parecían tener una relación lineal. Se observó que los datos también pueden tener una relación no lineal. Las figuras 17*a*) y *b*) muestran diagramas de dispersión de datos que tienen una relación cuadrática.

Figura 17



EJEMPLO 12 Ajuste de una función cuadrática a los datos

Un granjero recolecta los datos dados en la tabla 2, que muestra cantidad cosechada Y para diferentes cantidades de fertilizantes, x.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que podría existir entre dos variables.

b) La función cuadrática de mejor ajuste para estos datos es

$$Y(x) = -0.0171x^2 + 1.0765x + 3.8939$$

Use esta función para determinar la cantidad óptima de fertilizante que debe aplicar.

c) Use la función para predecir la cosecha cuando se aplica la cantidad óptima de fertilizante.

d) Use una calculadora gráfica para verificar que la función dada en el inciso *b*) sea la función cuadrática de mejor ajuste.

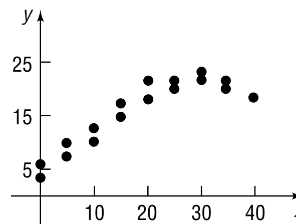
e) Con la calculadora gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos y luego grafique la función cuadrática de mejor ajuste sobre el diagrama de dispersión.

Tabla 2

Parcela	Fertilizante, x (libras/100 pies^2)	Cosecha (costales de grano)
1	0	4
2	0	6
3	5	10
4	5	7
5	10	12
6	10	10
7	15	15
8	15	17
9	20	18
10	20	21
11	25	20
12	25	21
13	30	21
14	30	22
15	35	21
16	35	20
17	40	19
18	40	19

Solución a) La figura 18 muestra el diagrama de dispersión. En apariencia los datos siguen una relación cuadrática, con $a < 0$.

Figura 18



b) Con base en la función cuadrática de mejor ajuste, la cantidad óptima de fertilizante que debe aplicar es

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{1.0765}{2(-0.0171)} \approx 31.5 \text{ libras de ferilizante por cada 100 pies cuadrados}$$

c) Se evalúa la función $Y(x)$ para $x = 31.5$.

$$Y(31.5) = -0.0171(31.5)^2 + 1.0765(31.5) + 3.8939 \approx 20.8 \text{ costales}$$

Si se aplican 31.5 libras de fertilizante por cada 100 pies cuadrados, la cosecha será de 20.8 costales de grano según la función cuadrática de mejor ajuste.



d) Después de ejecutar el programa QUAD REG de regresión cuadrática, se obtienen los resultados mostrados en la figura 19. La salida de la aplicación muestra la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. La función cuadrática de mejor ajuste es $Y(x) = -0.0171x^2 + 1.0765x + 3.8939$, donde x representa la cantidad de fertilizante usado y Y representa la cosecha.

e) La figura 20 muestra la gráfica de la función cuadrática encontrada en el inciso *d*) dibujada sobre el diagrama de dispersión.

Figura 19

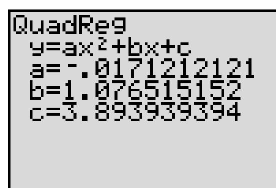
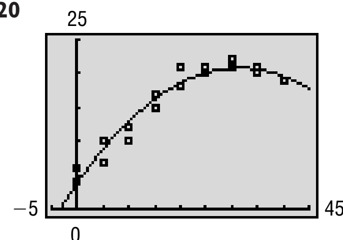


Figura 20



Vea de nuevo la figura 19. Observe que la salida dada por la calculadora gráfica no incluye r, el coeficiente de correlación. Recuerde que el coeficiente de correlación es una medida de la fuerza de una relación **lineal** existente entre dos variables. La calculadora no proporciona un indicador de qué tan bien se ajusta la función a los datos en términos de r, ya que una función cuadrática no se puede expresar como una función lineal.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 91.

4.1 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Enumere las intercepciones de la ecuación $y - x^2 - 9$. (pp. 169–170)
2. Resuelva la ecuación $2x^2 + 7x - 4 = 0$. (pp. 96–99 y 101–105)
3. Para completar el cuadrado de $x^2 - 5x$, debe sumar el número __________. (p. 99)
4. Para graficar $y = (x - 4)^2$, debe trasladar la gráfica de $y = x^2$ una distancia de __________ unidades a la __________ (pp. 262–271)

Conceptos y vocabulario

5. La gráfica de una función cuadrática se llama __________.
6. La recta vertical que pasa por el vértice de una parábola se llama __________.
7. La coordenada x del vértice de $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es __________.
8. *Falso o verdadero:* la gráfica de $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, abre hacia arriba.
9. *Falso o verdadero:* la coordenada x de vértice de $f(x) = -x^2 + 4x + 5$, es $f(2)$.
10. *Falso o verdadero:* si el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, la gráfica de $f(x) + ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, tocará el eje x en su vértice.

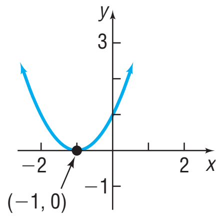
Ejercicios

En los problemas 11-18, cada gráfica corresponde a las siguientes funciones, determine los pares sin usar una calculadora gráfica.

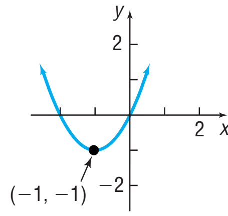
11. $f(x) = x^2 - 1$ **12.** $f(x) = -x^2 - 1$ **13.** $f(x) = x^2 - 2x + 1$ **14.** $f(x) = x^2 + 2x + 1$

15. $f(x) = x^2 - 2x + 2$ **16.** $f(x) = x^2 + 2x$ **17.** $f(x) = x^2 - 2x$ **18.** $f(x) = x^2 + 2x + 2$

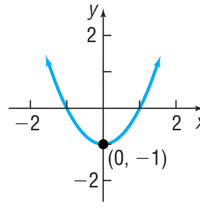
A.



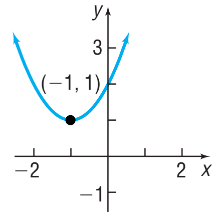
B.



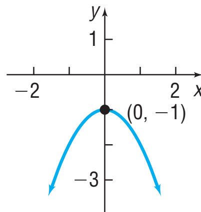
C.



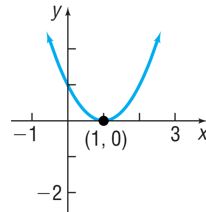
D.



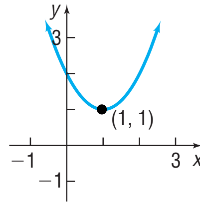
E.



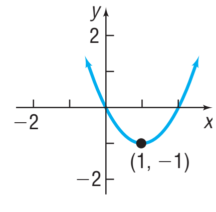
F.



G.



H.



En los problemas 19-34, grafique la función f comenzando con la gráfica de $y = x^2$ y usando transformaciones (traslación, compresión, estiramiento y/o reflexión).

[**Sugerencia:** Si es necesario, escriba f en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$].

19. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ **20.** $f(x) = 2x^2$ **21.** $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ **22.** $f(x) = 2x^2 - 3$

23. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$ **24.** $f(x) = 2x^2 + 4$ **25.** $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ **26.** $f(x) = -2x^2 - 2$

27. $f(x) = x^2 + 4x + 2$ **28.** $f(x) = x^2 - 6x - 1$ **29.** $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ **30.** $f(x) = 3x^2 + 6x$

31. $f(x) = -x^2 - 2x$ **32.** $f(x) = -2x^2 + 6x + 2$ **33.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ **34.** $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

En los problemas 35-52, grafique cada función cuadrática determinando si su gráfica abre hacia arriba o hacia abajo y encontrando su vértice, el eje de simetría, la intercepción y y las intercepciones x, si las hay. Determine el dominio y el rango de la función. Determine dónde es creciente la función y dónde es decreciente.

35. $f(x) = x^2 + 2x$ **36.** $f(x) = x^2 - 4x$ **37.** $f(x) = -x^2 - 6x$

38. $f(x) = -x^2 + 4x$ **39.** $f(x) = 2x^2 - 8x$ **40.** $f(x) = 3x^2 + 18x$

41. $f(x) = x^2 + 2x - 8$ **42.** $f(x) = x^2 - 2x - 3$ **43.** $f(x) = x^2 + 2x + 1$

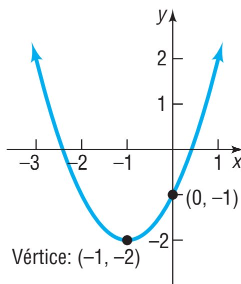
44. $f(x) = x^2 + 6x + 9$ **45.** $f(x) = 2x^2 - x + 2$ **46.** $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

47. $f(x) = -2x^2 + 2x - 3$ **48.** $f(x) = -3x^2 + 3x - 2$ **49.** $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$

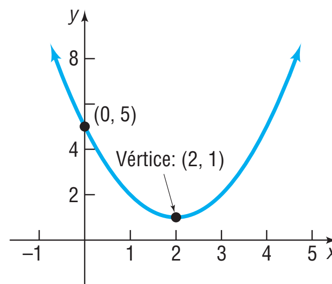
50. $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$ **51.** $f(x) = -4x^2 - 6x + 2$ **52.** $f(x) = 3x^2 - 8x + 2$

En los problemas 53-58, determine la función cuadrática de la gráfica dada.

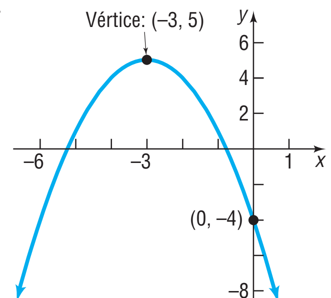
53.



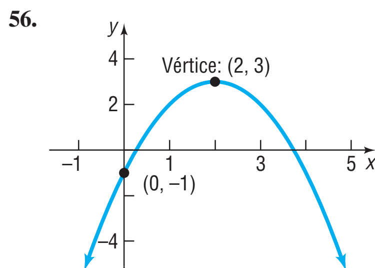
54.



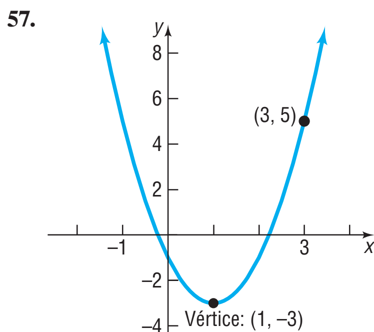
55.



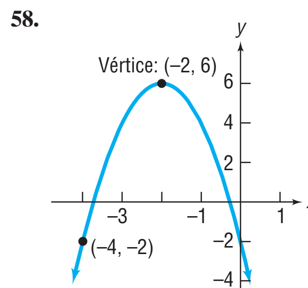
56.



57.



58.



En los problemas 59-66, determine, sin graficar, si la función cuadrática dada tiene un valor máximo o un valor mínimo y luego encuentre el valor.

59. $f(x) = 2x^2 + 12x$ **60.** $f(x) = -2x^2 + 12x$ **61.** $f(x) = 2x^2 + 12x - 3$ **62.** $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$

63. $f(x) = -x^2 + 10x - 4$ **64.** $f(x) = -2x^2 + 8x + 3$ **65.** $f(x) = -3x^2 + 12x + 1$ **66.** $f(x) = 4x^2 - 4x$

Conteste los problemas 67 y 68, usando lo siguiente: una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac > 0$ también se escribe en la forma $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, donde r_1 y r_2 son las intercepciones x de la gráfica.

67. a) Encuentre una función cuadrática cuyas intercepciones x son -3 y 1 con $a = 1$; $a = 2$; $a = -2$; $a = 5$.
b) ¿Cómo afecta las intercepciones el valor de a?
c) ¿Cómo afecta el eje de simetría el valor de a?
d) ¿Cómo afecta el vértice el valor de a?
e) Compare la coordenada x del vértice con el punto medio de las intercepciones x. ¿Qué concluiría?

68. a) Encuentre una función cuadrática cuyas intercepciones x son -5 y 3 con $a = 1$; $a = 2$; $a = -2$; $a = 5$.
b) ¿Cómo afecta las intercepciones el valor de a?
c) ¿Cómo afecta el eje de simetría el valor de a?
d) ¿Cómo afecta el vértice el valor de a?
e) Compare la coordenada x el vértice con el punto medio de las intercepciones-x. ¿Qué concluiría?

69. Maximizar el ingreso Suponga que un fabricante de secadoras de ropa que trabajan con gas ha encontrado que, cuando el precio unitario es p dólares, el ingreso R (en dólares) es

$$R(p) = -4p^2 + 4000p$$

¿Cuál es el precio unitario p que debe cobrarse para maximizar el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?

70. Maximizar el ingreso La compañía John Deere encontró que el ingreso por las ventas de tractores de trabajo rudo es una función del precio unitario p que cobra. Si el ingreso R es

$$R(p) = -\frac{1}{2}p^2 + 1900p$$

¿qué precio unitario p debe cobrar para maximizar el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?

71. Ecuación de demanda El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto obedece la ecuación de demanda

$$p = -\frac{1}{6}x + 100, \qquad 0 \le x \le 600$$

a) Exprese el ingreso R como función de x. (Recuerde que, $R = xp$).
b) ¿Cuál es el ingreso si se venden 200 unidades?
c) ¿Qué cantidad x maximiza el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?
d) ¿Qué precio debe cobrar la compañía para maximizar el ingreso?

72. Ecuación de demanda El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto obedece la ecuación de demanda

$$p = -\frac{1}{3}x + 100, \qquad 0 \le x \le 300$$

a) Exprese el ingreso R como función de x.
b) ¿Cuál es el ingreso si se venden 100 unidades?
c) ¿Qué cantidad x maximiza el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?
d) ¿Qué precio debe cobrar la compañía para maximizar el ingreso?

73. Ecuación de demanda El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto obedece la ecuación de demanda

$$x = -5p + 100, \qquad 0 \le p \le 20$$

a) Exprese el ingreso R como función de x.
b) ¿Cuál es el ingreso si se venden 15 unidades?
c) ¿Qué cantidad x maximiza el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?
d) ¿Qué precio debe cobrar la compañía para maximizar el ingreso?

74. Ecuación de demanda El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto obedece la ecuación de demanda

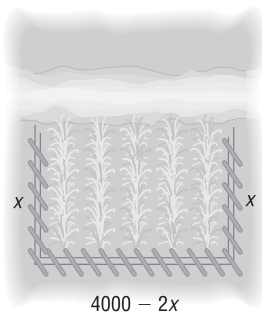
$$x = -20p + 500, \qquad 0 \le p \le 25$$

a) Exprese el ingreso R como función de x.
b) ¿Cuál es el ingreso si se venden 20 unidades?
c) ¿Qué cantidad x maximiza el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?
d) ¿Qué precio debe cobrar la compañía para maximizar el ingreso?

75. Encerrar un campo rectangular David tiene 400 yardas de cerca y desea encerrar un área rectangular.
a) Exprese el área A del rectángulo como función del ancho w del rectángulo.
b) ¿Para qué valor de w es mayor el área?
c) ¿Cuál es el área máxima?

76. Encerrar un campo rectangular Beth tiene 3000 pies de cerca disponibles para encerrar un campo rectangular.
a) Exprese el área A del rectángulo como función del ancho x, donde x es el largo del rectángulo.
b) ¿Para qué valor de x es mayor el área?
c) ¿Cuál es el área máxima?

77. Encerrar la mayor área con una cerca Un granjero tiene 4000 metros de cerca y desea encerrar una parcela rectangular adyacente a un río. Si el granjero no coloca cerca en el lado del río, ¿cuál es la mayor área que se puede encerrar? (Vea la figura).



78. Encerrar la mayor área con una cerca Un granjero cuenta con 2000 metros de cerca y quiere encerrar una parcela rectangular adyacente a una carretera. Si el granjero no pone cerca en el lado de la carretera, ¿cuál es la mayor área que se puede encerrar?

79. Análisis del movimiento de un proyectil Se lanza un proyectil desde un acantilado de 200 pies arriba del nivel del agua con una inclinación de 45° con la horizontal, con una velocidad de escape de 50 pies por segundo. La altura h del proyectil arriba del nivel del agua está dada por

$$h(x) = \frac{-32x^2}{(50)^2} + x + 200$$

donde x es la distancia horizontal del proyectil desde la base del acantilado.
a) ¿Qué tan lejos de la base del acantilado alcanza el proyectil su máxima altura?
b) Encuentre la altura máxima del proyectil.
c) ¿Qué tan lejos de la base del acantilado chocará el proyectil con el agua?
d) Use una calculadora gráfica para graficar la función $h, 0 \leq x \leq 200$.
e) Cuando la altura del proyectil es 100 pies arriba del nivel del agua, ¿qué tan lejos está del acantilado?

80. Análisis del movimiento de un proyectil Se lanza un proyectil con una inclinación de 45° con la horizontal, con una velocidad de escape de 100 pies por segundo. La altura h del proyectil está dada por

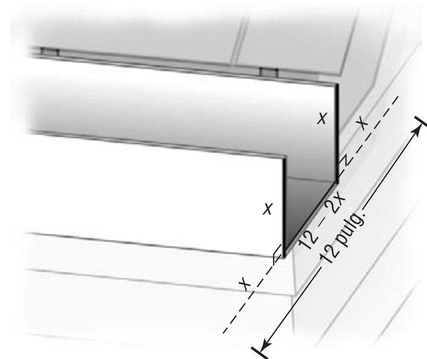
$$h(x) = \frac{-32x^2}{(100)^2} + x$$

donde x es la distancia horizontal del proyectil al punto de disparo.
a) ¿Qué tan lejos del punto de disparo es máxima la altura del proyectil?
b) Encuentre la altura máxima del proyectil.
c) ¿A qué distancia del punto de disparo llega el proyectil al suelo?
d) Use una calculadora gráfica para graficar la función $h, 0 \leq x \leq 350$.
e) Cuando la altura del proyectil es 50 pies arriba del suelo, ¿qué distancia horizontal ha recorrido?

81. Puente suspendido Un puente suspendido con altura distribuida uniformemente en todo lo largo tiene dos torres que se extienden 75 metros arriba de la superficie del camino y están separadas 400 metros. Los cables tienen forma parabólica y cuelgan de las torres. Los cables tocan la superficie del camino en el centro del puente. Encuentre la altura de los cables en el punto a 100 metros del centro. (Suponga que el camino está nivelado).

82. Arquitectura Un arco parabólico abarca 120 pies y tiene una altura máxima de 25 pies. Elija ejes coordenados rectangulares adecuados y encuentre la ecuación de la parábola. Luego calcule la altura del arco en los puntos 10, 20 y 40 pies del centro.

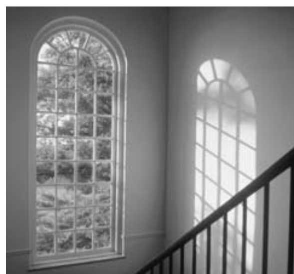
83. Construcción de canaletas para lluvia Debe colocarse una canaleta para lluvia a partir de hojas de aluminio que tienen 12 pulgadas de ancho doblando las orillas hacia arriba 90°. ¿Qué profundidad proporcionará el área de sección cruzada máxima, y por lo tanto, contendrá el máximo flujo de agua?



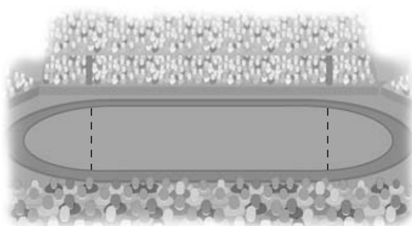
84. Ventana Norman Una ventana Norman tiene forma de rectángulo con un semicírculo arriba de diámetro igual al ancho del rectángulo (vea la figura). Si el perímetro de

la ventana es 20 pies, ¿qué dimensiones dejan pasar la mayor cantidad de luz (área máxima)?

[**Sugerencia:** Circunferencia de un círculo = $2\pi r$; área de un círculo = πr^2, donde r es el radio del círculo].

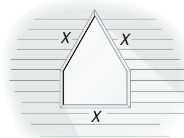


85. Construcción de un estadio Una pista y un campo de juego tienen la forma de un rectángulo con semicírculos en los extremos (vea la figura). El perímetro interno de la pista debe tener 1500 metros. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima?



86. Arquitectura Una ventana especial tiene forma de rectángulo con un triángulo en la parte superior (vea la figura). Si el perímetro de la ventana es de 16 pies, ¿qué dimensiones dejarán pasar la mayor cantidad de luz?

[**Sugerencia:** El área de un triángulo equilátero = $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)x^2$, donde x es la longitud de un lado del triángulo].



87. Caza La función $H(x) = -1.01x^2 + 114.3x + 451.0$ modela el número de individuos que les gustan las actividades de caza cuyo ingreso anual es de x miles de dólares.
FUENTE: Basado en datos obtenidos del National Sporting Goods Association.

a) ¿Cuál es el nivel de ingreso para el que hay el mayor número de cazadores? Aproximadamente, ¿cuántos cazadores ganan esta cantidad?

b) Utilice una calculadora gráfica para graficar $H = H(x)$. ¿Aumenta o disminuye para individuos que ganan entre \$20,000 y \$40,000?

88. Estudios avanzados La función $P(x) = -0.008x^2 + 0.868x - 11.884$ modela el porcentaje de la población de Estados Unidos cuya edad está dada por x y ha obtenido un diploma de posgrado (más que licenciatura) en marzo de 2000.
FUENTE: Basado en datos obtenidos del Censo en Estados Unidos.

a) ¿Cuál es la edad para la que el porcentaje más alto de estadounidenses han logrado obtener un posgrado? ¿Cuál es el porcentaje más alto?

b) Utilice una calculadora gráfica para graficar $P = P(x)$. ¿Aumenta o disminuye el porcentaje de estadounidenses que han obtenido un posgrado para individuos entre 40 y 50 años?

89. Varones víctimas de homicidio La función $M(x) = 0.76x^2 - 107.00x + 3854.18$ modela el número de víctimas de homicidio varones que tiene x años de edad ($20 \le x > 90$).
FUENTE: Basado en datos obtenidos de la Oficina Federal de Investigaciones (FBI).

a) Use el modelo para aproximar el número de hombres víctimas de homicidio que tienen $x = 23$ años de edad.

b) ¿Para qué edad el número de hombres víctimas de homicidio es 1456?

c) Use una calculadora gráfica para graficar $M = M(x)$.

d) Con base en la gráfica dibujada en la parte c), describa qué ocurre con el número de hombres víctimas de homicidio conforme la edad aumenta.

90. Gastos en el cuidado de la salud La función $H(x) = 0.004x^2 - 0.197x + 5.406$ modela el porcentaje del ingreso total que un individuo de x años de edad gasta en el cuidado de la salud.
FUENTE: Según datos obtenidos del Bureau of Labor Statistics.

a) Utilice el modelo para aproximar el porcentaje del ingreso total que un individuo de $x = 45$ años gasta en el cuidado de la salud.

b) ¿A qué edad gasta 10% de su ingreso en cuidados de la salud?

c) Use una calculadora gráfica para graficar $H = H(x)$.

d) Con base en la gráfica dibujada en el inciso c), describa qué ocurre al porcentaje del ingreso gastado en cuidados de la salud cuando la persona crece.

91. Hipótesis de ciclo de vida El ingreso de una persona varía con su edad. La siguiente tabla muestra el ingreso promedio I por grupos de edad dentro de Estados Unidos, en 1995. Para cada grupo de edad, el punto medio de la clase representa la variable independiente x. Para la clase de "65 años o más", se supondrá que el punto medio es 69.5.

Edad	Punto medio de clase, x	Ingreso promedio, I
15–24 años	19.5	\$20,979
25–34 años	29.5	\$34,701
35–44 años	39.5	\$43,465
45–54 años	49.5	\$48,058
55–64 años	59.5	\$38,077
65 años o más	69.5	\$19,096

FUENTE: Censo de Estados Unidos

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que exista entre las dos variables.

b) La función cuadrática del mejor ajuste para estos datos es

$$I(x) = -42.6x^2 + 3806x - 38{,}526$$

Use esta función para determinar la edad a la que se espera que un individuo gane su ingreso más alto.

c) Use la función para predecir el ingreso pico ganado.

d) Utilice una calculadora gráfica para verificar que la función dada en el inciso *b*) es la función cuadrática de mejor ajuste.

e) Con la calculadora gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos y luego grafique la función cuadrática del mejor ajuste sobre el diagrama de dispersión.

92. Hipótesis de ciclo de vida El ingreso de una persona varía con su edad. La siguiente tabla muestra el ingreso promedio *I* de personas por grupos de edad en Estados Unidos en 1996. Por cada grupo de edad, el punto medio de la clase representa a la variable independiente *x*. Para el grupo de edad "65 años o más", se supondrá que el punto medio de la clase es 69.5.

Edad	Punto medio de clase, *x*	Ingreso promedio, *I*
15–24 años	19.5	$21,438
25–34 años	29.5	$35,888
35–44 años	39.5	$44,420
45–54 años	49.5	$50,472
55–64 años	59.5	$39,815
65 años o más	69.5	$19,448

FUENTE: Censo de Estados Unidos

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que existe entre las dos variables.

b) La función cuadrática del mejor ajuste para estos datos es

$$I(x) = -44.8x^2 + 4009x - 41392$$

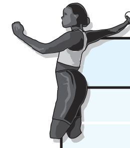
Use esta función para determinar la edad a la que una persona esperaría tener el mayor ingreso.

c) Utilice la función para predecir el ingreso pico obtenido.

d) Use una calculadora gráfica para verificar que la función dada en el inciso *b*) es la función cuadrática de mejor ajuste.

e) Con la calculadora gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos y luego grafique la función cuadrática de mejor ajuste sobre el diagrama de dispersión.

93. Altura de una pelota Una lanzadora lanza una pelota con una inclinación de 45° respecto de la horizontal. Los siguientes datos representan la altura de la pelota *h* en el instante en que ha recorrido *x* pies horizontales.



Distancia, *x*	Altura, *h*
20	25
40	40
60	55
80	65
100	71
120	77
140	77
160	75
180	71
200	64

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que pueda existir entre dos variables.

b) La función cuadrática de mejor ajuste para estos datos es

$$h(x) = -0.0037x^2 + 1.03x + 5.7$$

Use esta función para determinar qué tan lejos viaja la pelota antes de llegar a su altura máxima.

c) Use la función para encontrar la altura máxima de la pelota.

d) Utilice una calculadora gráfica para verificar que la función dada en el inciso *b*) es la función cuadrática de mejor ajuste.

e) Con la calculadora gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos y después sobre el diagrama, la gráfica de la función de mejor ajuste.

94. Millas por galón Un ingeniero recolecta los datos que muestran la velocidad *s* de un Ford Taurus y sus millas anuales por galón, *M*. Vea la tabla.



Velocidad, *s*	Millas por galón, *M*
30	18
35	20
40	23
40	25
45	25
50	28
55	30
60	29
65	26
65	25
70	25

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que exista entre las dos variables.

b) La función cuadrática de mejor ajuste para estos datos es

$$M(s) = -0.018s^2 + 1.93s - 25.34$$

Use esta función para determinar la velocidad que maximiza las millas por galón.

c) Use la función para predecir las millas por galón para una velocidad de 63 millas por hora.

d) Use una calculadora gráfica para verificar que la función dada en el inciso *b*) es la función cuadrática de mejor ajuste.

e) Con una calculadora gráfica, dibuje el diagrama de dispersión de los datos y sobré él, la función cuadrática de mejor ajuste.

95. Reacciones químicas Una reacción química autocatalizadora produce un compuesto que hace que aumente la razón de la formación del compuesto. Si la tasa de reacción V está dada por

$$V(x) = kx(a - x), \qquad 0 \leq x \leq a$$

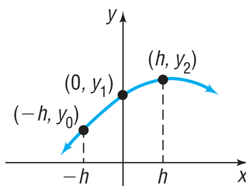
donde k es una constante positiva, a es la cantidad inicial del compuesto y x es la cantidad variable del compuesto, ¿para qué valor de x es máxima la tasa reacción?

96. Cálculo: regla de Simpson La figura muestra la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$. Suponga que los puntos $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2) están en la gráfica. Se demuestra que el área encerrada por la parábola, el eje x y las rectas $x = -h$ y $x = h$ es

$$\text{Área} = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$$

Demuestre que esta área también está dada por

$$\text{Área} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$



97. Use el resultado obtenido en el problema 96 para encontrar el área encerrada por $f(x) = -5x^2 + 8$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

98. Utilice el resultado obtenido en el problema 96 para encontrar el área encerrada por $f(x) = 2x^2 + 8$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

99. Utilice el resultado obtenido en el problema 96 para encontrar el área encerrada por $f(x) = x^2 + 3x + 5$, el eje x y las rectas $x = -4$ y $x = 4$.

100. Utilice el resultado obtenido en el problema 96 para encontrar el área encerrada por $f(x) = -x^2 + x - 4$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

101. Un rectángulo tiene un vértice en la recta $y = 10 - x$, $x > 0$, otro en el origen, uno en el lado positivo del eje x y otro en el lado positivo del eje y. Encuentre el área A más grande que puede encerrar el rectángulo.

102. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son enteros impares. Si x es un entero, demuestre que $f(x)$ debe ser un entero impar.
[**Sugerencia:** x es un entero par o bien un entero impar].

103. Construya una función cuadrática que abra hacia abajo y tenga sólo una intercepción x. Compare su función con otras en la clase. ¿Cuáles son las similitudes? ¿Cuáles son las diferencias?

104. En un conjunto de ejes coordenados, grafique la familia de parábolas $f(x) = x^2 + 2x + c$ para $c = -3$, $c = 0$ y $c = 1$. Describa las características de un miembro de esta familia.

105. En un conjunto de ejes coordenados, grafique la familia de parábolas $f(x) = x^2 + bx + 1$ para $b = -4$, $b = 0$ y $b = 4$. Describa las características de un miembro de esta familia.

106. Establezca las circunstancias que hacen que la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ no tenga intercepciones x.

107. ¿Por qué la gráfica de una función cuadrática abre hacia arriba si $a > 0$ y abajo si $a < 0$?

108. Consulte el ejemplo 8 en la página 301. Observe que si el precio de una calculadora es $0 o $140 el ingreso es $0. Es sencillo explicar por qué el ingreso sería $0 si el precio es $0, pero ¿por qué el ingreso es $0 si el precio es $140?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $(0, -9), (-3, 0), (3, 0)$ **2.** $\left\{-4, \frac{1}{2}\right\}$ **3.** $\frac{25}{4}$ **4.** derecha; 4

4.2 Funciones polinomiales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Polinomios (Repaso, sección R.4, pp. 35-42)
- Intercepciones (sección 2.2, pp. 169-170)
- Técnicas para graficar: transformaciones (sección 3.5, pp. 262-271)
- Intercepciones de una función (sección 3.3, p. 240)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 326.

OBJETIVOS
1 Identificar funciones polinomiales y sus grados
2 Graficar funciones polinomiales usando transformaciones
3 Identificar los ceros de una función polinomial y su multiplicidad
4 Analizar la gráfica de una función polinomial

1 Las *funciones polinomiales* están entre las expresiones más sencillas del álgebra. Es fácil evaluarlas: sólo requieren sumas y multiplicaciones repetidas. Debido a esto, con frecuencia se usan para aproximar otras funciones más complicadas. En esta sección se investigan las propiedades de esta importante clase de funciones.

Una **función polinomial** es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \textbf{(1)}$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales y n es un entero no negativo. El dominio es el conjunto de números reales.

Una función polinomial es una función cuya regla está dada por un polinomio en una variable. El **grado** de una función polinomial es el grado del polinomio en una variable, es decir, la potencia más alta que aparece de x.

EJEMPLO 1 Identificación de funciones polinomiales

Determine cuáles de las siguientes son funciones polinomiales. Para las que lo sean, establezca el grado; para las que no lo sean, diga por qué.

a) $f(x) = 2 - 3x^4$ (b) $g(x) = \sqrt{x}$ (c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^3 - 1}$

d) $F(x) = 0$ (e) $G(x) = 8$ (f) $H(x) = -2x^3(x - 1)^2$

Solución

a) f es una función polinomial de grado 4.

b) g no es una función polinomial. La variable x está elevada a la potencia $\frac{1}{2}$ que no es un entero no negativo.

c) h no es una función polinomial. Es el cociente de dos polinomios y el polinomio en el denominador es de grado positivo.

d) F es la función polinomial cero; no tiene un grado asignado.

e) G es una función constante distinta de cero, una función polinomial de grado 0, ya que $G(x) = 8 = 8x^0$.

f) $H(x) = -2x^3(x - 1)^2 = -2x^3(x^2 - 2x + 1) = -2x^5 + 4x^4 - 2x^3$. De manera que H es una función polinomial de grado 5, ¿Podría ver cómo se encuentra el grado de H sin multiplicar? ◀

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 11 Y 15.

Ya se han analizado con detalle las funciones polinomiales de grado 0, 1 y 2. Vea en la tabla 3 un resumen de las propiedades de las gráficas de estas funciones polinomiales.

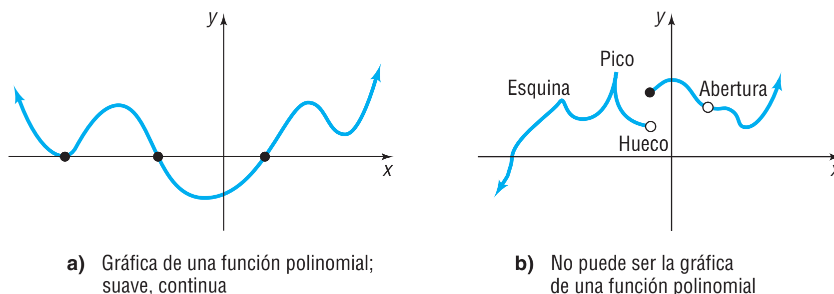
Tabla 3

Grado	Forma	Nombre	Gráfica
Sin grado	$f(x) = 0$	Función cero	El eje x
0	$f(x) = a_0, \quad a_0 \neq 0$	Función constante	Recta horizontal con intercepción y en a_0
1	$f(x) = a_1x + a_0, \quad a_1 \neq 0$	Función lineal	Recta no vertical ni horizontal con pendiente a_1 e intercepción y en a_0
2	$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2 \neq 0$	Función cuadrática	Parábola: la gráfica abre hacia arriba si $a_2 > 0$; la gráfica abre hacia abajo si $a_2 < 0$



Un objetivo de esta sección es analizar la gráfica de una función polinomial. Si toma un curso de cálculo, aprenderá que la gráfica de toda función polinomial es continua y suave. Por **suave** se entiende que la gráfica no contiene esquinas o picos; por **continua** se entiende que la gráfica no tiene saltos o huecos, y se dibuja sin levantar el lápiz del papel. Vea las figuras 21*a*) y *b*).

Figura 21



a) Gráfica de una función polinomial; suave, continua

b) No puede ser la gráfica de una función polinomial

Comenzamos el análisis de la gráfica de una función polinomial con el estudio de *funciones de potencias*, un tipo especial de funciones polinomiales

En palabras
Una función de potencia es una función que se define por un solo monomio.

Funciones de potencias

Una **función de potencias de grado** n es una función de la forma

$$f(x) = ax^n \qquad \textbf{(2)}$$

donde a es un número real, $a \neq 0$, y $n > 0$ es un entero

La gráfica de una función de potencia de grado 1, $f(x) = ax$, es una línea recta, con pendiente a, que pasa por el origen. La gráfica de una función de potencia de grado 2, $f(x) = ax^2$, es una parábola, con vértice en el origen, que abre hacia arriba si $a > 0$ y abajo si $a < 0$.

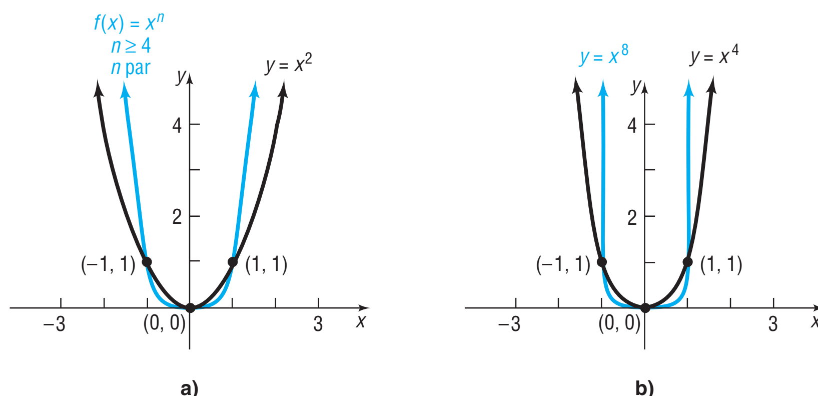
Si se sabe cómo graficar una función de potencia de la forma $f(x) = x^n$, entonces una compresión o estiramiento, quizás una reflexión en el eje x, nos permitirá obtener la gráfica de $g(x) = ax^n$. En consecuencia, nos concentraremos en graficar funciones de potencias de la forma $f(x) = x^n$.

Se comienza con las funciones de potencias de grado par de la forma $f(x) = x^n$, $n \geq 2$ y n par. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales y el rango es el conjunto de números reales no negativos. Esta función de potencia es una función par (¿por qué?), de manera que su gráfica es simétrica respecto del eje y. Su gráfica contiene siempre al origen y los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.

Si $n = 2$, la gráfica es la familiar parábola $y = x^2$ que abre hacia arriba, con el vértice en el origen. Si $n \geq 4$, la gráfica de $f(x) = x^n$, n par, estará más cerca del eje x que la parábola $y = x^2$ si $-1 < x < 1$ y más lejos del eje x que la parábola $y = x^2$ si $x < -1$ o $x > 1$. La figura 22a) ilustra esta conclusión. La figura 22*b*) muestra las gráficas de $y = x^4$ y $y = x^8$ para su comparación.

De la figura 22, se observa que cuando n crece, la gráfica de $f(x) = x^n$, $n \geq 2$ y n par, tiende a aplanarse cerca del origen y aumentar con rapidez cuando x está lejos de 0. Para n grande, parecería que la gráfica coincide con el eje x cerca del origen, pero no es así; en realidad la gráfica toca al eje x

Figura 22



sólo en el origen (vea la tabla 4). Además, para n grande, parecería que si $x < -1$ o $x > 1$, la gráfica es vertical, pero no es así; lo que ocurre es que aumenta con mucha rapidez en estos intervalos. Si las gráficas se agrandaran muchas veces, estas características serían claras.

Tabla 4

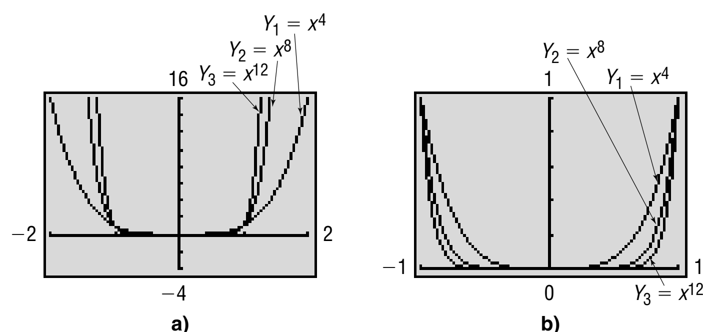
	$x = 0.1$	$x = 0.3$	$x = 0.5$
$f(x) = x^8$	10^{-8}	0.0000656	0.0039063
$f(x) = x^{20}$	10^{-20}	$3.487 \cdot 10^{-11}$	0.000001
$f(x) = x^{40}$	10^{-40}	$1.216 \cdot 10^{-21}$	$9.095 \cdot 10^{-13}$

Para ver el concepto



Grafique $Y_1 = x^4$, $Y_2 = x^8$, y $Y_3 = x^{12}$ usando la vista rectangular $-2 \leq x \leq 2$, $-4 \leq y \leq 16$. Después grafique de nuevo usando la vista rectangular $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Vea la figura 23. Aplique TRACE a lo largo de las gráficas para confirmar que para x cercana a 0 la gráfica está arriba del eje x, y que para $x > 0$ la gráfica se incrementa.

Figura 23



Propiedades de las funciones de potencias, $y = x^n$, con n entero par

1. La gráfica es simétrica respecto del eje y.
2. El dominio es el conjunto de números reales. El rango es el conjunto de números reales no negativos.
3. La gráfica siempre contiene los puntos $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, 1)$.
4. Cuando aumenta la magnitud del exponente n, la gráfica se vuelve más vertical para $x < -1$ o $x > 1$; pero para x cercano al origen, la gráfica tiende a aplanarse y quedar más cerca del eje x.

Ahora se considerarán las funciones de potencias de grado impar de la forma $f(x) = x^n$, $n \geq 3$ y n impar. El dominio y el rango de f es el conjunto de números reales. Esta función de potencia es una función impar (¿por qué?), de manera que su gráfica es simétrica respecto del origen. Su gráfica siempre contiene el origen y los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

La gráfica de $f(x) = x^n$ cuando $n = 3$ se ha mostrado varias veces y se repite en la figura 24. Si $n \geq 5$, la gráfica de $f(x) = x^n$, n impar, estará más cerca del eje x que la de $y = x^3$ si $-1 < x < 1$ y más lejos del eje x que la de $y = x^3$ si $x < -1$ o si $x > 1$. La figura 24 también ilustra esta conclusión.

La figura 25 muestra la gráfica de $y = x^5$ y la gráfica de $y = x^9$ para hacer más comparaciones.

Figura 24

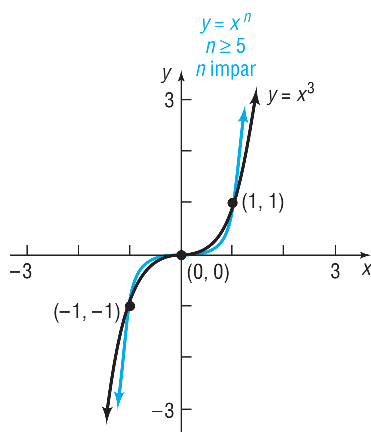
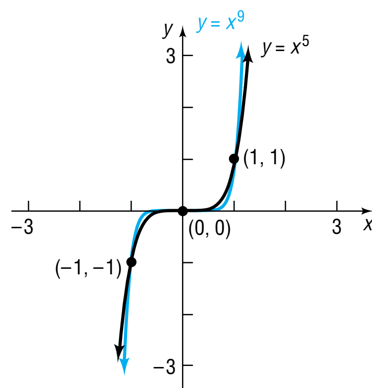


Figura 25



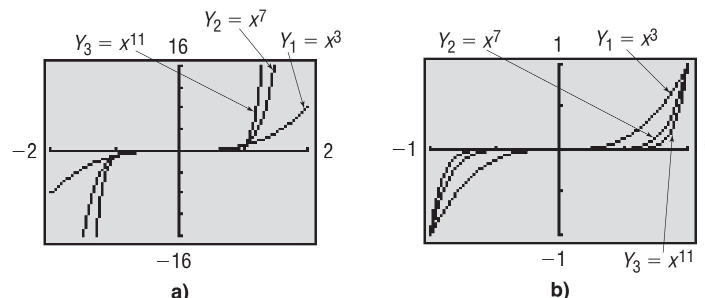
En apariencia cada gráfica coincide con el eje x cerca del origen, pero no es así; en realidad las gráficas tocan el eje x sólo en el origen. Además, parece que cuando x crece la gráfica se vuelve vertical, pero no es así; lo que ocurre es que crecen rápidamente.



Para ver el concepto

Grafique $Y_1 = x^3$, $Y_2 = x^7$, y $Y_3 = x^{11}$ usando la vista del rectángulo $-2 \leq x \leq 2$, $-16 \leq y \leq 16$. Después grafique de nuevo cada una con la vista del rectángulo $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Vea la figura 26. Haga TRACE de una de las gráficas para confirmar que la gráfica crece y sólo toca el eje x en el origen.

Figura 26



Para resumir:

Propiedades de las funciones de potencias, $y = x^n$, con n entero par

1. La gráfica es simétrica respecto del origen.
2. El dominio y el rango son el conjunto de todos los números reales.
3. La gráfica siempre contiene los puntos $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.
4. Cuando la magnitud del exponente n crece, la gráfica se vuelve más vertical para $x < -1$ o $x > 1$; pero para x cercana al origen, la gráfica tiende a aplanarse y queda cerca del eje x.



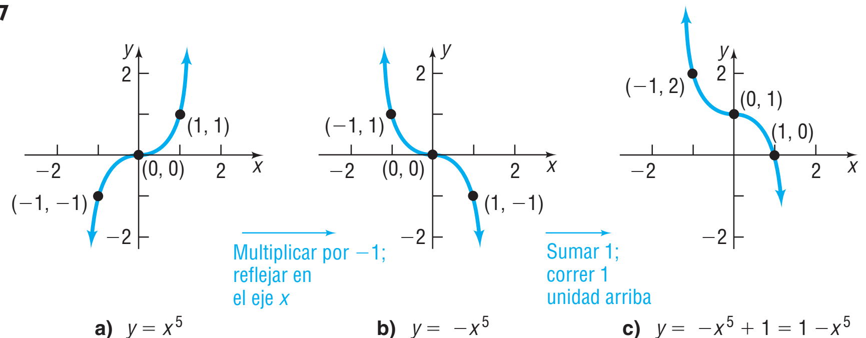
Los métodos de traslación, compresión, estiramiento y reflexión estudiados en la sección 3.5, al usarse con los hechos que acaban de presentarse, permiten graficar las funciones polinomiales que son transformaciones de funciones de potencias.

EJEMPLO 2 Gráficas de funciones polinomiales usando transformaciones

Grafique: $f(x) = 1 - x^5$

Solución La figura 27 muestra las etapas requeridas.

Figura 27

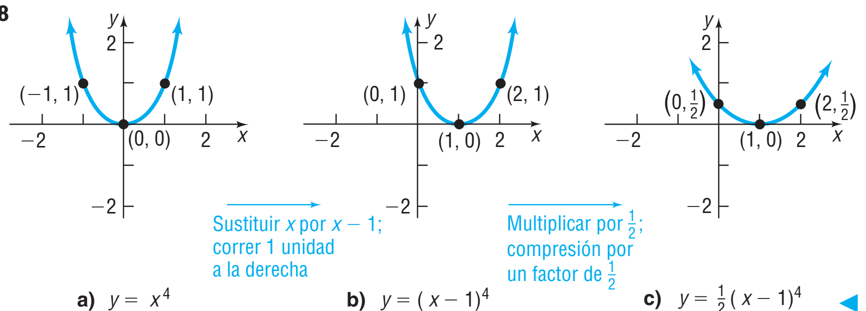


EJEMPLO 3 Gráficas de funciones polinomiales usando transformaciones

Grafique: $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^4$

Solución La figura 28 muestra las etapas requeridas

Figura 28





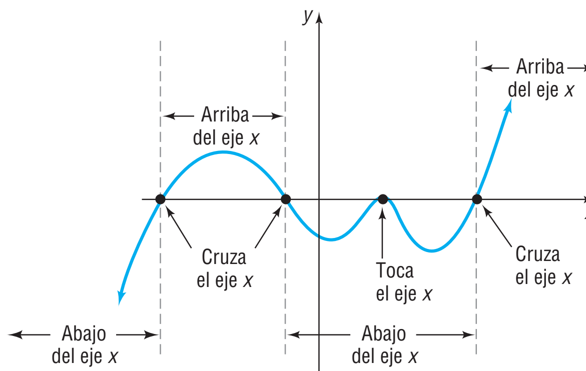
TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 23 Y 27.

Gráficas de otros polinomios

Graficar casi todos los polinomios de grado 3 o mayor requiere técnicas avanzadas. Sin embargo, si se localizan las intercepciones x de la gráfica, entonces es posible usar técnicas algebraicas para obtener la gráfica.

La figura 29 ilustra la gráfica de una función polinomial con cuatro intercepciones x. Observe que en las intercepciones la gráfica debe cruzar el eje x, o bien, tocarlo. En consecuencia, entre intercepciones consecutivas la gráfica está arriba del eje x, o bien, abajo del eje x. Pronto se usará esta propiedad de la gráfica de un polinomio.

Figura 29



3 Si una función polinomial f se factoriza completamente, es sencillo resolver la ecuación $f(x) = 0$ y localizar las intercepciones x de la gráfica. Por ejemplo, si $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)$, entonces las soluciones de la ecuación

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 3) = 0$$

se identifican como 1 y -3. Con base en este resultado, se hacen las siguientes observaciones:

Si f es una función polinomial y r es un número real para el que $f(r) = 0$, entonces r se llama **cero (real) de *f***, o **raíz de *f***. Si r es un cero (real) de f, entonces

a) r es una intercepción x de la gráfica de f.

b) $(x - r)$ es un factor de f.

De esta manera, los ceros reales de una función son las intercepciones x de su gráfica y se encuentran resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

EJEMPLO 4 Encontrar un polinomio a partir de sus ceros

a) Encuentre un polinomio de grado 3 cuyos ceros son -3, 2 y 5.

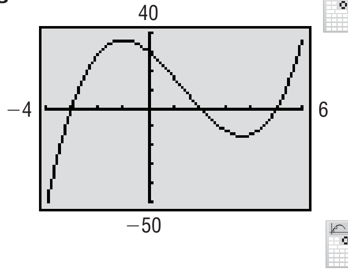
b) Grafique el polinomio encontrado en el inciso *a*) para verificar su resultado.

Solución a) Si r es un cero de un polinomio f, entonces $x - r$ es un factor de f. Esto significa que $x - (-3) = x + 3$, $x - 2$ y $x - 5$ son factores de f. Por lo tanto, cualquier polinomio de la forma

$$f(x) = a(x + 3)(x - 2)(x - 5)$$

donde a es cualquier número real diferente de cero, califica.

Figura 30



b) El valor de a ocasiona estiramiento, compresión o reflexión, pero no afecta las intercepciones x. Se elige graficar f con $a = 1$.

$$f(x) = (x + 3)(x - 2)(x - 5) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$$

La figura 30 muestra la gráfica de f. Observe que las intercepciones x son $-3, 2$ y 5. ◀

Para ver el concepto

Grafique la función encontrada en el ejemplo 4 para $a = 2$ y $a = -1$. ¿Afecta el valor de a los ceros de f? ¿Cómo afecta el valor de a la gráfica de f?

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37.

Si el mismo factor $x - r$ ocurre más de una vez, entonces r se llama **cero repetido** o **cero múltiple de f**. De manera más precisa, se tiene la siguiente definición.

Si $(x - r)^m$ es un factor de un polinomio f y $(x - r)^{m+1}$ no es un factor de f, entonces r se llama **cero de multiplicidad m de f**.

EJEMPLO 5 Identificar ceros y sus multiplicidades

Para el polinomio

$$f(x) = 5(x - 2)(x + 3)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^4$$

2 es un cero de multiplicidad 1.

-3 es un cero de multiplicidad 2.

$\frac{1}{2}$ es un cero de multiplicidad 4. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45a).

Observe en el ejemplo 5 que si se suman las multiplicidades $(1 + 2 + 4 = 7)$, se obtiene el grado del polinomio.

4 Suponga que es posible factorizar por completo una función polinomial y, como resultado, localizar todas las intercepciones x de su gráfica (los ceros reales de la función). Como se mencionó, estas intercepciones dividen el eje x en intervalos abiertos y, en cada intervalo, la gráfica de un polinomio estará ya sea arriba o abajo del eje x. Se verá un ejemplo.

EJEMPLO 6 Gráfica de un polinomio usando sus intercepciones x

Para el polinomio: $f(x) = x^2(x - 2)$

a) Encuentre las intercepciones x e intercepciones y de la gráfica de f.

b) Use las intercepciones x para encontrar los intervalos en los cuales la gráfica de f está arriba del eje x y los intervalos en los que la gráfica de f está abajo del eje x.

c) Localice otros puntos en la gráfica y conecte todos los puntos graficados con una curva suave y continua.

Solución a) La intercepción y es $f(0) = 0^2(0 - 2) - 0$. Las intercepciones x satisfacen la ecuación

$$f(x) = x^2(x - 2) = 0$$

de la que se encuentra

$$x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = 2$$

Las intercepciones son 0 y 2.

b) Las dos intercepciones x dividen el eje x en los tres intervalos:

$$(-\infty, 0) \qquad (0, 2) \qquad (2, \infty)$$

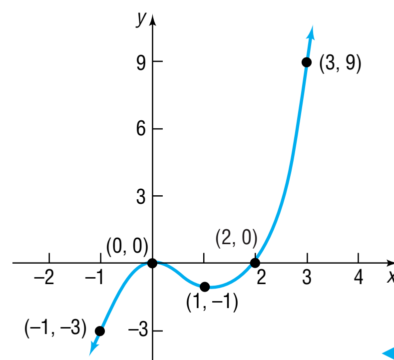
Como las gráficas de f cruzan o tocan el eje x sólo en $x = 0$ y $x = 2$, se deduce que la gráfica de f está arriba del eje x $[f(x) > 0]$ o abajo del eje x $[f(x) < 0]$ en cada uno de los tres intervalos. Para ver dónde está la gráfica, sólo se necesita elegir un número en cada intervalo y evaluar f ahí, y ver si el valor es positivo (arriba del eje x) o negativo (abajo del eje x). Vea la tabla 5.

c) Al construir la tabla 5, se obtienen tres puntos adicionales en la gráfica: $(-1, -3)$, $(1, -1)$ y $(3, 9)$. La figura 31 ilustra estos puntos, las intercepciones, y una curva suave y continua (la gráfica de f) que los conecta.

Tabla 5

	0	2	x
Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Número elegido	-1	1	3
Valor de f	$f(-1) = -3$	$f(1) = -1$	$f(3) = 9$
Localización de la gráfica	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto en la gráfica	$(-1, -3)$	$(1, -1)$	$(3, 9)$

Figura 31



Observe de nuevo la tabla 5. Como la gráfica de f está abajo del eje x en ambos lados de 0, la gráfica *toca* al eje x en $x = 0$, un *cero de multiplicidad 2*. Como la gráfica de f está abajo del eje x para $x < 2$ y arriba del eje x para $x > 2$, la gráfica cruza el eje x en $x = 2$, un *cero de multiplicidad 1*.

Esto sugiere los siguientes resultados:

Si *r* es un cero de multiplicidad par

El signo de $f(x)$ no cambia de un lado a otro de r. — La gráfica **toca** el eje x en r.

Si *r* es un cero de multiplicidad impar

El signo de $f(x)$ cambia de un lado a otro de r. — La gráfica **cruza** el eje x en r.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45(b).



Vea de nuevo la figura 31. No podemos estar seguros de cuánto baja en realidad la gráfica entre $x = 0$ y $x = 2$; pero se sabe que en algún punto del intervalo $(0, 2)$ la gráfica de f debe cambiar de dirección (de decreciente a creciente). Los puntos en los cuales una gráfica cambia de dirección se llaman **puntos de retorno**. En cálculo, estos puntos se llaman **máximos locales** o **mínimos locales**, y se dan técnicas para localizarlos. Entonces no se pedirá la localización de los puntos de retorno en las gráficas. En su lugar, se usará el siguiente resultado de cálculo, que establece el número máximo de puntos de retorno que podría tener la gráfica de una función polinomial.

Teorema

Si f es una función polinomial de grado n, entonces f tiene cuando mucho $n - 1$ puntos de retorno.

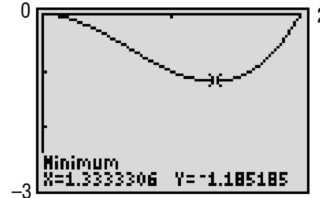
Por ejemplo, la gráfica de $f(x) = x^2(x - 2)$ mostrada en la figura 31 es la gráfica de un polinomio de grado 3 y tiene $3 - 1 = 2$ puntos de retorno: uno en $(0, 0)$ y el otro en algún punto entre $x = 0$ y $x = 2$.



Exploración

Se utiliza una calculadora gráfica para localizar los puntos de retorno de una gráfica. Grafique $y = x^2(x - 2)$. Use MINIMUM para encontrar la localización del punto de retorno para $0 < x < 2$. Vea la figura 32.

Figura 32





Una última observación acerca de la figura 31. Observe que la gráfica de $f(x) = x^2(x - 2)$ se ve parecida a la gráfica de $y = x^3$. De hecho, para valores muy grandes de x, positivos o negativos, hay poca diferencia. Para verlo, use su calculadora para comparar los valores de $f(x) = x^2(x - 2)$ y $y = x^3$ para $x = -100{,}000$ y $x = 100{,}000$. El comportamiento de la gráfica de una función para valores grandes de x, positivos o negativos, se conoce como **comportamiento terminal**.

Teorema

Comportamiento terminal

Para valores grandes de x, positivos o negativos, la gráfica del polinomio

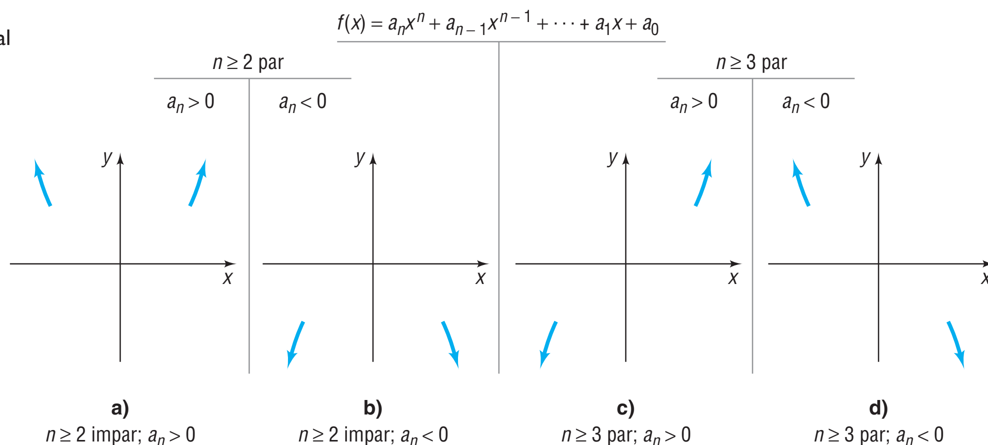
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

se parece a la gráfica de la función de potencia

$$y = a_n x^n$$

Vea de nuevo las figuras 22 y 24. Con base en el teorema y el análisis anterior de funciones de potencias, el comportamiento terminal de un polinomio sería tan sólo de cuatro tipos. Vea la figura 33.

Figura 33
Comportamiento terminal



Por ejemplo, considere la función polinomial $f(x) = -2x^4 + x^3 + 4x^2 - 7x + 1$. La gráfica de f se parece a la gráfica de la función de potencias $y = -2x^4$ para $|x|$ grande. La gráfica de f se verá como la figura 33*b*) para valores grandes de $|x|$.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45c).

Resumen

Gráfica de una función polinomial $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0$

Grado del polinomio f: n

Máximo número de puntos de retorno: $n - 1$

En un cero de multiplicidad par: la gráfica de f toca el eje x.

En un cero de multiplicidad impar: la gráfica de f cruza el eje x.

Entre ceros, la gráfica de f está ya sea arriba o abajo del eje x.

Comportamiento terminal: para $|x|$, grande, la gráfica de f se comporta como la gráfica de $y = a_nx^n$.

EJEMPLO 7 Análisis de la gráfica de una función polinomial

Para el polinomio $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$:

a) Encuentre las intercepciones x e intercepciones y de la gráfica de f.

b) Determine si la gráfica cruza o toca el eje x en cada intercepción x.

c) Comportamiento terminal: encuentre la función de potencia a la que se parece la gráfica de f para valores grandes de x.

d) Determine el número máximo de puntos de retorno en la gráfica de f.

e) Use las intercepciones x para encontrar los intervalos en los que la gráfica de f está arriba del eje x y los intervalos en los que está abajo del eje x.

f) Reúna toda la información y conecte los puntos con una curva continua suave para obtener la gráfica de f.

Solución a) La intercepción y es $f(0) = 0$. Para encontrar las intercepciones x, si las hay, se factoriza f.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 12x = x(x^2 + x - 12) = x(x + 4)(x - 3)$$

Al resolver la ecuación $f(x) = x(x + 4)(x - 3) = 0$, se encuentra que las intercepciones x, o ceros de f son -4, 0 y 3.

b) Como cada cero de f es de multiplicidad 1, la gráfica de f cruza el eje x en cada intercepción x.

c) Comportamiento terminal: la gráfica de f se parece a la de la función de potencia $y = x^3$ para valores grandes de $|x|$.

d) La gráfica de f contendrá cuando mucho dos puntos de retorno.

e) Las tres intercepciones x dividen al eje x en cuatro intervalos

$$(-\infty, -4) \qquad (-4, 0) \qquad (0, 3) \qquad (3, \infty)$$

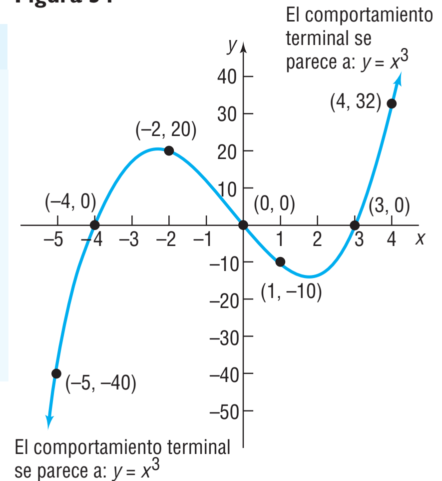
Para determinar la localización de la gráfica de $f(x)$ en cada intervalo, se crea la tabla 6.

(f) La gráfica de f está dada en la figura 34.

Tabla 6

	-4	0	3	x
Intervalo	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
Número elegido	-5	-2	1	4
Valor de f	$f(-5) = -40$	$f(-2) = 20$	$f(1) = -10$	$f(4) = 32$
Localización de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto en la gráfica	$(-5, -40)$	$(-2, 20)$	$(1, -10)$	$(4, 32)$

Figura 34



◄



Exploración

Grafique $y = x^3 + x^2 - 12x$. Compare lo que ve con la figura 34. Use MAXIMUM/MINIMUM para localizar los dos puntos de retorno.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 59.

EJEMPLO 8 Análisis de la gráfica de una función polinomial

Siga las instrucciones del ejemplo 7 para el siguiente polinomio:

$$f(x) = x^2(x - 4)(x + 1)$$

Solución a) La intercepción y es $f(0) = 0$. Las intercepciones x satisfacen la ecuación

$$f(x) = x^2(x - 4)(x + 1) = 0$$

De manera que

$$x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 0 \qquad\quad x = 4 \qquad\quad x = -1$$

Las intercepciones x son $-1, 0$ y 4.

b) La intercepción 0 es un cero de multiplicidad 2, de modo que la gráfica de f cruza el eje x en 0; 4 y -1 son ceros de multiplicidad 1, de manera que la gráfica de f cruza el eje x en 4 y -1.

c) Comportamiento terminal: La gráfica de f se parece a la función de potencia $y = x^4$ para valores grandes de $|x|$.

d) La gráfica de f contiene cuando mucho tres puntos de retorno.

e) Las tres intercepciones x dividen al eje x en cuatro intervalos:

$$(-\infty, -1) \qquad (-1, 0) \qquad (0, 4) \qquad (4, \infty)$$

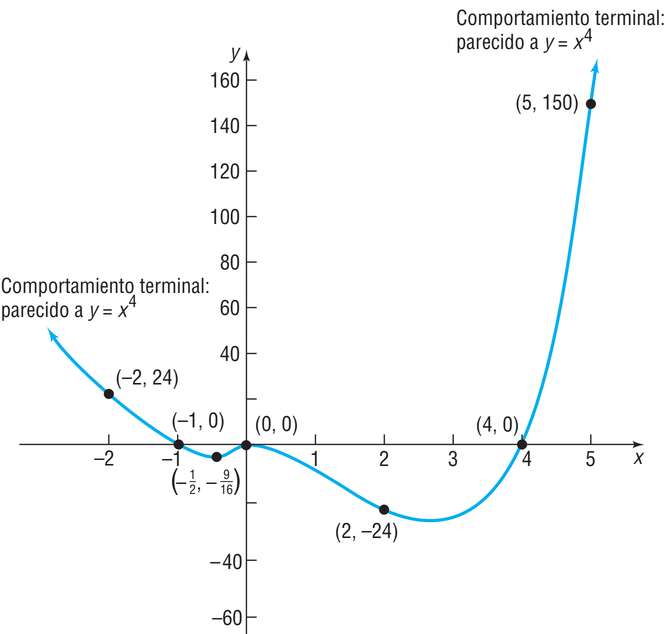
Para determinar la localización de la gráfica de $f(x)$ en cada intervalo, se crea la tabla 7.

Tabla 7

	-1	0	4	x
Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
Número elegido	-2	$-\frac{1}{2}$	2	5
Valor de f	$f(-2) = 24$	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{16}$	$f(2) = -24$	$f(5) = 150$
Localización de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto en la gráfica	$(-2, 24)$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{16}\right)$	$(2, -24)$	$(5, 150)$

f) La gráfica de f está dada en la figura 35.

Figura 35





Exploración

Grafique $y = x^2(x - 4)(x + 1)$. Compare lo que ve con la figura 35. Use MAXIMUM/MINIMUM para localizar los dos puntos de retorno además de (0, 0).



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 69.



Para las funciones polinomiales que tienen coeficientes no enteros y para polinomios que no es fácil factorizar, se utiliza una calculadora gráfica en el análisis de la gráfica. Esto se debe a que la cantidad de información que se obtiene del análisis algebraico es limitada.



EJEMPLO 9 Uso de una calculadora gráfica para analizar la gráfica de una función polinomial

Para el polinomio $f(x) = x^3 + 2.48x^2 - 4.3155x + 2.484406$:

a) Encuentre el grado del polinomio. Determine el comportamiento terminal, es decir, encuentre la función de potencia a la que se parece la gráfica de f para valores grandes de $|x|$.

b) Grafique f usando una calculadora gráfica.

c) Encuentre las intercepciones x e intercepciones y de la gráfica.

d) Use TABLE para encontrar puntos en la gráfica alrededor de cada intercepción x. Determine en qué intervalos la gráfica está arriba y abajo del eje x.

e) Determine los máximos y mínimos locales, si existen, redondeados a dos decimales. Esto es, localice los puntos de retorno.

f) Utilice la información obtenida en los incisos a)-e) para dibujar una gráfica completa de f a mano. Asegúrese de etiquetar las intercepciones, puntos de retorno y puntos obtenidos en el inciso d).

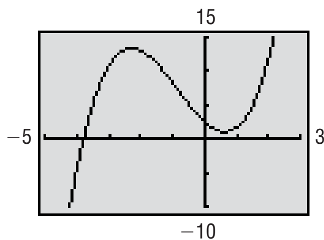
g) Encuentre el dominio de f. Use la gráfica para encontrar el rango de f.

h) Use la gráfica para determinar dónde f es creciente y decreciente.

Solución

a) El grado del polinomio es 3. Comportamiento terminal: la gráfica de f se parece a la función de potencia $y = x^3$ para valores grandes de $|x|$.

Figura 36



b) Vea la gráfica de f en la figura 36.

c) La intercepción y es $f(0) = 2.484406$. En el ejemplo 7 fue sencillo factorizar $f(x)$ para encontrar las intercepciones x. Sin embargo, no es obvio cómo se factoriza $f(x)$ en este ejemplo. Por lo tanto, se usa la característica ZERO (o ROOT) de la calculadora gráfica para encontrar la única intercepción x que es −3.79, redondeada a dos decimales.

Tabla 8

X	Y1	
-4	-4.574	
-2	13.035	

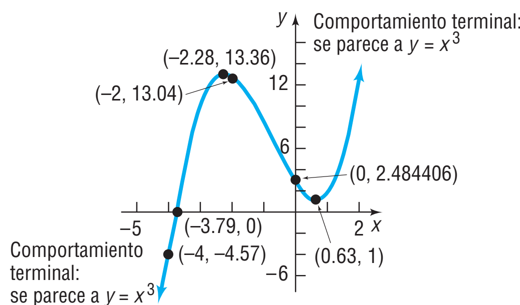
Y1=X^3+2.48X²-4...

d) La tabla 8 muestra valores de x alrededor de la intercepción x. Los puntos (−4, −4.57) y (−2, 13.04) están en la gráfica. La gráfica está abajo del eje x en el intervalo $(-\infty, -3.79)$ y arriba del eje x en el intervalo $(-3.79, \infty)$.

e) La gráfica muestra dos puntos de retorno: uno entre −3 y −3, el otro entre 0 y 1. Redondeado a dos decimales, el máximo local es 13.36 y ocurre en $x = -2.28$; el mínimo local es 1 y ocurre en $x = 0.63$. Los puntos de retorno son (−2.28, 13.36) y (0.63, 1).

f) La figura 37 muestra una gráfica de f dibujada a mano usando la información obtenida en los incisos *a*) a *e*).

Figura 37



g) El domino y el rango de f son el conjunto de todos los números reales.

h) Con base en la gráfica, f es decreciente en el intervalo $(-2.28, 0.63)$ aumenta en los intervalos $(-\infty, -2.28)$ y $(0.63, \infty)$.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 85.

Resumen Pasos para analizar la gráfica de un polinomio

Para analizar la gráfica de una función polinomial $y = f(x)$, se siguen los pasos dados a continuación:

PASO 1: a) Encontrar las intercepciones x, si las hay, resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.
b) Encontrar la intercepción y haciendo $x = 0$ y calculando el valor de $f(0)$.

PASO 2: Determinar si la gráfica de f cruza o toca el eje x en cada intercepción x.

PASO 3: Comportamiento terminal: encontrar la función de potencia a la que se parece la gráfica de f para valores grandes de x.

PASO 4: Determinar el número máximo de puntos de retorno en la gráfica f.

PASO 5: Usar las intercepciones x para encontrar los intervalos en los que la gráfica de f está arriba del eje x y los intervalos en los que está abajo del eje x.

PASO 6: Graficar los puntos obtenidos en los pasos 1 a 5 y usar la información restante para conectarlos con una curva continua y suave.

4.2 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas están dadas al final de estos ejercicios. Si obtuvo una respuesta incorrecta, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Las intercepciones de la ecuación $9x^2 + 4y = 36$ son __________. (pp. 169-170)

2. *Falso o verdadero:* la expresión $4x^3 - 3.6x^2 - \sqrt{2}$ es un polinomio. (pp. 35-42)

3. Para graficar $y = x^2 - 4$, se corre la gráfica de $y = x^2$ una distancia de __________ unidades a la __________. (pp. 262-271)

4. *Falso o verdadero:* las intercepciones x de la gráfica de una función $y = f(x)$ son las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$. (p. 240)

Conceptos y vocabulario

5. La gráfica de toda función polinomial es __________ y __________.

6. Un número r para el que $f(r) = 0$ se llama un __________ de la función.

7. Si r es un cero de multiplicidad par para una función f, la gráfica de f __________ al eje x en r.

8. *Falso o verdadero:* la gráfica de $f(x) = x^2(x-3)(x+4)$ tiene exactamente tres intercepciones x.

9. *Falso o verdadero:* las intercepciones x de la gráfica de una función polinomial se llaman puntos de retorno.

10. *Falso o verdadero:* comportamiento terminal: la gráfica de la función $f(x) = 3x^4 + 6x^2 + 2x + 5$ se parece a $y = x^4$ para valores grandes de $|x|$.

Ejercicios

En los problemas 11-22, determine cuáles son funciones polinomiales. Para las que lo son, establezca el grado. Para las que no, diga por qué.

11. $f(x) = 4x + x^3$
12. $f(x) = 5x^2 + 4x^4$
13. $g(x) = \dfrac{1 - x^2}{2}$
14. $h(x) = 3 - \dfrac{1}{2}x$
15. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$
16. $f(x) = x(x-1)$
17. $g(x) = x^{3/2} - x^2 + 2$
18. $h(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$
19. $F(x) = 5x^4 - \pi x^3 + \dfrac{1}{2}$
20. $F(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x^3}$
21. $G(x) = 2(x-1)^2(x^2+1)$
22. $G(x) = -3x^2(x+2)^3$

En los problemas 23-36, use transformaciones de la gráfica de $y = x^4$ o $y = x^5$ para graficar cada función.

23. $f(x) = (x+1)^4$
24. $f(x) = (x-2)^5$
25. $f(x) = x^5 - 3$
26. $f(x) = x^4 + 2$
27. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4$
28. $f(x) = 3x^5$
29. $f(x) = -x^5$
30. $f(x) = -x^4$
31. $f(x) = (x-1)^5 + 2$
32. $f(x) = (x+2)^4 - 3$
33. $f(x) = 2(x+1)^4 + 1$
34. $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^5 - 2$
35. $f(x) = 4 - (x-2)^5$
36. $f(x) = 3 - (x+2)^4$

En los problemas 37-44, forme un polinomio que tenga los ceros y grado dados.

37. Ceros: $-1, 1, 3$; grado 3
38. Ceros: $-2, 2, 3$; grado 3
39. Ceros: $-3, 0, 4$; grado 3
40. Ceros: $-4, 0, 2$; grado 3
41. Ceros: $-4, -1, 2, 3$; grado 4
42. Ceros: $-3, -1, 2, 5$; grado 4
43. Ceros: -1, multiplicidad 1; 3, multiplicidad 2; grado 3
44. Ceros: -2, multiplicidad 2; 4, multiplicidad 1; grado 3

En los problemas 45-46, para cada función polinomial: a*) enumere cada cero real y su multiplicidad;* b*) determine si la gráfica cruza o toca el eje x en cada intercepción x;* c*) encuentre la función de potencia a la que se parece la gráfica de f para valores grandes de $|x|$.*

45. $f(x) = 3(x-7)(x+3)^2$
46. $f(x) = 4(x+4)(x+3)^3$
47. $f(x) = 4(x^2+1)(x-2)^3$
48. $f(x) = 2(x-3)(x+4)^3$
49. $f(x) = -2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2(x^2+4)^2$
50. $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2(x-1)^3$
51. $f(x) = (x-5)^3(x+4)^2$
52. $f(x) = (x+\sqrt{3})^2(x-2)^4$
53. $f(x) = 3(x^2+8)(x^2+9)^2$
54. $f(x) = -2(x^2+3)^3$
55. $f(x) = -2x^2(x^2-2)$
56. $f(x) = 4x(x^2-3)$

En los problemas 57-80, para cada función polinomial f:

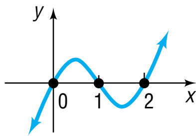
a) *Encuentre las intercepciones x e intercepciones y de f.*
b) *Determine si la gráfica de f cruza o toca el eje x en cada intercepción x.*
c) *Comportamiento terminal: encuentre la función de potencia a la que se parece la gráfica de f para valores grandes de $|x|$.*
d) *Determine el número máximo de puntos de retorno en la gráfica de f.*
e) *Use las intercepciones x para encontrar los intervalos para los que la gráfica de f está arriba y abajo del eje x.*
f) *Grafique los puntos obtenidos en los incisos* a)-e) *y use la información restante para conectarlos con una curva continua y suave.*

57. $f(x) = (x-1)^2$
58. $f(x) = (x-2)^3$
59. $f(x) = x^2(x-3)$
60. $f(x) = x(x+2)^2$
61. $f(x) = 6x^3(x+4)$
62. $f(x) = 5x(x-1)^3$
63. $f(x) = -4x^2(x+2)$
64. $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^3(x+4)$
65. $f(x) = (x-1)(x-2)(x+4)$
66. $f(x) = (x+1)(x+4)(x-3)$
67. $f(x) = 4x - x^3$
68. $f(x) = x - x^3$

69. $f(x) = x^2(x - 2)(x + 2)$
70. $f(x) = x^2(x - 3)(x + 4)$
71. $f(x) = (x + 2)^2(x - 2)^2$
72. $f(x) = (x + 1)^3(x - 3)$
73. $f(x) = (x - 1)^2(x - 3)(x + 1)$
74. $f(x) = (x + 1)^2(x - 3)(x - 1)$
75. $f(x) = (x + 2)^2(x - 4)^2$
76. $f(x) = (x - 2)^2(x + 2)(x + 4)$
77. $f(x) = x^2(x - 2)(x^2 + 3)$
78. $f(x) = x^2(x^2 + 1)(x + 4)$
79. $f(x) = -x^2(x^2 - 1)(x + 1)$
80. $f(x) = -x^2(x^2 - 4)(x - 5)$

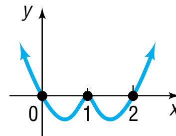
En los problemas 81-84, decida cuáles funciones polinomiales tienen la gráfica dada. (Es posible que haya más de una respuesta).

81.



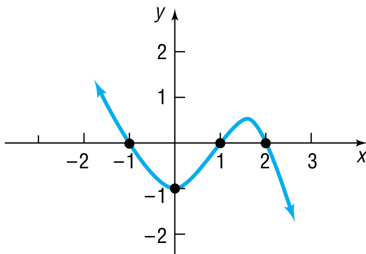
a) $y = -4x(x - 1)(x - 2)$
b) $y = x^2(x - 1)^2(x - 2)$
c) $y = 3x(x - 1)(x - 2)$
d) $y = x(x - 1)^2(x - 2)^2$
e) $y = x^3(x - 1)(x - 2)$
f) $y = -x(1 - x)(x - 2)$

82.



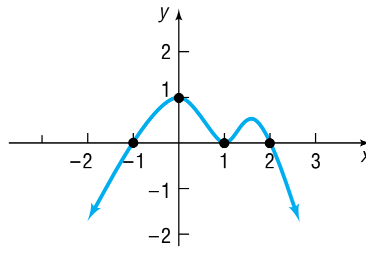
a) $y = 2x^3(x - 1)(x - 2)^2$
b) $y = x^2(x - 1)(x - 2)$
c) $y = x^3(x - 1)^2(x - 2)$
d) $y = x^2(x - 1)^2(x - 2)^2$
e) $y = 5x(x - 1)^2(x - 2)$
f) $y = -2x(x - 1)^2(2 - x)$

83.



a) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)(x - 2)$
b) $y = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)(x - 2)$
c) $y = (x^2 - 1)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$
d) $y = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)^2(x - 2)$
e) $y = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)(x^2 - 1)(2 - x)$
f) $y = -(x - 1)(x - 2)(x + 1)$

84.



a) $y = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)(x - 2)(x + 1)$
b) $y = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)(x - 2)(x + 1)$
c) $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2(x - 1)(x - 2)$
d) $y = (x - 1)^2(x + 1)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$
e) $y = -(x - 1)^2(x - 2)(x + 1)$
f) $y = -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)(x - 1)^2(x + 1)(x - 2)$

En los problemas 85-94, para cada función polinomial f:

a) *Encuentre el grado del polinomio. Determine el comportamiento terminal, es decir, encuentre la función de potencia a la que se parece la gráfica de f para valores grandes de $|x|$.*
b) *Grafique f usando una calculadora gráfica.*
c) *Encuentre las intercepciones x e intercepciones y de la gráfica.*
d) *Use TABLE para encontrar puntos en la gráfica cercanos a cada intercepción x. Determine en qué intervalos la gráfica está arriba y abajo del eje x.*
e) *Determine los máximos y mínimos locales, si existen, redondeados a dos decimales. Esto es, localice los puntos de retorno.*
f) *Utilice la información obtenida en los incisos a)-e) para dibujar una gráfica completa de f, a mano. Asegúrese de etiquetar las intercepciones, puntos de retorno y puntos obtenidos en el inciso d).*
g) *Encuentre el dominio de f. Use la gráfica para encontrar el rango de f.*
h) *Utilice la gráfica para determinar dónde es creciente y decreciente la función f.*

85. $f(x) = x^3 + 0.2x^2 - 1.5876x - 0.31752$
86. $f(x) = x^3 - 0.8x^2 - 4.6656x + 3.73248$
87. $f(x) = x^3 + 2.56x^2 - 3.31x + 0.89$
88. $f(x) = x^3 - 2.91x^2 - 7.668x - 3.8151$

89. $f(x) = x^4 - 2.5x^2 + 0.5625$

90. $f(x) = x^4 - 18.5x^2 + 50.2619$

91. $f(x) = 2x^4 - \pi x^3 + \sqrt{5}x - 4$

92. $f(x) = -1.2x^4 + 0.5x^2 - \sqrt{3}x + 2$

93. $f(x) = -2x^5 - \sqrt{2}x^2 - x - \sqrt{2}$

94. $f(x) = \pi x^5 + \pi x^4 + \sqrt{3}x + 1$

95. Robo de vehículos Los datos siguientes representan el número de robos de vehículos (en miles) en Estados Unidos durante 1987-1997, donde 1 representa 1987, 2 representa 1988, etcétera.

Año, *x*	Robos de vehículos, *T*
1987, 1	1289
1988, 2	1433
1989, 3	1565
1990, 4	1636
1991, 5	1662
1992, 6	1611
1993, 7	1563
1994, 8	1539
1995, 9	1472
1996, 10	1394
1997, 11	1354

FUENTE: U.S. Federal Bureau of Investigation (FBI)

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente acerca del tipo de relación que exista entre dos variables.

b) La función cúbica que mejor se ajusta a estos datos es

$$T(x) = 1.52x^3 - 39.81x^2 + 282.29x + 1035.5$$

Utilice esta función para predecir el número de vehículo robados en 1994.

c) Use una calculadora gráfica para verificar que la función dada en el inciso *b*) es la función cúbica de mejor ajuste.

d) Con una calculadora gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos y sobre él la función cúbica de mejor ajuste.

e) ¿Piensa que la función dada en el inciso *b*) será útil para predecir el número de robos de vehículos en 1999?

96. Costo de manufactura Los siguientes datos representan el costo *C* (en miles de dólares) de fabricar un Chevy Cavalier y el número *x* de Cavaliers producidos.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que pueda existir entre las dos variables.

b) Encuentre la tasa de cambio promedio en el costo de 4 a 5 Cavaliers.

c) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio en el costo de 8 a 9 Cavaliers?

d) La función cúbica de mejor ajuste para estos datos es

$$C(x) = 0.2x^3 - 2.3x^2 + 14.3x + 10.2$$

Utilice esta función para predecir el costo de fabricar 9 Cavaliers.

e) Utilice una calculadora gráfica para verificar que la función dada en el inciso *d*) es la función cúbica de mejor ajuste.

f) Con la calculadora gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos y luego grafique la función cúbica del mejor ajuste sobre el diagrama de dispersión.

g) Interprete la intercepción *y*.

Número de Cavaliers producidos, *x*	Costo, *C*
0	10
1	23
2	31
3	38
4	43
5	50
6	59
7	70
8	85
9	105
10	135

97. Costo de impresión Los datos siguientes representan el costo semanal *C* de impresión de libros de texto (en miles de dólares) y el número *x* de libros impresos (en miles de unidades).

Número de libros, *x*	Costo, *C*
0	100
5	128.1
10	144
13	153.5
17	161.2
18	162.6
20	166.3
23	178.9
25	190.2
27	221.8

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que exista entre las dos variables.

b) Encuentre la tasa de cambio promedio en el costo de 10,000 a 13,000 libros.

c) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio en el costo de 18,000 a 20,000 libros?

d) La función cúbica de mejor ajuste para estos datos es

$$C(x) = 0.015x^3 - 0.595x^2 + 9.15x + 98.43$$

Use esta función para predecir el costo de impresión de 22,000 libros.

e) Utilice una calculadora gráfica para verificar que la función dada en el inciso *d*) es la función cúbica de mejor ajuste.

f) Con la calculadora gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos y luego grafique la función cúbica de mejor ajuste sobre el diagrama.

g) Interprete la intercepción y.

98. Ventas totales de autos Los datos siguientes representan las ventas totales de autos S (usados y nuevos) en miles de autos en Estados Unidos para los años 1990-1998, donde $x = 1$ representa 1990, $x = 2$ representa 1991, etcétera.

Año, x	Ventas totales de autos, S (en miles)
1990, 1	46,830
1991, 2	45,465
1992, 3	45,163
1993, 4	46,575
1994, 5	49,132
1995, 6	50,353
1996, 7	49,355
1997, 8	48,542
1998, 9	48,372

FUENTE: Statistical Abstract of the United States, 2000

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos con x como variable independiente y S como la variable dependiente. Comente el tipo de relación que exista entre las dos variables S y x.

b) Utilice una calculadora gráfica para encontrar la función cúbica de mejor ajuste $S = S(x)$.

c) Grafique la función cúbica de mejor ajuste en el diagrama de dispersión.

d) Utilice la función encontrada en el inciso *b*) para predecir las ventas totales de autos en 1999.

e) Verifique la predicción del inciso *d*) contra los datos reales. ¿Cree que la función encontrada en el inciso *b*) será útil para predecir las ventas totales de autos en 2004?

99. ¿Podría la gráfica de una función polinomial no tener intercepción y? ¿Podría no tener intercepción x? Explique.

100. Escriba unos cuantos párrafos que proporcionen una estrategia general para graficar una función polinomial. Asegúrese de mencionar lo siguiente: grado, intercepciones, comportamiento terminal y puntos de retorno.

101. Desarrolle un polinomio que tenga las siguientes características: cruza el eje x en -1 y 4, toca el eje x en 0 y 2, y está arriba del eje x entre 0 y 2. Dé su polinomio a un compañero y pídale una crítica escrita.

102. Desarrolle dos polinomios de distinto grado, con las siguientes características: cruza el eje x en -2 y toca el eje x en 1, y está arriba del eje x entre -2 y 1. Dé sus polinomios a un compañero y pídale una crítica escrita.

103. La gráfica de una función polinomial siempre es suave y continua. Nombre una función estudiada que sea suave pero no continua. Nombre una que sea continua, pero no suave.

104. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas respecto de la gráfica del polinomio cúbico $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$? (Proporcione las razones de su conclusión).

a) Cruza el eje y en uno y sólo un punto.
b) Cruza el eje x cuando mucho en tres puntos.
c) Cruza el eje x en al menos un punto.
d) Para x muy grande, se comporta como la gráfica de $y = x^3$.
e) Es simétrica respecto del origen.
f) Pasa por el origen.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 9)$ **2.** Verdadera
3. Abajo; 4 **4.** Verdadera

4.3 Funciones racionales I

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, revise lo siguiente:*

- Expresiones racionales (Repaso, sección R.7, pp. 58-67)
- División de polinomios; división sintética (Repaso, sección R.6, pp. 52-57)
- Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ (sección 2.2, ejemplo 12, p. 173)
- Técnicas para graficar: transformaciones (sección 3.5, pp. 262-271)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 339.

OBJETIVOS
1 Encontrar el dominio de una función racional
2 Determinar las asíntotas verticales de una función racional
3 Determinar las asíntotas horizontales u oblicuas de una función racional

Los cocientes de enteros se llaman *números racionales*. De manera similar, las razones de funciones polinomiales se llaman *funciones racionales*.

Una **función racional** es una función de la forma

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde p y q son funciones polinomiales y q no es el polinomio cero. El dominio es el conjunto de todos los números reales excepto aquellos para los que el denominador q es 0.



EJEMPLO 1 Dominio de una función racional

a) El dominio de $R(x) = \frac{2x^2 - 4}{x + 5}$ es el conjunto de todos los números reales x, excepto -5, es decir, $\{x | x \neq -5\}$.

b) El dominio de $R(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ es el conjunto de todos los números reales x, excepto -2 y 2, es decir, $\{x | x \neq -2, x \neq 2\}$.

c) El dominio de $R(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ es el conjunto de todos los números reales.

d) El dominio de $R(x) = \frac{-x^2 + 2}{3}$ es el conjunto de todos los números reales.

e) El dominio de $R(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ es el conjunto de todos los números reales x, excepto 1, es decir$\{x | x \neq 1\}$. ◀

Es importante observar que las funciones

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{y} \quad f(x) = x + 1$$

no son iguales, ya que el dominio de R es $\{x | x \neq 1\}$ y el dominio de f es el conjunto de todos los números reales.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

Si $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional y si p y q no tienen factores comunes, entonces se dice que la función racional R está en los **términos mínimos** o **simplificada**. Para una función racional $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ simplificada, los ceros del numerador, si los hay, son las intercepciones x de la gráfica de R, por lo que tendrá un papel importante en dicha gráfica. Los ceros del denominador de R [es decir, los números x, si los hay, para los que $q(x) = 0$], aunque no estén en el dominio de R, también tienen un papel importante en la gráfica de R. Se analizará esta importancia en breve.

Se han estudiado las propiedades de la función racional $f(x) = \frac{1}{x}$. (Consulte el ejemplo 13, página 173.) La siguiente función racional que se estudia es $H(x) = \frac{1}{x^2}$.

EJEMPLO 2 Gráfica de $y = \frac{1}{x^2}$

Analice la gráfica de: $H(x) = \frac{1}{x^2}$

Solución El dominio de $H(x) = \frac{1}{x^2}$ es el conjunto de todos los números reales x excepto. La gráfica no tiene intercepciones y, porque x nunca puede ser 0. La gráfica no tiene intercepción x porque la ecuación $H(x) = 0$ no tiene solución. Por lo tanto, la gráfica de H no cruza los ejes coordenados. Dado que

$$H(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = H(x)$$

H es una función par, de manera que su gráfica es simétrica respecto del eje y.

Tabla 9

x	$H(x) = \frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{10}$	100
$\frac{1}{100}$	10,000
1	1
2	$\frac{1}{4}$
10	$\frac{1}{100}$
100	$\frac{1}{10,000}$

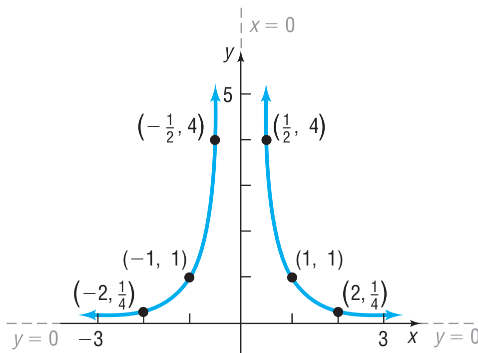
La tabla 9 muestra el comportamiento de $H(x) = \frac{1}{x^2}$ para números positivos x seleccionados (se usará la simetría para obtener la gráfica de H cuando $x < 0$). De los primeros tres renglones de la tabla 9, se ve que cuando los valores de x se acercan a 0, los valores de $H(x)$ son cada vez más grandes. Cuando esto ocurre, se dice que H es **no acotada en la dirección positiva**. Esto se simboliza por $H \rightarrow \infty$ (se lee "***H* tiende a infinito**"). En



cálculo, los **límites** se usan para transmitir estas ideas. Ahí se usa la simbología $\lim_{x \to 0} H(x) = \infty$, que se lee "el límite de $H(x)$ cuando x tiende a cero es igual a infinito", lo que significa que $H(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$.

Vea los últimos cuatro renglones de la tabla 9. Cuando $x \rightarrow \infty$, los valores de $H(x)$ se acercan a 0 (el comportamiento terminal de la gráfica). En cálculo, esto se escribe con los símbolos $\lim_{x \to \infty} H(x) = 0$. La figura 38 muestra la gráfica. Observe las líneas punteadas para indicar las ideas anteriores.

Figura 38 $H(x) = \frac{1}{x^2}$



Algunas veces las transformaciones (trasladar, comprimir, estirar y reflejar) se utilizan para graficar funciones racionales.

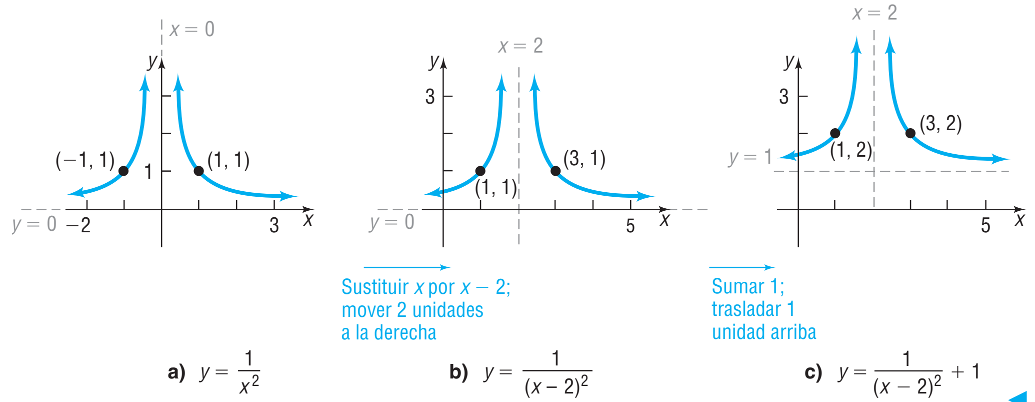
EJEMPLO 3 Uso de transformaciones para graficar funciones racionales

Grafique la función racional: $R(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$

Solución Primero, se toma nota del hecho de que el dominio de R es el conjunto de todos los números reales excepto $x = 2$. Para graficar R, se comienza con la gráfica de $y = \frac{1}{x^2}$.

Vea los pasos en la figura 39.

Figura 39



a) $y = \frac{1}{x^2}$ b) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$ c) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

Asíntotas

En la figura 39*c*), observe que conforme los valores de x se vuelven más negativos, es decir, cuando x se convierte en **no acotada en la dirección negativa** ($x \to -\infty$, leído "**x tiende a infinito negativo**"), los valores de $R(x)$ se acercan a 1. De hecho, se concluye lo siguiente a partir de la figura 39*c*).

1. Cuando $x \to -\infty$, el valor de $R(x)$ se acerca a 1. $\left[\lim_{x\to-\infty} R(x) = 1\right]$
2. Cuando x tiende a 2, los valores de $R(x) \to \infty$. $\left[\lim_{x\to 2} R(x) = \infty\right]$
3. Cuando $x \to \infty$, los valores de $R(x)$ se acercan a 1. $\left[\lim_{x\to\infty} R(x) = 1\right]$

Este comportamiento de la gráfica se describe mediante la recta vertical $x = 2$ y la recta horizontal $y = 1$. Estas rectas se llaman *asíntotas* de la gráfica y se definen como sigue.

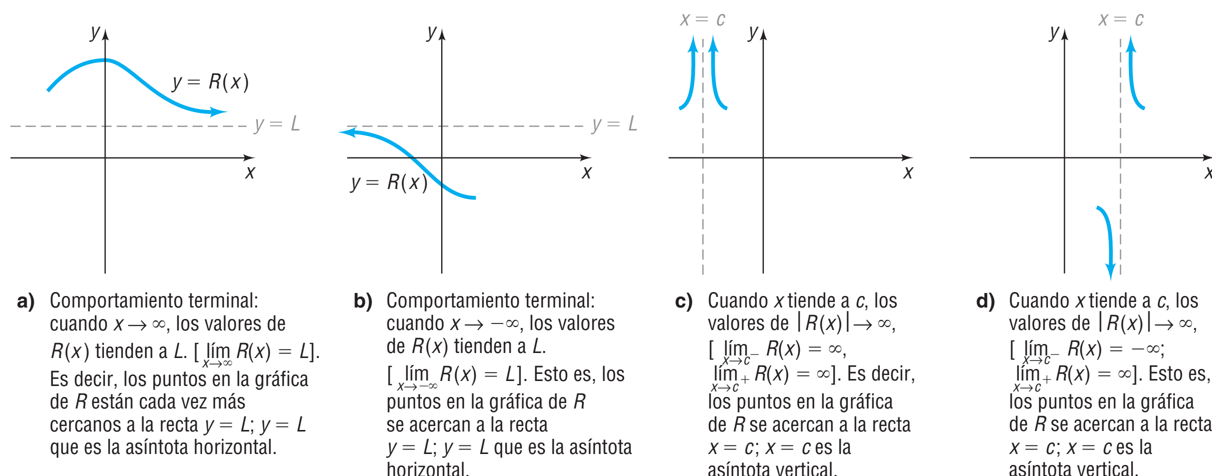
Sea R una función.

Si cuando $x \to -\infty$ o $x \to \infty$, los valores de $R(x)$ se acercan a algún número fijo, L, entonces la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de R.

Si cuando x se acerca a un número c, los valores $|R(x)| \to \infty$, entonces la recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de R. La gráfica de R nunca cruza la asíntota vertical.

Aun cuando las asíntotas de una función no sean parte de la gráfica de la función, proporcionan información acerca de la apariencia de la gráfica. La figura 40 ilustra algunas posibilidades.

Figura 40



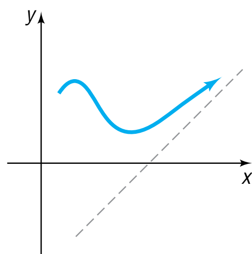
a) Comportamiento terminal: cuando $x \to \infty$, los valores de $R(x)$ tienden a L. [$\lim_{x\to\infty} R(x) = L$]. Es decir, los puntos en la gráfica de R están cada vez más cercanos a la recta $y = L$; $y = L$ que es la asíntota horizontal.

b) Comportamiento terminal: cuando $x \to -\infty$, los valores de $R(x)$ tienden a L. [$\lim_{x\to-\infty} R(x) = L$]. Esto es, los puntos en la gráfica de R se acercan a la recta $y = L$; $y = L$ que es la asíntota horizontal.

c) Cuando x tiende a c, los valores de $|R(x)| \to \infty$, [$\lim_{x\to c^-} R(x) = \infty$, $\lim_{x\to c^+} R(x) = \infty$]. Es decir, los puntos en la gráfica de R se acercan a la recta $x = c$; $x = c$ es la asíntota vertical.

d) Cuando x tiende a c, los valores de $|R(x)| \to \infty$, [$\lim_{x\to c^-} R(x) = -\infty$; $\lim_{x\to c^+} R(x) = \infty$]. Esto es, los puntos en la gráfica de R se acercan a la recta $x = c$; $x = c$ es la asíntota vertical.

Figura 41
Asíntota oblicua



Una asíntota horizontal, cuando ocurre, describe cierto comportamiento de la gráfica cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$, es decir, su comportamiento terminal. La gráfica de una función podría intersectar una asíntota horizontal.

Una asíntota vertical, cuando ocurre, describe cierto comportamiento de la gráfica cuando x se acerca a un número c. La gráfica de la función nunca cruzará una asíntota vertical.

Si una asíntota no es horizontal o vertical, se llama **oblicua**. La figura 41 muestra una asíntota oblicua. Una asíntota oblicua, cuando ocurre, describe el comportamiento terminal de la gráfica. La gráfica de una función podría intersectar una asíntota oblicua.

Para encontrar las asíntotas

2 Las asíntotas verticales, si las hay, de una función racional $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, simplificada, se localizan en los ceros del denominador $q(x)$. Suponga que r es un cero de manera que $x - r$ es un factor. Ahora, cuando x tiende a r, en símbolos $x \to r$, los valores de $x - r$ tienden a 0, lo que ocasiona que la razón se convierta en no acotada, es decir, que $|R(x)| \to \infty$. Con base en la definición, se concluye que la recta $x = r$ es una asíntota vertical.

Teorema

Localización de asíntotas verticales

Una función racional $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, *simplificada*, tendrá una asíntota vertical $x = r$ si r es un cero real del *denominador* q. Esto es, si $x - r$ es un factor del denominador q de una función racional $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, simplificada, entonces R tendrá la asíntota vertical $x = r$.

Advertencia: Si una función racional no está simplificada, la aplicación de este teorema daría como resultado una lista incorrecta de asíntotas verticales. ■

EJEMPLO 4 Asíntotas verticales

Encuentre las asíntotas verticales, si las hay, de la gráfica de cada función racional.

a) $R(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ b) $F(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1}$

c) $H(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ d) $G(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 4x - 21}$

Solución

a) R está simplificada y los ceros del denominador $x^2 - 4$ son -2 y 2. Así, las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son las asíntotas verticales de la gráfica de R.

b) F está simplificada y el único cero del denominador es 1. Entonces, la recta $x = 1$ es la única asíntota vertical de la gráfica de F.

c) H está simplificada y el denominador no tiene ceros reales. Así, la gráfica de H no tiene asíntotas verticales.

d) Se factoriza $G(x)$ para determinar si está simplificada.

$$G(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 4x - 21} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{(x + 7)(x - 3)} = \frac{x + 3}{x + 7}, \qquad x \neq 3$$

El único cero del denominador de $G(x)$ simplificada es -7. Entonces, la recta $x = -7$ es la única asíntota vertical de la gráfica de G. ◀

Como lo señala el ejemplo 4, las funciones racionales podrían no tener asíntotas verticales, tener una asíntota vertical o más de una. Sin embargo, la gráfica de una función racional nunca tendrá una intersección con sus asíntotas verticales. (¿Por qué?).

Exploración



Grafique cada una de las funciones siguientes:

$$R(x) = \frac{1}{x - 1} \quad R(x) = \frac{1}{(x - 1)^2} \quad R(x) = \frac{1}{(x - 1)^3} \quad R(x) = \frac{1}{(x - 1)^4}$$

Cada una tiene la asíntota vertical $x = 1$. ¿Qué le ocurre al valor de $R(x)$ cuando x se acerca a 1 por el lado derecho de la asíntota vertical, es decir, cuál es el $\lim_{x \to 1^+} R(x)$? ¿Qué le ocurre al valor de $R(x)$ cuando x se acerca a 1 por el lado izquierdo de la asíntota vertical, es decir, cuál es el $\lim_{x \to 1^-} R(x)$? ¿De qué manera la multiplicidad del cero en el denominador afecta la gráfica de R?



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45. (encuentre las asíntotas verticales, si las hay)



El procedimiento para encontrar las asíntotas horizontales y oblicuas es un poco más complicado. Para encontrar estas asíntotas, es necesario conocer cómo se comportan los valores de una función cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$.

Si una función racional $R(x)$ es **propia**, es decir, si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, entonces cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$ el valor de $R(x)$ se acerca a 0. En consecuencia, la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica.

Teorema

Si una función racional es propia, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de su gráfica.

EJEMPLO 5 Asíntotas horizontales

Encuentre las asíntotas horizontales, si las hay, de la gráfica de

$$R(x) = \frac{x - 12}{4x^2 + x + 1}$$

Solución La función racional R es propia, ya que el grado del numerador, 1, es menor que el grado del denominador, 2. Se concluye que la recta $y = 0$ es una horizontal asíntota de la gráfica de $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de R. ◀

Para ver por qué $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función R en el ejemplo 5, debe investigarse el comportamiento de R cuando $x \to -\infty$ y $x \to \infty$. Cuando $|x|$ es no acotada, el numerador de R, que es $x - 12$, se aproxima por la función de potencia $y = x$, mientras que el denominador de R, $4x^2 + x + 1$, se aproxima por la función de potencia $y = 4x^2$. Al aplicar estas ideas a $R(x)$, se encuentra que

$$R(x) = \frac{x - 12}{4x^2 + x + 1} \approx \frac{x}{4x^2} = \frac{1}{4x} \to 0$$

Para $|x|$ no acotada (↑ bajo $\approx$); Cuando $x \to -\infty$ o $x \to \infty$ (↑ bajo $\to 0$)

Esto muestra que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de R.

Si una función racional $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es **impropia**, es decir, si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se debe usar la división larga para escribir la función racional como la suma de un polinomio $f(x)$ más una función racional propia $\dfrac{r(x)}{q(x)}$. Es decir, se escribe

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = f(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

donde $f(x)$ es un polinomio y $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ es una función racional propia. Como $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ es propia, entonces $\dfrac{r(x)}{q(x)} \to 0$ cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$. Como resultado,

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \to f(x), \qquad \text{cuando } x \to -\infty \text{ o cuando } x \to \infty$$

A continuación se da la lista de posibilidades.

1. Si $f(x) = b$, una constante, entonces la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de R.
2. Si $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, entonces la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de R.
3. En el resto de los casos, la gráfica de R se acerca a la gráfica de f, y no hay asíntotas oblicuas ni horizontales.

Los ejemplos siguientes ilustran estas conclusiones.

EJEMPLO 6 Asíntota horizontal u oblicua

Encuentre las asíntotas horizontales u oblicuas, si las hay, de la gráfica de

$$H(x) = \frac{3x^4 - x^2}{x^3 - x^2 + 1}$$

Solución La función racional H es impropia, pues el grado del numerador, 4, es mayor que el grado del denominador, 3. Para encontrar las asíntotas horizontales u oblicuas, se usa la división larga.

$$\begin{array}{r}
3x \quad + 3 \qquad\qquad\quad \\
x^3 - x^2 + 1\overline{)\,3x^4 \qquad\qquad - \;\; x^2 \quad} \\
\underline{3x^4 - 3x^3 \qquad\quad + 3x} \quad \\
3x^3 - \;\; x^2 - 3x \quad \\
\underline{3x^3 - 3x^2 \qquad + 3} \\
2x^2 - 3x - 3
\end{array}$$

Como resultado,

$$H(x) = \frac{3x^4 - x^2}{x^3 - x^2 + 1} = 3x + 3 + \frac{2x^2 - 3x - 3}{x^3 - x^2 + 1}$$

Entonces, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$,

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{x^3 - x^2 + 1} \approx \frac{2x^2}{x^3} = \frac{2}{x} \to 0$$

Así, si $x \to -\infty$ o si $x \to \infty$, se tiene $H(x) \to 3x + 3$. Se concluye que la gráfica de la función racional H tiene una asíntota oblicua $y = 3x + 3$. ◀

EJEMPLO 7 Asíntota horizontal u oblicua

Encuentre las asíntotas horizontales u oblicuas, si la hay, de la gráfica de

$$R(x) = \frac{8x^2 - x + 2}{4x^2 - 1}$$

Solución La función racional R es impropia, ya que el grado del numerador, 2, es igual al grado del denominador, 2. Para encontrar cualquier asíntota horizontal u oblicua, se usa la división larga.

$$\begin{array}{r}
2 \qquad\qquad \\
4x^2 - 1\overline{)\,8x^2 - x + 2} \\
\underline{8x^2 \qquad\; -2} \\
-x + 4
\end{array}$$

Como resultado,

$$R(x) = \frac{8x^2 - x + 2}{4x^2 - 1} = 2 + \frac{-x + 4}{4x^2 - 1}$$

Entonces, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$,

$$\frac{-x + 4}{4x^2 - 1} \approx \frac{-x}{4x^2} = \frac{-1}{4x} \to 0$$

De modo que cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, se tiene $R(x) \to 2$. Se concluye que $y = 2$ es una asíntota de la gráfica. ◀

En el ejemplo 7, se observa que la ecuación 2 obtenida en la división larga es el cociente de los primeros coeficientes del polinomio en el numerador del polinomio en el denominador $\left(\frac{8}{4}\right)$. Esto significa que se podría evitar el proceso de división larga para las funciones racionales, cuyo numerador y denominador *tengan el mismo grado* y concluir que el cociente de los primeros coeficientes proporciona la asíntota horizontal.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 41.

EJEMPLO 8 Asíntotas horizontal u oblicua

Encuentre las asíntotas horizontales u oblicuas, si las hay, de la gráfica de

$$G(x) = \frac{2x^5 - x^3 + 2}{x^3 - 1}$$

Solución La función racional G es impropia, ya que el grado del numerador, 5, es mayor que el grado del denominadora, 3. Para encontrar cualquier asíntota horizontal u oblicua, se usa la división larga.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 - 1 \\ \hline x^3 - 1 & 2x^5 - x^3 \qquad\qquad + 2 \\ & \underline{2x^5 \qquad\quad - 2x^2} \\ & \quad -x^3 + 2x^2 + 2 \\ & \quad \underline{-x^3 \qquad\quad + 1} \\ & \qquad\qquad 2x^2 + 1 \end{array}$$

Como resultado,

$$G(x) = \frac{2x^5 - x^3 + 2}{x^3 - 1} = 2x^2 - 1 + \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

Entonces, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$,

$$\frac{2x^2 + 1}{x^3 - 1} \approx \frac{2x^2}{x^3} = \frac{2}{x} \to 0$$

De modo que cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, se tiene $G(x) \to 2x^2 - 1$. Se concluye que para valores grandes de $|x|$, la gráfica de G se acerca a la gráfica de $y = 2x^2 - 1$. Es decir, la gráfica de G se verá parecida a la gráfica de $y = 2x^2 - 1$ cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$. Como $y = 2x^2 - 1$ no es una función lineal, G no tiene asíntotas horizontales u oblicuas. ◀

Ahora se resume el procedimiento para encontrar las asíntotas horizontales y oblicuas.

Resumen

Para encontrar asíntotas horizontales y oblicuas de una función racional *R*

Considere la función racional

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

en la que el grado del numerador es n y el grado del denominador es m.

1. Si $n < m$, entonces R es una función racional propia y la gráfica de R tendrá la asíntota horizontal $y = 0$ (el eje x).
2. Si $n \geq m$, entonces R es impropia. Aquí se usa la división larga.

   a) Si $n = m$, el cociente obtenido será el número $L\left(= \frac{a_n}{b_m}\right)$, y la recta $y = L\left(= \frac{a_n}{b_m}\right)$ es una asíntota horizontal.

   b) Si $n = m + 1$, el cociente obtenido es de la forma $ax + b$ (un polinomio de grado 1), y la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua.

   c) Si $n > m + 1$, el cociente obtenido es un polinomio de grado 2 o mayor, y R no tiene asíntota horizontal ni oblicua. En este caso, para x no acotada, la gráfica de R se comporta como la gráfica del cociente.

Nota: La gráfica de una función racional tiene una asíntota horizontal o bien una asíntota oblicua, o de otra manera, no tiene asíntotas horizontal u oblicua.

4.3 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. *Falso o verdadero:* el cociente de dos polinomios es una expresión racional. (pp. 58-67)
2. ¿Cuál es el cociente y el residuo cuando $3x^3 - 6x^2 + 3x - 4$ se divide entre $x^2 - 1$? (pp. 52-57)
3. Grafique $y = \frac{1}{x}$. (p. 173)
4. *Falso o verdadero:* para graficar $y = -x^2$, se refleja la gráfica de $y = x^2$ en el eje x. (pp. 262-271)

Conceptos y vocabulario

5. La recta __________ es una asíntota horizontal de $R(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$.
6. La recta __________ es una asíntota vertical de $R(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$.
7. Para una función racional R, si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, entonces R es __________.
8. *Falso o verdadero:* el dominio de toda función racional es el conjunto de todos los números reales.
9. *Falso o verdadero:* si una asíntota no es horizontal ni vertical, se llama oblicua.
10. *Falso o verdadero:* si el grado del numerador de una función racional es igual al grado del denominador, entonces la razón de los primeros coeficientes proporciona la asíntota horizontal.

Ejercicios

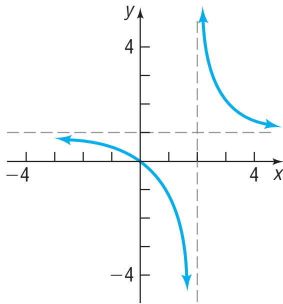
En los problemas 11-22, encuentre el dominio de cada función racional.

11. $R(x) = \frac{4x}{x - 3}$
12. $R(x) = \frac{5x^2}{3 + x}$
13. $H(x) = \frac{-4x^2}{(x - 2)(x + 4)}$
14. $G(x) = \frac{6}{(x + 3)(4 - x)}$
15. $F(x) = \frac{3x(x - 1)}{2x^2 - 5x - 3}$
16. $Q(x) = \frac{-x(1 - x)}{3x^2 + 5x - 2}$
17. $R(x) = \frac{x}{x^3 - 8}$
18. $R(x) = \frac{x}{x^4 - 1}$
19. $H(x) = \frac{3x^2 + x}{x^2 + 4}$
20. $G(x) = \frac{x - 3}{x^4 + 1}$
21. $R(x) = \frac{3(x^2 - x - 6)}{4(x^2 - 9)}$
22. $F(x) = \frac{-2(x^2 - 4)}{3(x^2 + 4x + 4)}$

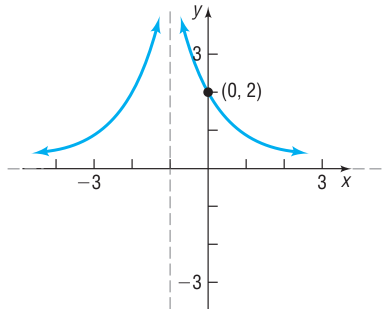
En los problemas 23-28, use la gráfica mostrada para encontrar:

a) *El dominio y rango de cada función* b) *Las intercepciones, si las hay* c) *Las asíntotas horizontales, si las hay*
d) *Las asíntotas verticales, si las hay* e) *Las asíntotas oblicuas, si las hay*

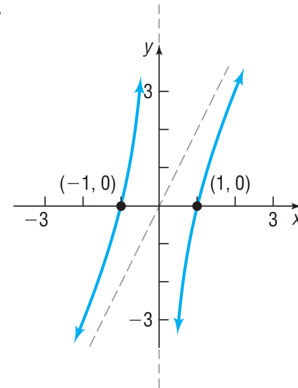
23.



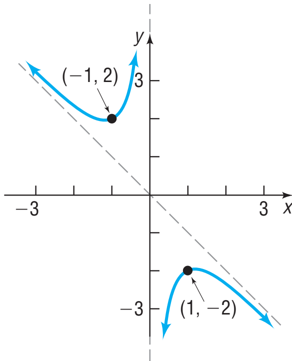
24.



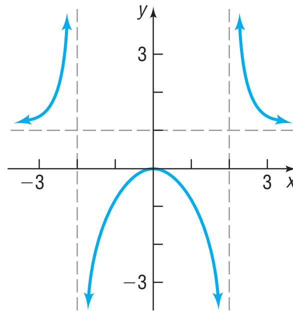
25.



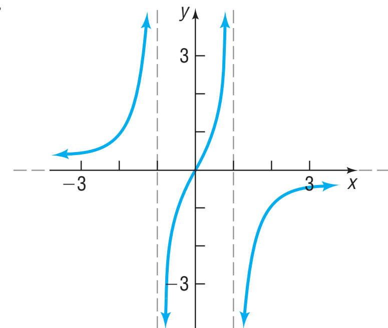
26.



27.



28.



En los problemas 29-40, grafique cada función racional usando transformaciones.

29. $F(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ **30.** $Q(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2}$ **31.** $R(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ **32.** $R(x) = \dfrac{3}{x}$

33. $H(x) = \dfrac{-2}{x+1}$ **34.** $G(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$ **35.** $R(x) = \dfrac{-1}{x^2+4x+4}$ **36.** $R(x) = \dfrac{1}{x-1} + 1$

37. $G(x) = 1 + \dfrac{2}{(x-3)^2}$ **38.** $F(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$ **39.** $R(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$ **40.** $R(x) = \dfrac{x-4}{x}$

En los problemas 41-52, encuentre las asíntotas vertical, horizontal y oblicua, si las hay, de cada función racional.

41. $R(x) = \dfrac{3x}{x+4}$ **42.** $R(x) = \dfrac{3x+5}{x-6}$ **43.** $H(x) = \dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2-x+1}$ **44.** $G(x) = \dfrac{-x^2+1}{x+5}$

45. $T(x) = \dfrac{x^3}{x^4-1}$ **46.** $P(x) = \dfrac{4x^5}{x^3-1}$ **47.** $Q(x) = \dfrac{5-x^2}{3x^4}$ **48.** $F(x) = \dfrac{-2x^2+1}{2x^3+4x^2}$

49. $R(x) = \dfrac{3x^4+4}{x^3+3x}$ **50.** $R(x) = \dfrac{6x^2+x+12}{3x^2-5x-2}$ **51.** $G(x) = \dfrac{x^3-1}{x-x^2}$ **52.** $F(x) = \dfrac{x-1}{x-x^3}$

53. Gravedad En física se establece que la aceleración debida a la gravedad, g (en metros/segundo^2), a una altura de h metros sobre el nivel del mar, está dada por

$$g(h) = \frac{3.99 \times 10^{14}}{(6.374 \times 10^6 + h)^2}$$

donde 6.374×10^6 es el radio de la Tierra en metros.

a) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad a nivel del mar?

b) La Torre de Sears en Chicago, Illinois, tiene 443 metros de altura. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en el último piso de la torre?

c) La punta del Monte Everest está a 8848 metros sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad ahí?

d) Encuentre la asíntota horizontal de $g(h)$.


e) Resuelva $g(h) = 0$. ¿Cómo interpreta su respuesta?

54. Modelo de población Una rara especie de insecto se descubrió en la selva de Amazonas. Para proteger las especies, los ecologistas declaran el insecto en peligro de extinción y lo trasplantan a un área protegida. La población de insectos t meses después del trasplante está dada por P.

$$P(t) = \frac{50(1 + 0.5t)}{(2 + 0.01t)}$$

a) ¿Cuántos insectos se descubrieron? En otras palabras, ¿cuál es la población de insectos cuando $t = 0$?

b) ¿Cuál será la población después de 5 años?

c) Determine la asíntota horizontal de $P(t)$. ¿Cuál es la población más grande que sustentaría el área protegida?

55. Si la gráfica de una función racional R tiene la asíntota vertical $x = 4$, entonces el factor $x - 4$ debe estar presente en el denominador de R. Explique por qué.

56. Si la gráfica de una función racional R tiene la asíntota horizontal $y = 2$, entonces el grado del numerador de R es igual al grado del denominador de R. Explique por qué.

57. ¿Podría la gráfica de una función racional tener asíntotas tanto horizontal como oblicua? Explique.

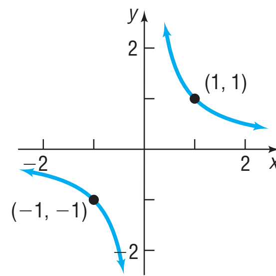
58. Desarrolle una función racional que tenga $y = 2x + 1$ como asíntota oblicua. Explique la metodología que usó.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. Verdadero

2. Cociente: $3x - 6$; residuo: $6x - 10$

3.



4. Verdadero

4.4 Funciones racionales II: análisis de gráficas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Intercepciones de una función (sección 3.3, p. 240)
- Funciones pares e impares (sección 3.3, pp. 240-242)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 353.

OBJETIVOS
1 Analizar la gráfica de una función racional
2 Resolver problemas aplicados que involucran funciones racionales

Gráficas de funciones racionales

1 Se mencionó que el cálculo proporciona las herramientas requeridas para graficar con exactitud una función polinomial. Lo mismo es cierto para las funciones racionales. Sin embargo, se puede reunir bastante información acerca de sus gráficas, para tener una idea de la forma general y posición de la gráfica.

En los ejemplos que siguen, se analizará la gráfica de una función racional $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ aplicando los siguientes pasos.

Análisis de la gráfica de una función racional

PASO 1: Encontrar el dominio de la función racional.

PASO 2: Localizar las intercepciones, si las hay, de la gráfica. Las intercepciones x, si las hay de $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ simplificada, son números en el dominio que satisfacen la ecuación $p(x) = 0$. La intercepción y, si existe una es $R(0)$.

PASO 3: Probar la simetría. Sustituir x por $-x$ en $R(x)$. Si $R(-x) = R(x)$, existe simetría respecto del eje y; si $R(-x) = -R(x)$, existe simetría respecto del origen.

PASO 4: Escribir R en forma simplificada y encontrar los ceros reales del denominador. Con R simplificada, cada cero proporciona una asíntota vertical.

PASO 5: Localizar las asíntotas horizontal u oblicua, si las hay, usando el procedimiento estudiado. Determinar puntos, si los hay, en los que la gráfica intersecta estas asíntotas.

PASO 6: Determinar en dónde la gráfica está arriba del eje x y dónde está abajo del eje x, usando los ceros del numerador y denominador para dividir el eje x en intervalos.

PASO 7: Graficar las asíntotas, si las hay, encontradas en los pasos 4 y 5. Graficar los puntos encontrados en los pasos 2, 5 y 6. Usar la información para conectar los puntos y obtener la gráfica de R.

EJEMPLO 1 Análisis de la gráfica de una función racional

Analice la gráfica de la función racional: $R(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$

Solución Primero, se factorizan el numerador y el denominador de R.

$$R(x) = \frac{x - 1}{(x + 2)(x - 2)}$$

R queda simplificada.

PASO 1: El dominio de R es $\{x | x \neq -2, x \neq 2\}$.

PASO 2: Se localizan las intercepciones x encontrando los ceros del numerador. Por inspección, 1 es la única intercepción x. La intercepción y es $R(0) = \frac{1}{4}$.

PASO 3: Dado que

$$R(-x) = \frac{-x - 1}{x^2 - 4}$$

se concluye que R no es par ni impar. No hay simetría respecto del eje y o el origen.

PASO 4: Se localizan las asíntotas verticales factorizando el denominador: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Como R está simplificada, la gráfica de R tiene dos asíntotas verticales: las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

PASO 5: El grado del numerador es menor que el grado del denominador, entonces R es propia y la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica. Para determinar si la gráfica de R intersecta la asíntota horizontal, se resuelve la ecuación $R(x) = 0$.

$$\frac{x-1}{x^2-4} = 0$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

La única solución es $x = 1$, por lo que la gráfica de R intersecta la asíntota horizontal en $(1, 0)$.

PASO 6: El cero del numerador, 1, y los ceros del denominador, -2 y 2, dividen al eje x en cuatro intervalos:

$$(-\infty, -2) \qquad (-2, 1) \qquad (1, 2) \qquad (2, \infty)$$

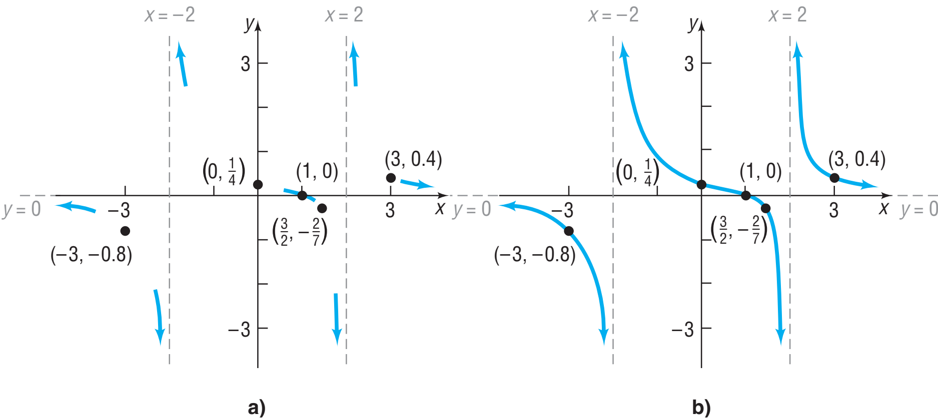
Ahora se construye la tabla 10.

Tabla 10

	-2	1	2	x
Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Número elegido	-3	0	$\frac{3}{2}$	3
Valor de *R*	$R(-3) = -0.8$	$R(0) = \frac{1}{4}$	$R\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{7}$	$R(3) = 0.4$
Localización de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto en la gráfica	$(-3, -0.8)$	$\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{2}{7}\right)$	$(3, 0.4)$

PASO 7: Se comienza por graficar las asíntotas y los puntos encontrados en los pasos 2, 5 y 6. Vea la figura 42*a*). Después, se determina el comportamiento de la gráfica cerca de las asíntotas. Como el eje x es una asíntota horizontal y la gráfica está abajo del eje x para $-\infty < x < -2$, se bosqueja una parte de la gráfica colocando una pequeña flecha hacia la izquierda y abajo del eje x. Como la recta $x = -2$ es una asíntota vertical y la gráfica está abajo del eje x para

Figura 42



$-\infty < x < -2$, se continúa el bosquejo con una flecha muy abajo del eje x que se acerca a la recta $x = -2$ por la izquierda. Una explicación similar de las posiciones de las otras partes de la gráfica. En particular, observe cómo se usan los hechos de que la gráfica está arriba del eje x para $-2 < x < 1$ y abajo del eje x para $1 < x < 2$ para obtener la conclusión de que la gráfica cruza el eje x en $(1, 0)$. La figura 42*b*) muestra la gráfica completa. ◀

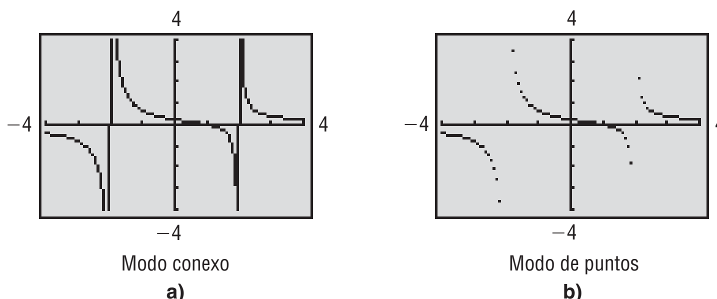
Exploración



Grafique $R(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$.

SOLUCIÓN El análisis de ejemplo 1 ayuda a establecer el rectángulo de la pantalla para obtener una gráfica completa. La figura 43a) muestra la gráfica de $R(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$ en modo conexo, y la figura 43b) la muestra en puntos. Observe que en la figura 43a) la gráfica tiene líneas verticales en $x = -2$ y $x = 2$. Esto se debe a que cuando la calculadora gráfica está en el modo conexo, "conecta los puntos" entre pixeles consecutivos. Se sabe que la gráfica de R no cruza las rectas $x = -2$ y $x = 2$, ya que R no está definida para estos valores de x. De manera que al graficar funciones racionales, debe usarse el modo de puntos para evitar líneas verticales extrañas que no son parte de la gráfica.

Figura 43





TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

EJEMPLO 2 Análisis de la gráfica de una función racional

Analice la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

Solución

PASO 1: El dominio de R es $\{x \mid x \neq 0\}$.

PASO 2: La gráfica tiene dos intercepciones x: -1 y 1. No hay intercepción y, ya que x no puede ser igual a 0.

PASO 3: Como $R(-x) = -R(x)$, la función es impar y la gráfica es simétrica respecto del origen.

PASO 4: R está simplificada, entonces en la gráfica de R, la recta $x = 0$ (el eje y) es una asíntota vertical.

PASO 5: La función racional R es impropia, ya que el grado del numerador, 2, es mayor que el grado del denominador, 1. Para encontrar cualquier asíntota horizontal y oblicua, se usa la división larga.

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x & x^2 - 1 \\ & \underline{x^2 } \\ & -1 \end{array}$$

El cociente es x, de modo que la recta $y = x$ es una asíntota oblicua de la gráfica. Para determinar si la gráfica de R intersecta la asíntota $y = x$, se resuelve la ecuación $R(x) = x$.

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = x$$
$$x^2 - 1 = x^2$$
$$-1 = 0 \qquad \text{Imposible}$$

Se concluye que la ecuación $\dfrac{x^2 - 1}{x} = x$ no tiene solución, por lo que la gráfica de R no cruza la recta $y = x$.

PASO 6: Los ceros del numerador son -1 y 1; el cero del denominador es 0. Se divide el eje x en cuatro intervalos:

$$(-\infty, -1) \qquad (-1, 0) \qquad (0, 1) \qquad (1, \infty)$$

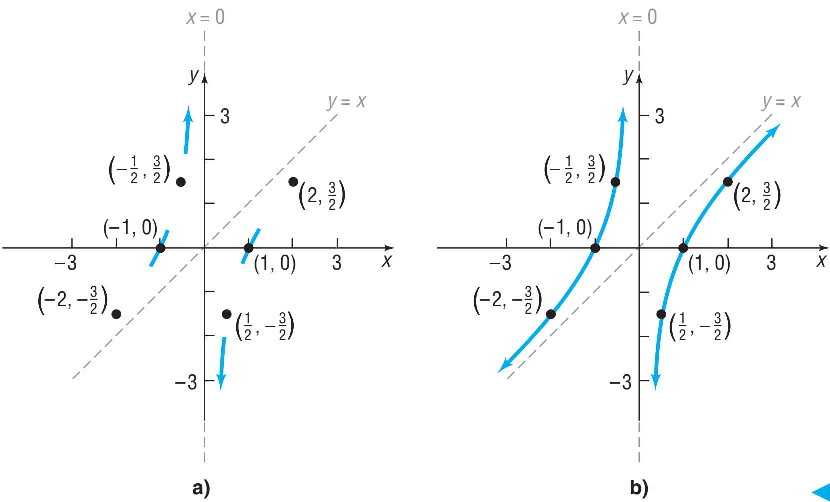
Ahora se construye la tabla 11.

Tabla 11

	-1	0	1	x
Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Número elegido	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
Valor de R	$R(-2) = -\frac{3}{2}$	$R\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$	$R\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$	$R(2) = \frac{3}{2}$
Localización de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto en la gráfica	$\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$	$\left(2, \frac{3}{2}\right)$

PASO 7: La figura 44*a*) muestra una gráfica parcial usando los hechos que se reunieron. La gráfica completa está dada en la figura 44*b*).

Figura 44



◀



Para ver el concepto

Grafique $R(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ y compare lo que ve en la figura 44b). ¿Pudo predecir a partir de la gráfica que $y = x$ es una asíntota oblicua? Grafique $y = x$ y use ZOOM OUT. ¿Qué observa?



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 15.

EJEMPLO 3 Análisis de la gráfica de una función racional

Analice la gráfica de la función racional: $R(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

Solución

PASO 1: El dominio de R es $\{x | x \neq 0\}$.

PASO 2: La gráfica no tiene intercepciones x ni intercepciones y.

PASO 3: Como $R(-x) = R(x)$, la función es par y la gráfica es simétrica respecto del eje y.

PASO 4: R está simplificada, de modo que la gráfica de R tiene la recta $x = 0$ (el eje y) como asíntota vertical.

PASO 5: La función racional R es impropia. Para encontrar cualquier asíntota horizontal u oblicua se usa la división larga.

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x^2 \overline{) x^4 + 1} \\ \underline{x^4 } \\ 1 \end{array}$$

El cociente es x^2, de modo que la gráfica no tiene asíntotas, horizontal ni oblicua. Sin embargo, la gráfica de R se aproxima a la gráfica de $y = x^2$ cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to \infty$.

PASO 6: El numerador no tiene ceros y el denominador tiene un cero en 0. Se divide el eje x en los dos intervalos

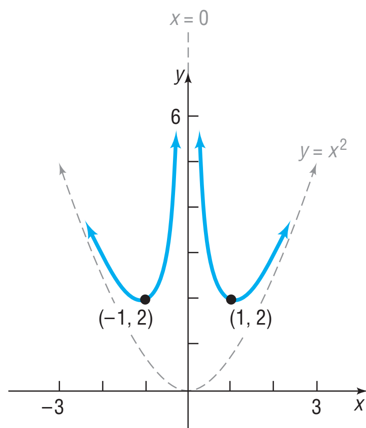
$$(-\infty, 0) \qquad (0, \infty)$$

Ahora se construye la tabla 12.

Tabla 12

	0 → x	
Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Número elegido	-1	1
Valor de R	$R(-1) = 2$	$R(1) = 2$
Localización de la gráfica	Arriba del eje x	Arriba del eje x
Punto en la gráfica	$(-1, 2)$	$(1, 2)$

Figura 45



PASO 7: La figura 45 muestra la gráfica. ◀



Para ver el concepto

Grafique $R(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ y compare lo que ve con la figura 45. Use MINIMUM para encontrar los dos puntos de retorno. Introduzca $y = x^2$ y dé ZOOM OUT. ¿Qué observa?



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

EJEMPLO 4 Análisis de la gráfica de una función racional

Analice la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{3x^2 - 3x}{x^2 + x - 12}$

Solución Se factoriza R para obtener

$$R(x) = \frac{3x(x - 1)}{(x + 4)(x - 3)}$$

R está simplificada.

PASO 1: El dominio de R es $\{x | x \neq -4, x \neq 3\}$.

PASO 2: La gráfica tiene dos intercepciones x: 0 y 1. La intercepción y es $R(0) = 0$.

PASO 3: No existe simetría respecto del eje y o el origen.

PASO 4: Como R está simplificada, su gráfica tiene dos asíntotas verticales: $x = -4$ y $x = 3$.

PASO 5: Como el grado del numerador es igual al grado de denominador, la gráfica tiene una asíntota horizontal. Para encontrarla se usa la división larga, o bien, se forma el cociente del primer coeficiente del numerador, 3, y el primer coeficiente del denominador, 1. La gráfica de R tiene la asíntota horizontal $y = 3$. Para averiguar si la gráfica de R cruza la asíntota, se resuelve la ecuación $R(x) = 3$.

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x^2 + x - 12} &= 3 \\ 3x^2 - 3x &= 3x^2 + 3x - 36 \\ -6x &= -36 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

La gráfica intersecta la recta $y = 3$ sólo en $x = 6$ y $(6, 3)$ es un punto en la gráfica de R.

PASO 6: Los ceros del numerador, 0 y 1 y los ceros de denominador, -4 y 3, dividen al eje x en cinco intervalos:

$$(-\infty, -4) \qquad (-4, 0) \qquad (0, 1) \qquad (1, 3) \qquad (3, \infty)$$

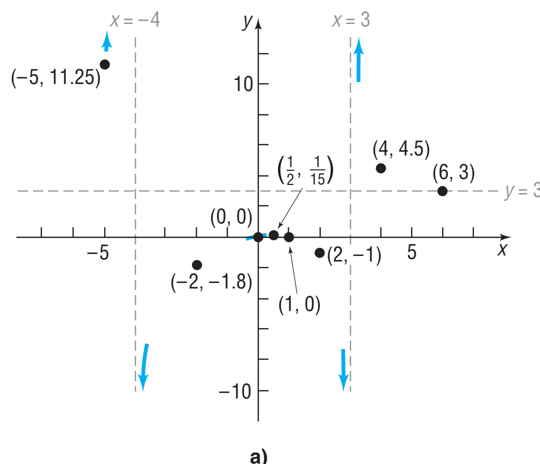
Ahora se construye la tabla 13.

Tabla 13

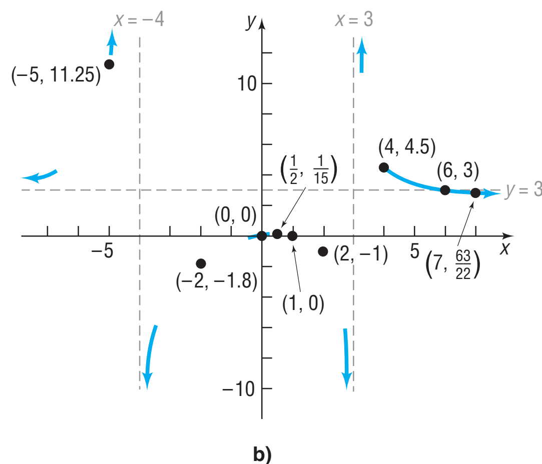
	-4	0	1	3 x	
Intervalo	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Número elegido	-5	-2	$\frac{1}{2}$	2	4
Valor de R	$R(-5) = 11.25$	$R(-2) = -1.8$	$R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{15}$	$R(2) = -1$	$R(4) = 4.5$
Localización de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto en la gráfica	$(-5, 11.25)$	$(-2, -1.8)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{15}\right)$	$(2, -1)$	$(4, 4.5)$

PASO 7: La figura 46*a*) muestra una gráfica parcial. Observe que todavía no se usa el hecho de que la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal, porque no se ha averiguado si la gráfica de R cruza o toca la recta $y = 3$ en $(6, 3)$. Para ver esto, se grafica un punto adicional a la derecha de $(6, 3)$. Se usa $x = 7$ para encontrar $R(7) = \frac{63}{22} < 3$. La gráfica cruza $y = 3$ en $x = 6$. Debido a que $(6, 3)$ es el único punto donde la gráfica de R intersecta la asíntota $y = 3$, la gráfica debe acercarse a esta recta desde arriba cuando $x \to -\infty$ y desde abajo cuando $x \to \infty$. Vea la figura 46*b*). La gráfica completa se muestra en la figura 46*c*).

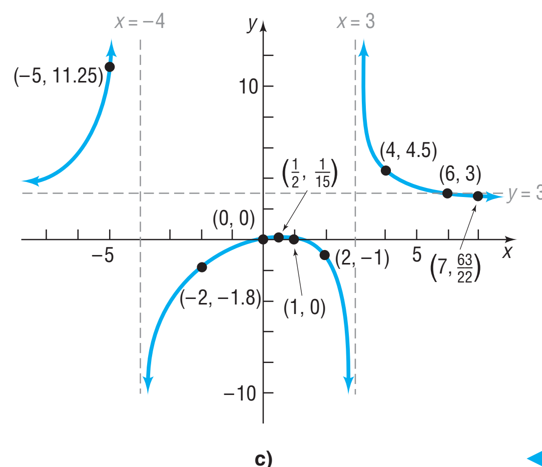
Figura 46



a)



b)



c)

◀



Exploración

Grafique $R(x) = \dfrac{3x^2 - 3x}{x^2 + x - 12}$.

SOLUCIÓN La figura 47 muestra la gráfica en modo conexo y la figura 48a) la muestra en modo de puntos. Ninguna de las dos despliega con claridad el comportamiento entre las

dos intercepciones, 0 y 1. Tampoco es claro el hecho de que la gráfica cruza la asíntota horizontal en (6, 3). Para ver mejor estas partes, se graficó R para $-1 \leq x \leq 2$, en la figura 48b) y para $4 \leq x \leq 60$, en la figura 49b).

Figura 47

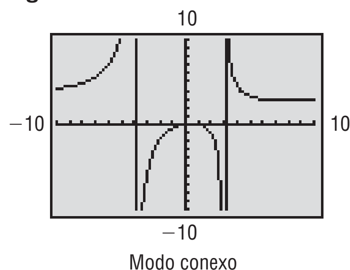


Figura 48

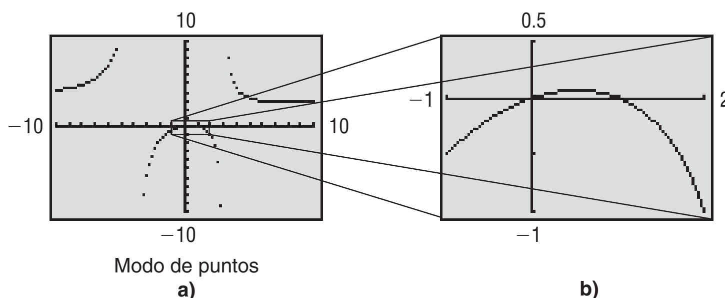
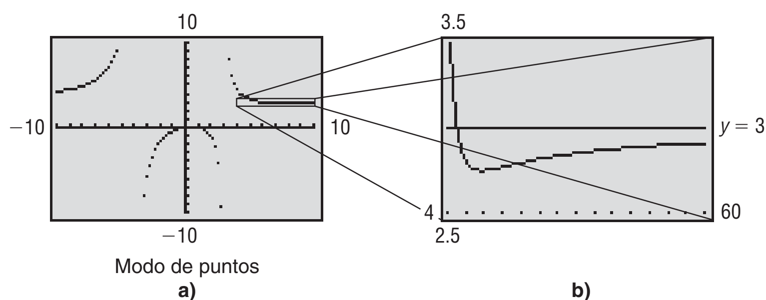


Figura 49



La nueva gráfica refleja el comportamiento producido por el análisis. Aún más, se observan dos puntos de retorno, uno entre 0 y 1 y el otro a la derecha de 4. Redondeados a dos decimales, estos puntos de retorno son (0.52, 0.07) y (11.48, 2.75).

EJEMPLO 5 Análisis de la gráfica de una función racional con un hoyo

Analice la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$

Solución Se factoriza R y se obtiene

$$R(x) = \frac{(2x - 1)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)}$$

Al simplificar,

$$R(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}, \qquad x \neq -2$$

Paso 1: El dominio de R es $\{x | x \neq -2, x \neq 2\}$.

Paso 2: La gráfica tiene una intercepción x $\frac{1}{2}$. La intercepción y es $R(0) = -\frac{1}{2}$.

Paso 3: No existe simetría respecto del eje y o el origen.

Paso 4: La gráfica tiene una asíntota vertical, $x = -2$, ya que $x + 2$ es el único factor del denominador de $R(x)$ *simplificada*. Sin embargo, la función racional no está definida en $x = 2$ ni en $x = -2$.

PASO 5: Como el grado del numerador es igual al grado del denominador, la gráfica tiene una asíntota horizontal. Para encontrarla se usa la división larga, o bien, se forma el cociente del primer coeficiente del numerador, 2, y el primer coeficiente del denominador, 1. La gráfica de R tiene la asíntota horizontal $y = 2$. Para averiguar si la gráfica de R intersecta la asíntota se resuelve la ecuación $R(x) = 2$.

$$R(x) = \frac{2x - 1}{x + 2} = 2$$
$$2x - 1 = 2(x + 2)$$
$$2x - 1 = 2x + 4$$
$$-1 = 4 \qquad \text{Imposible}$$

La gráfica no intersecta a la recta $y = 2$.

PASO 6: Los ceros del numerador y el denominador, $-2, \frac{1}{2}$, y 2, dividen al eje x en cuatro intervalos:

$$(-\infty, -2) \quad \left(-2, \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{1}{2}, 2\right) \quad (2, \infty)$$

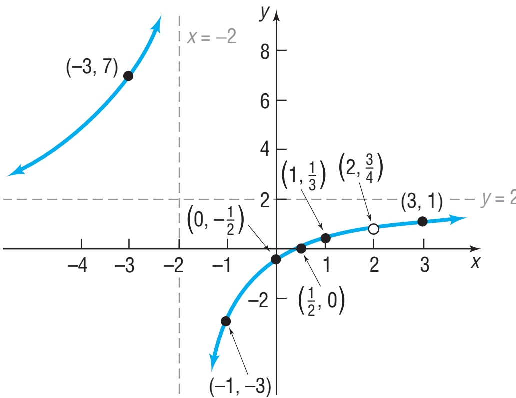
Ahora se construye la tabla 14.

Tabla 14

	-2	$1/2$	2	x
Intervalo	$(-\infty, -2)$	$\left(-2, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$	$(2, \infty)$
Número elegido	-3	-1	1	3
Valor de *R*	$R(-3) = 7$	$R(-1) = -3$	$R(1) = \frac{1}{3}$	$R(3) = 1$
Localización de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Arriba del eje x
Punto en la grafica	$(-3, 7)$	$(-1, -3)$	$\left(1, \frac{1}{3}\right)$	$(3, 1)$

PASO 7: Vea la figura 50. Observe que la asíntota vertical $x = -2$ y el hoyo en el punto $\left(2, \frac{3}{4}\right)$. R no está definida en -2 y 2.

Figura 50



Nota: Las coordenadas del hoyo se obtuvieron evaluando R *simplificada* en 2. R simplificada es $\frac{2x-1}{x+2}$, que en $x = 2$ es $\frac{2(2)-1}{2+2} = \frac{3}{4}$. ◀

Como lo muestra el ejemplo 5, los ceros del denominador de una función racional proporcionan ya sea las asíntotas verticales o los hoyos de una gráfica.



Exploración

Grafique $R(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$. ¿Ve el hoyo en $\left(2, \frac{3}{4}\right)$? Aplique TRACE a la gráfica. ¿Obtuvo un ERROR en $x = 2$? ¿Está convencido de que se requiere un análisis algebraico de una función racional para interpretar la gráfica obtenida con una calculadora gráfica?



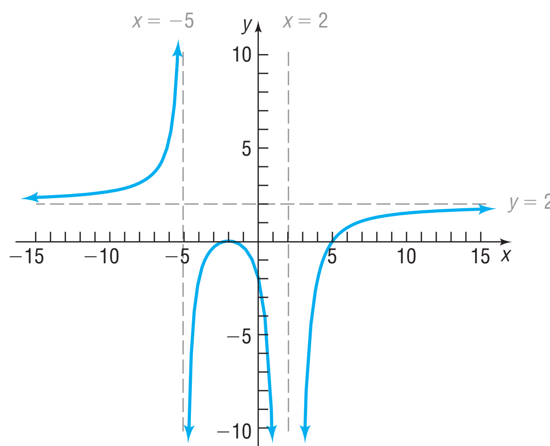
TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 33.

Ahora se estudiará el problema de encontrar una función racional a partir de su gráfica.

EJEMPLO 6 Construcción de una función racional a partir de su gráfica

Encuentre la función racional que podría tener la gráfica mostrada en la figura 51.

Figura 51



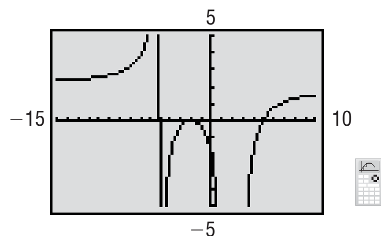
Solución El numerador de una función racional $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ simplificada determina las intercepciones x de su gráfica. La gráfica mostrada en la figura 51 tiene intercepciones x en -2 (multiplicidad par; la gráfica toca el eje x) y en 5 (multiplicidad impar; la gráfica cruza el eje x). Entonces, una posibilidad para el numerador es $p(x) = (x+2)^2(x-5)$. El denominador de una función racional simplificada determina las asíntotas verticales de su gráfica. Las asíntotas verticales de la gráfica son $x = -5$ y $x = 2$. Como $R(x)$ tiende a ∞ por la izquierda de $x = -5$ y $R(x)$ tiende a $-\infty$ por la derecha de $x = -5$, se sabe que $(x+5)$ es un factor de multiplicidad impar en $q(x)$. Además, $R(x)$ tiende a $-\infty$ por ambos lados de $x = 2$, entonces $(x-2)$ es un factor de multiplicidad par en $q(x)$. Una posibilidad para el denominador es $q(x) = (x+5)(x-2)^2$. Hasta ahora se tiene $R(x) = \frac{(x+2)^2(x-5)}{(x+5)(x-2)^2}$.

Sin embargo, la asíntota horizontal de la gráfica dada en la figura 51 es $y = 2$,

de modo que se sabe que el grado del numerador debe ser igual que el grado del denominador y el cociente de los primeros coeficientes debe ser $\frac{2}{1}$. Esto lleva a

$$R(x) = \frac{2(x+2)^2(x-5)}{(x+5)(x-2)^2}$$

Figura 52



Comprobación: La figura 52 muestra la gráfica de R en una calculadora gráfica. Como esta figura es similar en apariencia a la figura 51, se encontró una función racional R para la gráfica de la figura 51.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45.

2 Aplicación

EJEMPLO 7 Costo mínimo de una lata

Reynolds Metal Company fabrica latas de aluminio en la forma de un cilindro con capacidad de 500 centímetros cúbicos $\left(\frac{1}{2}\text{ litro}\right)$. La tapa y la base de la lata se hacen de una aleación de aluminio especial que cuesta 0.05¢ por centímetro cuadrado. La lateral de la lata se hace de un material que cuesta 0.02¢ por centímetro cuadrado.

a) Exprese el costo del material para la lata como función del radio r de la lata.



b) Use una calculadora gráfica para graficar la función $C = C(r)$.

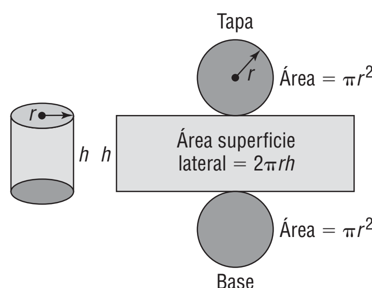
c) ¿Qué valor de r dará el costo mínimo?

d) ¿Cuál es el costo mínimo?

Solución

a) La figura 53 ilustra las componentes de una lata con forma de cilindro circular recto. Observe que el material requerido para producir una lata cilíndrica con altura h y radio r consiste en un rectángulo de área $2\pi rh$ y dos círculos, cada uno con área de πr^2. El costo total C (en centavos) de fabricar la lata es entonces

Figura 53

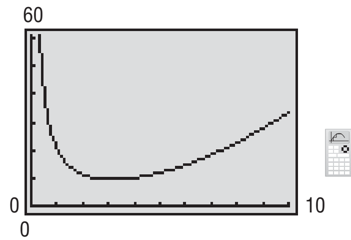


$$\begin{aligned} C &= \text{Costo de tapa y base} + \text{Costo de la lateral} \\ &= \underbrace{2(\pi r^2)}_{\text{Área total de tapa y base}} \underbrace{(0.05)}_{\text{Costo/unidad de área}} + \underbrace{(2\pi rh)}_{\text{Área total lateral}} \underbrace{(0.02)}_{\text{Costo/unidad de área}} \\ &= 0.10\pi r^2 + 0.04\pi rh \end{aligned}$$

Pero tenemos la restricción original de que la altura h y el radio r deben elegirse de manera que el volumen V de la lata sea 500 centímetros cúbicos. Como $V = \pi r^2 h$, se tiene

$$500 = \pi r^2 h \quad \text{de} \quad h = \frac{500}{\pi r^2}$$

Figura 54



Al sustituir esta expresión para h, el costo C, en centavos, como función del radio r es

$$C(r) = 0.10\pi r^2 + 0.04\pi r \frac{500}{\pi r^2} = 0.10\pi r^2 + \frac{20}{r} = \frac{0.10\pi r^3 + 20}{r}$$

b) Vea la figura 54 para la gráfica de $C(r)$.

c) Usando el comando MINIMUM, el costo es mínimo para un radio cercano a 3.17 cm.

d) El costo mínimo es $C(3.17) \approx 9.47$¢. ◄

4.4 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las repuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. *Falso o verdadero:* la gráfica de una función tiene al menos una intercepción. (p. 240)

2. Si la gráfica de $y = f(x)$ es simétrica respecto del origen y si $f(4) = 2$, entonces los puntos __________ y __________ están en la gráfica de f. (pp. 240-242)

Conceptos y vocabulario

3. Si el numerador y el denominador de una función racional no tiene factores comunes, la función racional es __________.

4. *Falso o verdadero:* algunas veces la gráfica de un polinomio tiene un hoyo.

5. *Falso o verdadero:* la gráfica de una función racional nunca intersecta una asíntota horizontal.

6. *Falso o verdadero:* la gráfica de una función racional algunas veces tiene un hoyo.

Ejercicios

En los problemas 7-44, siga los pasos 1 a 7 en la página 342 para analizar la gráfica de cada función.

7. $R(x) = \dfrac{x+1}{x(x+4)}$ **8.** $R(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$ **9.** $R(x) = \dfrac{3x+3}{2x+4}$

10. $R(x) = \dfrac{2x+4}{x-1}$ **11.** $R(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$ **12.** $R(x) = \dfrac{6}{x^2-x-6}$

13. $P(x) = \dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-1}$ **14.** $Q(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-4}$ **15.** $H(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-9}$

16. $G(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+2x}$ **17.** $R(x) = \dfrac{x^2}{x^2+x-6}$ **18.** $R(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2-4}$

19. $G(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ **20.** $G(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$ **21.** $R(x) = \dfrac{3}{(x-1)(x^2-4)}$

22. $R(x) = \dfrac{-4}{(x+1)(x^2-9)}$ **23.** $H(x) = 4\dfrac{x^2-1}{x^4-16}$ **24.** $H(x) = \dfrac{x^2+4}{x^4-1}$

25. $F(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x+2}$ **26.** $F(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x-1}$ **27.** $R(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x-4}$

28. $R(x) = \dfrac{x^2-x-12}{x+5}$ **29.** $F(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x+2}$ **30.** $G(x) = \dfrac{x^2-x-12}{x+1}$

31. $R(x) = \dfrac{x(x-1)^2}{(x+3)^3}$ **32.** $R(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)(x-3)}{x(x-4)^2}$ **33.** $R(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2-x-6}$

34. $R(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 8x + 15}$

35. $R(x) = \dfrac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - 7x + 6}$

36. $R(x) = \dfrac{8x^2 + 26x + 15}{2x^2 - x - 15}$

37. $R(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$

38. $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 30}{x + 6}$

39. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

40. $f(x) = 2x + \dfrac{9}{x}$

41. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

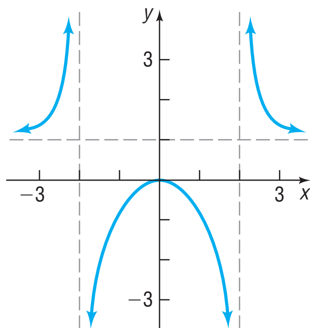
42. $f(x) = 2x^2 + \dfrac{9}{x}$

43. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^3}$

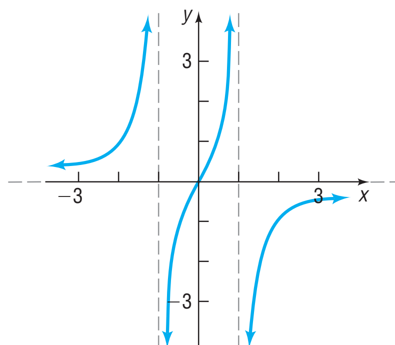
44. $f(x) = 2x + \dfrac{9}{x^3}$

En los problemas 45-48, encuentre una función racional que pueda tener la gráfica dada. (Es posible obtener más de una respuesta).

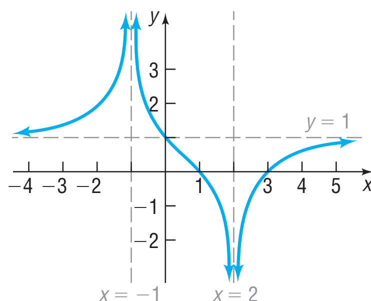
45.



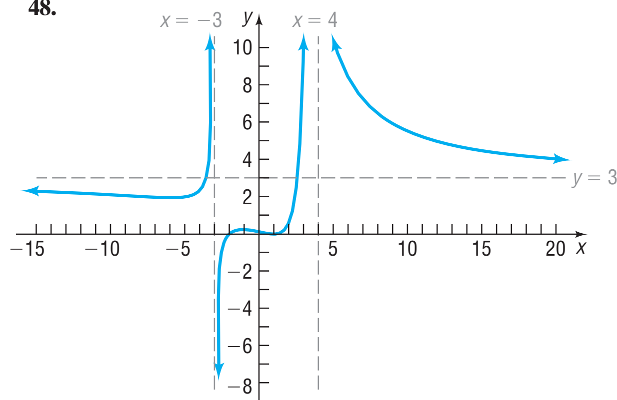
46.



47.



48.



49. Concentración de droga La concentración C de cierta droga en la corriente sanguínea de un paciente t horas después de inyectarla está dada por

$$C(t) = \frac{t}{2t^2 + 1}$$

a) Encuentre la asíntota horizontal de $C(t)$. ¿Qué le ocurre a la concentración de la droga cuando aumenta t?
b) Usando su calculadora gráfica, grafique $C(t)$.
c) Determine el tiempo en el que la concentración es más alta.

50. Concentración de droga La concentración C de cierta droga en la corriente sanguínea de un paciente t minutos después de inyectarla está dada por

$$C(t) = \frac{50t}{t^2 + 25}$$

a) Encuentre la asíntota horizontal de $C(t)$. ¿Qué ocurre con la concentración de la droga cuando t aumenta?
b) Usando su calculadora gráfica, grafique $C(t)$.
c) Determine el tiempo en el que la concentración es más alta.

51. Costo promedio En el problema 96, ejercicios 4.2, la función de costo C (en miles de dólares) de fabricar x Chevy Cavaliers está dada por

$$C(x) = 0.2x^3 - 2.3x^2 + 14.3x + 10.2$$

Los economistas definen la **función de costo promedio** como

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

a) Encuentre la función de costo promedio.

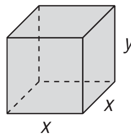
b) ¿Cuál es el costo promedio de producir seis Chevy Cavaliers por hora?
c) ¿Cuál es el costo promedio de producir nueve Chevy Cavaliers por hora?
d) Usando una calculadora gráfica, grafique la función de costo promedio.
e) Usando su calculadora gráfica, encuentre el número de Cavaliers que deben producirse por hora para minimizar el costo promedio.
f) ¿Cuál es el costo promedio mínimo?

52. Costo promedio En el problema 97, ejercicio 4.2, la función de costo C (en miles de dólares) para imprimir x libros de texto (en miles de unidades) está dada por

$$C(x) = 0.015x^3 - 0.595x^2 + 9.15x + 98.43$$

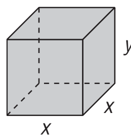
a) Encuentre la función de costo promedio (vea el problema 51).
b) ¿Cuál es el costo promedio de imprimir 13,000 libros por semana?
c) ¿Cuál es el costo promedio de imprimir 25,000 libros por semana?
d) Usando su calculadora gráfica, grafique la función de costo promedio.
e) Usando su calculadora gráfica, encuentre el número de libros que deben imprimirse para minimizar el costo promedio.
f) ¿Cuál es el costo promedio mínimo?

53. Área mínima de la superficie UPS lo ha contratado para diseñar una caja cerrada con una base cuadrada que tiene un volumen de 10,000 pulgadas cúbicas. Vea la ilustración.



a) Encuentre una función para el área de la superficie de la caja.
b) Utilice su calculadora gráfica para graficar la función encontrada en el inciso *a*).
c) ¿Cuál es la cantidad mínima de cartón que se puede usar para construir la caja?
d) ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que minimiza el área de la superficie?
e) ¿Por qué UPS estaría interesado en diseñar una caja que minimiza el área de la superficie?

54. Área mínima de la superficie UPS lo ha contratado para diseñar una caja cerrada con base cuadrada que tenga un volumen de 5000 pulgadas cúbicas. Vea la ilustración.



a) Encuentre una función para el área de la superficie de la caja.
b) Utilice su calculadora gráfica para graficar la función encontrada en el inciso *a*).
c) ¿Cuál es la cantidad mínima de cartón que se puede usar para construir la caja?
d) ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que minimizan el área de la superficie?
e) ¿Por qué UPS está interesado en diseñar una caja que minimice el área de la superficie?

55. Costo de una lata Se requiere que una lata con forma de cilindro circular tenga un volumen de 500 centímetros cúbicos. La tapa y la base están hechas de un material que cuesta 6¢ por centímetro cuadrado, y el material de la lateral cuesta 4¢ por centímetro cuadrado.
a) Exprese el costo total C del material como función del radio r del cilindro. (Vea la figura 53).
b) Grafique $C = C(r)$. ¿Para qué valor de r es mínimo el costo C?

56. Material necesario para hacer un tambor Se requiere que un tambor de acero con forma de cilindro circular recto tenga un volumen de 100 pies cúbicos.



a) Exprese la cantidad A del material requerido para hacer el tambor como función del radio r del cilindro.
b) ¿Cuánto material se requiere si el radio del tambor es 3 pies?
c) ¿Cuánto material se requiere si el radio del tambor es 4 pies?
d) ¿Cuánto material se requiere si el radio del tambor es 5 pies?
e) Grafique $A = A(r)$. ¿Para qué valor de r se obtiene la A mínima?

57. Grafique cada una de las siguientes funciones.

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$y = \frac{x^4 - 1}{x - 1} \qquad y = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

¿Es $x = 1$ una asíntota vertical? ¿Por qué no? ¿Qué ocurre cuando $x = 1$? ¿Qué concluye acerca de $y = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $n \geq 1$ un entero, cuando $x = 1$?

58. Grafique cada una de las siguientes funciones.

$$y = \frac{x^2}{x-1} \qquad y = \frac{x^4}{x-1} \qquad y = \frac{x^6}{x-1} \qquad y = \frac{x^8}{x-1}$$

¿Qué similitudes observa? ¿Qué diferencias?

En los problemas 59-64 grafique cada función y use MINIMUM para obtener el valor mínimo, redondeado a dos decimales.

59. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x > 0$

60. $f(x) = 2x + \frac{9}{x}, \quad x > 0$

61. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}, \quad x > 0$

62. $f(x) = 2x^2 + \frac{9}{x}, \quad x > 0$

63. $f(x) = x + \frac{1}{x^3}, \quad x > 0$

64. $f(x) = 2x + \frac{9}{x^3}, \quad x > 0$

---

65. Escriba unos párrafos que proporcionen una estrategia general para graficar una función racional. Asegúrese de mencionar: propia, impropia, intercepciones y asíntotas.

66. Cree una función racional que tenga las siguientes características: cruza el eje x en 2; toca el eje x en -1; una asíntota vertical en $x = -5$ y otra en $x = 6$; una asíntota horizontal $y = 3$. Compare su gráfica con la de un compañero. ¿En qué difieren? ¿Cuáles son las similitudes?

67. Desarrolle una función racional que tenga las siguientes características: cruza el eje x en 3; toca el eje x en -2; una asíntota vertical, $x = 1$; una asíntota horizontal, $y = 2$. Dé su función racional a un compañero y pídale una crítica escrita de ella.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. Falso **2.** $(4, 2)$; $(-4, -2)$

4.5 Desigualdades de polinomios y racionales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Solución de desigualdades (sección 1.5, pp. 125-133)



Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 360.

OBJETIVOS 1 Resolver desigualdades de polinomios
2 Resolver desigualdades racionales



En esta sección se resuelven desigualdades que incluyen polinomios de grado 2 y mayor, al igual que expresiones racionales. Para resolver estas desigualdades se usa la información obtenida en las tres secciones anteriores acerca de la gráfica de las funciones polinomiales y racionales. La idea general es la siguiente:

Suponga que la desigualdad de polinomio o racional está en una de las formas

$$f(x) < 0 \qquad f(x) > 0 \qquad f(x) \le 0 \qquad f(x) \ge 0$$

Se localizan los ceros de f si f es una función polinomial, y se localizan los ceros del numerador y el denominador si f es una función racional. Si se usan estos ceros para dividir la recta de números reales en intervalos, entonces se sabe que en cada intervalo la gráfica de f está arriba del eje x $[f(x) > 0]$, o bien abajo del eje x $[f(x) < 0]$. En otras palabras, se ha encontrado la solución de la desigualdad.

Los siguientes pasos proporcionan más detalles.

Pasos para resolver desigualdades de polinomios y racionales

PASO 1: Escribir la desigualdad de modo que en el lado izquierdo hay un polinomio o una expresión racional f y cero en el lado derecho con una de las siguientes formas:

$$f(x) > 0 \qquad f(x) \geq 0 \qquad f(x) < 0 \qquad f(x) \leq 0$$

En las expresiones racionales, asegurar que el lado izquierdo está escrito como un solo cociente.

PASO 2: Determinar los números para los que la expresión f en el lado izquierdo es igual a cero y, si la expresión es racional, los números para los que la expresión f en el lado izquierdo no está definida.

PASO 3: Usar los números encontrados en el paso 2 para dividir la recta de números reales en intervalos.

PASO 4: Seleccionar un número en cada intervalo y evaluar f en ese número.

a) Si el valor de f es positivo, entonces $f(x) > 0$ para todos los números x en el intervalo.

b) Si el valor de f es negativo, entonces $f(x) < 0$ para todos los números x en el intervalo.

Si la desigualdad no es estricta, se incluyen las soluciones de $f(x) = 0$ en el conjunto de soluciones.

EJEMPLO 1 Solución de una desigualdad de polinomios

Resuelva la desigualdad $x^2 \leq 4x + 12$, y grafique el conjunto de soluciones.

Solución

PASO 1: Se organiza la desigualdad de manera que haya 0 en el lado derecho.

$$x^2 \leq 4x + 12$$
$$x^2 - 4x - 12 \leq 0 \quad \text{Restar } 4x + 12 \text{ en ambos lados de la desigualdad.}$$

Esta desigualdad es equivalente a la que se desea resolver.

PASO 2: Se encuentran los ceros de $f(x) = x^2 - 4x - 12$ resolviendo la ecuación $x^2 - 4x - 12 = 0$.

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$
$$(x + 2)(x - 6) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$
$$x = -2 \quad \text{o} \quad x = 6$$

PASO 3: Se usan los ceros de f para dividir la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, -2) \qquad (-2, 6) \qquad (6, \infty)$$

PASO 4: Se selecciona un número en cada intervalo y se evalúa $f(x) = x^2 - 4x - 12$ para determinar si $f(x)$ es positiva o negativa. Vea la tabla 15.

Tabla 15

	-2	6	x
Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 6)$	$(6, \infty)$
Número seleccionado	-3	0	7
Valor de f	$f(-3) = 9$	$f(0) = -12$	$f(7) = 9$
Conclusión	Positiva	Negativa	Positiva

Con base en la tabla 15, se sabe que $f(x) < 0$ para toda x en el intervalo $(-2, 6)$, es decir, para todas las x tales que $-2 < x < 6$. Sin embargo, como la desigualdad original no es estricta, los números x que satisfacen la ecuación $f(x) = x^2 - 4x - 12 = 0$ también son soluciones de la desigualdad $x^2 \geq 4x + 12$. Así, se incluyen -2 y 6. El conjunto de soluciones de la desigualdad dada es $\{x | -2 \leq x \leq 6\}$ o, en la notación de intervalos, $[-2, 6]$.

Figura 55



La figura 55 muestra la gráfica del conjunto de soluciones. ◀



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 5 Y 9.

EJEMPLO 2 Solución de una desigualdad de polinomios

Resuelva la desigualdad $x^4 > x$ y grafique el conjunto de soluciones.

Solución

Paso 1: Se organiza la desigualdad de manera que el lado derecho tiene un 0.

$$x^4 > x$$

$$x^4 - x > 0 \quad \text{Restar } x \text{ en ambos lados de la desigualdad.}$$

Esta desigualdad es equivalente a la que se desea resolver.

Paso 2: Se encuentran los ceros de $f(x) = x^4 - x$ resolviendo $x^4 - x - 0$.

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0 \quad \text{Factorizar } x.$$

$$x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \quad \text{Factorizar la diferencia de dos cubos.}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{Igualar a cero cada factor y resolver.}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1$$

La ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales. (¿Por qué?)

Paso 3: Se usan los ceros para dividir la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, 0) \qquad (0, 1) \qquad (1, \infty)$$

Paso 4: Se elige un número en cada intervalo para evaluar $f(x) = x^4 - x$ para determinar si $f(x)$ es positiva o negativa. Vea la tabla 16.

Tabla 16

	0	1	→ x
Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Número seleccionado	-1	$\frac{1}{2}$	2
Valor de *f*	$f(-1) = 2$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{16}$	$f(2) = 14$
Conclusión	Positiva	Negativa	Positiva

Con base en la tabla 16, se sabe que $f(x) > 0$ para toda x en los intervalos $(-\infty, 0)$ es decir, para todos los números x para los que $x < 0$ o $x > 1$. Como la desigualdad original es estricta, el conjunto de soluciones es $\{x | x < 0 \text{ o } x > 1\}$ o, en notación de intervalos, $(-\infty, 0)$ o $(1, \infty)$.

Figura 56



La figura 56 muestra la gráfica del conjunto de soluciones. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

2 Se resolverá una desigualdad racional

EJEMPLO 3 Solución de una desigualdad racional

Resuelva la desigualdad $\dfrac{(x+3)(2-x)}{(x-1)^2} > 0$, y grafique el conjunto de soluciones.

Solución **Paso 1:** El dominio de la variable x es $\{x \mid x \neq 1\}$. La desigualdad ya está en la forma con un 0 en el lado derecho.

Paso 2: Sea $f(x) = \dfrac{(x+3)(2-x)}{(x-1)^2}$. Los ceros del numerador de f son -3 y 2; el cero del denominador es 1.

Paso 3: Se usan los ceros encontrados en el paso 2 para dividir la recta real en cuatro intervalos:

$$(-\infty, -3) \qquad (-3, 1) \qquad (1, 2) \qquad (2, \infty)$$

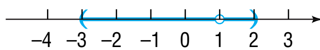
Paso 4: Se selecciona un número en cada intervalo y se evalúa $f(x) = \dfrac{(x+3)(2-x)}{(x-1)^2}$ para determinar si $f(x)$ es positiva o negativa. Vea la tabla 17.

Tabla 17

	−3	1	2	x
Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	-4	0	$\frac{3}{2}$	3
Valor de f	$f(-4) = -\frac{6}{25}$	$f(0) = 6$	$f\left(\frac{3}{2}\right) = 9$	$f(3) = -\frac{3}{2}$
Conclusión	Negativa	Positiva	Positiva	Negativa

Con base en la tabla 17, se sabe que $f(x) > 0$ para toda x en los intervalos $(-3, 1)$ o $(1, 2)$, es decir, para toda x tal que $-3 < x < 1$ o $1 < x < 2$. Como la desigualdad original es estricta, el conjunto de soluciones es $\{x \mid -3 < x < 2, x \neq 1\}$ o, en la notación de intervalos, $(-3, 1)$ o $(1, 2)$. La figura 57 muestra la gráfica del conjunto de soluciones. Observe el hoyo en $x = 1$ que indica que 1 debe excluirse. ◀

Figura 57




TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

EJEMPLO 4 Solución de una desigualdad racional

Resuelva la desigualdad $\dfrac{4x+5}{x+2} \geq 3$, y grafique el conjunto de soluciones.

Solución **Paso 1:** El dominio de la variable x es $\{x \mid x \neq -2\}$. Se organizan los términos de manera que haya un 0 en el lado derecho.

$$\frac{4x+5}{x+2} - 3 \geq 0 \qquad \text{Restar 3 en ambos lados de la desigualdad.}$$

PASO 2: Sea $f(x) = \dfrac{4x + 5}{x + 2} - 3$. Para encontrar los ceros del numerador y el denominador debe expresarse f como un cociente.

$$f(x) = \frac{4x + 5}{x + 2} - 3 \qquad \text{Mínimo común denominador: } x + 2$$

$$= \frac{4x + 5}{x + 2} - 3\left(\frac{x + 2}{x + 2}\right) \qquad \text{Multiplicar } -3 \text{ por } \frac{x + 2}{x + 2}.$$

$$= \frac{4x + 5 - 3x - 6}{x + 2} \qquad \text{Escribir como un solo cociente.}$$

$$= \frac{x - 1}{x + 2} \qquad \text{Combinar términos semejantes.}$$

El cero del numerador de f es 1 y el cero del denominador es -2.

PASO 3: Se usan los ceros encontrados en el paso 2 para dividir la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, -2) \qquad (-2, 1) \qquad (1, \infty)$$

PASO 4: Se elige un número en cada intervalo y se evalúa $f(x) = \dfrac{4x + 5}{x + 2} - 3$ para determinar si es positiva o negativa. Vea la tabla 18.

Tabla 18

(recta real: −2, 1, x)			
Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
Número seleccionado	-3	0	2
Valor de f	$f(-3) = 4$	$f(0) = -\frac{1}{2}$	$f(2) = \frac{1}{4}$
Conclusión	Positiva	Negativa	Positiva

Con base en la tabla 18, se sabe que $f(x) > 0$ para toda x en los intervalos $(-\infty, -2)$ o $(1, \infty)$, es decir, para toda x tal que $x < -2$ o $x > 1$. Como la desigualdad original no es estricta, los números x que satisfacen la ecuación $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2} = 0$ también son soluciones de la desigualdad. Como $\dfrac{x - 1}{x + 2} = 0$ sólo si $x = 1$, se concluye que el conjunto de soluciones es $\{x | x < -2 \text{ o } x \geq 1\}$ o, en la notación de intervalos, $(-\infty, -2)$ o $[1, \infty)$.

Figura 58



La figura 58 muestra la gráfica del conjunto de soluciones. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

4.5 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. Resuelva la desigualdad $3 - 4x > 5$. Grafique el conjunto de soluciones. (pp. 125-133)

Conceptos y vocabulario

2. *Falso o verdadero:* un número de prueba para el intervalo $-5 < x < 1$ es 0.

Ejercicios

En los problemas 3-50, resuelva cada desigualdad.

3. $(x-5)(x+2)<0$ **4.** $(x-5)(x+2)>0$ **5.** $x^2-4x\geq 0$ **6.** $x^2+8x\geq 0$

7. $x^2-9<0$ **8.** $x^2-1<0$ **9.** $x^2+x\geq 2$ **10.** $x^2+7x\leq -12$

11. $2x^2\leq 5x+3$ **12.** $6x^2\leq 6+5x$ **13.** $x(x-7)>8$ **14.** $x(x+1)>20$

15. $4x^2+9<6x$ **16.** $25x^2+16<40x$ **17.** $6(x^2-1)>5x$ **18.** $2(2x^2-3x)>-9$

19. $(x-1)(x^2+x+4)\geq 0$ **20.** $(x+2)(x^2-x+1)\geq 0$

21. $(x-1)(x-2)(x-3)\leq 0$ **22.** $(x+1)(x+2)(x+3)\leq 0$

23. $x^3-2x^2-3x>0$ **24.** $x^3+2x^2-3x>0$ **25.** $x^4>x^2$ **26.** $x^4<4x^2$

27. $x^3\geq 4x^2$ **28.** $x^3\leq 9x^2$ **29.** $x^4>1$ **30.** $x^3>1$

31. $\dfrac{x+1}{x-1}>0$ **32.** $\dfrac{x-3}{x+1}>0$ **33.** $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}\leq 0$ **34.** $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x-1}\leq 0$

35. $\dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}\geq 0$ **36.** $\dfrac{(x+5)^2}{x^2-4}\geq 0$ **37.** $6x-5<\dfrac{6}{x}$ **38.** $x+\dfrac{12}{x}<7$

39. $\dfrac{x+4}{x-2}\leq 1$ **40.** $\dfrac{x+2}{x-4}\geq 1$ **41.** $\dfrac{3x-5}{x+2}\leq 2$ **42.** $\dfrac{x-4}{2x+4}\geq 1$

43. $\dfrac{1}{x-2}<\dfrac{2}{3x-9}$ **44.** $\dfrac{5}{x-3}>\dfrac{3}{x+1}$ **45.** $\dfrac{2x+5}{x+1}>\dfrac{x+1}{x-1}$ **46.** $\dfrac{1}{x+2}>\dfrac{3}{x+1}$

47. $\dfrac{x^2(3+x)(x+4)}{(x+5)(x-1)}\geq 0$ **48.** $\dfrac{x(x^2+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}\geq 0$ **49.** $\dfrac{(3-x)^3(2x+1)}{x^3-1}<0$ **50.** $\dfrac{(2-x)^3(3x-2)}{x^3+1}<0$

---

51. ¿Para qué números positivos, el cubo de un número excederá cuatro veces su cuadrado?

52. ¿Para qué números positivos, el cuadrado de un número excederá dos veces el número?

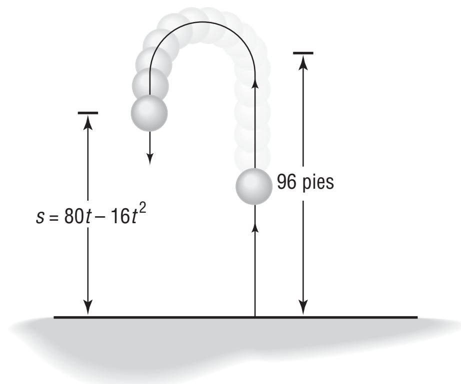
53. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x)=\sqrt{x^2-16}$?

54. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x)=\sqrt{x^3-3x^2}$?

55. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+4}}$?

56. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}$?

57. Física Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La distancia s (en pies) de la pelota al suelo después de t segundos es de $s=80t-16t^2$. ¿En qué intervalo de tiempo está la pelota a más de 96 pies del suelo? (Vea la figura).



58. Física Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 96 pies por segundo. La distancia s (en pies) de la pelota al suelo después de t segundos es de $s=96t-16t^2$. ¿En qué intervalo de tiempo está la pelota a más de 112 pies del suelo?

59. Negocios El ingreso mensual logrado al vender x relojes de pulsera se calcula como $x(40-0.2x)$ dólares. El costo al mayoreo de cada reloj es \$32. ¿Cuántos relojes debe venderse cada mes para lograr una ganancia (ingreso − costo) de al menos \$50?

60. Negocios Los ingresos mensuales logrados al vender x cajas de dulces se calcula como $x(5-0.05x)$ dólares. El costo al mayoreo de cada caja de dulces es \$1.50. ¿Cuántas cajas deben venderse cada mes para lograr una ganancia de al menos \$60?

61. Encuentre k tal que la ecuación $x^2+kx+1=0$ no tenga soluciones reales.

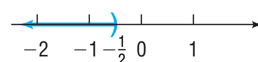
62. Encuentre k tal que la ecuación $kx^2+2x+1=0$ tenga dos soluciones reales diferentes.

63. Construya una desigualdad que no tenga solución. Construya una que tenga exactamente una solución.

64. La desigualdad $x^2+1<-5$ no tiene solución. Explique por qué.

Respuesta a "¿Está preparado?"

1. $\{x|x<-\frac{1}{2}\}$



4.6 Ceros reales de una función polinomial

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Clasificación de números (Repaso, sección R.1, pp. 2-4)
- Factorización de polinomios (Repaso, sección R.5, pp. 43-50)
- División de polinomios; división sintética (Repaso sección R.6, pp. 52-57)
- Fórmula cuadrática (sección 1.2, p. 102)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 374.

OBJETIVOS
1. Usar los teoremas del residuo y del factor
2. Usar la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos de una función polinomial
3. Usar el teorema de los ceros racionales para enumerar los ceros racionales posibles de una función polinomial
4. Encontrar los ceros reales de una función polinomial
5. Resolver ecuaciones de polinomios
6. Usar el teorema de cotas sobre los ceros
7. Usar el teorema del valor intermedio

En esta sección se analizan las técnicas que se utilizan para encontrar los ceros reales de una función polinomial. Recuerde que si r es un cero de una función polinomial f entonces $f(r) = 0$, r es una intercepción x de la gráfica de f y r es una solución de la ecuación $f(x) = 0$. En el caso de funciones polinomiales y racionales, se ha visto la importancia de los ceros para graficar. Sin embargo, casi siempre es difícil encontrar los ceros de una función polinomial usando métodos algebraicos. No se dispone de fórmulas fáciles como la fórmula cuadrática para encontrar los ceros de un polinomio de grado 3 o mayor. Existen fórmulas para resolver cualquier ecuación de polinomios de grado tres y cuatro, pero son bastante complicadas. No se tienen fórmulas generales para ecuaciones de polinomios de grado 5 o mayor. Obtenga más información en el aspecto histórico al final de esta sección.

Teoremas del residuo y del factor


1 Cuando se divide un polinomio (dividendo) entre otro (divisor) se obtiene un polinomio en el cociente y un residuo, donde el residuo es el polinomio cero o un polinomio cuyo grado es menor que el grado del divisor. Para verificar una división se comprueba que

$$(\text{Cociente})(\text{Divisor}) + \text{Residuo} = \text{Dividendo}$$

Esta rutina de verificación es la base para un teorema famoso llamado **algoritmo* de división para polinomios**, que se establece y prueba a continuación.

*Un proceso sistemático en el que se repiten ciertos pasos un número finito de veces se llama **algoritmo**. Por ejemplo, la división larga es un algoritmo.

Teorema

Algoritmo de división para polinomios

Si $f(x)$ y $g(x)$ denotan funciones polinomiales y si $g(x)$ no es el polinomio cero, entonces existen funciones polinomiales únicas $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \text{o} \quad \underset{\text{dividendo}}{f(x)} = \underset{\text{cociente}}{q(x)}\underset{\text{divisor}}{g(x)} + \underset{\text{residuo}}{r(x)} \qquad \textbf{(1)}$$

donde $r(x)$ es el polinomio cero o un polinomio de grado menor que $g(x)$.

En la ecuación (1), $f(x)$ es el **dividendo**, $g(x)$ es el **divisor**, $q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **residuo**.

Si el divisor $g(x)$ es un polinomio de primer grado de la forma

$$g(x) = x - c, \qquad c \text{ a número real}$$

entonces el residuo $r(x)$ es, ya sea el polinomio cero, o un polinomio de grado 0. Como resultado, para estos divisores, el residuo es algún número, digamos R, y se escribe

$$f(x) = (x - c)q(x) + R \qquad \textbf{(2)}$$

Esta ecuación es una identidad en x y es cierta para todos los números reales x. Suponga que $x = c$. Entonces la ecuación (2) se convierte en

$$f(c) = (c - c)q(c) + R$$
$$f(c) = R$$

Se sustituye $f(c)$ para R en la ecuación (2) para obtener

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c) \qquad \textbf{(3)}$$

Con esto se probó el **teorema del residuo**.

Teorema del residuo

Sea f una función polinomial. Si $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

EJEMPLO 1 **Uso del teorema del residuo**

Encuentre el residuo si se divide $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5$ entre

a) $x - 3$ b) $x + 2$

Solución

a) Se podría usar la división larga o la división sintética, pero es más sencillo usar el teorema del residuo, que dice que el residuo es $f(3)$.

$$f(3) = (3)^3 - 4(3)^2 - 5 = 27 - 36 - 5 = -14$$

El residuo es -14.

b) Para encontrar el residuo cuando se divide $f(x)$ entre $x + 2 = x - (-2)$, se evalúa $f(-2)$.

$$f(-2) = (-2)^3 - 4(-2)^2 - 5 = -8 - 16 - 5 = -29$$

El residuo es -29. ◄



Compare el método usado en el ejemplo 1*a*) con el método usado en el ejemplo 4 en la página 56 (división sintética). ¿Qué método prefiere? Establezca sus razones.



COMENTARIO: Una calculadora gráfica proporciona otra manera de encontrar el valor de una función usando la característica VALUE. Consulte los detalles en su manual. Después verifique los resultados del ejemplo 1. ■

Una consecuencia importante y útil del teorema del residuo es el **teorema del factor**.

Teorema del factor

Sea f una función polinomial. Entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$ si y sólo si $f(c) = 0$.

El teorema del factor en realidad consiste en dos proposiciones separadas:

1. Si $f(c) = 0$, entonces $x - c$ es una factor de $f(x)$.
2. Si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(c) = 0$.

La demostración requiere dos partes.

Demostración

1. Suponga que $f(c) = 0$. Entonces, por la ecuación (3), se tiene
$$f(x) = (x - c)q(x)$$
para algún polinomio $q(x)$. Esto es, $x - c$ es un factor de $f(x)$.
2. Suponga que $x - c$ es un factor de $f(x)$. Entonces existe una función polinomial q tal que
$$f(x) = (x - c)q(x)$$
Al sustituir x por c, se encuentra que
$$f(c) = (c - c)q(c) = 0 \cdot q(c) = 0$$
Esto completa la prueba ■

Una forma de usar el teorema del factor es determinar si un polinomio tiene un factor dado.

EJEMPLO 2 Uso del teorema del factor

Utilice el teorema del factor para determinar si la función

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 3$$

tiene como factor a: a) $x - 1$ b) $x + 3$

Solución El teorema del factor establece que si $f(c) = 0$ entonces $x - c$ es un factor.

a) Como $x - 1$ es de la forma $x - c$ con $c = 1$, se encuentra el valor de $f(1)$. Se elige usar sustitución.
$$f(1) = 2(1)^3 - (1)^2 + 2(1) - 3 = 2 - 1 + 2 - 3 = 0$$
Por el teorema del factor, $x - 1$ es un factor de $f(x)$.

b) Para probar el factor $x + 3$, primero es necesario escribirlo en la forma $x - c$. Como $x + 3 = x - (-3)$, se encuentra el valor de $f(-3)$. Se elige usar la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ & & -6 & 21 & -69 \\ \hline & 2 & -7 & 23 & -72 \end{array}$$

Dado que $f(-3) = -72 \neq 0$, se concluye por el teorema del factor que $x - (-3) = x + 3$ no es un factor de $f(x)$. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

En el ejemplo 2*a*) se encontró que $x - 1$ era un factor de f. Para escribir f en forma factorizada se usa la división larga o la división sintética. Usando división sintética, se encuentra que

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ & & 2 & 1 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

El cociente es $g(x) = 2x^2 + x + 3$ con un residuo de 0, como se esperaba. La forma factorizada de f se escribe como

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(2x^2 + x + 3)$$

Número y localización de los ceros reales

El siguiente teorema se refiere al número de ceros reales que podría tener una función polinomial. Al contar los ceros de un polinomio, se cuenta cada uno tantas veces como su multiplicidad.

Teorema

Número de ceros reales

Una función polinomial no puede tener más ceros reales que su grado.

Demostración La prueba se basa en el teorema del factor. Si r es un cero de una función polinomial f, entonces $f(r) = 0$ y, por lo tanto, $x - r$ es un factor de $f(x)$. Cada cero corresponde a un factor de grado 1. Debido a que f no puede tener más factores de primer grado que su propio grado, se concluye el resultado. ■


2 La **regla de los signos de Descartes** proporciona información acerca del número y localización de los ceros reales de una función polinomial escrita en la forma estándar (con potencias descendientes de x). Requiere que se cuente el número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(x)$ y $f(-x)$.

Por ejemplo, la siguiente función polinomial tiene dos variaciones en los signos de los coeficientes.

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^7 + 4x^4 + 3x^2 - 2x - 1 \\ &= \underbrace{-3x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 4x^4}_{-\text{ a }+} + 0x^3 \underbrace{+ 3x^2 - 2x}_{+\text{ a }-} - 1 \end{aligned}$$

Observe que se ignoraron los coeficientes cero en $0x^6$, $0x^5$ y $0x^3$; contar el número de variaciones en signo de $f(x)$. Al sustituir $-x$ en lugar de x se tiene

$$\begin{aligned} f(-x) &= -3(-x)^7 + 4(-x)^4 + 3(-x)^2 - 2(-x) - 1 \\ &= 3x^7 + 4x^4 + 3x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

+ a −

la cual es una variación en signo.

Teorema

Regla de los signos de Descartes

Sea f una función polinomial escrita en forma estándar.

El número de ceros reales positivos de f es igual ya sea, al número de variaciones en el signo de los coeficientes diferentes de cero de $f(x)$, o bien, a ese número menos un entero par.

El número de ceros reales negativos de f es igual ya sea al número de variaciones en signo de los coeficientes diferentes de cero de $f(-x)$, o bien, a ese número menos un entero par.

Se probará la regla de los signos de Descartes. Veamos cómo se usa.

EJEMPLO 3 **Uso del teorema del número de ceros reales y la regla de los signos de Descartes**

Analice los ceros reales de $f(x) = 3x^6 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 3$.

Solución Como el polinomio es de grado 6, por el teorema del número de ceros reales existen cuando más seis ceros reales. Como hay tres variaciones de signo de los coeficientes diferentes de cero de $f(x)$, por la regla de los signos de Descartes se espera que haya uno o tres ceros reales positivos. Para continuar, se ve $f(-x)$.

$$f(-x) = 3x^6 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 3$$

Hay tres variaciones en signo, de manera que se esperan tres (o uno) ceros reales negativos. De modo equivalente, ahora se sabe que la gráfica de f tiene una o tres intercepciones x positivas y una o tres intercepciones x negativas. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

Teorema de los ceros racionales


3 El resultado siguiente, llamado **teorema de los ceros racionales**, proporciona información acerca de los ceros racionales de un polinomio *con coeficientes enteros*.

Teorema

Teorema de los ceros racionales

Sea f una función polinomial de grado 1 o mayor de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0, \quad a_0 \neq 0$$

donde cada coeficiente es un entero. Si $\frac{p}{q}$, simplificado, es un cero racional de f, entonces p debe ser un factor de a_0 y q debe ser un factor de a_n.

EJEMPLO 4 Lista de ceros racionales posibles

Dé una lista de los ceros racionales posibles de

$$f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$$

Solución Como f tiene coeficientes enteros se utiliza el teorema de los ceros racionales. Primero, se da una lista de todos los enteros p que son factores del término constante $a_0 = -6$ y todos los enteros q que son factores del primer coeficiente $a_3 = 2$.

$$p: \quad \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6 \qquad \text{Factores de } -6$$
$$q: \quad \pm 1, \pm 2 \qquad \text{Factores de } 2$$

Ahora se forman todas las razones posibles $\frac{p}{q}$.

$$\frac{p}{q}: \quad \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$$

Si f tiene un cero racional, se encontrará en esta lista, que contiene 12 posibilidades. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 33.

Debe estar seguro que comprende lo que dice el teorema de los ceros racionales: para un polinomio con coeficientes enteros, *si* existe un cero racional, es uno de los enumerados. Quizá la función no tenga un cero racional.

4 Se podría usar división larga, división sintética y sustitución para probar cada cero racional posible y determinar si en realidad es un cero. Para facilitar el trabajo, los enteros suelen probarse primero. Se continuará este ejemplo.

EJEMPLO 5 Ceros racionales de una función polinomial

Continúe trabajando con el ejemplo 4 para encontrar los ceros racionales de

$$f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$$

Escriba f en la forma factorizada.

Solución Se reúne toda la información que se pueda acerca de los ceros

PASO 1: Existen cuando mucho tres ceros reales.

PASO 2: Por la regla de los signos de Descartes, hay un cero real positivo, Además, como

$$f(-x) = -2x^3 + 11x^2 + 7x - 6$$

hay dos ceros negativos o ceros no negativos.

PASO 3: Ahora se usa la lista de ceros racionales posibles obtenida en el ejemplo 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$. Se elige probar el cero racional posible 1 usando sustitución.

$$f(1) = 2(1)^3 + 11(1)^2 - 7(1) - 6 = 2 + 11 - 7 - 6 = 0$$

Como $f(1) = 0$, 1 es un cero y $x - 1$ es un factor de f. Se utiliza la división larga o la división sintética para factorizar f.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6 \\ &= (x - 1)(2x^2 + 13x + 6) \end{aligned}$$

Ahora cualquier solución de la ecuación $2x^2 + 13x + 6 = 0$ será un cero de f. Debido a esto, la ecuación $2x^2 + 13x + 6 = 0$ recibe el nombre de **ecuación deprimida** de f. Como el grado de la ecuación deprimida de f es menor que el del polinomio original, se trabaja con la ecuación deprimida para encontrar los ceros de f.

PASO 4: La ecuación deprimida $2x^2 + 13x + 6 = 0$ es una ecuación cuadrática con discriminante $b^2 - 4ac = 169 - 48 = 121 > 0$. La ecuación tiene dos soluciones reales, que se encuentran factorizando.

$$2x^2 + 13x + 6 = (2x + 1)(x + 6) = 0$$

$$2x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 6 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \qquad\qquad x = -6$$

Los ceros de f son $-6, -\frac{1}{2}$, y 1.

Se usa el teorema del factor para factorizar f. Cada cero da lugar a un factor, entonces $x - (-6) = x + 6$, $x - \left(-\frac{1}{2}\right) = x + \frac{1}{2}$, y $x - 1$ son factores de f. Como el primer coeficiente de f es 2 y f es de grado 3, se tiene

$$f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6 = 2(x + 6)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

Observe que los tres ceros de f encontrados en este ejemplo están entre los dados en la lista de ceros racionales posibles del ejemplo 4. ◀

Para obtener información de los ceros reales de una función polinomial, se siguen estos pasos:

Pasos para encontrar los ceros reales de una función polinomial

PASO 1: Usar el grado del polinomio para determinar el número máximo de ceros.

PASO 2: Usar la regla de los signos de Descartes para determinar el número posible de ceros positivos y ceros negativos.

PASO 3: a) Si el polinomio tiene coeficientes enteros, se usa el teorema de los ceros racionales para identificar los números racionales que pueden ser ceros posibles.

b) Utilizar sustitución, división sintética o división larga para probar cada cero racional posible.

c) Cada vez que se encuentra un cero (y por ende un factor), se repite el paso 3 sobre la ecuación deprimida.

PASO 4: Al intentar encontrar los ceros, recuerde usar (si es posible) las técnicas de factorización que conoce (productos notables, factorización por agrupamiento, etcétera).

EJEMPLO 6 Ceros reales de una función polinomial

Encuentre los ceros reales de $f(x) = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16$. Escriba f en forma factorizada.

Solución Se reúne toda la información posible acerca de los ceros.

PASO 1: Existen cuando mucho cinco ceros reales.

PASO 2: Por la regla de los signos de Descartes, existen cinco, tres o ningún cero positivo. Como

$$f(-x) = -x^5 - 5x^4 - 12x^3 - 24x^2 - 32x - 16$$

no hay ceros negativos.

PASO 3: Dado que el primer coeficiente $a_5 = 1$ y no hay ceros negativos, los ceros racionales posibles son los enteros 1, 2, 4, 8 y 16, los factores positivos del término constante, 16. Primero se prueba el posible cero 1 usando división sintética.

1)	1	−5	12	−24	32	−16
		1	−4	8	−16	16
	1	−4	8	−16	16	0

El residuo es $f(1) = 0$, entonces 1 es un cero y $x - 1$ es un factor de f. Utilizando los elementos del último renglón de la división sintética, se comienza a factorizar f.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 \\ &= (x - 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16) \end{aligned}$$

Ahora se trabaja con la primera ecuación deprimida:

$$q_1(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16 = 0$$

REPETIR EL PASO 3: Los ceros posibles de q_1 todavía son 1, 2, 4, 8 y 16. Primero se prueba 1, ya que podría ser un cero repetido.

1)	1	−4	8	−16	16
		1	−3	5	−11
	1	−3	5	−11	5

Como el residuo es 5, 1 no es un cero repetido. Ahora se prueba 2.

2)	1	−4	8	−16	16
		2	−4	8	−16
	1	−2	4	−8	0

El residuo es $f(2) = 0$, de manera que 2 es un cero y $x - 2$ es un factor de f. De nuevo al usar el último renglón, se encuentra

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 \\ &= (x - 1)(x - 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8) \end{aligned}$$

El resto de los ceros satisface la nueva ecuación deprimida

$$q_2(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

Observe que $q_2(x)$ se factoriza usando agrupamiento. (De manera alternativa, podría repetir el paso 3 y verificar el cero racional posible 2). Entonces

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 4x - 8 &= 0 \\ x^2(x-2) + 4(x-2) &= 0 \\ (x^2+4)(x-2) &= 0 \\ x^2 + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Como $x^2 + 4 = 0$ no tiene soluciones reales, los ceros reales de f son 1 y 2, este último de multiplicidad 2. La forma factorizada de f es

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 \\ &= (x-1)(x-2)^2(x^2+4) \end{aligned}$$



 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45.

5 EJEMPLO 7 Solución de una ecuación de polinomios

Resuelva la ecuación: $x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 = 0$

Solución Las soluciones de esta ecuación son los ceros de la función polinomial

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16$$

Al utilizar el resultado del ejemplo 6, los ceros reales de f son 1 y 2. Éstas son las soluciones reales de la ecuación

$$x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 = 0$$



 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 57.

En el ejemplo 6, el factor cuadrático $x^2 + 4$ que aparece en la forma factorizada de f se llama *irreducible*, porque no es posible factorizar el polinomio $x^2 + 4$ sobre los números reales. En general, se dice que un factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ es **irreducible** si no se puede factorizar sobre los números reales, es decir, si es primo en los números reales.

Vea los ejemplos 5 y 6. La función polinomial del ejemplo 5 tiene tres ceros reales y su forma factorizada contiene tres factores. La función polinomial del ejemplo 6 tiene dos ceros diferentes, y su forma factorizada contiene dos factores lineales y un factor cuadrático irreducible.

Teorema

Toda función polinomial (con coeficientes reales) se factoriza de manera única en un producto de factores lineales y/o factores cuadráticos irreducibles.

Se demostrará este resultado en la sección 4.7 y, de hecho, se obtendrán varias conclusiones acerca de los ceros de una función polinomial. Vale la pena notar la siguiente conclusión. Si un polinomio (con coeficientes reales) es de grado impar, entonces debe contener al menos un factor lineal. (¿Por qué?) Esto significa que debe tener al menos un cero real.

Corolario

Una función polinomial (con coeficientes reales) de grado impar tiene al menos un cero real.

Cotas sobre los ceros



La búsqueda de ceros reales de una función polinomial se reduce algo si se encuentran *cotas* sobre los ceros. Un número M es una **cota** sobre los ceros de un polinomio si todo cero está entre $-M$ y M, inclusive. Esto es, M es una cota para los ceros de un polinomio f si

$$-M \leq \text{cualquier cero } f \leq M$$

Teorema

Cotas sobre los ceros

Sea f una función polinomial cuyo primer coeficiente es 1.

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

Una cota M sobre los ceros de f es el más pequeño de los dos números siguientes:

$$\text{Máx}\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\}, \ 1 + \text{Máx}\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\} \quad \textbf{(4)}$$

donde Máx{ } significa “elegir el elemento mayor dentro de { }.”

Un ejemplo ayudará a aclarar el teorema.

EJEMPLO 8 **Teorema para encontrar cotas sobre los ceros**

Encuentre una cota para los ceros de cada polinomio.

a) $f(x) = x^5 + 3x^3 - 9x^2 + 5$ b) $g(x) = 4x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 1$

Solución a) El primer coeficiente de f es 1.

$$f(x) = x^5 + 3x^3 - 9x^2 + 5 \qquad a_4 = 0, a_3 = 3, a_2 = -9, a_1 = 0, a_0 = 5$$

Se evalúan las dos expresiones en (4).

$$\begin{aligned} \text{Máx}\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\} &= \text{Máx}\{1, |5| + |0| + |-9| + |3| + |0|\} \\ &= \text{Máx}\{1, 17\} = 17 \\ 1 + \text{Máx}\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\} &= 1 + \text{Máx}\{|5|, |0|, |-9|, |3|, |0|\} \\ &= 1 + 9 = 10 \end{aligned}$$

El menor de los dos números, 10, es la cota. Cada cero de f está entre -10 y 10.

b) Primero se escribe g de manera que sea el producto de una constante por un polinomio cuyo primer coeficiente es 1.

$$g(x) = 4x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 1 = 4\left(x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right)$$

Después se evalúan las dos expresiones en (4) con $a_4 = 0$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 0$, y $a_0 = \frac{1}{4}$.

$$\text{Máx}\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\} = \text{Máx}\left\{1, \left|\frac{1}{4}\right| + |0| + \left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| + |0|\right\}$$
$$= \text{Máx}\left\{1, \frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{4}$$
$$1 + \text{Máx}\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\} = 1 + \text{Máx}\left\{\left|\frac{1}{4}\right|, |0|, \left|\frac{1}{2}\right|, \left|-\frac{1}{2}\right|, |0|\right\}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

El menor de los dos números, $\frac{5}{4}$, es la cota. Todos los ceros de g están entre $-\frac{5}{4}$ y $\frac{5}{4}$. ◀



COMENTARIO: Las cotas sobre los ceros de un polinomio proporcionan buenas elecciones para establecer *X*mín y *X*máx para el rectángulo de la pantalla. Con estas opciones, se observan todas las intercepciones *x* de la gráfica. ■



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 81.

Teorema del valor intermedio



El siguiente resultado, llamado **teorema del valor intermedio**, se basa en el hecho de que la gráfica de una función polinomial es continua, es decir, no tiene "hoyos" o "saltos".

Teorema

Teorema del valor intermedio

Sea f una función polinomial. Si $a < b$ y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe al menos un cero de f entre a y b.

Aunque la prueba de este resultado requiere métodos avanzados de cálculo, es sencillo "ver" por qué es cierto. Vea la figura 59.

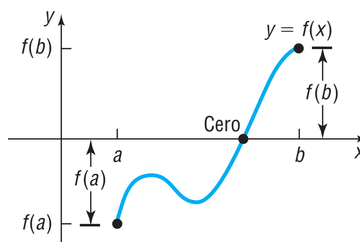


Figura 59
Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, existe un cero entre a y b.

EJEMPLO 9 Uso del teorema del valor intermedio para localizar ceros

Demuestre que $f(x) = x^5 - x^3 - 1$ tiene un cero entre 1 y 2.

Solución Se evalúa f en 1 y en 2.

$$f(1) = -1 \quad \text{y} \quad f(2) = 23$$

Como $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, del teorema del valor intermedio se deduce que f tiene un cero entre 1 y 2. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 89.

Se verá al polinomio f del ejemplo 9 con más detalle. Según la regla de los signos de Descartes, f tiene exactamente un cero real positivo. Con base en el teorema de los ceros racionales, 1 es el único posible cero racional. Como $f(1) \neq 0$, se concluye que el cero entre 1 y 2 es irracional. Se utiliza el teorema del valor intermedio para aproximarlo. Los pasos son los siguientes:

Aproximación de los ceros de una función polinomial

PASO 1: Encontrar dos enteros consecutivos a y $a + 1$, tales que f tenga un cero entre ellos.

PASO 2: Dividir el intervalo $[a, a + 1]$ en 10 subintervalos iguales.

PASO 3: Evaluar f en cada punto extremo de los subintervalos hasta que se pueda aplicar el teorema del valor intermedio; este intervalo contiene un cero.

PASO 4: Repetir el proceso comenzando en el paso 2 hasta lograr la exactitud deseada.

EJEMPLO 10 Aproximación de los ceros de una función polinomial

Encuentre el cero positivo de $f(x) = x^5 - x^3 - 1$ correcto a dos decimales.

Solución Del ejemplo 9 se sabe que el cero positivo está entre 1 y 2. Se divide el intervalo $[1, 2]$ en 10 subintervalos iguales: $[1, 1.1]$, $[1.1, 1.2]$, $[1.2, 1.3]$, $[1.3, 1.4]$, $[1.4, 1.5]$, $[1.5, 1.6]$, $[1.6, 1.7]$, $[1.7, 1.8]$, $[1.8, 1.9]$, $[1.9, 2]$. Ahora se encuentra el valor de f en cada punto extremo hasta que se aplique el teorema del valor intermedio.

$$f(x) = x^5 - x^3 - 1$$

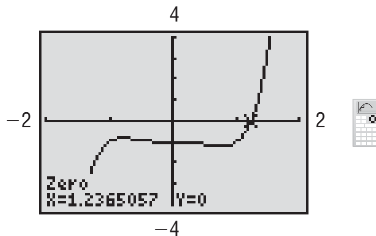
$$f(1.0) = -1 \qquad f(1.2) = -0.23968$$
$$f(1.1) = -0.72049 \qquad f(1.3) = 0.51593$$

Nos podemos detener aquí y concluir que el cero está entre 1.2 y 1.3. Ahora se divide el intervalo $[1.2, 1.3]$ en 10 subintervalos iguales y se procede a igualar f en cada punto extremo,

$$f(1.20) = -0.23968 \qquad f(1.23) \approx -0.0455613$$
$$f(1.21) \approx -0.1778185 \qquad f(1.24) \approx 0.025001$$
$$f(1.22) \approx -0.1131398$$

Se concluye que el cero está entre 1.23 y 1.24, por lo que, con exactitud de dos lugares decimales, el cero es 1.23. ◀

Figura 60



Exploración

Se examina el polinomio f dado en el ejemplo 10. El teorema de cotas sobre los ceros dice que todo cero está entre -2 y 2. Si se obtiene la gráfica de f usando $-2 \leq x \leq 2$, se ve que f tiene exactamente una intercepción x. Vea la figura 60. Con ZERO o ROOT, se encuentra que este cero es 1.24 redondeado a dos decimales. Correcto a dos decimales, el cero es 1.23.

Existen muchas otras técnicas numéricas para aproximar los ceros de un polinomio. La descrita en el ejemplo 10 (una variación del *método de bisección*) tiene las ventajas de que siempre funciona, se programa con facili-

dad en una computadora y cada vez que se usa se logra un decimal más de exactitud. Vea en el problema 119 el método de bisección, que coloca el cero en una sucesión de intervalos, donde cada nuevo intervalo tiene la mitad de la longitud del anterior.

Aspecto histórico

Existen fórmulas para la solución de ecuaciones de polinomios de tercero y cuarto grados y, aunque no son muy prácticas, tienen una historia interesante.

En el siglo XVI en Italia, un pasatiempo popular eran los concursos de matemáticas y las personas que poseían métodos para resolver problemas los mantenían en secreto. (Las soluciones que se publicaban eran ya del conocimiento general.) Niccolo Brescia (1499-1557), comúnmente conocido como Tartaglia ("tartamudo"), era dueño del secreto para resolver ecuaciones cúbicas (de tercer grado), lo cual le daba una ventaja decidida en los concursos. Girolamo Cardano (1501-1576) descubrió que Tartaglia tenía el secreto y, como estaba interesado en los cubos, se lo pidió a Tartaglia. Éste dudó por algún tiempo, pero al fin, haciendo que Cardano jurara que lo mantendría en secreto con votos solemnes a la luz de las velas, a media noche, le dijo el secreto. Después Cardano publicó la solución en su libro *Ars Magna* (1545), dando a Tartaglia el crédito pero sin cumplir la promesa del secreto. Tartaglia explotó en amargas recriminaciones, y cada uno escribió panfletos que reflejaban las matemáticas, el carácter moral y la experiencia del otro.

La ecuación cuártica (de cuarto grado) fue resuelta por el estudiante de Cardano, Ludovico Ferrari, y esta solución también se incluyó, con el crédito y esta vez con autorización, en el *Ars Magna*.

Se hicieron intentos para resolver la ecuación de quinto grado de maneras similares, todos fallaron. Al inicio del siglo XIX, P. Ruffini, Niels Abel y Evariste Galois encontraron maneras de demostrar que no era posible resolver ecuaciones de quinto grado mediante una fórmula, pero las pruebas requerían la introducción de nuevos métodos. Con el tiempo, los métodos de Galois se convirtieron en una gran parte del álgebra moderna.

Problemas históricos

Los problemas 1-8 desarrollan la solución de Tartaglia-Cardano de la ecuación cúbica y muestran por qué no es práctica.

1. Demuestre que la ecuación cúbica general $y^3 + by^2 + cy + d = 0$ se transforma en una ecuación de la forma $x^3 + px + q = 0$ usando la sustitución $y = x - \frac{b}{3}$.

2. En la ecuación $x^3 + px + q = 0$, sustituya x por $H + K$. Sea $3HK = -p$, y demuestre que $H^3 + K^3 = -q$.

3. Con base en el problema 2, se tienen dos ecuaciones

$$3HK = -p \quad \text{y} \quad H^3 + K^3 = -q$$

Despeje K de $3HK = -p$ y sustitúyala en $H^3 + K^3 = -q$. Después demuestre que

$$H = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

[**Sugerencia:** Busque una ecuación de forma cuadrática].

4. Utilice la solución para H del problema 3 y la ecuación $H^3 + K^3 = -q$ para demostrar que

$$K = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

5. Use los resultados de los problemas 2-4 para demostrar que la solución de $x^3 + px + q = 0$ es

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

6. Utilice el resultado del problema 5 para resolver la ecuación $x^3 - 6x - 9 = 0$.

7. Utilice una calculadora y el resultado del problema 5 para resolver la ecuación $x^3 + 3x - 14 = 0$.

8. Use los métodos de este capítulo para resolver la ecuación $x^3 + 3x - 14 = 0$.

4.6 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan el final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. En el conjunto $\{-2, -\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}, 4.5, \pi\}$, diga qué números son enteros. ¿Cuáles son números racionales? (pp. 2-4)

2. Factorice la expresión $6x^2 + x - 2$. (pp. 43-50)

3. Encuentre el cociente y el residuo si $3x^4 - 5x^3 + 7x - 4$ se divide entre $x - 3$. (pp. 52-57)

4. Resuelva la ecuación $x^2 + x - 3 = 0$. (pp. 102)

Conceptos y vocabulario

5. En el proceso de división de polinomios, (Divisor)(Cociente) + __________ = __________.

6. Cuando la función polinomial f se divide entre $x - c$, el residuo es __________.

7. Si una función f, cuyo dominio es todos los números reales, es par y si 4 es un cero de f, entonces __________ también es un cero.

8. *Falso o verdadero:* toda función polinomial de grado 3 con coeficientes reales tiene exactamente 3 ceros reales.

9. *Falso o verdadero:* los únicos ceros racionales posibles de $f(x) = 2x^5 - x^3 + x^2 - x + 1$ son $\pm 1, \pm 2$.

10. *Falso o verdadero:* si f es una función polinomial de grado 4 y si $f(2) = 5$, entonces

$$\frac{f(x)}{x-2} = p(x) + \frac{5}{x-2}$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado 3.

Ejercicios

En los problemas 11-20, use el teorema del factor para determinar si $x - c$ es un factor de $f(x)$.

11. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4; \quad x - 2$

12. $f(x) = -4x^3 + 5x^2 + 8; \quad x + 3$

13. $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 5x + 10; \quad x - 2$

14. $f(x) = 4x^4 - 15x^2 - 4; \quad x - 2$

15. $f(x) = 3x^6 + 82x^3 + 27; \quad x + 3$

16. $f(x) = 2x^6 - 18x^4 + x^2 - 9; \quad x + 3$

17. $f(x) = 4x^6 - 64x^4 + x^2 - 15; \quad x + 4$

18. $f(x) = x^6 - 16x^4 + x^2 - 16; \quad x + 4$

19. $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - 1; \quad x - \frac{1}{2}$

20. $f(x) = 3x^4 + x^3 - 3x + 1; \quad x + \frac{1}{3}$

En los problemas 21-32, dé el número máximo de ceros que podría tener cada función polinomial. Después use la regla de los signos de Descartes, para determinar cuántos ceros son positivos y cuántos negativos tendría cada función polinomial. No intente encontrar los ceros.

21. $f(x) = -4x^7 + x^3 - x^2 + 2$

22. $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 6x - 5$

23. $f(x) = 2x^6 - 3x^2 - x + 1$

24. $f(x) = -3x^5 + 4x^4 + 2$

25. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$

26. $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$

27. $f(x) = -x^4 + x^2 - 1$

28. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 2$

29. $f(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$

30. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

31. $f(x) = x^6 - 1$

32. $f(x) = x^6 + 1$

En los problemas 33-44, enumere los ceros racionales posibles de cada función polinomial. No intente encontrar los ceros.

33. $f(x) = 3x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$

34. $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^2 + 3$

35. $f(x) = x^5 - 6x^2 + 9x - 3$

36. $f(x) = 2x^5 - x^4 - x^2 + 1$

37. $f(x) = -4x^3 - x^2 + x + 2$

38. $f(x) = 6x^4 - x^2 + 2$

39. $f(x) = 6x^4 - x^2 + 9$

40. $f(x) = -4x^3 + x^2 + x + 6$

41. $f(x) = 2x^5 - x^3 + 2x^2 + 12$

42. $f(x) = 3x^5 - x^2 + 2x + 18$

43. $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - x^2 + 20$

44. $f(x) = -6x^3 - x^2 + x + 10$

En los problemas 45-56, use la regla de los signos de Descartes y el teorema de los ceros racionales para encontrar todos los ceros reales de cada función polinomial. Use los ceros para factorizar f en los números reales.

45. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

46. $f(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 20$

47. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$

48. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

49. $f(x) = x^4 + x^2 - 2$

50. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

51. $f(x) = 4x^4 + 7x^2 - 2$

52. $f(x) = 4x^4 + 15x^2 - 4$

53. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

54. $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$

55. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - x + 2$

56. $f(x) = 4x^5 + 12x^4 - x - 3$

En los problemas 57-68, resuelva cada ecuación en el sistema de números reales.

57. $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

58. $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$

59. $3x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = 0$

60. $2x^3 - 3x^2 - 3x - 5 = 0$

61. $3x^3 - x^2 - 15x + 5 = 0$

62. $2x^3 - 11x^2 + 10x + 8 = 0$

63. $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$

64. $x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9 = 0$

65. $x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 1 = 0$

66. $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$

67. $2x^4 - 19x^3 + 57x^2 - 64x + 20 = 0$

68. $2x^4 + x^3 - 24x^2 + 20x + 16 = 0$

En los problemas 69-80, encuentre las intercepciones de cada función polinomial f(x). Encuentre los intervalos de x para los que la gráfica de f está arriba y abajo del eje x. Obtenga varias puntos adicionales de la gráfica y conéctelos con una curva suave [**Sugerencia:** Utilice la forma factorizada de f (vea los problemas 45-56)].

69. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
70. $f(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 20$
71. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$
72. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
73. $f(x) = x^4 + x^2 - 2$
74. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
75. $f(x) = 4x^4 + 7x^2 - 2$
76. $f(x) = 4x^4 + 15x^2 - 4$
77. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$
78. $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$
79. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - x + 2$
80. $f(x) = 4x^5 + 12x^4 - x - 3$

En los problemas 81-88, encuentre una cota sobre los ceros reales de cada función polinomial.

81. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
82. $f(x) = x^4 - 5x^2 - 36$
83. $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$
84. $f(x) = x^4 - x^3 + x - 1$
85. $f(x) = 3x^4 + 3x^3 - x^2 - 12x - 12$
86. $f(x) = 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 27x - 36$
87. $f(x) = 4x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$
88. $f(x) = 4x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 2$

En los problemas 89-94, use el teorema del valor intermedio para mostrar que cada función polinomial tiene un cero en el intervalo dado.

89. $f(x) = 8x^4 - 2x^2 + 5x - 1;\quad [0, 1]$
90. $f(x) = x^4 + 8x^3 - x^2 + 2;\quad [-1, 0]$
91. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8x + 2;\quad [-5, -4]$
92. $f(x) = 3x^3 - 10x + 9;\quad [-3, -2]$
93. $f(x) = x^5 - x^4 + 7x^3 - 7x^2 - 18x + 18;\quad [1.4, 1.5]$
94. $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x + 2;\quad [1.7, 1.8]$

En los problemas 95-98, cada ecuación tiene una solución r en el intervalo indicado. Use el método del ejemplo 10 para aproximar esta solución correcta a dos decimales.

95. $8x^4 - 2x^2 + 5x - 1 = 0;\quad 0 \le r \le 1$
96. $x^4 + 8x^3 - x^2 + 2 = 0;\quad -1 \le r \le 0$
97. $2x^3 + 6x^2 - 8x + 2 = 0;\quad -5 \le r \le -4$
98. $3x^3 - 10x + 9 = 0;\quad -3 \le r \le -2$

En los problemas 99-102, cada función polinomial tiene exactamente un cero positivo. Use el método del ejemplo 10 para aproximar el cero correcto a dos decimales.

99. $f(x) = x^3 + x^2 + x - 4$
100. $f(x) = 2x^4 + x^2 - 1$
101. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 8$
102. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 20$

---

103. Encuentre k tal que $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 2$ tiene el factor $x - 2$.

104. Encuentre k tal que $f(x) = x^4 - kx^3 + kx^2 + 1$ tiene el factor $x + 2$.

105. ¿Cuál es el residuo cuando $f(x) = 2x^{20} - 8x^{10} + x - 2$ se divide entre $x - 1$?

106. ¿Cuál es el residuo cuando $f(x) = -3x^{17} + x^9 - x^5 + 2x$ se divide entre $x + 1$?

107. Use el teorema del factor para probar que $x - c$ es un factor de $x^n - c^n$ para cualquier entero positivo n.

108. Use el teorema del factor para probar que $x + c$ es un factor de $x^n + c^n$ si $n \geq 1$ es un entero impar.

109. Una solución de la ecuación $x^3 - 8x^2 + 16x - 3 = 0$ es 3. Encuentre la suma de las soluciones restantes.

110. Una solución de la ecuación $x^3 + 5x^2 + 5x - 2 = 0$ es -2. Encuentre la suma de las soluciones restantes.

111. Es $\frac{1}{3}$ un cero de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 7$? Explique.

112. Es $\frac{1}{3}$ un cero de $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 3x + 1$? Explique.

113. Es $\frac{3}{5}$ un cero de $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^3 - x + 1$? Explique.

***114.** Es $\frac{2}{3}$ un cero de $f(x) = x^7 + 6x^5 - x^4 + x + 2$? Explique.

115. ¿Cuál es la longitud de la arista de un cubo si, después de cortar una rebanada de 1 pulgada de un lado, el volumen que queda es de 294 pulgadas cúbicas?

116. ¿Cuál es la longitud de la arista de un cubo si su volumen puede duplicarse por un aumento de 6 centímetros en una arista, un aumento de 12 centímetros en una segunda arista y una disminución de 4 centímetros en la tercera arista?

117. Sea $f(x)$ una función polinomial cuyos coeficientes son enteros. Suponga que r es un cero real de f y que el primer coeficiente de f es 1. Use el teorema de los ceros racionales para demostrar que r es ya sea un entero o un número irracional.

118. Pruebe el teorema de los ceros racionales.

[**Sugerencia:** Sea $\frac{p}{q}$, donde p y q no tiene factores comunes excepto 1 y -1, un cero de la función polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, cuyos coeficientes son todos enteros. Demuestre que $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$. Ahora, como p es un factor de los primeros n términos de esta ecuación, p también debe ser un factor del término $a_0 q^n$. Como p no es un factor de q (¿por qué?), p debe ser un factor de a_0. De manera similar, q debe ser un factor de a_n].

119. Método de bisección para aproximar los ceros de una función f Se comienza con dos enteros consecutivos, a y $a + 1$, tales que $f(a)$ y $f(a + 1)$ tienen signos opuestos. Se evalúa f en el punto medio m_1 de a y $a + 1$. Si $f(m_1) = 0$, entonces m_1 es el cero de f y el proceso termina. De otra manera, $f(m_1)$ tiene signo opuesto a $f(a)$ o a $f(a + 1)$. Suponga que $f(a)$ y $f(m_1)$ tienen signos opuestos. Ahora se evalúa f en el punto medio m_2 de a y m_1. Este proceso se repite hasta obtener el grado de exactitud deseado. Observe que cada iteración coloca el cero en un intervalo cuya longitud es la mitad de la del intervalo anterior. Use el método de bisección para resolver los problemas 92-102.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. Enteros: $\{-2, 0\}$; racionales $\{-2, 0, \frac{1}{2}, 4.5\}$

2. $(3x + 2)(2x - 1)$

3. Cociente: $3x^3 + 4x^2 + 12x + 43$; Residuo: 125

4. $\left\{\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right\}$

4.7 Ceros complejos; teorema fundamental del álgebra

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Números complejos (sección 1.3, pp. 109-114)
- Ecuaciones cuadráticas con discriminante negativo (sección 1.3, pp. 114-116)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 382.

OBJETIVOS
1. Usar el teorema de pares conjugados para encontrar los ceros complejos de un polinomio
2. Encontrar una función polinomial con ceros especificados
3. Encontrar los ceros complejos de un polinomio

En la sección 4.6 se encontraron los ceros **reales** de una función polinomial. En esta sección se encontrarán los ceros **complejos** de una función polinomial. Encontrar los ceros complejos de una función requiere encontrar todos los ceros de la forma $a + bi$. Estos ceros serán reales si $b = 0$.

Una variable en el sistema de números complejos se conoce como **variable compleja**. Una **función polinomial compleja f** de grado n es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números complejos, $a_n \neq 0$, es un entero no negativo y x es una variable compleja. Como antes, a_n se llama **primer coeficiente** de f. Un número complejo r se llama **cero (complejo)** de f si $f(r) = 0$.

Se ha aprendido que algunas ecuaciones cuadráticas no tienen soluciones reales, pero que en el sistema de números complejos toda ecuación cuadrática tiene una solución, ya sea real o compleja. El siguiente resultado, demostrado por Karl Friedrich Gauss (1777-1855) cuando tenía 22 años,* proporciona una extensión a los polinomios complejos. De hecho, este resultado es tan importante y útil que se conoce como el **teorema fundamental del álgebra**.

Teorema fundamental del álgebra

Toda función polinomial compleja $f(x)$ de grado $n \geq 1$ tiene al menos un cero complejo.

No se demostrará este resultado, ya que está más allá del alcance de este libro. Sin embargo, aplicando el teorema fundamental del álgebra y el teorema del factor, se prueba el siguiente resultado:

*En conjunto, Gauss dio cuatro demostraciones diferentes de este teorema, la primera en 1799 fue el tema de su tesis doctoral.

Teorema

Toda función polinomial compleja $f(x)$ de grado $n \geq 1$ se factoriza en n factores lineales (no necesariamente distintos) de la forma

$$f(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) \qquad \textbf{(2)}$$

donde $a_n, r_1, r_2, ..., r_n$ son números complejos. Esto es, toda función polinomial compleja de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros (no necesariamente diferentes).

Demostración Sea

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Por el teorema fundamental del álgebra, f tiene al menos un cero, digamos r_1. Entonces, por el teorema del factor, $x - r_1$ es un factor y

$$f(x) = (x - r_1)q_1(x)$$

donde $q_1(x)$ es un polinomio complejo de grado $n - 1$ cuyo primer coeficiente es a_n. De nuevo por el teorema fundamental del álgebra, el polinomio complejo $q_1(x)$ tiene al menos un cero, digamos r_2. Por el teorema del factor, $q_1(x)$ tiene el factor $x - r_2$, de manera que

$$q_1(x) = (x - r_2)q_2(x)$$

donde $q_2(x)$ es un polinomio complejo de grado $n - 2$ cuyo primer coeficiente es a_n. En consecuencia

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)q_2(x)$$

Al repetir este argumento n veces, se llega a

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)q_n(x)$$

donde $q_n(x)$ es un polinomio de grado $n - n = 0$ cuyo primer coeficiente es a_n. Así, $q_n(x) = a_n x^0 = a_n$ y entonces

$$f(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

Se concluye que toda función polinomial compleja $f(x)$ de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros (no necesariamente diferentes). ■

Ceros complejos de polinomios con coeficientes reales



Se puede usar el teorema fundamental del álgebra para obtener información valiosa acerca de los ceros complejos de polinomios cuyos coeficientes son números reales.

Teorema de pares conjugados

Sea $f(x)$ un polinomio cuyos coeficientes son números reales. Si $r = a + bi$ es un cero de f, entonces el complejo conjugado $\bar{r} = a - bi$ también es un cero de f.

En otras palabras, para polinomios cuyos coeficientes son números reales, los ceros ocurren en pares conjugados.

Demostración Sea

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales y $a_n \neq 0$. Si $r = a + bi$ es un cero de f, entonces $f(r) = f(a + bi) = 0$, de manera que

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

Se toma el conjugado en ambos lados para obtener

$$\overline{a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0} = \overline{0}$$

$$\overline{a_n r^n} + \overline{a_{n-1}r^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 r} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

El conjugado de una suma es igual a la suma de sus conjugados (vea la sección 1.3).

$$\overline{a_n}(\overline{r})^n + \overline{a_{n-1}}(\overline{r})^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{r} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

El conjugado de un producto es igual al producto de sus conjugados.

$$a_n(\overline{r})^n + a_{n-1}(\overline{r})^{n-1} + \cdots + a_1\overline{r} + a_0 = 0$$

El conjugado de un número real es igual al número real.

Esta última ecuación establece que $f(\overline{r}) = 0$; es decir, $\overline{r} = a - bi$ es un cero de f. ■

La importancia de este resultado debe ser obvia. Una vez que se sabe que, digamos, $3 + 4i$ es un cero de un polinomio con coeficientes reales, entonces se sabe que $3 - 4i$ también es un cero. Este resultado tiene un corolario importante.

Corolario

Un polinomio f de grado impar con coeficientes reales tiene al menos un cero real.

Demostración Dado que los ceros complejos ocurren como pares conjugados en un polinomio con coeficientes reales, siempre habrá un número par de ceros que no son número reales. En consecuencia, como f es de grado impar, uno de sus ceros debe ser un número real. ■

Por ejemplo, el polinomio $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5$ tiene al menos un cero que es un número real, ya que f tiene grado 5 (impar) y tiene coeficientes reales.

EJEMPLO 1 Uso del teorema de pares conjugados

Un polinomio f de grado 5 cuyos coeficientes son números reales tiene los ceros 1, $5i$ y $1 + i$. Encuentre los otros dos ceros.

Solución Como f tiene coeficientes que son números reales, los ceros complejos aparecen como pares conjugados. Se deduce que $-5i$, el conjugado de $5i$ y $1 - i$, el conjugado de $1 + i$, son los dos ceros restantes. ◄


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

2 EJEMPLO 2 Encontrar una función polinomial cuyos ceros están dados

Encuentre un polinomio f de grado 4 cuyos coeficientes son números reales y que tiene los ceros 1, 1 y $-4 + i$.

Solución Como $-4 + i$ es un cero, por el teorema de pares conjugados, $-4 - i$ también debe ser un cero de f. Por el teorema del factor, si $f(c) = 0$, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$. Entonces f se escribe como

$$f(x) = a(x-1)(x-1)[x-(-4+i)][x-(-4-i)]$$

donde a es cualquier número real. Así,

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-1)(x-1)[x-(-4+i)][x-(-4-i)] \\ &= a(x^2-2x+1)[x^2-(-4+i)x-(-4-i)x+(-4+i)(-4-i)] \\ &= a(x^2-2x+1)(x^2+4x-ix+4x+ix+16+4i-4i-i^2) \\ &= a(x^2-2x+1)(x^2+8x+17) \\ &= a(x^4+8x^3+17x^2-2x^3-16x^2-34x+x^2+8x+17) \\ &= a(x^4+6x^3+2x^2-26x+17) \end{aligned}$$

◀

Exploración



Grafique la función f encontrada en el ejemplo 2 para $a = 1$. ¿El valor de a afecta los ceros de f? ¿De qué manera el valor de a afecta la gráfica de f?

Solución Un rápido análisis del polinomio f nos dice qué esperar:

Cuando mucho tres puntos de retorno.

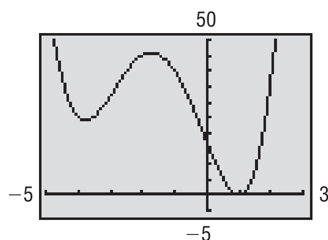
Para $|x|$, grande, la gráfica se comporta como $y = x^4$.

Un cero real repetido en 1 de modo que la gráfica tocará al eje x en 1.

La única intercepción x es 1; la intercepción y es 17.

La figura 61 muestra la gráfica completa. (¿Por qué? La gráfica tiene exactamente tres puntos de retorno). El valor de a causa un estiramiento o una compresión; también ocurre una reflexión si $a < 0$. Los ceros no quedan afectados.

Figura 61



Ahora se puede demostrar el teorema que se dio como conjetura en la sección 4.6.

Teorema Toda función polinomial con coeficientes reales se factoriza de manera única en un producto de n factores lineales y/o factores cuadráticos irreducibles.

Demostración Todo polinomio complejo f de grado n tiene exactamente n ceros y se factoriza en un producto de n factores lineales. Si sus coeficientes son reales, entonces los ceros que son números complejos siempre ocurren como pares conjugados. En consecuencia, si $r = a + bi$ es un cero complejo, también lo es $\bar{r} = a - bi$. Entonces, cuando se multiplican los factores lineales $x - r$ y $x - \bar{r}$ de f, se tiene

$$(x-r)(x-\bar{r}) = x^2 - (r+\bar{r})x + r\bar{r} = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

Este polinomio de segundo grado tiene coeficientes reales y es irreducible (en los números reales). Así, los factores de f son factores cuadráticos lineales o irreducibles. ■



EJEMPLO 3 Ceros complejos de un polinomio

Encuentre los ceros complejos de la función polinomial

$$f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 25x^2 + 45x - 18$$

Escriba f en forma factorizada.

Solución

PASO 1: El grado de f es 4. Entonces f tendrá cuatro ceros complejos.

PASO 2: La regla de los signos de Descartes proporciona información acerca de los ceros reales. Para este polinomio hay un cero real positivo. Dado que

$$f(-x) = 3x^4 - 5x^3 + 25x^2 - 45x - 18$$

existen uno o tres ceros reales negativos.

PASO 3: El teorema de los ceros racionales proporciona información acerca de los ceros racionales posibles de polinomios con coeficientes enteros. Para este polinomio (que tiene coeficientes reales), los ceros racionales posibles son

$$\pm\frac{1}{3}, \quad \pm\frac{2}{3}, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6, \quad \pm 9, \quad \pm 18$$

Primero se prueba 1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 3 & 5 & 25 & 45 & -18 \\ & & 3 & 8 & 33 & 78 \\ \hline & 3 & 8 & 33 & 78 & 60 \end{array}$$

Se prueba -1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 3 & 5 & 25 & 45 & -18 \\ & & -3 & -2 & -23 & -22 \\ \hline & 3 & 2 & 23 & 22 & -40 \end{array}$$

Se prueba 2:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 3 & 5 & 25 & 45 & -18 \\ & & 6 & 22 & 94 & 278 \\ \hline & 3 & 11 & 47 & 139 & 260 \end{array}$$

Se prueba -2:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 3 & 5 & 25 & 45 & -18 \\ & & -6 & 2 & -54 & 18 \\ \hline & 3 & -1 & 27 & -9 & 0 \end{array}$$

Como $f(-2) = 0$, entonces -2 es un cero y $x + 2$ es un factor de f. La ecuación deprimida es

$$3x^3 - x^2 + 27x - 9 = 0$$

PASO 4: Se factoriza por agrupamiento.

$$3x^3 - x^2 + 27x - 9 = 0$$

$$x^2(3x - 1) + 9(3x - 1) = 0$$ Factorizar x^2 en $3x^3 - x^2$ y 9 en $27x - 9$.

$$(x^2 + 9)(3x - 1) = 0$$ Factorizar el factor común $3x - 1$.

$$x^2 + 9 = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 1 = 0$$ Aplicar la propiedad de producto cero.

$$x^2 = -9 \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$x = -3i, \quad x = 3i, \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{3}$$

Los cuatro ceros complejos de f son $\left\{-3i, 3i, -2, \frac{1}{3}\right\}$.

La forma factorizada de f es

$$f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 25x^2 + 45x - 18$$
$$= 3(x + 3i)(x - 3i)(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 33.

4.7 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas están dadas al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. Encuentre la suma y el producto de los números complejos $3 - 2i$ y $-3 + 5i$. (pp. 109-144)

2. En el sistema de números complejos, resuelva la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$. (pp. 114-116)

Conceptos y vocabulario

3. Toda función polinomial de grado impar con coeficientes reales tendrá al menos __________ cero(s) real(es).

4. Si $3 + 4i$ es un cero de una función polinomial de grado 5 con coeficientes reales, entonces también lo es __________.

5. *Falso o verdadero:* una función polinomial de grado n con coeficientes reales tiene exactamente n ceros complejos. A lo más n de ellos son ceros reales.

6. *Falso o verdadero:* una función polinomial de grado 4 con coeficientes reales puede tener los ceros $-3, 2 + i, 2 - i$ y $-3 + 5i$.

Ejercicios

En los problemas 7-16, se da información de un polinomio f(x) cuyos coeficientes son números reales. Encuentre el resto de los ceros de f.

7. Grado 3; ceros: $3, 4 - i$

8. Grado 3; ceros: $4, 3 + i$

9. Grado 4; ceros: $i, 1 + i$

10. Grado 4; ceros: $1, 2, 2 + i$

11. Grado 5; ceros: $1, i, 2i$

12. Grado 5; ceros: $0, 1, 2, i$

13. Grado 4; ceros: $i, 2, -2$

14. Grado 4; ceros: $2 - i, -i$

15. Grado 6; ceros: $2, 2 + i, -3 - i, 0$

16. Grado 6; ceros: $i, 3 - 2i, -2 + i$

En los problemas 17-22, forme un polinomio f(x) con coeficientes reales que tienen el grado y los ceros dados.

17. Grado 4; ceros: $3 + 2i$; 4, multiplicidad 2

18. Grado 4; ceros: $i, 1 + 2i$

19. Grado 5; ceros: $2; -i; 1 + i$

20. Grado 6; ceros: $i, 4 - i; 2 + i$

21. Grado 4; ceros: 3, multiplicidad 2; $-i$

22. Grado 5; ceros: 1, multiplicidad 3; $1 + i$

En los problemas 23-30, use el cero dado para encontrar el resto de los ceros de cada función.

23. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 16$; ceros: $2i$

24. $g(x) = x^3 + 3x^2 + 25x + 75$; ceros: $-5i$

25. $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 20x - 12$; ceros: $-2i$

26. $h(x) = 3x^4 + 5x^3 + 25x^2 + 45x - 18$; ceros: $3i$

27. $h(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + 21x - 130$; ceros: $3 - 2i$

28. $f(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 38x - 60$; ceros: $1 + 3i$

29. $h(x) = 3x^5 + 2x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 528x - 352$; ceros: $-4i$

30. $g(x) = 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 207x + 108$; ceros: $3i$

En los problemas 31-40, encuentre los ceros complejos de cada función polinomial. Escriba f en forma factorizada.

31. $f(x) = x^3 - 1$

32. $f(x) = x^4 - 1$

33. $f(x) = x^3 - 8x^2 + 25x - 26$

34. $f(x) = x^3 + 13x^2 + 57x + 85$

35. $f(x) = x^4 + 5x^2 + 4$

36. $f(x) = x^4 + 13x^2 + 36$

37. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 22x^2 + 50x - 75$

38. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 19x^2 + 27x - 252$

39. $f(x) = 3x^4 - x^3 - 9x^2 + 159x - 52$

40. $f(x) = 2x^4 + x^3 - 35x^2 - 113x + 65$

En los problemas 41 y 42, explique por qué los hechos dados son contradictorios.

41. $f(x)$ es un polinomio de grado 3 cuyos coeficientes son números reales; sus ceros son $4 + i, 4 - i$ y $2 + i$.

42. $f(x)$ es un polinomio de grado 3 cuyos coeficientes son números reales; sus ceros son $2, i$ y $3 + i$.

43. $f(x)$ es un polinomio de grado 4 cuyos coeficientes son números reales; tres de sus ceros son 2, $1 + 2i$ y $1 - 2i$. Explique por qué el resto de los ceros deben ser números reales.

44. $f(x)$ es un polinomio de grado 4 cuyos coeficientes son números reales; dos de sus ceros son -3 y $4 - i$. Explique por qué uno de los ceros restantes debe ser un número real. Escriba uno de los ceros que faltan.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. Suma: 3; producto: $1 + 2i$ **2.** $\{-1 - i, -1 + i\}$

Repaso del capítulo

Conocimiento

Función cuadrática (pp. 292-300)

$f(x) = ax^2 + bx + c$	La gráfica es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$. Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ Eje de simetría: $x = -\frac{b}{2a}$ Intercepción y: $f(0)$ Intercepciones x: Si las hay, se encuentran calculando las soluciones reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Función de potencias (p. 314)

$f(x) = x^n, \quad n \geq 2$ par (p. 315)	Función par Pasa por $(-1, 1), (0, 0), (1, 1)$ Abre hacia arriba
$f(x) = x^n, \quad n \geq 3$ impar (p. 317)	Función impar Pasa por $(-1, -1), (0, 0), (1, 1)$ Creciente

Funciones polinomiales (pp. 313, 317-322)

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$	Dominio: todos los números reales Cuando mucho $n - 1$ puntos de retorno Comportamiento terminal: se parece $y = a_n x^n$ para $\lvert x \rvert$ grande
Ceros de un polinomio *f* (p. 318)	Números para los cuales $f(x) = 0$; los ceros reales de f son las intercepciones x de la gráfica de f.
Función racional (p. 331)	
$R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$	p, q son funciones polinomiales. Dominio: $\{x \mid q(x) \neq 0\}$
Teorema del residuo (p. 363)	Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.
Teorema del factor (p. 364)	$x - c$ es un factor de un polinomio $f(x)$ si y sólo si $f(c) = 0$.
Regla de los signos de Descartes (p. 366)	Sea f una función polinomial. El número de ceros positivos de f es igual ya sea al número de variaciones en signo de los coeficientes de $f(x)$ diferentes de cero, o bien, es igual a ese número menos algún entero par. El número de ceros negativos de f es igual al número de variaciones en signo de los coeficientes de $f(-x)$ diferentes de cero, o bien, es igual a ese número menos algún número par.
Teorema de los ceros racionales (p. 366)	Sea f un polinomio de grado 1 o mayor de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, a_0 \neq 0$ donde cada coeficiente es un entero. Si $\frac{p}{q}$, simplificada, es un cero racional de f, entonces p debe ser un factor de a_0 y q debe ser un factor de a_n.
Teorema de valor intermedio (p. 372)	Sea f una función polinomial. Si $a < b$ y $f(a)$ y $f(b)$ tiene signos opuestos, entonces existe al menos un cero real de f entre a y b.

Teorema fundamental del álgebra (p. 377)	Toda función polinomial compleja $f(x)$ de grado $n \geq 1$ tiene al menos un cero. complejo
Teorema de pares conjugados (p. 378)	Sea $f(x)$ un polinomio cuyos coeficientes son números reales. Si $r = a + bi$ es un cero de f, entonces su conjugado complejo $\bar{r} = a - bi$ también es un cero de f.

Objetivos

Sección		Debe ser capaz de...	Ejercicios de repaso
4.1	1	Graficar una función cuadrática usando transformaciones (p. 294)	1–6
	2	Identificar el vértice y el eje de simetría de una función cuadrática (p. 295)	7–16
	3	Graficar una función cuadrática usando su vértice, eje e intercepciones (p. 296)	7–16
	4	Usar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática para resolver problemas (p. 300)	111–118
	5	Usar una calculadora gráfica para encontrar la función cuadrática de mejor ajuste para los datos (p. 304)	117–118
4.2	1	Identificar las funciones polinomiales y sus grados (p. 313)	23–26
	2	Graficar funciones polinomiales usando transformaciones (p. 317)	1–6, 27–32
	3	Identificar los ceros de una función polinomial y su multiplicidad (p. 318)	33–40
	4	Analizar la gráfica de una función polinomial (p. 319)	33–40
4.3	1	Encontrar el dominio de una función racional (p. 331)	41–44
	2	Determinar las asíntotas verticales de una función racional (p. 334)	41–44
	3	Determinar las asíntotas horizontales u oblicuas de una función racional (p. 335)	41–44
4.4	1	Analizar la gráfica de una función racional (p. 341)	45–56
	2	Resolver problemas aplicados que involucran funciones racionales (p. 352)	120
4.5	1	Resolver desigualdades de polinomios (p. 356)	57–58
	2	Resolver desigualdades racionales (p. 359)	59–66
4.6	1	Usar los teoremas del residuo y del factor (p. 362)	67–72
	2	Usar la regla de los signos de Descartes (p. 365)	73–74
	3	Usar el teorema de los ceros racionales (p. 366)	75–76
	4	Encontrar los ceros reales de una función polinomial (p. 367)	77–82
	5	Resolver ecuaciones de polinomios (p. 370)	83–86
	6	Usar el teorema de cotas sobre los ceros (p. 371)	95–98
	7	Usar el teorema del valor intermedio (p. 372)	99–106
4.7	1	Usar el teorema de pares conjugados (p. 378)	107–110
	2	Encontrar una función polinomial con ceros especificados (p. 380)	107–110
	3	Encontrar los ceros complejos de un polinomio (p. 381)	87–94

Ejercicios de repaso

(Los problemas con asterisco indican que el autor los sugiere para usarse como examen de práctica).

En los problemas 1-6, grafique cada función usando transformaciones (traslación, compresión, estiramiento y reflexión).

1. $f(x) = (x - 2)^2 + 2$ **2.** $f(x) = (x + 1)^2 - 4$ ***3.** $f(x) = -(x - 1)^4$

4. $f(x) = (x - 1)^4 - 2$ **5.** $f(x) = (x - 1)^4 + 2$ **6.** $f(x) = (1 - x)^3$

En los problemas 7-16, grafique cada función cuadrática determinando si su gráfica abre hacia arriba o abajo y encontrando su vértice, ejes de simetría, intercepción y e intercepciones x, si las hay.

7. $f(x) = (x - 2)^2 + 2$ **8.** $f(x) = (x + 1)^2 - 4$ **9.** $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 16$ **10.** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

***11.** $f(x) = -4x^2 + 4x$ **12.** $f(x) = 9x^2 - 6x + 3$ **13.** $f(x) = \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1$ **14.** $f(x) = -x^2 + x + \frac{1}{2}$

15. $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$ **16.** $f(x) = -2x^2 - x + 4$

En los problemas 17-22, determine si la función cuadrática dada tiene un valor máximo y uno mínimo y luego encuentre ese valor.

*17. $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$
18. $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$
19. $f(x) = -x^2 + 8x - 4$
20. $f(x) = -x^2 - 10x - 3$
21. $f(x) = -3x^2 + 12x + 4$
22. $f(x) = -2x^2 + 4$

En los problemas 23-26, determine qué funciones son funciones polinomiales. Para las que lo son, establezca el grado. Para las que no, diga por qué.

*23. $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 5x - 2$
24. $f(x) = \dfrac{3x^5}{2x + 1}$
25. $f(x) = 3x^2 + 5x^{1/2} - 1$
26. $f(x) = 3$

En los problemas 27-32, grafique cada función usando transformaciones (traslación, compresión, estiramiento y reflexión). Muestre todas las etapas.

27. $f(x) = (x + 2)^3$
28. $f(x) = -x^3 + 3$
29. $f(x) = -(x - 1)^4$
30. $f(x) = (x - 1)^4 - 2$
*31. $f(x) = (x - 1)^4 + 2$
32. $f(x) = (1 - x)^3$

En los problemas 33-40:

a) *Encuentre las intercepciones x y y de cada función polinomial f.*
b) *Determine si la gráfica de f toca o cruza el eje x en cada intercepción x.*
c) *Comportamiento terminal: encuentre la función de potencias a la que se parece la gráfica de f para valores grandes de $|x|$.*
d) *Determine el número máximo de puntos de retorno de la gráfica de f.*
e) *Use las intercepciones x para encontrar los intervalos en los que la gráfica de f está arriba y abajo del eje x.*
f) *Grafique los puntos obtenidos en los incisos a) y e), utilice la información restante para conectarlos con una curva suave.*

*33. $f(x) = x(x + 2)(x + 4)$
34. $f(x) = x(x - 2)(x - 4)$
35. $f(x) = (x - 2)^2(x + 4)$
36. $f(x) = (x - 2)(x + 4)^2$
37. $f(x) = -2x^3 + 4x^2$
38. $f(x) = -4x^3 + 4x$
39. $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)(x + 1)$
40. $f(x) = (x - 4)(x + 2)^2(x - 2)$

En los problemas 41-44, encuentre el dominio de cada función racional. Encuentre las asíntotas, horizontal, vertical u oblicua.

41. $R(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 9}$
42. $R(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$
43. $R(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{(x + 2)^2}$
44. $R(x) = \dfrac{x^3}{x^3 - 1}$

En los problemas 45-56, analice cada función racional siguiendo los siete pasos descritos en la sección 4.4.

45. $R(x) = \dfrac{2x - 6}{x}$
46. $R(x) = \dfrac{4 - x}{x}$
47. $H(x) = \dfrac{x + 2}{x(x - 2)}$
48. $H(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
*49. $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 6}$
50. $R(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2}$
51. $F(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$
52. $F(x) = \dfrac{3x^3}{(x - 1)^2}$
53. $R(x) = \dfrac{2x^4}{(x - 1)^2}$
54. $R(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 9}$
55. $G(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$
56. $F(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{x^2 - 1}$

En los problemas 57-66, resuelva cada desigualdad.

*57. $2x^2 + 5x - 12 < 0$
58. $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$
59. $\dfrac{6}{x + 3} \geq 1$
60. $\dfrac{-2}{1 - 3x} < 1$
61. $\dfrac{2x - 6}{1 - x} < 2$
62. $\dfrac{3 - 2x}{2x + 5} \geq 2$
63. $\dfrac{(x - 2)(x - 1)}{x - 3} \geq 0$
64. $\dfrac{x + 1}{x(x - 5)} \leq 0$
*65. $\dfrac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 16} > 0$
66. $\dfrac{x(x^2 + x - 2)}{x^2 + 9x + 20} \leq 0$

En los problemas 67-70, encuentre el cociente q(x) y el residuo R cuando f(x) se divide entre g(x). ¿Es g un factor de f?

67. $f(x) = 8x^3 - 3x^2 + x + 4$; $g(x) = x - 1$
68. $f(x) = 2x^3 + 8x^2 - 5x + 5$; $g(x) = x - 2$
69. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 15x - 2$; $g(x) = x + 2$
70. $f(x) = x^4 - x^2 + 2x + 2$; $g(x) = x + 1$

71. Encuentre el valor de $f(x) = 12x^6 - 8x^4 + 1$ en $x = 4$.

72. Encuentre el valor de $f(x) = -16x^3 + 18x^2 - x + 2$ en $x = -2$.

En los problemas 73 y 74, use la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros positivos y negativos tendría cada función polinomial. No intente encontrar los ceros.

73. $f(x) = 12x^8 - x^7 + 8x^4 - 2x^3 + x + 3$
74. $f(x) = -6x^5 + x^4 + 5x^3 + x + 1$

*75. Enumere todos los ceros racionales posibles de $f(x) = 12x^8 - x^7 + 6x^4 - x^3 + x - 3$.

76. Enumere todos los ceros racionales posibles de $f(x) = -6x^5 + x^4 + 2x^3 - x + 1$.

En los problemas 77-82, use la regla de los signos de Descartes y el teorema de los ceros racionales para encontrar todos los ceros reales de cada función polinomial. Use los ceros para factorizar f en los números reales.

77. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

78. $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

*79. $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 7x + 2$

80. $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 7x - 2$

81. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 20$

82. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 18$

En los problemas 83-86, resuelva cada ecuación en el sistema de números reales.

*83. $2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + x - 6 = 0$

84. $3x^4 + 3x^3 - 17x^2 + x - 6 = 0$

85. $2x^4 + 7x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0$

86. $2x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 28x - 12 = 0$

En los problemas 87-94, encuentre los ceros complejos de cada función polinomial f(x). Escriba f en forma factorizada.

87. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

88. $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

89. $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 7x + 2$

90. $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 7x - 2$

*91. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 20$

92. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 18$

93. $f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + x - 6$

94. $f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 17x^2 + x - 6$

En los problemas 95-98, encuentre una cota para los ceros de cada función polinomial.

95. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 2$

96. $f(x) = x^3 + x^2 - 10x - 5$

*97. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 35$

98. $f(x) = 3x^3 - 7x^2 - 6x + 14$

En los problemas 99-102, use el teorema del valor intermedio para demostrar que cada polinomio tiene un cero en el intervalo dado.

99. $f(x) = 3x^3 - x - 1$; $[0, 1]$

100. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3$; $[1, 2]$

101. $f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 2x - 1$; $[0, 1]$

102. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 8x - 2$; $[1, 2]$

En los problemas 103-106, cada polinomio tiene exactamente un cero positivo. Aproxime el cero correcto a dos decimales.

103. $f(x) = x^3 - x - 2$

104. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3$

105. $f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 2x - 1$

106. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 8x - 2$

En los problemas 107-110 se da información de un polinomio complejo f(x) cuyos coeficientes son números reales. Encuentre el resto de los ceros de f.

107. Grado 3; ceros: $4 + i$, 6

108. Grado 3; zeros: $3 + 4i$, 5

109. Grado 4; ceros: i, $1 + i$

110. Grado 4; zeros: 1, 2, $1 + i$

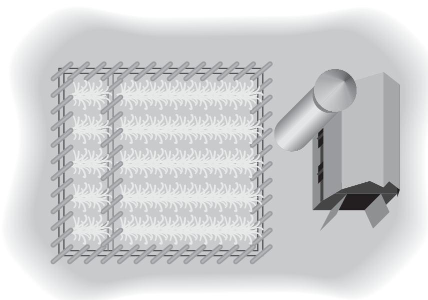
---

111. Encuentre el punto sobre la recta $y = x$ más cercano al punto $(3, 1)$.

[**Sugerencia:** encuentre el valor mínimo de la función $f(x) = d^2$, donde d es la distancia de $(3, 1)$ a un punto en la recta].

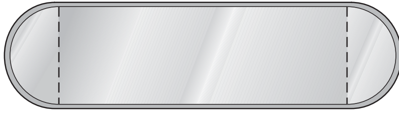
112. **Paisaje** Un ingeniero del paisaje tiene 200 pies de borde para encerrar un estanque rectangular. ¿Qué dimensiones da el estanque más grande?

113. **Cercar la mayor área** Un granjero con 10,000 metros de barda desea cercar un campo rectangular y luego dividirlo en dos parcelas con una barda paralela a uno de los lados (vea la figura). ¿Cuál es el área más grande que se podría cercar?

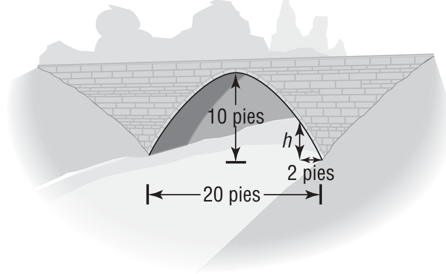


114. Un rectángulo tiene un vértice en la recta $y = 8 - 2x$, $x > 0$, otro en el origen, uno en el lado positivo del eje x y otro en lado positivo del eje y. Encuentre la mayor área A que podría contener el rectángulo.

115. Arquitectura Debe construirse una ventana especial con forma de rectángulo con semicírculos en cada orilla de manera que las dimensiones exteriores tengan 100 pies de longitud. Vea la ilustración. Encuentre las dimensiones del rectángulo que maximicen el área.



116. Puentes de arco parabólico Un puente horizontal tiene forma de un arco parabólico. Dada la información mostrada en la figura, ¿cuál es la altura h del arco a 2 pies de la orilla del río?



117. Costo marginal mínimo El costo marginal de un producto se piensa como el costo de producir una unidad adicional. Por ejemplo, si el costo de producir el producto número 50 es \$6.20, entonces cuesta \$6.20 aumentar la producción de 49 a 50 unidades de producción. La compañía Callaway Golf ha determinado que el costo marginal de fabricar x palos de golf Big Bertha se expresa por la función cuadrática

$$C(x) = 4.9x^2 - 617.4x + 19{,}600$$

a) ¿Cuántos palos de golf debe fabricar para minimizar el costo marginal?
b) Para este nivel de producción, ¿cuál es el costo marginal?

118. Crímenes violentos La función

$$V(t) = -10.0t^2 + 39.2t + 1862.6$$

modela el número V (en miles) de crímenes violentos en Estados Unidos t años después de 1990. Así, $t = 0$ representa 1990, $t + 1$ representa 1991, etcétera.

a) Determine el año en el que se cometió el mayor número de crímenes violentos.
b) ¿Aproximadamente cuántos crímenes violentos se cometieron durante este año?
c) Usando una calculadora gráfica, grafique $V = V(t)$. ¿Aumentó o disminuyó el número de crímenes violentos durante los años 1994 a 1998?

FUENTE: Basado en datos obtenidos del FBI.

119. Casos de SIDA en Estados Unidos Los siguientes datos representan el número acumulado de casos de SIDA reportados en Estados Unidos para 1990-1997.

Año, *t*	Número de casos de, *A*
1990, 1	193,878
1991, 2	251,638
1992, 3	326,648
1993, 4	399,613
1994, 5	457,280
1995, 6	528,215
1996, 7	594,760
1997, 8	653,253

FUENTE: Center for Desease Control en Prevention

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.
b) La función cúbica de mejor ajuste para estos datos es

$$A(t) = -212t^3 + 2429t^2 + 59{,}569t + 130{,}003$$

Use esta información para predecir el número acumulado de casos de SIDA reportados en Estados Unidos en 2000.

c) Use una calculadora gráfica para verificar que la función dada en el inciso *b*) es la función cúbica de mejor ajuste.
d) Con una calculadora gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos y luego grafique la función cúbica de mejor ajuste sobre el diagrama.
e) ¿Piensa que la función encontrada en el inciso *b*) será útil para predecir el número de casos de SIDA en 2005?

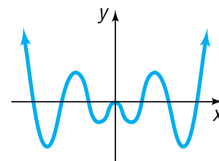
120. Construcción de una lata Se requiere que una lata con forma de cilindro circular recto tenga un volumen de 250 centímetros cúbicos.

a) Exprese la cantidad A de material para hacer la lata como función del radio r del cilindro.
b) ¿Cuánto material se requiere si la lata tiene 3 cm de radio?
c) ¿Cuánto material se requiere si la lata tiene 5 cm de radio?
d) Grafique $A = A(r)$. ¿Para qué valor de r es menor A?

121. Diseñe una función polinomial con las siguientes características: grado 6; cuatro ceros reales, uno de multiplicidad 3, intercepción y en 3; se comporta como $y = -5x^6$ para valores grandes de $|x|$. ¿Es único el polinomio? Compare su polinomio con el de otros estudiantes. ¿Qué términos serán iguales a los de otros? Agregue más características, como simetría o una lista de ceros reales. ¿Cómo se modifica el polinomio?

122. Diseñe una función racional con las siguientes características: tres ceros reales, uno de multiplicidad 2; intercepción y en 1; asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 3$; asíntota oblicua $y = 2x + 1$. ¿Es única esta función racional? Compare su resultado con el de otros estudiantes. ¿Qué es igual para todos? Agregue otras características, como simetría, o una lista de ceros reales. ¿Cómo se modifica la función racional?

123. La ilustración a la derecha muestra la gráfica de una función polinomial.
a) ¿Es par o impar el grado del polinomio?
b) ¿Es positivo o negativo el primer coeficiente?
c) ¿La función es par, impar o ninguna de las dos?
d) ¿Por qué x^2 es necesariamente un factor del polinomio?
e) ¿Cuál es el grado mínimo del polinomio?
f) Formule cinco polinomios diferentes cuyas gráficas puedan parecerse a la mostrada. Compare su polinomio con el de otros estudiantes. ¿Qué similitudes ve? ¿Qué diferencias ve?



Proyectos del capítulo



1. **Cañones** La velocidad de un proyectil depende de muchos factores, en particular, el peso de la bala.
   a) Grafique un diagrama de dispersión de los datos en la tabla siguiente. Defina x como el peso en kilogramos y y la velocidad en metros por segundo.

Tipo	Peso (kg)	Velocidad inicial (m/s)
MG 17	10.2	905
MG 131	19.7	710
MG 151	41.5	850
MG 151/20	42.3	695
MG/FF	35.7	575
MK 103	145	860
MK 108	58	520
WGr 21	111	315

FUENTE: Datos e información tomada de “Flugzeug-Handbuch, Ausgabe Dezember 1996: Guns and Cannons of the Jagdwaffe” en www.xs4all.nl/~rhorta/jgguns.htm.

   b) Determine qué tipo de función se ajustaría mejor a estos datos: lineal o cuadrática. Use una calculadora gráfica para encontrar la función de mejor ajuste. ¿Son razonables los resultados?
   c) Con base en la velocidad, se determina qué tan alto llegará un proyectil antes de comenzar a bajar. Si se dispara un cañón a un ángulo de 45º con la horizontal, entonces la función para la altura del proyectil está dada por $s(t) = -4.9t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_0t + s_0$, donde v_0 es la velocidad a la que la bala sale del cañón (velocidad inicial) y s_0 es la altura inicial de la nariz del cañón (como los cañones no son muy largos, se supone que la nariz y el punto de disparo están a la misma altura, para simplificar). Grafique la función $s = s(t)$ para cada uno de los cañones descritos en la tabla. ¿Qué cañón será el mejor para montarlo en la cima de una colina o arriba de un edificio alto? Si los cañones estuvieran en la torreta de un barco, ¿cuál sería el más efectivo?

Los siguientes proyectos están disponibles en www.prenhall.com/sullivan

2. **Project at Motorola** *How Many Cellphones Can I Make?*
3. **First and Second Differences**
4. **Weed Pollen**
5. **Maclaurin Series**
6. **Theory of Equations**
7. **CBL Experiment**

Repaso acumulativo

1. Encuentre la distancia entre los puntos $P = (1, 3)$ y $Q = (-4, 2)$.

2. Resuelva la desigualdad $x^2 \geq x$ y grafique el conjunto de soluciones.

3. Resuelva la desigualdad $x^2 - 3x < 4$ y grafique el conjunto de soluciones.

4. Encuentre una función lineal con pendiente -3 que contenga el punto $(-1, 4)$. Grafique la función.

5. Encuentre la ecuación de la recta paralela a la recta $y = 2x + 1$ y que contiene al punto $(3, 5)$. Exprese su respuesta en la forma de pendiente-intercepción y grafique la recta.

6. Grafique la ecuación $y = x^3$.

7. ¿La siguiente relación representa una función? $\{(3, 6), (1, 3), (2, 5), (3, 8)\}$. ¿Por qué sí o por qué no?

8. Resuelva la ecuación $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$.

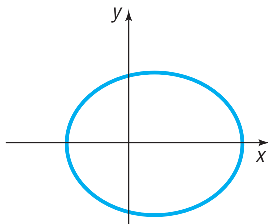
9. Resuelva la desigualdad $3x + 2 \leq 5x - 1$ determine las intercepciones y pruebe la simetría.

10. Encuentre el centro y el radio del círculo $x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$. Grafique el círculo.

11. Para la ecuación $y = x^3 - 9x$, determine las intercepciones y pruebe la simetría.

12. Encuentre una ecuación de la recta perpendicular a $3x - 2y = 7$ que contiene el punto $(1, 5)$.

13. ¿La siguiente gráfica es la gráfica de una función? ¿Por qué sí o por qué no?



14. Para la función $f(x) = x^2 + 5x - 2$, encuentre

a) $f(3)$ b) $f(-x)$

c) $-f(x)$ d) $f(3x)$

e) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$

15. Conteste las siguientes preguntas respecto de la función $f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 1}$.

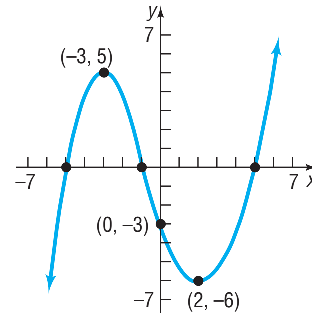
a) ¿Cuál es el dominio de f?
b) ¿Está el punto $(2, 6)$ en la gráfica de f?
c) Si $x = 3$, ¿cuánto vale $f(x)$? ¿Qué punto está en la gráfica de f?
d) Si $f(x) = 9$, ¿cuánto vale x? ¿Qué punto está en la gráfica de f?

16. Grafique la función $f(x) = -3x + 7$.

17. Grafique $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$ determinando si su gráfica abre hacia arriba o abajo y encontrando su vértice, eje de simetría, intercepción y e intercepciones x, si las hay.

18. Encuentre la tasa de cambio promedio de $f(x) = x^2 + 3x + 1$ entre 1 y x. Use este resultado para encontrar la pendiente de la recta secante que contiene $(1, f(1))$ y $(2, f(2))$.

19. En los incisos *a*) a *f*) use la siguiente gráfica.



a) Determine las intercepciones.
b) Según la gráfica, diga si es simétrica respecto del eje x, el eje y y/o el origen.
c) Según la gráfica, diga si la función es par, impar o ninguna.
d) Enumere los intervalos en los que f es creciente. Enumere los intervalos en los que f es decreciente.
e) Dé una lista de los números, si los hay, en los que f tiene un máximo local. ¿Cuáles son estos máximos locales?
f) Dé una lista de los números, si los hay, en los que f tiene un mínimo local. ¿Cuáles son estos mínimos locales?

20. Determine algebraicamente si la función $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 9}$ es par, impar o ninguna.

21. Para la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } -3 < x < 2 \\ -3x + 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Encuentre el dominio de f.
b) Localice las intercepciones.
c) Grafique la función.
d) Con base en la gráfica, encuentre el rango.

22. Grafique la función $f(x) = -3(x + 1)^2 + 5$ usando transformaciones.

23. Suponga que $f(x) = x^2 - 5x + 1$ y $g(x) = -4x - 7$.

a) Encuentre $f + g$ y establezca su dominio.
b) Encuentre $\frac{f}{g}$ y establezca su dominio.

24. Ecuación de demanda El precio p (en dólares) y la cantidad x vendida de cierto producto obedecen la ecuación de demanda

$$p = -\frac{1}{10}x + 150, \qquad 0 \leq x \leq 1500$$

a) Exprese el ingreso R como función de x.
b) ¿Cuál es el ingreso si se venden 100 unidades?
c) ¿Qué cantidad x maximiza el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?
d) ¿Qué precio debe cobrar la compañía para maximizar el ingreso?

5 Funciones exponencial y logarítmica

CONTENIDO

5.1 Funciones compuestas

5.2 Funciones inversas

5.3 Funciones exponenciales

5.4 Funciones logarítmicas

5.5 Propiedades de los logaritmos

5.6 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

5.7 Interés compuesto

5.8 Crecimiento y decaimiento exponencial; ley de Newton; modelos logísticos

5.9 Ajuste de datos a funciones exponencial, logarítmica y logística

Repaso del capítulo

Proyectos del capítulo

Repaso acumulativo

Caso del café hirviendo de McDonald's

3 de abril de 1996

Existe mucha exageración acerca del caso del café hirviendo de McDonald's. Nadie está a favor de casos frívolos o resultados estrafalarios; sin embargo, es importante entender ciertos puntos que no se informaron en la mayoría de las historias sobre el caso. El café de McDonald's no sólo era caliente, sino que estaba hirviendo, capaz de destruir casi de manera instantánea la piel, la carne y el músculo.

Un experto del demandante, un académico en termodinámica aplicada a quemaduras de piel humana, testificó que los líquidos a 180°F (82.2°C) causan una quemadura profunda en la piel en sólo dos a siete segundos. Otro testimonio mostró que, cuando la temperatura disminuye a cerca de 155°F (68.3°C), el alcance de la quemadura disminuye de manera exponencial. Así, si al derramarse el café está a 155 grados, el líquido estaría menos caliente y daría tiempo para evitar una quemadura seria.

Hoja de hechos de ATLA © 1995, 1996 Consumer Attorneys of California. Usado con autorización de la Association of Trial Lawyers of America.

—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO.



5.1 Funciones compuestas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Encontrar el valor de una función (sección 3.1, pp. 221-223)
- Dominio de una función (sección 3.1, pp. 225-226)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?" en la página 397.

OBJETIVO 1 Formar una función compuesta y encontrar su dominio.

1 Considere la función $y = (2x + 3)^2$. Si se escribe $y = f(u) = u^2$ y $u = g(x) = 2x + 3$, entonces, por el proceso de sustitución, se obtiene la función original: $y = f(u) = f(g(x)) = (2x + 3)^2$. Este proceso se llama **composición**.

En general, suponga que f y g son dos funciones y que x es un número en el dominio de g. Al evaluar g en x se obtiene $g(x)$. Si $g(x)$ está en el dominio de f, entonces se puede evaluar f en $g(x)$ y con esto se obtiene la expresión $f(g(x))$. La correspondencia de x a $f(g(x))$ se llama *función compuesta* $f \circ g$.

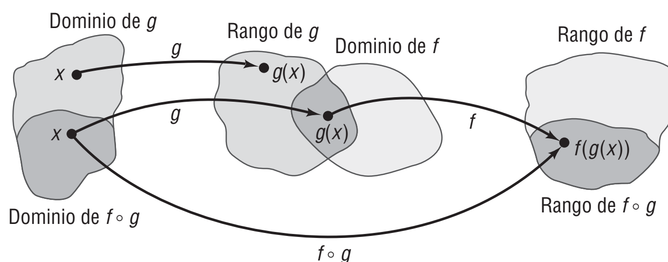
Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta**, denotada por $f \circ g$ (leído como "f compuesta con g"), se define por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números x en el dominio de g, tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

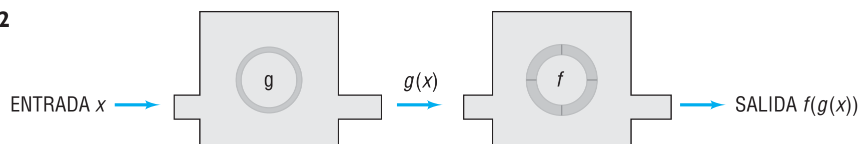
Vea con cuidado la figura 1. Sólo aquellas x en el domino de g para las que $g(x)$ está en el dominio de f pueden estar en el dominio de $f \circ g$. La razón es que si $g(x)$ no está en el dominio de f entonces $f(g(x))$ no está definida. Por esto, el dominio de $f \circ g$ es un subconjunto del dominio de g; el rango de $f \circ g$ es un subconjunto del rango de f.

Figura 1



La figura 2 proporciona una segunda ilustración de la definición. Observe que la función "interna" g en $f(g(x))$ se calcula primero.

Figura 2



Se verán algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 Evaluación de una función compuesta

Suponga que $f(x) = 2x^2 - 3$ y $g(x) = 4x$. Encuentre:

a) $(f \circ g)(1)$ b) $(g \circ f)(1)$ c) $(f \circ f)(-2)$ d) $(g \circ g)(-1)$

Solución a) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(4) = 2 \cdot 16 - 3 = 29$

$g(x) = 4x$, $g(1) = 4$; $f(x) = 2x^2 - 3$

b) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(-1) = 4 \cdot (-1) = -4$

$f(x) = 2x^2 - 3$, $f(1) = -1$; $g(x) = 4x$

c) $(f \circ f)(-2) = f(f(-2)) = f(5) = 2 \cdot 25 - 3 = 47$

$f(-2) = 5$

d) $(g \circ g)(-1) = g(g(-1)) = g(-4) = 4 \cdot (-4) = -16$

$g(-1) = -4$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

EJEMPLO 2 Encontrar una función compuesta

Suponga que $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$. Encuentre:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$

Establezca el dominio de cada función compuesta.

Solución El dominio de f y el dominio de g son todos los números reales.

a) $f \circ g = f(g(x)) = f(2x + 3) = (2x + 3)^2 + 3(2x + 3) - 1$

$f(x) = x^2 + 3x - 1$

$= 4x^2 + 12x + 9 + 6x + 9 - 1 = 4x^2 + 18x + 17$

Como los dominios de ambas, f y g, son todos los números reales, el dominio de $f \circ g$ es todos los números reales.

b) $g \circ f = g(f(x)) = g(x^2 + 3x - 1) = 2(x^2 + 3x - 1) + 3$

$g(x) = 2x + 3$

$= 2x^2 + 6x - 2 + 3 = 2x^2 + 6x + 1$

Como los dominios de ambas, f y g, son todos los números reales, el dominio de $f \circ g$ es todos los números reales.

Observe de nuevo la figura 1. Al determinar el dominio de la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, tenga en mente las ideas siguientes acerca de la entrada x.

1. $g(x)$ debe estar definida de manera que se excluya cualquier x que no esté en el dominio de g.
2. $f(g(x))$ debe estar definida de manera que se excluya cualquier x para la que $g(x)$ no esté en el domino de f.

EJEMPLO 3 Encontrar el dominio de $f \circ g$

Encuentre el dominio de $(f \circ g)(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{4}{x-1}$.

Solución Para $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, primero se observa que el dominio de g es $\{x|x \neq 1\}$, por lo que se excluye 1 del dominio de $(f \circ g)$. Después, se ve que el dominio de f es $\{x|x \neq -2\}$, lo que significa que $g(x)$ no puede ser igual a -2. Se resuelve la ecuación $g(x) = -2$ para determinar qué valores de x excluir.

$$\frac{4}{x-1} = -2 \qquad g(x) = -2$$
$$4 = -2(x-1)$$
$$4 = -2x + 2$$
$$2x = -2$$
$$x = -1$$

También se excluye -1 del dominio de $f \circ g$. El dominio de $f \circ g$ es $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$.

VERIFICACIÓN: Para $x = 1$, $g(x) = \dfrac{4}{x-1}$ no está definida, por lo que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ no está definida.

Para $x = -1$, $g(-1) = \dfrac{4}{-2} = -2$, y $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-2)$ no está definida. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

EJEMPLO 4 Encontrar una función compuesta

Suponga que $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{4}{x-1}$

Encuentre a) $f \circ g$ b) $f \circ f$

Luego encuentre el dominio de cada función compuesta.

Solución El dominio de f es $\{x|x \neq -2\}$ y el dominio de g es $\{x|x \neq 1\}$

a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{4}{x-1}\right) = \frac{1}{\dfrac{4}{x-1} + 2} = \frac{x-1}{4 + 2(x-1)} = \frac{x-1}{2x+2} = \frac{x-1}{2(x+1)}$$

↑ $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ ↑ Multiplicar por $\dfrac{x-1}{x-1}$.

En el ejemplo 3 se encontró que el dominio de $f \circ g$ es $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$. También se pudo haber encontrado el dominio de $f \circ g$ observando el dominio de g: $\{x|x \neq 1\}$. Se excluye 1 del dominio de $f \circ g$ como resultado.

Después en $(f \circ g)(x) = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$ se ve que x no puede ser igual a -1, ya que $x = -1$ da una división entre cero. También se excluye -1 del dominio de $f \circ g$. El dominio de $f \circ g$ es $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$.

b) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{x+2} + 2} = \frac{x+2}{1 + 2(x+2)} = \frac{x+2}{2x+5}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ Multiplicar por $\dfrac{x+2}{x+2}$.

El dominio de $f \circ f$ consiste en aquellas x en el dominio de $\{x|x \neq -2\}$, para las cuales

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \neq -2$$

$$\frac{1}{x+2} = -2$$
$$1 = -2(x+2)$$
$$1 = -2x - 4$$
$$2x = -5$$
$$x = -\frac{5}{2}$$

o, de manera equivalente,

$$x \neq -\frac{5}{2}$$

El dominio de $f \circ f$ es $\left\{x|x \neq -\dfrac{5}{2}, x \neq -2\right\}$.

También se pudo encontrar el dominio de $f \circ f$ reconociendo que -2 no está en el dominio de f, por lo que debe excluirse del dominio de $f \circ f$. Luego en $f \circ f$ se ve que x no puede ser igual a $-\dfrac{5}{2}$. (¿Por qué?) Por lo tanto, el dominio de $f \circ f$ es $\left\{x|x \neq -\dfrac{5}{2}, x \neq -2\right\}$. ◀

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 31 Y 33.

Los ejemplos 1*a*), 1*b*) y 2 ilustran que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Sin embargo, algunas veces $f \circ g$ sí es igual a $g \circ f$, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Muestra que dos funciones compuestas son iguales

Si $f(x) = 3x - 4$ y $g(x) = \dfrac{1}{3}(x + 4)$, demuestre que

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

para toda x.

Solución

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f\left(\frac{x+4}{3}\right) \qquad g(x) = \frac{1}{3}(x+4) = \frac{x+4}{3}$$

$$= 3 \cdot \frac{x+4}{3} - 4 \qquad \text{sustituir } g(x) \text{ en la regla para } f,\ f(x) = 3x - 4.$$

$$= x + 4 - 4 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(3x - 4) \qquad f(x) = 3x - 4$$

$$= \frac{1}{3}[(3x - 4) + 4] \qquad \text{Sustituir } f(x) \text{ en la regla para } g\ \ g(x) = \frac{1}{3}(x+4).$$

$$= \frac{1}{3}(3x) = x$$

Se concluye que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$. ◄

Para ver el concepto

Usando una calculadora gráfica, sea

$Y_1 = f(x) = 3x - 4$

$Y_2 = g(x) = \frac{1}{3}(x + 4)$

$Y_3 = f \circ g$ y $Y_4 = g \circ f$

Usando la pantalla $-3 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2$ grafique sólo Y_3 y Y_4. ¿Qué observa? Use TRACE o cree TABLE para verificar que $Y_3 = Y_4 = x$.

En la siguiente sección se verá que existe una relación importante entre las funciones f y g para las que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 43.



Aplicación de cálculo

Algunas técnicas en cálculo requieren que se puedan determinar las componentes de una función compuesta. Por ejemplo, la función $H(x) = \sqrt{x+1}$ es la composición de las funciones f y g, donde $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$, ya que $H(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \sqrt{x+1}$.

EJEMPLO 6 Encontrar las componentes de una función compuesta

Encuentre funciones f y g, tales que $f \circ g = H$ si $H(x) = (x^2 + 1)^{50}$.

Solución La función H toma $x^2 + 1$ y lo eleva a la potencia 50. Una manera natural de descomponer H es elevar la función $g(x) = x^2 + 1$ a la potencia 50. Si $f(x) = x^{50}$ y $g(x) = x^2 + 1$, entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= f(x^2 + 1)$$
$$= (x^2 + 1)^{50} = H(x)$$ ◄

Es posible encontrar otras funciones f y g para las que $f \circ g = H$ en el ejemplo 6. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x^2 + 1)^{25}$, entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x^2 + 1)^{25}) = [(x^2 + 1)^{25}]^2 = (x^2 + 1)^{50}$$

Aunque las funciones f y g encontradas como solución del ejemplo 6 no son únicas, por lo común hay una selección "natural" para f y g que llega primero a la mente.

EJEMPLO 7 **Encontrar las componentes de una función compuesta**

Encuentre las funciones f y g, tales que $f \circ g = H$ si $H(x) = \frac{1}{x+1}$.

Solución Aquí H es el recíproco de $g(x) = x + 1$. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x + 1$, se encuentra que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \frac{1}{x+1} = H(x)$$ ◀

5.1 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Encuentre $f(3)$ si $f(x) = -4x^2 + 5x$. (pp. 221–223)

2. Encuentre $f(3x)$ si $f(x) = 4 - 2x^2$. (pp. 221–223)

3. Encuentre el dominio de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$. (pp. 225–226)

Conceptos y vocabulario

4. Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^3$, entonces __________ $= (x+1)^3$.

5. *Falso o verdadero:* $f(g(x)) = f(x) \cdot g(x)$.

6. *Falso o verdadero:* el dominio de la función compuesta $(f \circ g)(x)$ es el mismo que el dominio de $g(x)$.

Ejercicios

En los problemas 7 y 8, evalúe cada expresión usando los valores dados en la tabla.

7.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	−7	−5	−3	−1	3	5	5
g(x)	8	3	0	−1	0	3	8

a) $(f \circ g)(1)$ b) $(f \circ g)(-1)$ c) $(g \circ f)(-1)$
d) $(g \circ f)(0)$ e) $(g \circ g)(-2)$ f) $(f \circ f)(-1)$

8.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	11	9	7	5	3	1	−1
g(x)	−8	−3	0	1	0	−3	−8

a) $(f \circ g)(1)$ b) $(f \circ g)(2)$ c) $(g \circ f)(2)$
d) $(g \circ f)(3)$ e) $(g \circ g)(1)$ f) $(f \circ f)(3)$

En los problemas 9-18, para las funciones dadas f y g, encuentre

a) $(f \circ g)(4)$ b) $(g \circ f)(2)$ c) $(f \circ f)(1)$ d) $(g \circ g)(0)$

9. $f(x) = 2x$; $g(x) = 3x^2 + 1$

10. $f(x) = 3x + 2$; $g(x) = 2x^2 - 1$

11. $f(x) = 4x^2 - 3$; $g(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$

12. $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 1 - 3x^2$

13. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 2x$

14. $f(x) = \sqrt{x+1}$; $g(x) = 3x$

15. $f(x) = |x|; \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

16. $f(x) = |x - 2|; \quad g(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2}$

17. $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}; \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

18. $f(x) = x^{3/2}; \quad g(x) = \dfrac{2}{x + 1}$

En los problemas 19-26, encuentre el dominio de la función compuesta $f \circ g$.

19. $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}; \quad g(x) = \dfrac{2}{x}$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}; \quad g(x) = \dfrac{-2}{x}$

21. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}; \quad g(x) = \dfrac{-4}{x}$

22. $f(x) = \dfrac{x}{x + 3}; \quad g(x) = \dfrac{2}{x}$

23. $f(x) = \sqrt{x}; \quad g(x) = 2x + 3$

24. $f(x) = x - 2; \quad g(x) = \sqrt{1 - x}$

25. $f(x) = x^2 + 1; \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$

26. $f(x) = x^2 + 4; \quad g(x) = \sqrt{x - 2}$

En los problemas 27-42, para las funciones f y g dadas, encuentre

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

Establezca el dominio de cada función compuesta.

27. $f(x) = 2x + 3; \quad g(x) = 3x$

28. $f(x) = -x; \quad g(x) = 2x - 4$

29. $f(x) = 3x + 1; \quad g(x) = x^2$

30. $f(x) = x + 1; \quad g(x) = x^2 + 4$

31. $f(x) = x^2; \quad g(x) = x^2 + 4$

32. $f(x) = x^2 + 1; \quad g(x) = 2x^2 + 3$

33. $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}; \quad g(x) = \dfrac{2}{x}$

34. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}; \quad g(x) = \dfrac{-2}{x}$

35. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}; \quad g(x) = \dfrac{-4}{x}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{x + 3}; \quad g(x) = \dfrac{2}{x}$

37. $f(x) = \sqrt{x}; \quad g(x) = 2x + 3$

38. $f(x) = \sqrt{x - 2}; \quad g(x) = 1 - 2x$

39. $f(x) = x^2 + 1; \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$

40. $f(x) = x^2 + 4; \quad g(x) = \sqrt{x - 2}$

41. $f(x) = ax + b; \quad g(x) = cx + d$

42. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}; \quad g(x) = mx$

En los problemas 43-50, demuestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

43. $f(x) = 2x; \quad g(x) = \dfrac{1}{2}x$

44. $f(x) = 4x; \quad g(x) = \dfrac{1}{4}x$

45. $f(x) = x^3; \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

46. $f(x) = x + 5; \quad g(x) = x - 5$

47. $f(x) = 2x - 6; \quad g(x) = \dfrac{1}{2}(x + 6)$

48. $f(x) = 4 - 3x; \quad g(x) = \dfrac{1}{3}(4 - x)$

49. $f(x) = ax + b; \quad g(x) = \dfrac{1}{a}(x - b), \quad a \neq 0$

50. $f(x) = \dfrac{1}{x}; \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

En los problemas 51-56, encuentre las funciones f y g, tales que $f \circ g = H$.

51. $H(x) = (2x + 3)^4$

52. $H(x) = (1 + x^2)^3$

53. $H(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

54. $H(x) = \sqrt{1 - x^2}$

55. $H(x) = |2x + 1|$

56. $H(x) = |2x^2 + 3|$

57. Si $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ y $g(x) = 2$, encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

58. Si $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$, encuentre $(f \circ f)(x)$.

59. Si $f(x) = 2x^2 + 5$ y $g(x) = 3x + a$, encuentre a tal que la gráfica de $f \circ g$ cruce el eje y en 23.

60. Si $f(x) = 3x^2 - 7$ y $g(x) = 2x + a$, encuentre a tal que la gráfica de $f \circ g$ cruce el eje y en 68.

61. Área de la superficie de un globo El área de la superficie S (en metros cuadrados) de un globo de aire caliente está dada por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

donde r es el radio del globo (en metros). Si el radio r aumenta con el tiempo t (en segundos) de acuerdo con la fórmula $r(t) = \dfrac{2}{3}t^3$, $t \geq 0$, encuentre el área de la superficie del globo como una función del tiempo t.

62. Volumen de un globo. El volumen V (en metros cúbicos) del globo de aire caliente descrito en el problema 61

está dado por $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el radio r se define por la misma función de t del problema 61, encuentre el volumen V como función de t.

63. Producción de automóviles El número N de autos producidos en cierta fábrica en 1 día después de t horas de operación está dado por $N(t) = 100t - 5t^2$, $0 \leq t \leq 10$. Si el costo C (en dólares) de producir N autos es $C(N) = 15{,}000 + 8000N$, encuentre el costo C como función del tiempo t de operación de la fábrica.

64. Preocupación ecológica El derrame de petróleo que escapa de un buque tanque tiene la forma de un círculo. Si el radio r (en pies) del derrame después de t horas es $r(t) = 200\sqrt{t}$, encuentre el área S del derrame como función del tiempo t.

65. Costo de producción El precio p de cierto producto y la cantidad x vendida obedecen a la ecuación de demanda

$$p = -\frac{1}{4}x + 100, \qquad 0 \leq x \leq 400$$

Suponga que el costo C de producir x unidades es

$$C = \frac{\sqrt{x}}{25} + 600$$

Suponiendo que todas las unidades producidas se venden, encuentre el costo C como función del precio p.
[**Sugerencia:** Despeje x de la ecuación de la demanda y luego forme la composición.]

66. Costo de un bien El precio p de cierto bien y la cantidad x vendida obedecen a la ecuación de demanda

$$p = -\frac{1}{5}x + 200, \qquad 0 \leq x \leq 1000$$

Suponga que el costo C de producir x unidades es

$$C = \frac{\sqrt{x}}{10} + 400$$

Suponiendo que todas las unidades producidas se venden, encuentre el costo C como función del precio p.

67. Volumen de un cilindro El volumen V de un cilindro circular recto de altura h y radio r es $V = \pi r^2 h$. Si la altura es el doble de radio, exprese el volumen V como función de r.

68. Volumen de un cono El volumen V de un cono circular es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Si la altura es el doble del radio, exprese el volumen V como función de r.

69. Cambio de divisas Las personas de negocios con frecuencia compran divisas extranjeras con la esperanza de ganar dinero cuando el valor de la divisa cambia. Por ejemplo, el 20 de octubre de 2003 un dólar estadounidense podía comprar 0.857118 euros y un euro podría comprar 128.6954 yenes. Sea $f(x)$ el número de euros que se pueden comprar con x dólares y sea $g(x)$ el número de yenes que se pueden comprar con x euros.

a) Encuentre una función que relacione dólares con euros.
b) Encuentre una función que relacione euros con yenes.
c) Use los resultados de los incisos *a*) y *b*) para encontrar una función que relacione dólares con yenes. Es decir, encuentre $g(f(x))$.
d) ¿Cuál es el valor de $g(f(1000))$?

70. Si f y g son funciones impares, demuestre que las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ también son impares.

71. Si f es una función impar y g es una función par, demuestre que las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ también son pares.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. -21 **2.** $4 - 18x^2$ **3.** $\{x | x \neq -2, x \neq 2\}$

5.2 Funciones inversas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Funciones (sección 3.1, pp. 221-226)
- Funciones crecientes/decrecientes (sección 3.3, pp. 242-243)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?" en la página 409.

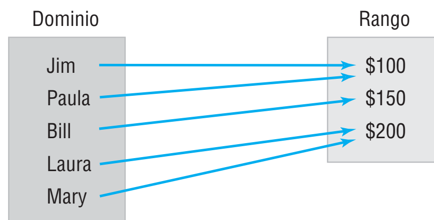
OBJETIVOS
1 Determinar la inversa de una función
2 Obtener la gráfica de la función inversa a partir de la gráfica de la función
3 Encontrar la función inversa f^{-1}


En la sección 3.1 se dijo que se podría pensar en una función f como en una máquina que recibe como entrada un número, digamos x, del dominio, lo manipula y proporciona como salida el valor $f(x)$. La **inversa de f** recibe como entrada el número $f(x)$, lo manipula y tiene como salida x.

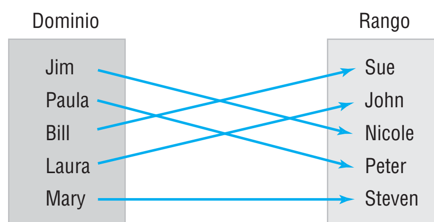
EJEMPLO 1 Encontrar la función inversa

Encuentre la inversa de las siguientes funciones.

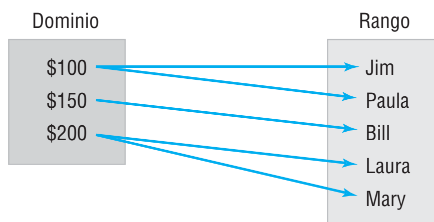
a) El dominio de la función representa los empleados del lote de autos usados de Yolanda y el rango representa su salario base.



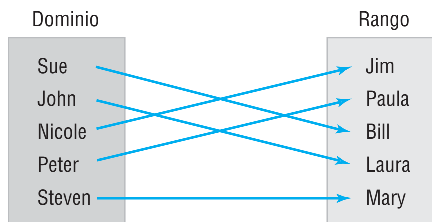
b) El dominio de la función representa los empleados del lote de autos usados de Yolanda y el rango representa los nombres de sus cónyuges.



Solución a) Los elementos en el dominio representan las entradas de la función, y los elementos en el rango representan las salidas. Para encontrar la inversa, se intercambian los elementos del dominio con los elementos del rango. Por ejemplo, la función recibe la entrada Bill y produce \$150. Así, la inversa recibe la entrada \$150 y produce Bill. La inversa de la función dada toma la forma



b) La inversa de la función dada es



◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9a).

Si la función f es un conjunto de pares ordenados (x, y), entonces la inversa de f es el conjunto de pares ordenados (y, x).

EJEMPLO 2 Encontrar la inversa de una función

Encuentre la inversa de las siguientes funciones:

a) $\{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

b) $\{(-3, -27), (-2, -8), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 8), (3, 27)\}$

Solución a) La inversa de la función dada se encuentra intercambiando las entradas en cada par ordenado, por lo que está dada por

$$\{(9, -3), (4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3)\}$$

b) La inversa de la función dada es

$$\{(-27, -3), (-8, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (8, 2), (27, 3)\}$$ ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA **13a)**.



Exploración

Observe de nuevo las funciones de los ejemplos 1 y 2. Note que las funciones en 1b) y 2b) tienen inversas que también son funciones. Sin embargo, las funciones dadas en los ejemplos 1a) y 2a) tienen inversas que no son funciones. ¿Cuáles son las similitudes de las funciones en los ejemplos 1b) y 2b)? ¿Cuáles son las similitudes de las funciones en los ejemplos 1a) y 2a)?

RESULTADOS Los ejemplos 1b) y 2b) son similares en que cada elemento del dominio corresponde a un elemento del rango. Considere el ejemplo 1b), donde Jim corresponde a Nicole, Paula corresponde a Peter, etcétera. Por otro lado, en los ejemplos 1a) y 2a) se observa que dos elementos diferentes en el dominio corresponden al mismo elemento en el rango. En el ejemplo 2a) se ve que -3 corresponde a 9 y 3 también corresponde a 9.

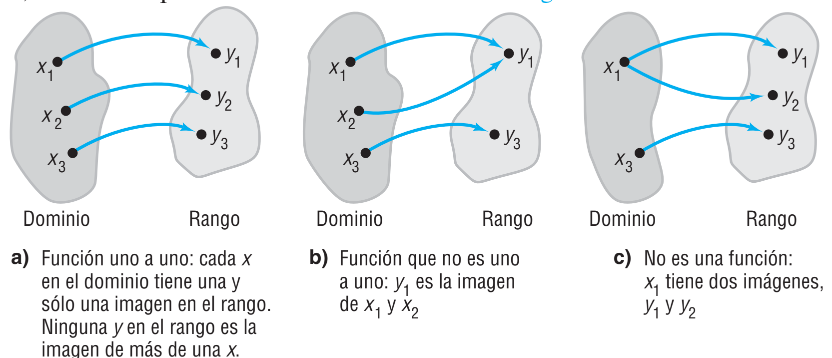
Los resultados de la exploración llevan a la siguiente definición.

En palabras
Una función es uno a uno si dos entradas diferentes nunca corresponden a la misma salida.

Cuando la inversa de una función f es en sí una función, entonces se dice que f es una **función uno a uno**. Esto es, f es **uno a uno** si, para cualquier elección de elementos x_1 y x_2 en el dominio de f, con $x_1 \neq x_2$, los valores correspondientes $f(x_1)$ y $f(x_2)$son diferentes, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dicho de otra manera, una función f es uno a uno si ninguna y en el rango es la imagen de más de una x en el dominio. Una función no es uno a uno si dos elementos diferentes en el dominio corresponden al mismo elemento en el rango. En el ejemplo $2a$), los elementos -3 y 3 corresponden a 9, de manera que la función no es uno a uno. La figura 3 ilustra la definición.

Figura 3



a) Función uno a uno: cada x en el dominio tiene una y sólo una imagen en el rango. Ninguna y en el rango es la imagen de más de una x.

b) Función que no es uno a uno: y_1 es la imagen de x_1 y x_2

c) No es una función: x_1 tiene dos imágenes, y_1 y y_2

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **9b)** Y **13b)**.

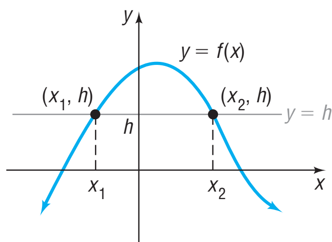
Si se conoce la gráfica de una función f, existe una prueba sencilla, llamada **prueba de la recta horizontal**, para determinar si f es uno a uno.

Teorema

Prueba de la recta horizontal

Si toda recta horizontal intersecta la gráfica de una función f a lo más en un punto, entonces f es uno a uno.

Figura 4
$f(x_1) = f(x_2) = h$ y $x_1 \neq x_2$;
f no es una función uno a uno.



La razón por la que esta prueba funciona se observa en la figura 4, donde la recta horizontal $y = h$ cruza la gráfica en dos puntos diferentes (x_1, h) y (x_2, h). Como h es la imagen de ambos puntos, x_1 y x_2, f no es uno a uno. Con base en la figura 4, se establece la prueba de la recta horizontal de otra manera: si la gráfica de cualquier recta horizontal cruza la gráfica de la función f en más de un punto, entonces f no es uno a uno.

EJEMPLO 3 Uso de la prueba de la recta horizontal

Para cada función, use la gráfica para determinar si la función es uno a uno.

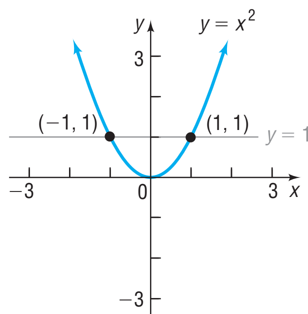
a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = x^3$

Solución

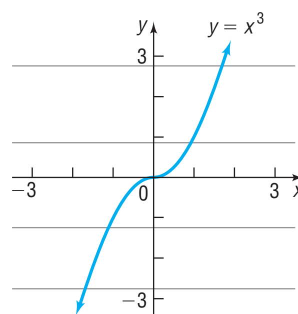
a) La figura 5*a*) ilustra la prueba de la recta horizontal para $f(x) = x^2$. La recta horizontal $y = 1$ intersecta la gráfica de f dos veces, en $(1, 1)$ y en $(-1, 1)$, entonces f no es uno a uno.

b) La figura 5*b*) ilustra la prueba de la recta horizontal para $g(x) = x^3$. Como toda recta horizontal intersecta la gráfica de g exactamente una vez, se deduce que g es uno a uno.

Figura 5



a) Una recta horizontal intersecta la gráfica dos veces, entonces f no es uno a uno



b) Toda recta horizontal intersecta la gráfica exactamente una vez, entonces g es uno a uno. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 17.

Se observará con más detalle la función uno a uno $g(x) = x^3$. Esta función es una función creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$, su dominio. Como una función creciente (o decreciente) siempre tendrá valores y diferentes

para distintos valores x, se deduce que una función que es creciente (o decreciente) en un intervalo también es una función uno a uno en el intervalo.

Teorema

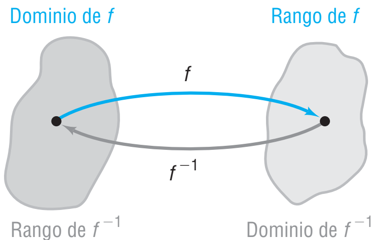
Una función que es creciente en un intervalo I es una función uno a uno en I.

Una función que es decreciente en un intervalo I es una función uno a uno en I.

Función inversa de $y = f(x)$

Si f es una función uno a uno, su inversa es una función. Entonces, para cada x en el dominio de f, existe exactamente una y en el rango (porque f es una función), y para cada y en el rango de f, existe exactamente una x en el dominio (porque f es uno a uno). La correspondencia del rango de f con el dominio de f se llama la **función inversa de *f*** y se denota por f^{-1}. La figura 6 ilustra esta definición.

Figura 6



ADVERTENCIA: ¡Tenga cuidado! f^{-1} es un símbolo para la función inversa de f. El -1 usado en f^{-1} no es un exponente. Es decir, f^{-1} *no* significa el recíproco de f; $f^{-1}(x)$ no es igual que $\dfrac{1}{f(x)}$. ■

Los dos hechos acerca de la función f y su inversa f^{-1} ahora son evidentes.

$$\text{Dominio de } f = \text{rango de } f^{-1} \qquad \text{Rango de } f = \text{dominio de } f^{-1}$$

Observe de nuevo la figura 6 para ver la relación. Si se comienza con x, se aplica f y luego se aplica f^{-1}, se obtiene otra vez x. Si se comienza con x, se aplica f^{-1} y luego se aplica f, se obtiene otra vez x. Para decirlo de modo sencillo, lo que hace f, f^{-1} lo deshace, y viceversa.

Entrada x $\xrightarrow{\text{Se aplica } f}$ $f(x)$ $\xrightarrow{\text{Se aplica } f^{-1}}$ $f^{-1}(f(x)) = x$

Entrada x $\xrightarrow{\text{Se aplica } f^{-1}}$ $f^{-1}(x)$ $\xrightarrow{\text{Se aplica } f}$ $f(f^{-1}(x)) = x$

En otras palabras

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

Por ejemplo, la función $f(x) = 2x$ multiplica el argumento x por 2. La función inversa f^{-1} deshace lo que haya hecho f. De modo que la función inversa de f es $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}x$, que divide el argumento entre 2. Para $x = 3$, se tiene

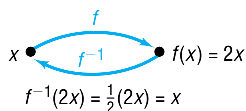
$$f(3) = 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{y} \quad f^{-1}(6) = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3,$$

de modo que f^{-1} deshace lo que f hizo. Se verifica esto demostrando que

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x) = \frac{1}{2}(2x) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\left(\frac{1}{2}x\right) = x$$

Vea la figura 7.

Figura 7



EJEMPLO 4 Verificación de funciones inversas

a) Se verifica que la inversa de $g(x) = x^3$ es $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ demostrando que

$$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

y

$$g(g^{-1}(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

b) Se verifica que la inversa de $h(x) = 3x$ es $h^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$ demostrando que

$$h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(3x) = \frac{1}{3}(3x) = x$$

y

$$h(h^{-1}(x)) = h\left(\frac{1}{3}x\right) = 3\left(\frac{1}{3}x\right) = x$$

c) Se demuestra que la inversa de $f(x) = 2x + 3$ es $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$ mediante

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 3) = \frac{1}{2}[(2x + 3) - 3] = \frac{1}{2}(2x) = x$$

y

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{2}(x - 3)\right) = 2\left[\frac{1}{2}(x - 3)\right] + 3 = (x - 3) + 3 = x$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

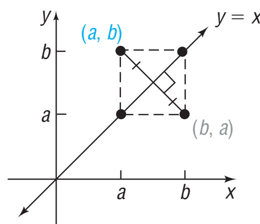


Exploración

Al mismo tiempo grafique $Y_1 = x$, $Y_2 = x^3$ y $Y_3 = \sqrt[3]{x}$ en una pantalla cuadrada, usando el rectángulo $-3 \le x \le 3$, $-2 \le y \le 2$. ¿Qué observa acerca de las gráficas $Y_2 = x^3$, su inversa $Y_3 = \sqrt[3]{x}$, y la recta $Y_1 = x$?

Repita este experimento graficando al mismo tiempo $Y_1 = x$, $Y_2 = 2x + 3$ y $Y_3 = \frac{1}{2}(x - 3)$, usando el rectángulo $-6 \le x \le 3$, $-8 \le y \le 4$. ¿Ve la simetría de la gráfica de Y_2 y su inversa Y_3 respecto de la recta $Y_1 = x$?

Figura 8



Interpretación geométrica

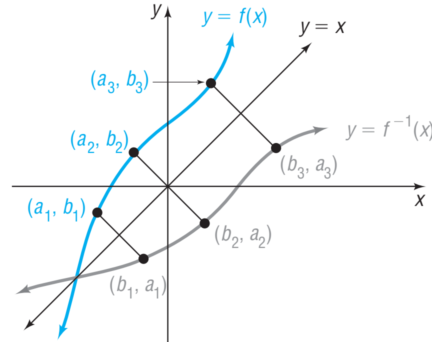


Suponga que (a, b) es un punto en la gráfica de la función uno a uno f definida por $y = f(x)$. Entonces $b = f(a)$. Esto significa que $a = f^{-1}(b)$, de manera que (b, a) es un punto en la gráfica de la función inversa f^{-1}. La relación entre el punto (a, b) en f y el punto (b, a) en f^{-1} se muestra en la figura 8. El segmento de recta que contienen (a, b) y (b, a) es perpendicular a la recta $y = x$, y esta recta lo bisecta. (¿Por qué?) Se deduce que el punto (b, a) en f^{-1} es la reflexión respecto de la recta $y = x$ del punto (a, b) en f.

Teorema La gráfica de una función f y la gráfica de su inversa f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

La figura 9 ilustra este resultado. Observe que, una vez que se conoce la gráfica de f, la gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f en la recta $y = x$.

Figura 9

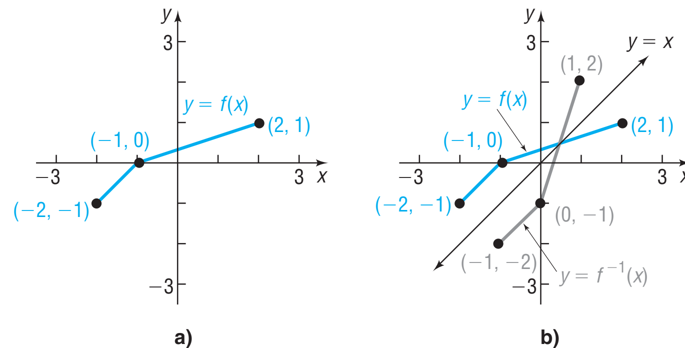


EJEMPLO 5 Gráfica de la función inversa

La gráfica en la figura 10*a*) es la de una función uno a uno $y = f(x)$. Dibuje la gráfica de su inversa.

Solución Se comienza por agregar la gráfica de $y = x$ a la figura 10*a*). Como los puntos $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ y $(2, 1)$ están en la gráfica de f, se sabe que los puntos $(-1, -2)$, $(0, -1)$ y $(1, 2)$ deben estar en la gráfica de f^{-1}. Recordando que la gráfica de f^{-1} es la reflexión respecto de la gráfica de f en la recta en la recta $y = x$, se dibuja la gráfica de f^{-1}. Vea la figura 10*b*). ◀

Figura 10



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 23.

3 Para encontrar la función inversa f^{-1}

El hecho de que las gráficas de una función f uno a uno y su función inversa f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$ señala más cosas. Dice que f^{-1} se obtiene intercambiando los papeles de x y y en f. Vea de nuevo la figura 9. Si f está definida por la ecuación

$$y = f(x)$$

entonces f^{-1} está definida por la ecuación

$$x = f(y)$$

La ecuación $x = f(y)$ define a f^{-1} de manera *implícita*. Si se despeja y de esta ecuación, se tendrá la forma *explícita* de f^{-1}, es decir,

$$y = f^{-1}(x)$$

Se usará este procedimiento para encontrar la inversa de $f(x) = 2x + 3$. (Ya que f es una función lineal y es creciente, se sabe que f es uno a uno, de modo que tiene inversa.)

EJEMPLO 6 Función inversa f^{-1}

Encuentre la inversa de $f(x) = 2x + 3$. Además, encuentre el dominio y el rango de f y f^{-1}. Grafique f y f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

Solución En la ecuación $y = 2x + 3$, intercambie las variables x y y. El resultado

$$x = 2y + 3$$

es una ecuación que define la inversa f^{-1} de manera implícita. Para encontrar la forma explícita se despeja y.

$$2y + 3 = x$$
$$2y = x - 3$$
$$y = \frac{1}{2}(x - 3)$$

La forma explícita de la inversa f^{-1} es entonces

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$$

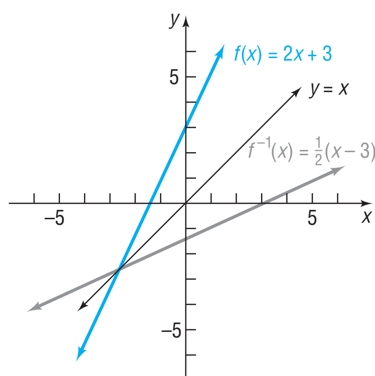
que se verificó en el ejemplo 4c).

Después se encuentra

$$\text{Dominio de } f = \text{rango de } f^{-1} = (-\infty, \infty)$$
$$\text{Rango de } f = \text{dominio de } f^{-1} = (-\infty, \infty)$$

Las gráficas de $f(x) = 2x + 3$ y su inversa $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$ se muestran en la figura 11. Note la simetría de las gráficas respecto de la recta $y = x$. ◀

Figura 11



Se describen ahora los pasos para encontrar la inversa de una función uno a uno.

Procedimiento para encontrar la inversa de una función uno a uno

PASO 1: En $y = f(x)$, intercambiar las variables x y y para obtener

$$x = f(y)$$

Esta ecuación define la función inversa f^{-1} de manera implícita.

PASO 2: Si es posible, despejar y en términos de x de la ecuación implícita para obtener la forma explícita de f^{-1}.

$$y = f^{-1}(x)$$

PASO 3: Verificar el resultado demostrando que

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

EJEMPLO 7 Función inversa

La función

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}, \qquad x \neq 1$$

es uno a uno. Encuentre su inversa y verifique el resultado.

Solución **PASO 1:** Se intercambian las variables x y y en

$$y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

para obtener

$$x = \frac{2y + 1}{y - 1}$$

PASO 2: Se despeja y

$$x = \frac{2y + 1}{y - 1}$$

$$x(y - 1) = 2y + 1 \quad \text{Multiplicar ambos lados por } y - 1.$$

$$xy - x = 2y + 1 \quad \text{Aplicar la propiedad distributiva.}$$

$$xy - 2y = x + 1 \quad \text{Restar } 2y \text{ en ambos lados; sumar } x \text{ a ambos lados.}$$

$$(x - 2)y = x + 1 \quad \text{Factorizar el lado izquierdo.}$$

$$y = \frac{x + 1}{x - 2} \quad \text{Dividir entr } x - 2.$$

La inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{x - 2}, \qquad x \neq 2 \quad \text{Sustituir y el lugar de } f^{-1}(x).$$

PASO 3: VERIFICACIÓN:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2x + 1}{x - 1}\right) = \frac{\frac{2x + 1}{x - 1} + 1}{\frac{2x + 1}{x - 1} - 2} = \frac{2x + 1 + x - 1}{2x + 1 - 2(x - 1)} = \frac{3x}{3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x + 1}{x - 2}\right) = \frac{2\left(\frac{x + 1}{x - 2}\right) + 1}{\frac{x + 1}{x - 2} - 1} = \frac{2(x + 1) + x - 2}{x + 1 - (x - 2)} = \frac{3x}{3} = x$$

◄



Exploración

En el ejemplo 7 se encontró que, si $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$, entonces $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$. Compare las asíntotas vertical y horizontal de f y f^{-1}. ¿Qué encontró? ¿Le sorprende?

RESULTADO Debe haber determinado que la asíntota vertical de f es $x = 1$ y la asíntota horizontal es $y = 2$. La asíntota vertical de f^{-1} es $x = 2$ y la asíntota horizontal es $y = 1$.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 41.

En el capítulo 3 se estableció que encontrar el rango de una función f no es fácil. Sin embargo, si f es uno a uno, se determina el rango encontrando el dominio de la función inversa f^{-1}.

EJEMPLO 8 Rango de una función

Encuentre el dominio y el rango de

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

Solución El dominio de f es $\{x | x \neq 1\}$. Para encontrar el rango de f, primero se encuentra la inversa f^{-1}. Con base en el ejemplo 7, se tiene

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$$

El dominio de f^{-1} es $\{x | x \neq 2\}$, de manera que el rango de f es $\{y | y \neq 2\}$. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 55.

Si una función no es uno a uno, entonces su inversa no es una función. Pero en ocasiones, una restricción apropiada sobre el dominio de este tipo de funciones lleva a una nueva función, que es uno a uno. Entonces su inversa es una función. Se verá un ejemplo de esta práctica común.

EJEMPLO 9 Inversa de una función con dominio restringido

Encuentre la inversa de $y = f(x) = x^2$ si $x \geq 0$. Grafique f y su inversa, f^{-1}.

Solución La función $y = x^2$ no es uno a uno. [Vea el ejemplo 3*a*).] Sin embargo, si se restringe esta función a sólo esa parte del dominio para la que $x \geq 0$, como se indica, se tiene una nueva función que es creciente en el intervalo $[0, \infty)$ y, por lo tanto, es uno a uno en $[0, \infty)$. Como resultado, la función definida por $y = f(x) = x^2, x \geq 0$ tiene una función inversa, f^{-1}.

Se seguirán los pasos establecidos para encontrar f^{-1}.

PASO 1: En la ecuación $y = x^2, x \geq 0$, se intercambian las variables x y y. El resultado es

$$x = y^2, \qquad y \geq 0$$

Esta ecuación define (de manera implícita) la función inversa.

PASO 2: Se despeja y para obtener la forma explícita de la inversa. Como $y \geq 0$, sólo se obtiene una solución para y; a saber

$$y = \sqrt{x}$$

Entonces

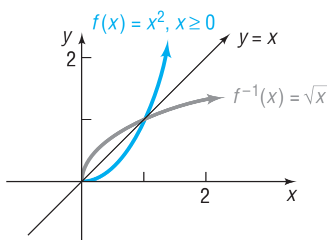
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

PASO 3: COMPROBACIÓN: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x$, ya que $x \geq 0$

$$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

La figura 12 ilustra las gráficas de $f(x) = x^2, x \geq 0$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. ◀

Figura 12



Resumen

1. Si una función f es uno a uno, entonces tiene una función inversa f^{-1}.
2. Dominio de f = rango de f^{-1}; rango de f = dominio de f^{-1}.
3. Para verificar que f^{-1} es la inversa de f, demuestre que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$.
4. Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.
5. Para encontrar el rango de una función uno a uno f, se encuentra el dominio de la función inversa f^{-1}.

5.2 Evalúe su comprensión

¿Está preparado?" *Las repuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. ¿El conjunto de pares ordenados $\{(1, 3), (2, 3), (-1, 2)\}$ es una función? (pp. 221-226)
2. ¿Dónde es creciente la función $f(x) = x^2$? ¿Dónde es decreciente? (pp. 242-243)
3. ¿Dónde es creciente la función $f(x) = x^3$? ¿Dónde es decreciente? (pp. 242–243)

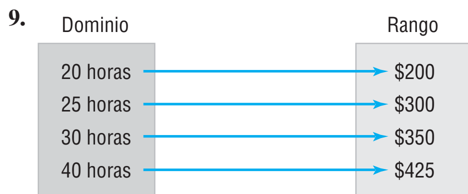
Conceptos y vocabulario

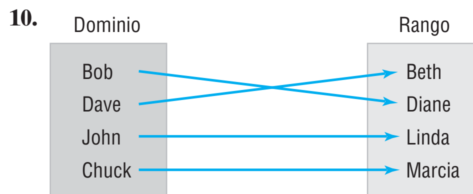
4. Si toda recta horizontal intersecta la gráfica de una función f en no más de un punto, entonces f es una función ______________.
5. Si f^{-1} denota la inversa de una función f, entonces las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta ______________.
6. Si el dominio de una función uno a uno f es $[4, \infty)$, entonces el rango de la inversa, f^{-1}, es ______________.
7. *Falso o verdadero:* si f y g son funciones inversas, entonces el dominio de f es el mismo que el dominio de g.
8. *Falso o verdadero:* si f y g son funciones inversas, entonces sus gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$.

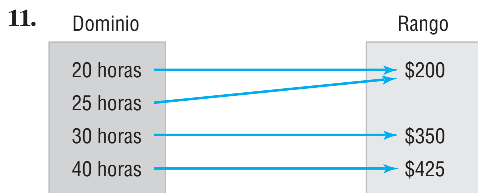
Ejercicios

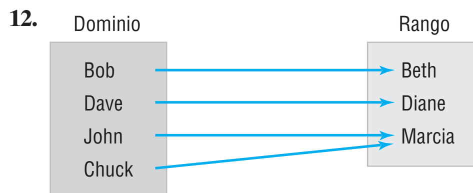
En los problemas 9-16, a) encuentre la inversa y b) determine si la inversa es una función



9.


10.


11.


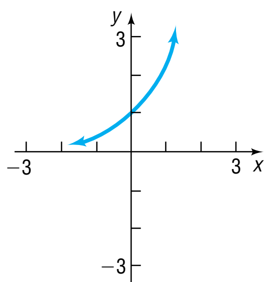
12.




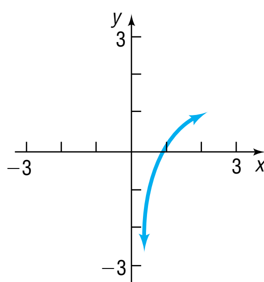
13. $\{(2, 6), (-3, 6), (4, 9), (1, 10)\}$
14. $\{(-2, 5), (-1, 3), (3, 7), (4, 12)\}$
15. $\{(0, 0), (1, 1), (2, 16), (3, 81)\}$
16. $\{(1, 2), (2, 8), (3, 18), (4, 32)\}$

En los problemas 17-22, se da la gráfica de una función f. Use la prueba de la recta horizontal para determinar si f es uno a uno.

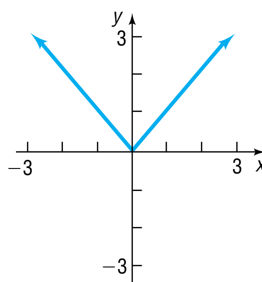
17.



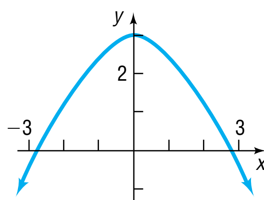
18.



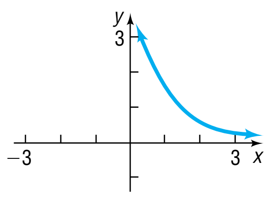
19.



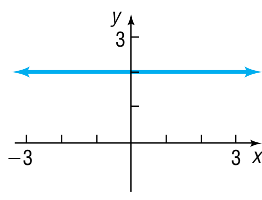
20.



21.

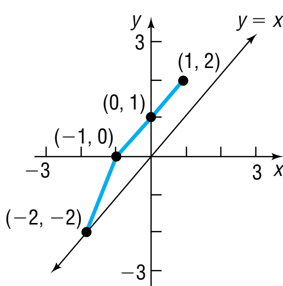


22.

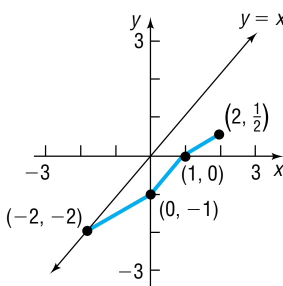


En los problemas 23-28, se da la gráfica de una función f uno a uno. Dibuje la gráfica de la función inversa f^{-1}. Por conveniencia (y como sugerencia) también se da la gráfica de $y = x$.

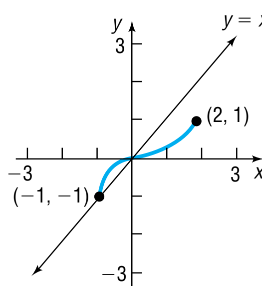
23.



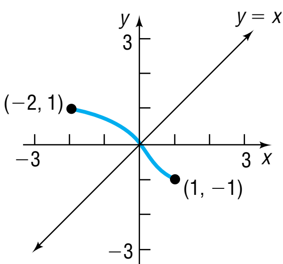
24.



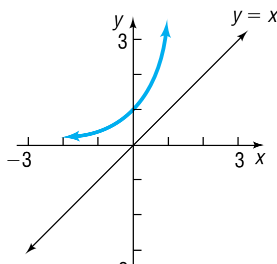
25.



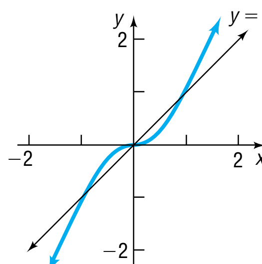
26.



27.



28.



En los problemas 29-38, verifique que las funciones f y g son inversas una de la otra, demostrando que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$.

29. $f(x) = 3x + 4; \quad g(x) = \frac{1}{3}(x - 4)$

30. $f(x) = 3 - 2x; \quad g(x) = -\frac{1}{2}(x - 3)$

31. $f(x) = 4x - 8; \quad g(x) = \frac{x}{4} + 2$

32. $f(x) = 2x + 6; \quad g(x) = \frac{1}{2}x - 3$

33. $f(x) = x^3 - 8; \quad g(x) = \sqrt[3]{x + 8}$

34. $f(x) = (x - 2)^2, x \geq 2; \quad g(x) = \sqrt{x} + 2$

35. $f(x) = \frac{1}{x}; \quad g(x) = \frac{1}{x}$

36. $f(x) = x; \quad g(x) = x$

37. $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 4}; \quad g(x) = \frac{4x - 3}{2 - x}$

38. $f(x) = \frac{x - 5}{2x + 3}; \quad g(x) = \frac{3x + 5}{1 - 2x}$

En los problemas 39-50, la función f es uno a uno. Encuentre su inversa y verifique su respuesta. Establezca el dominio y el rango de f y f^{-1}. Grafique f, f^{-1} y $y = x$ en los mismos ejes coordenados.

39. $f(x) = 3x$
40. $f(x) = -4x$
41. $f(x) = 4x + 2$
42. $f(x) = 1 - 3x$
43. $f(x) = x^3 - 1$
44. $f(x) = x^3 + 1$
45. $f(x) = x^2 + 4, \quad x \geq 0$
46. $f(x) = x^2 + 9, \quad x \geq 0$
47. $f(x) = \dfrac{4}{x}$
48. $f(x) = -\dfrac{3}{x}$
49. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$
50. $f(x) = \dfrac{4}{x + 2}$

En los problemas 51-62, la función f es uno a uno. Encuentre su inversa y verifique su respuesta. Establezca el dominio de f y encuentre su rango usando f^{-1}.

51. $f(x) = \dfrac{2}{3 + x}$
52. $f(x) = \dfrac{4}{2 - x}$
53. $f(x) = \dfrac{3x}{x + 2}$
54. $f(x) = \dfrac{-2x}{x - 1}$
55. $f(x) = \dfrac{2x}{3x - 1}$
56. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{-x}$
57. $f(x) = \dfrac{3x + 4}{2x - 3}$
58. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 4}$
59. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$
60. $f(x) = \dfrac{-3x - 4}{x - 2}$
61. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2}, \quad x > 0$
62. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{3x^2}, \quad x > 0$

63. Utilice la gráfica de $y = f(x)$ dada en el problema 23 para evaluar lo siguiente:
a) $f(-1)$ b) $f(1)$ c) $f^{-1}(1)$ d) $f^{-1}(2)$

64. Utilice la gráfica de $y = f(x)$ dada en el problema 24 para evaluar lo siguiente:
a) $f(2)$ b) $f(1)$ c) $f^{-1}(0)$ d) $f^{-1}(-1)$

65. Encuentre la inversa de la función lineal
$$f(x) = mx + b, \quad m \neq 0$$

66. Encuentre la inversa de la función lineal
$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq r$$

67. Una función f tiene una función inversa. Si la gráfica de f está en el cuadrante I, ¿en qué cuadrante está la gráfica de f^{-1}?

68. Una función f tiene una función inversa. Si la gráfica de f está en el cuadrante II, ¿en qué cuadrante está la gráfica de f^{-1}?

69. La función $f(x) = |x|$ no es uno a uno. Encuentre una restricción adecuada sobre el dominio de f de modo que la nueva función sea uno a uno. Luego encuentre la inversa de f.

70. La función $f(x) = x^4$ no es uno a uno. Encuentre una restricción adecuada sobre el dominio de f de modo que la nueva función sea uno a uno. Luego encuentre la inversa de f.

71. Altura en relación con la circunferencia de la cabeza La circunferencia de la cabeza C de un niño se relaciona con su altura (ambas en pulgadas) mediante la función
$$H(C) = 2.15C - 10.53.$$
a) Exprese la circunferencia de la cabeza C como función de la altura H.
b) Prediga la circunferencia de la cabeza de un niño que tiene 26 pulgadas de altura.

72. Conversión de temperatura Para convertir x grados Celsius en y grados Fahrenheit, se usa la fórmula $y = f(x) = \dfrac{9}{5}x + 32$. Para convertir x grados Fahrenheit en y grados Celsius, se usa la fórmula $y = g(x) = \dfrac{5}{9}(x - 32)$. Muestre que f y g son funciones inversas.

73. Demanda de maíz La demanda de maíz obedece la ecuación $p(x) = 300 - 50x$, donde p es el precio por bushel (en dólares) y x es el número de bushels producidos, en millones. Exprese la cantidad de producción x como función del precio p.

74. Periodo de un péndulo El periodo T (en segundos) de un péndulo simple es una función de su longitud l (en pies), dada por $T(l) = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, donde $g \approx 32.2$ pies por segundo es la aceleración de la gravedad. Exprese la longitud l como función del periodo T.

75. Dada
$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$
encuentre $f^{-1}(x)$. Si $c \neq 0$, ¿en qué condiciones sobre a, b, c y d se cumple $f = f^{-1}$?

76. ¿Pueden ser iguales una función y su inversa? ¿Qué debe cumplirse para la gráfica de f para que esto ocurra? Dé algunos ejemplos que apoyen su conclusión.

77. Dibuje una gráfica de una función uno a uno que contenga los puntos (-2, −3), (0, 0) y (1, 5). Ahora dibuje la gráfica de su inversa. Compare su gráfica con la de otros estudiantes. Analice las similitudes. ¿Qué diferencias ve?

78. Dé un ejemplo de una función cuyo dominio es el conjunto de números reales y no es creciente ni decreciente en su dominio, pero es uno a uno.
[**Sugerencia:** Utilice una función definida por partes.]

79. Si una función es par, ¿podría ser uno a uno? Explique.

80. ¿Toda función impar es uno a uno? Explique.

81. Si la gráfica de una función y su inversa se cruzan, ¿dónde debe necesariamente ocurrir esto? ¿Pueden cruzarse en algún otro punto? ¿Deben cruzarse?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. Sí; para cada entrada x existe una sola salida y.

2. En $(0, \infty)$; en $(-\infty, 0)$.

3. Es creciente en su dominio $(-\infty, \infty)$.

5.3 Funciones exponenciales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Exponentes (sección R.2, pp. 21-24 y sección R.8, pp.70-75)
- Técnicas para graficar: transformaciones (sección 3.5, pp. 262)
- Tasa de cambio promedio (sección 3.3, pp. 246-247)
- Solución de ecuaciones (sección 1.1, pp. 84-90) y (sección 1.2, pp. 96-105)
- Asíntotas horizontales (sección 4.3, pp. 333-334)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?" en la página 423.

OBJETIVOS
1. Evaluar las funciones exponenciales
2. Graficar las funciones exponenciales
3. Definir el número e
4. Resolver ecuaciones exponenciales

1 En la sección R.8, se da una definición para elevar un número real a a una potencia racional. Con base en ese análisis, se dio un significado a expresiones de la forma

$$a^r$$

donde la base a es un número real positivo y el exponente r es un número racional.



Pero, ¿cuál es el significado de a^x, donde la base a es un número real positivo y el exponente x es un número irracional? Aunque una definición rigurosa requiere métodos estudiados en cálculo, es fácil seguir la base para la definición: se selecciona un número racional r que se forma truncando (eliminando) todos menos un número finito de dígitos del número irracional x. Entonces es razonable esperar que

$$a^x \approx a^r$$

Por ejemplo, si se toma el número irracional $\pi = 3.14159\ldots$. Entonces una aproximación a a^π es

$$a^\pi \approx a^{3.14}$$

donde se eliminaron del valor de π los dígitos después de los centésimos. Una mejor aproximación sería

$$a^\pi \approx a^{3.14159}$$

donde se eliminaron los dígitos después de los cienmilésimos. Si se continúa de esta manera, se obtienen aproximaciones de a^π para cualquier grado de exactitud que se desee.

Muchas calculadoras traen una tecla $\boxed{x^y}$ o una tecla de acento circunflejo o inserción $\boxed{\wedge}$ para trabajar con exponentes. Para evaluar expresiones de la forma a^x, se introduce la base a, luego se presiona la tecla $\boxed{x^y}$ (o la $\boxed{\wedge}$), se introduce el exponente x y se presiona $\boxed{=}$ (o $\boxed{\text{enter}}$).

EJEMPLO 1 Uso de una calculadora para evaluar potencias de 2

Utilice una calculadora para evaluar:

a) $2^{1.4}$ b) $2^{1.41}$ c) $2^{1.414}$ d) $2^{1.4142}$ e) $2^{\sqrt{2}}$

Solución a) $2^{1.4} \approx 2.639015822$ b) $2^{1.41} \approx 2.657371628$

c) $2^{1.414} \approx 2.66474965$ d) $2^{1.4142} \approx 2.665119089$

e) $2^{\sqrt{2}} \approx 2.665144143$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

Se puede demostrar que las leyes de los exponentes se cumplen para exponentes reales.

Teorema

Leyes de exponentes

Si s, t, a y b son números reales, con $a > 0$ y $b > 0$, entonces

$$a^s \cdot a^t = a^{s+t} \qquad (a^s)^t = a^{st} \qquad (ab)^s = a^s \cdot b^s$$
$$1^s = 1 \qquad a^{-s} = \frac{1}{a^s} = \left(\frac{1}{a}\right)^s \qquad a^0 = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Ahora estamos listos para la siguiente definición:

Una **función exponencial** es una función de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde a es un número real positivo $(a > 0)$ y $a \neq 1$. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales.

Se excluye la base $a = 1$, porque esta función es simplemente la función constante $f(x) = 1^x = 1$. También es necesario excluir bases que son negativas, porque de otra manera se tendrían que excluir del dominio muchos valores de x, como $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{4}$.

[Recuerde que $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$, $(-3)^{3/4} = \sqrt[4]{(-3)^3} = \sqrt[4]{-27}$, y así sucesivamente, no están definidas en el sistema de números reales.]

PRECAUCIÓN: Es importante distinguir una función de potencias $g(x) = x^n$, $n \geq 2$ un entero, de una función exponencial $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 0$, a real. En una función de potencias, la base es una variable y en una función exponencial, la base es una constante y el exponente es la variable. ■

Algunos ejemplos de funciones exponenciales son

$$f(x) = 2^x, \qquad F(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Observe que en cada ejemplo la base es una constante y el exponente es una variable.

Se podría preguntar qué papel tiene la base a en la función exponencial $f(x) = a^x$. Para averiguarlo se usa la siguiente *exploración*.



Exploración

a) Evalúe $f(x) = 2^x$ en $x = -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.

b) Evalúe $g(x) = 3x + 2$ en $x = -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.

c) Comente acerca del patrón que existe en los valores de f y g.

RESULTADO

a) La tabla 1 muestra los valores de $f(x) = 2^x$ para $x = -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.

b) La tabla 2 muestra los valores de $g(x) = 3x + 2$ para $x = -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.

Tabla 1

x	$f(x) = 2^x$
-2	$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

Tabla 2

x	$g(x) = 3x + 2$
-2	$g(-2) = 3(-2) + 2 = -4$
-1	-1
0	2
1	5
2	8
3	11

c) En la tabla 1 se observa que cada valor de la función exponencial $f(x) = a^x = 2^x$ se pudo encontrar multiplicando el valor anterior de la función por la base, $a = 2$. Por ejemplo,

$$f(-1) = 2 \cdot f(-2) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad f(0) = 2 \cdot f(-1) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad f(1) = 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 1 = 2$$

etcétera.

Dicho de otra forma, se ve que la razón de resultados consecutivos es constante para incrementos unitarios de la entrada. La constante es igual al valor de la base de la función exponencial a. Por ejemplo, para la función $f(x) = 2^x$, se observa que

$$\frac{f(-1)}{f(-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2, \qquad \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{2}{1} = 2, \qquad \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{2^{x+1}}{2^x} = 2$$

y así sucesivamente.

De la tabla 2 se ve que la función $g(x) = 3x + 2$ no tiene la razón de salidas consecutivas que son constantes, porque no es exponencial. Por ejemplo,

$$\frac{g(-1)}{g(-2)} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} \neq \frac{g(1)}{g(0)} = \frac{5}{2}$$

En su lugar, como $g(x) = 3x + 2$ es una función lineal, para un incremento de una unidad en la entrada, la salida aumenta una cantidad fija igual al valor de la pendiente, 3.

En palabras

Para una función exponencial $f(x) = a^x$, por cada unidad de cambio en la entrada x, la razón de salidas consecutivas es la constante a.

Los resultados de la exploración llevan al siguiente resultado.

Teorema

Para una función exponencial $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, si x es cualquier número real, entonces

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = a$$

Demostración $\quad \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = \dfrac{a^{x+1}}{a^x} = a^{x+1-x} = a^1 = a$ ■



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

Gráficas de funciones exponenciales

2 Primero se grafica la función exponencial $f(x) = 2^x$.

EJEMPLO 2 **Gráfica de una función exponencial**

Grafique la función exponencial: $\quad f(x) = 2^x$

Solución El dominio de $f(x) = 2^x$ consiste en todos los números reales. Se comienza por localizar algunos puntos en la gráfica de $f(x) = 2^x$, como los dados en la tabla 3.

Como $2^x > 0$ para toda x, el rango de f es el intervalo $(0, \infty)$. De esto se concluye que la gráfica no tiene intercepciones x y, de hecho, la gráfica estará arriba del eje x. Como indica la tabla 3, la intercepción y es 1. La tabla 3 también indica que cuando $x \to -\infty$ el valor de $f(x) = 2^x$ se acerca cada vez más a 0. Se concluye que el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica cuando $x \to -\infty$. Esto proporciona el comportamiento terminal de la gráfica para valores negativos grandes de x.

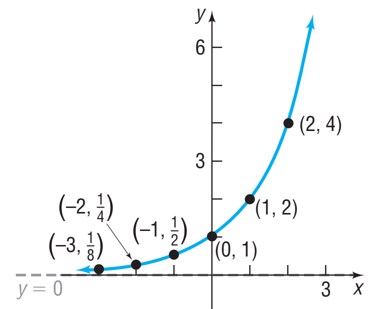
Para determinar el comportamiento terminal para valores positivos grandes de x, vea de nuevo la tabla 3. Cuando $x \to \infty$, $f(x) = 2^x$ crece muy rápido, haciendo que la gráfica de $f(x) = 2^x$ suba con rapidez. Es evidente que f es una función creciente y, por lo tanto, es uno a uno.

Usando esta información, se grafican algunos puntos de la tabla 3 y se conectan con una curva suave continua, como se muestra en la figura 13.

Tabla 3

x	$f(x) = 2^x$
-10	$2^{-10} \approx 0.00098$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
10	$2^{10} = 1024$

Figura 13



Como se verá, las gráficas de la forma ilustrada en la figura 13 ocurren con frecuencia en variedad de situaciones. Por ejemplo, vea la gráfica de la figura 14, que ilustra el precio al cierre de una acción de Harley Davidson. A partir de esta gráfica los inversionistas podrían concluir que el precio de la acción Harley Davidson tiene un *comportamiento exponencial*, es decir, la gráfica muestra un crecimiento rápido o exponencial.

Figura 14

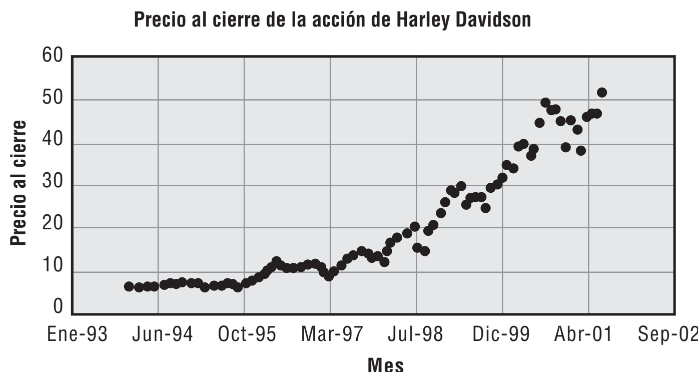
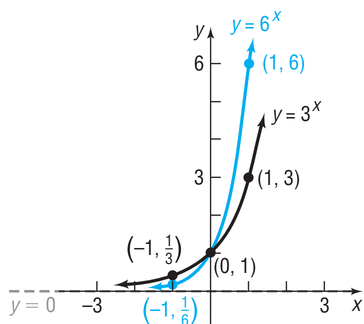


Figura 15



Más adelante se estudiarán más situaciones que llevan al crecimiento exponencial. Por ahora, continuará la búsqueda de las propiedades de las funciones exponenciales.

La gráfica de $f(x) = 2^x$ en la figura 13 es típica de las funciones exponenciales que tienen una base mayor que 1. Estas funciones son crecientes y, por ende, uno a uno. Sus gráficas están arriba del eje x, pasan por el punto $(0, 1)$ y en adelante crecen con rapidez cuando $x \to \infty$. Si $x \to -\infty$, el eje x $(y = 0)$ es una asíntota horizontal. No hay asíntotas verticales. Por último, las gráficas son suaves y continuas, sin esquinas ni saltos.

La figura 15 ilustra las gráficas de dos funciones exponenciales más cuyas bases son mayores que 1. Observe que para la base más grande, la inclinación de la gráfica es mayor cuando $x > 0$ y está más cerca del eje x cuando $x < 0$.

Para ver el concepto

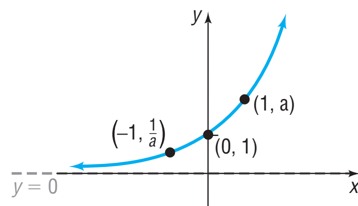
Grafique $y = 2^x$ y compare lo que ve en la figura 13. Limpie la pantalla y grafique $y = 3^x$ y $y = 6^x$ y compare lo que ve en la figura 15. Limpie la pantalla y grafique $y = 10^x$ y $y = 100^x$. ¿Qué tamaño de pantalla parece funcionar mejor?

El siguiente cuadro resume la información que se tiene acerca de $f(x) = a^x$, $a > 1$.

Propiedades de la función exponencial $f(x) = a^x$, $a > 1$

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales; el rango es el conjunto de los números reales positivos.
2. No hay intercepciones x; la intercepción y es 1.
3. El eje x $(y = 0)$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.
4. $f(x) = a^x$, $a > 1$, es una función creciente y es uno a uno.
5. La gráfica de f contiene los puntos $(0, 1)$, $(1, a)$ y $\left(-1, \dfrac{1}{a}\right)$.
6. La gráfica de f es suave y continua, sin esquinas ni saltos. Vea la figura 16.

Figura 16
$f(x) = a^x$, $a > 1$



Ahora se considera $f(x) = a^x$ cuando $0 < a < 1$.

EJEMPLO 3 Gráfica de la función exponencial

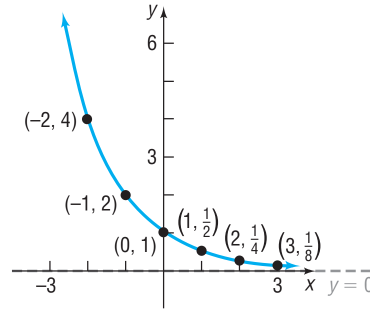
Grafique la función exponencial: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Solución El dominio de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ consiste en todos los números reales. Como antes, se localizan algunos puntos en la gráfica creando la tabla 4. Como $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ para toda x, el rango de f es el intervalo $(0, \infty)$. La gráfica está arriba del eje x y, por lo tanto, no tiene intercepciones x. La intercepción y es 1. Cuando $x \to -\infty$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ crece con rapidez. Cuando $x \to \infty$, los valores de $f(x)$ se acercan a 0. El eje x $(y = 0)$ es una asíntota horizontal cuando $x \to \infty$. Es evidente que f es una función decreciente por lo que es uno a uno. La figura 17 ilustra la gráfica.

Tabla 4

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-10	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = 1024$
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$
10	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.00098$

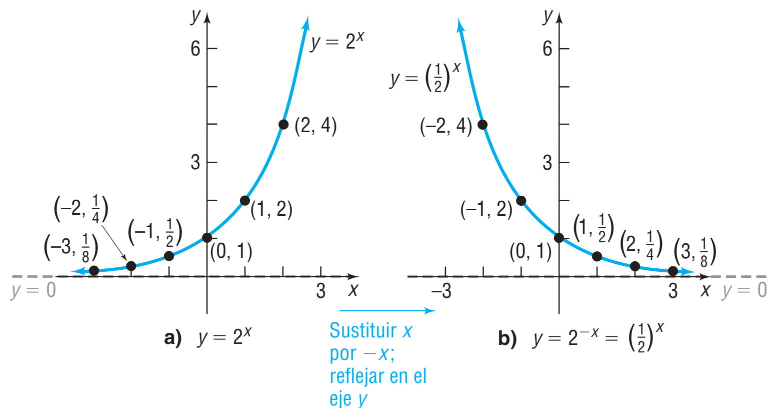
Figura 17



◀

Se pudo haber obtenido la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a partir de la gráfica de $y = 2^x$ usando transformaciones. Si $f(x) = 2^x$, entonces $f(-x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. La gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ es una reflexión respecto del eje y de la gráfica de $y = 2^x$. Vea las figuras 18*a*) y 18*b*).

Figura 18





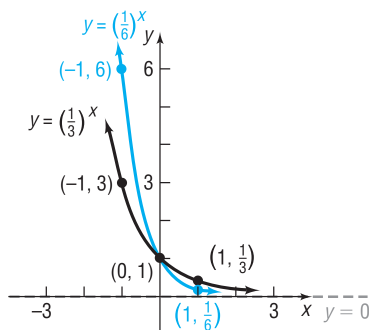
Para ver el concepto

Usando una calculadora gráfica, grafique simultáneamente

a) $Y_1 = 3^x, \quad Y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b) $Y_1 = 6^x, \quad Y_2 = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

Concluya que la gráfica de $Y_2 = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, para $a > 0$, es la reflexión en el eje y de la gráfica de $Y_1 = a^x$.

Figura 19



La gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en la figura 17 es típica de las funciones exponenciales que tienen base entre 0 y 1. Estas funciones son decrecientes y uno a uno. Sus gráficas están arriba del eje x y pasan por el punto $(0, 1)$. Las gráficas suben con rapidez cuando $x \to -\infty$. Cuando $x \to \infty$, el eje x es una asíntota horizontal. No hay asíntotas verticales. Por último, las gráficas son suaves y continuas, sin esquinas ni saltos.

La figura 19 ilustra las gráficas de dos funciones exponenciales más cuyas bases están entre 0 y 1. Observe que con la elección de una base más cercana a 0 se obtiene una gráfica más inclinada cuando $x < 0$ y más cerca del eje x cuando $x > 0$.



Para ver el concepto

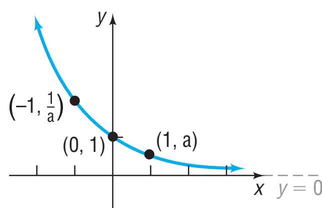
Grafique $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y compare lo que ve con la figura 17. Limpie la pantalla y grafique $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ y compare lo que ve con la figura 19. Limpie la pantalla y grafique $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ y $y = \left(\frac{1}{100}\right)^x$. ¿Qué tamaño de pantalla parece funcionar mejor?

El siguiente cuadro resume la información que se tiene acerca de la función $f(x) = a^x, 0 < a < 1$.

Propiedades de la gráfica de una función exponencial $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales; el rango es el conjunto de números reales positivos.
2. No hay intercepciones x; la intercepción y es 1.
3. El eje x $(y = 0)$ es una asíntota horizontal cuando $x \to \infty$.
4. $f(x) = a^x, 0 < a < 1$, es una función decreciente y es uno a uno.
5. La gráfica de f contiene los puntos $(0, 1)$, $(1, a)$ y $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$.
6. La gráfica de f es suave y continua, sin esquinas ni saltos. Vea la figura 20.

Figura 20
$f(x) = a^x$, $0 < a < 1$

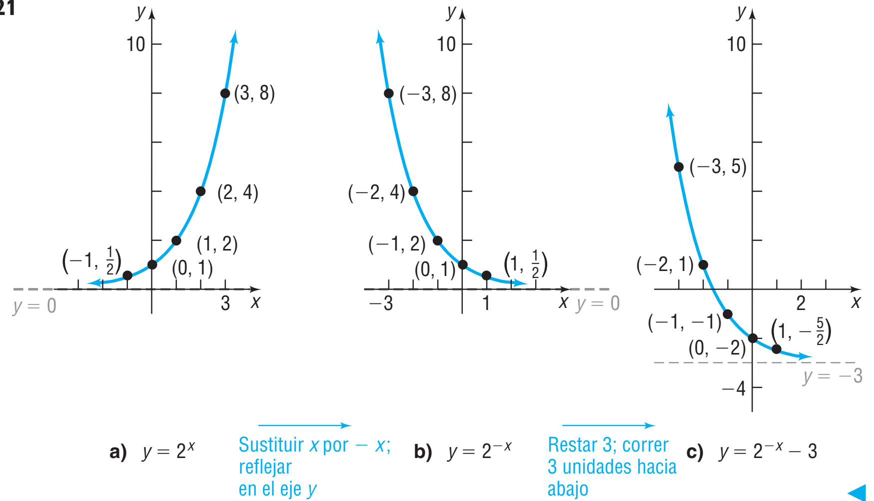


EJEMPLO 4 **Gráficas de funciones exponenciales usando transformaciones**

Grafique $f(x) = 2^{-x} - 3$ y determine el dominio, rango y asíntota horizontal de f.

Solución Se comienza con la gráfica de $y = 2^x$. La figura 21 muestra los pasos. Como se ve en la figura 21c), el dominio de $f(x) = 2^{-x} - 3$ es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y el rango es el intervalo $(-3, \infty)$. La asíntota horizontal de f es la recta $y = -3$.

Figura 21



a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{-x}$ c) $y = 2^{-x} - 3$

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37.

La base e

3 Como se verá enseguida, muchos problemas que ocurren en la naturaleza se modelan mediante una función exponencial cuya base es cierto número irracional, que se simboliza por la letra e.

Se verá una manera de llegar a este importante número e.

El **número *e*** está definido como el número al que se acerca la expresión

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (2)$$



cuando $n \to \infty$. En cálculo, esto se expresa usando la notación para el límite como

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

La tabla 5 ilustra lo que ocurre a la expresión de definición (2) cuando n toma valores cada vez más grandes. El último número en la última columna

Tabla 5

n	$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{n}$	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1,000	0.001	1.001	2.716923932
10,000	0.0001	1.0001	2.718145927
100,000	0.00001	1.00001	2.718268237
1,000,000	0.000001	1.000001	2.718280469
1,000,000,000	10^{-9}	$1 + 10^{-9}$	2.718281828

en la tabla es correcto a nueve decimales y es el mismo que el que obtiene con la tecla e en su calculadora (si se expresa correctamente con nueve lugares decimales).

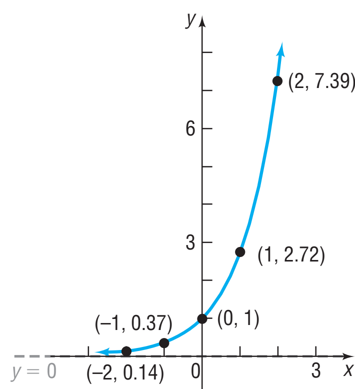
La función exponencial $f(x) = e^x$, cuya base es el número e, ocurre con tanta frecuencia en las aplicaciones que es usual referirse a ella como *la función exponencial*. Sin duda, la mayoría de las calculadoras tiene una tecla* $\boxed{e^x}$ o $\boxed{\exp(x)}$, que se utiliza para evaluar la función exponencial para un valor dado de x.

Utilice ahora su calculadora para aproximar e^x para $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1$ y $x = 2$, como se ha hecho para crear la tabla 6. La gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ está dada en la figura 22. Como $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$. ¿Por qué? (Vea las figuras 13 y 15.)

Tabla 6

x	e^x
−2	0.14
−1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39

Figura 22
$y = e^x$





Para ver el concepto

Grafique $Y_1 = e^x$ y compare lo que ve con la figura 22. Use VALUE o TABLE para verificar los puntos en la gráfica mostrada en la figura 22. Ahora grafique $Y_2 = 2^x$ y $Y_3 = 3^x$ en la misma pantalla que $Y_1 = e^x$. Observe que la gráfica de $Y_1 = e^x$ está entre estas dos gráficas.

EJEMPLO 5 Gráfica de funciones exponenciales usando transformaciones

Grafique $f(x) = -e^{x-3}$ y determine el dominio, el rango y la asíntota horizontal de f.

Solución Se comienza con la gráfica de $y = e^x$. La figura 23 muestra los pasos.

Como ilustra la figura 23c), el dominio de $f(x) = -e^{x-3}$ es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y el rango es el intervalo $(-\infty, 0)$. La asíntota horizontal es la recta $y = 0$.

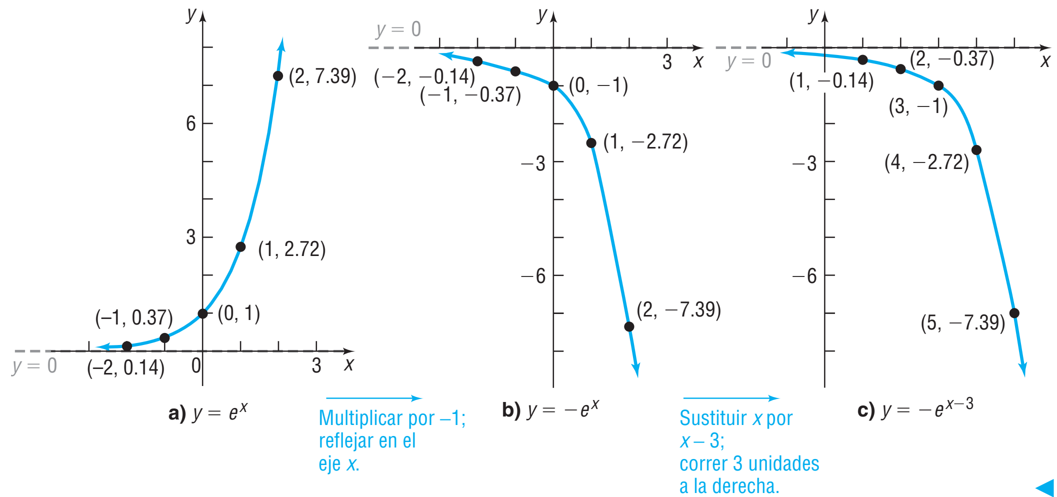
*Si su calculadora no tiene esta tecla tiene una tecla [SHIFT] ([2nd]) y una tecla [ln]; se despliega el número e como sigue:

Teclas: [1] [SHIFT] [ln]

Pantalla: [1] [2.7182818]

La razón por la que esto funciona se aclara en la sección 5.4.

Figura 23



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45.

Ecuaciones exponenciales

4 Las ecuaciones que involucran términos de la forma a^x, $a > 0$, $a \neq 0$, con frecuencia reciben el nombre de **ecuaciones exponenciales**. Estas ecuaciones algunas veces se resuelven aplicando de manera adecuada las leyes de exponentes y de la propiedad (3).

$$\text{Si } a^u = a^v, \quad \text{entonces } u = v \qquad (3)$$

La propiedad (3) es una consecuencia del hecho de que las funciones exponenciales son uno a uno. Para usar la propiedad (3), cada lado de la igualdad debe tener la misma base.

EJEMPLO 6 Solución de una ecuación exponencial

Resuelva: $3^{x+1} = 81$

Solución Como $81 = 3^4$, la ecuación se escribe como

$$3^{x+1} = 81 = 3^4$$

Ahora se tiene la misma base, 3, en ambos lados, de manera que se aplica la propiedad (3) para obtener

$$x + 1 = 4$$
$$x = 3$$

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

EJEMPLO 7 Solución de una ecuación exponencial

Resuelva: $e^{-x^2} = (e^x)^2 \cdot \frac{1}{e^3}$

Solución Primero se usan las leyes de exponentes para tener la base e en el lado derecho.

$$(e^x)^2 \cdot \frac{1}{e^3} = e^{2x} \cdot e^{-3} = e^{2x-3}$$

Como resultado,

$$e^{-x^2} = e^{2x-3}$$

$$-x^2 = 2x - 3 \quad \text{Aplicar la propiedad (3).}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \text{Poner la ecuación cuadrática en forma estándar.}$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$

$$x = -3 \quad \text{or} \quad x = 1 \quad \text{Usar la propiedad de producto cero.}$$

La solución es {-3, 1}. ◀

Aplicación

Muchas aplicaciones incluyen ecuaciones exponenciales. Se verá una.

EJEMPLO 8 Probabilidad exponencial

Entre las 9:00 PM y las 10:00 PM, los autos llegan al Auto Burger King con una tasa de 12 autos por hora (0.2 autos por minuto). La siguiente fórmula de la teoría de probabilidades se utiliza para determinar la probabilidad de que un auto llegue en los primeros t minutos después de las 9:00 de la noche.

$$F(t) = 1 - e^{-0.2t}$$

a) Determine la probabilidad de que un auto llegue en los siguientes 5 minutos después de las 9:00 PM (es decir, antes de la 9:05 PM).

b) Determine la probabilidad de que un auto llegue en los siguientes 30 minutos después de las 9:00 PM (antes de las 9:30 PM).

c) ¿A qué tiende el valor de F cuando t es no acotada en la dirección positiva?

d) Grafique $F(t) = 1 - e^{-0.2t}$, $t > 0$. Use VALUE o TABLE para comparar los valores de F en $t = 5$ [inciso a)] y en $t = 30$ [inciso b)].

e) ¿Antes de cuántos minutos después de las 9:00 PM la probabilidad de que llegue un auto es de 50%? [**Sugerencia:** Use TRACE o TABLE.]

Solución

a) La probabilidad de que un auto llegue en los siguientes 5 minutos se encuentra evaluando $F(t)$ en $t = 5$.

$$F(5) = 1 - e^{-0.2(5)} \approx 0.63212$$

↑ Usar una calculadora.

Se concluye que existe una probabilidad de 63% de que un auto llegue en los siguientes 5 minutos.

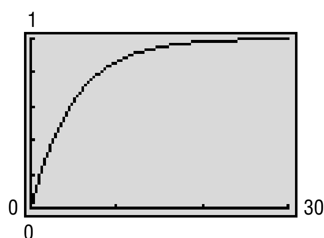
b) La probabilidad de que un auto llegue en los siguientes 5 minutos se encuentra evaluando $F(t)$ en $t = 30$.

$$F(30) = 1 - e^{-0.2(30)} \approx 0.9975$$

↑ Usar una calculadora.

Existe una probabilidad de 99.75% de que un auto llegue en los siguientes 30 minutos.

Figura 24



c) Al pasar el tiempo, aumenta la probabilidad de que llegue un auto. El valor al que tiende F se encuentra haciendo que $t \to \infty$. Como $e^{-0.2t} = \frac{1}{e^{0.2t}}$, se deduce que $e^{-0.2t} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Entonces, F tiende a 1 cuando t crece.

d) Vea la gráfica de F en la figura 24.

e) En los 3.5 minutos después de las 9 PM, la probabilidad de que llegue un auto es igual a 50%. ◀

Resumen

Propiedades de la función exponencial

$f(x) = a^x, \quad a > 1$ — Dominio: el intervalo $(-\infty, \infty)$; rango: el intervalo $(0, \infty)$; intercepciones x: ninguna; intercepción y: 1; asíntota horizontal: eje x cuando $x \to -\infty$; creciente; uno a uno; suave; continua. Vea una gráfica típica en la figura 16.

$f(x) = a^x, \quad 0 < a < 1$ — Dominio: el intervalo $(-\infty, \infty)$; rango: el intervalo $(0, \infty)$; intercepciones x: ninguna; intercepción y: 1; asíntota horizontal: eje x cuando $x \to \infty$; decreciente; uno a uno; suave; continua. Vea una gráfica típica en la figura 20.

Si $a^u = a^v$, entonces $u = v$.

5.3 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. $4^3 =$ ________; $8^{2/3} =$ ________; $3^{-2} =$ ________. (pp. 21–24 y 70–75)

2. Resuelva: $3x^2 + 5x - 2 = 0$. (pp. 96–105)

3. *Falso o verdadero:* para graficar $y = (x - 2)^3$, se corre 2 unidades a la izquierda la gráfica de $y = x^3$. (pp. 262–271)

4. Encuentre la tasa de cambio promedio de $f(x) = 3x - 5$, entre $x = 0$ y $x = c$. (pp. 246–247)

5. *Falso o verdadero:* La función $f(x) = \frac{2x}{x - 3}$ tiene una asíntota horizontal. (pp. 333–334)

Conceptos y vocabulario

6. La gráfica de toda función exponencial $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$, pasa por tres puntos: ________, ________ y ________.

7. Si la gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$, es decreciente, entonces a debe ser menor que ________.

8. Si $3^x = 3^4$, entonces $x =$ ________.

9. *Falso o verdadero:* las gráficas de $y = 3^x$ y $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ son idénticas.

10. *Falso o verdadero:* el rango de la función exponencial $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$, es el conjunto de todos los números reales.

Ejercicios

En los problemas 11-20, aproxime cada número usando una calculadora. Exprese su respuesta redondeada a tres decimales.

11. a) $3^{2.2}$ b) $3^{2.23}$ c) $3^{2.236}$ d) $3^{\sqrt{5}}$

12. a) $5^{1.7}$ b) $5^{1.73}$ c) $5^{1.732}$ d) $5^{\sqrt{3}}$

13. a) $2^{3.14}$ b) $2^{3.141}$ c) $2^{3.1415}$ d) 2^{π}

14. a) $2^{2.7}$ b) $2^{2.71}$ c) $2^{2.718}$ d) 2^{e}

15. a) $3.1^{2.7}$ b) $3.14^{2.71}$ c) $3.141^{2.718}$ d) π^{e}

16. a) $2.7^{3.1}$ b) $2.71^{3.14}$ c) $2.718^{3.141}$ d) e^{π}

17. $e^{1.2}$

18. $e^{-1.3}$

19. $e^{-0.85}$

20. $e^{2.1}$

En los problemas 21-28, determine si la función dada es exponencial o no. Para las que sean funciones exponenciales, identifique el valor de la base a. [**Sugerencia:** examine la razón de valores consecutivos.]

21.

x	$f(x)$
−1	3
0	6
1	12
2	18
3	30

22.

x	$g(x)$
−1	2
0	5
1	8
2	11
3	14

23.

x	$H(x)$
−1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	16
3	64

24.

x	$F(x)$
−1	$\frac{2}{3}$
0	1
1	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{9}{4}$
3	$\frac{27}{8}$

25.

x	$f(x)$
−1	$\frac{3}{2}$
0	3
1	6
2	12
3	24

26.

x	$g(x)$
−1	6
0	1
1	0
2	3
3	10

27.

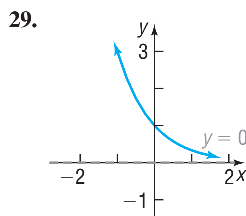
x	$H(x)$
−1	2
0	4
1	6
2	8
3	10

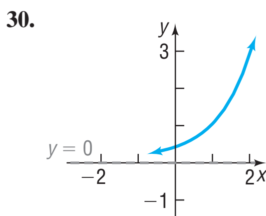
28.

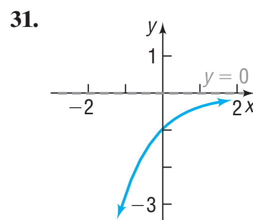
x	$F(x)$
−1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{32}$

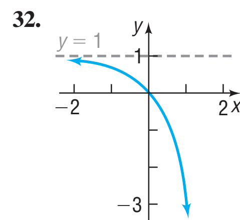
En los problemas 29-36, se da la gráfica de una función exponencial. Dé la correspondencia con una de las siguientes funciones.

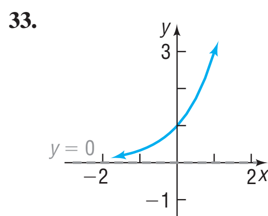
A. $y = 3^x$ B. $y = 3^{-x}$ C. $y = -3^x$ D. $y = -3^{-x}$
E. $y = 3^x - 1$ F. $y = 3^{x-1}$ G. $y = 3^{1-x}$ H. $y = 1 - 3^x$

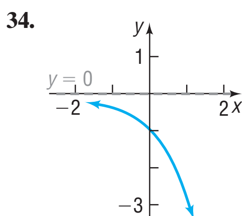
29.


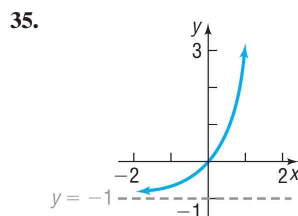
30.


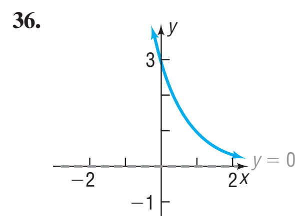
31.


32.


33.


34.


35.


36.


En los problemas 37-44, use transformaciones para graficar cada función. Determine dominio, rango y asíntota horizontal de cada función.

37. $f(x) = 2^x + 1$ **38.** $f(x) = 2^{x+2}$ **39.** $f(x) = 3^{-x} - 2$ **40.** $f(x) = -3^x + 1$

41. $f(x) = 2 + 3(4^x)$ **42.** $f(x) = 1 - 3(2^x)$ **43.** $f(x) = 2 + 3^{x/2}$ **44.** $f(x) = 1 - 2^{-x/3}$

En los problemas 45-52, comience con la gráfica de $y = e^x$ (figura 22) y use transformaciones para graficar cada función. Determine el dominio, el rango y la asíntota horizontal de cada función.

45. $f(x) = e^{-x}$ **46.** $f(x) = -e^{x}$ **47.** $f(x) = e^{x+2}$ **48.** $f(x) = e^{x} - 1$

49. $f(x) = 5 - e^{-x}$ **50.** $f(x) = 9 - 3e^{-x}$ **51.** $f(x) = 2 - e^{-x/2}$ **52.** $f(x) = 7 - 3e^{2x}$

En los problemas 53-66, resuelva cada ecuación.

53. $2^{2x+1} = 4$ **54.** $5^{1-2x} = \frac{1}{5}$ **55.** $3^{x^3} = 9^x$ **56.** $4^{x^2} = 2^x$ **57.** $8^{x^2-2x} = \frac{1}{2}$

58. $9^{-x} = \frac{1}{3}$ **59.** $2^x \cdot 8^{-x} = 4^x$ **60.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 4$ **61.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} = 25$ **62.** $4^x - 2^x = 0$

63. $4^x = 8$ **64.** $9^{2x} = 27$ **65.** $e^{x^2} = (e^{3x}) \cdot \frac{1}{e^2}$ **66.** $(e^4)^x \cdot e^{x^2} = e^{12}$

67. Si $4^x = 7$, ¿a qué es igual 4^{-2x}?

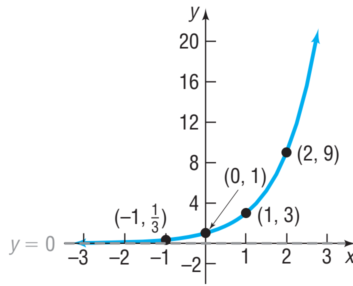
68. Si $2^x = 3$, ¿a qué es igual 4^{-x}?

69. Si $3^{-x} = 2$, ¿a qué es igual 3^{2x}?

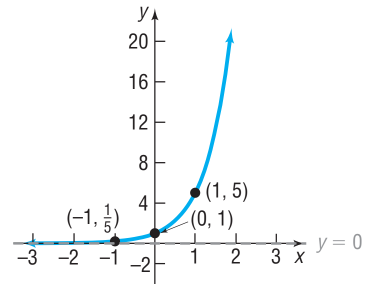
70. Si $5^{-x} = 3$, ¿a qué es igual 5^{3x}?

En los problemas 71-74, determine la función exponencial cuya gráfica se muestra.

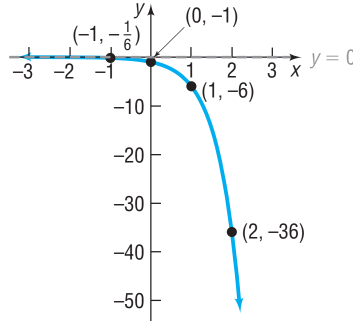
71.



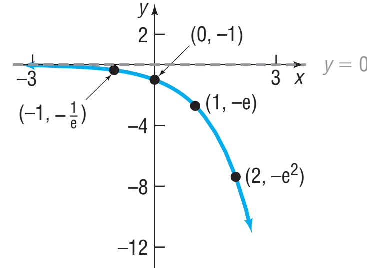
72.



73.



74.



75. Óptica Si un solo vidrio elimina 3% de la luz que pasa por él, entonces el porcentaje p de luz que pasa por n vidrios sucesivos se aproxima mediante la función

$$p(n) = 100e^{-0.03n}$$

a) ¿Qué porcentaje de luz pasará por 10 vidrios?
b) ¿Qué porcentaje de luz pasará por 25 vidrios?

76. Presión atmosférica La presión atmosférica p sobre un globo o plano decrece al aumentar la altura. Esta presión, medida en milímetros de mercurio, está relacionada con el número de kilómetros h sobre el nivel del mar mediante la función

$$p(h) = 760e^{-0.145h}$$

a) Encuentre la presión atmosférica a una altura de 2 kilómetros (un poco más de 1 milla).
b) ¿Cuál es si la altura es de 10 kilómetros (más de 30,000 pies)?

77. Satélites espaciales El número de watts w proporcionados por una fuente de energía de un satélite espacial después de d días está dado por la función

$$w(d) = 50e^{-0.004d}$$

a) ¿Cuánta energía habrá disponible después de 30 días?
b) ¿Cuánta energía habrá disponible después de 1 año (365 días)?



78. Heridas que sanan El proceso curativo de una herida normal se modela por una función exponencial. Si A_0 representa el área original de la herida y si A es igual al área de la herida después de n días, entonces la función

$$A(n) = A_0 e^{-0.35n}$$

describe el área de una herida el n-ésimo día después de la lesión, cuando no se presentan infecciones que retrasen la curación. Suponga que una herida tiene un área inicial de 100 milímetros cuadrados.

a) Si se lleva a cabo la curación, ¿qué área tendrá la herida después de 3 días?
b) ¿Cuál será el área después de 10 días?

79. Administración de drogas La función

$$D(h) = 5e^{-0.4h}$$

se utiliza para encontrar el número de miligramos D de cierta droga que está en la corriente sanguínea del paciente h horas después de administrarla. ¿Cuántos miligramos estarán presentes después de 1 hora? ¿Y después de 6 horas?

80. Rumores Un modelo del número de personas N en una universidad estatal que han oído cierto rumor es

$$N = P(1 - e^{-0.15d})$$

donde P es la población total de la escuela y d es el número de días que pasan desde que comenzó el rumor. En una comunidad de 1000 estudiantes, ¿cuántos habrán oído el rumor 3 días después?

81. Probabilidad exponencial Entre las 12:00 PM y la 1:00 PM, los autos llegan al autobanco de Citibank con una tasa de 6 autos por hora (0.1 autos por minuto). La siguiente fórmula de probabilidad se utiliza para determinar la probabilidad de que llegue un auto durante los t minutos que siguen a las 12:00 PM.

$$F(t) = 1 - e^{-0.1t}$$

a) Determine la probabilidad de que llegue un auto en los 10 minutos que siguen a las 12:00 PM (es decir, antes de las 12:10 PM).
b) Determine la probabilidad de que llegue un auto en los 40 minutos que siguen a las 12:00 PM (es decir, antes de las 12:40 PM).
c) ¿A qué valor se acerca F cuando t se vuelve no acotada en la dirección positiva?
d) Grafique F usando una calculadora gráfica.
e) Use TRACE para determinar cuántos minutos se necesitan para que la probabilidad llegue a 50%.

82. Probabilidad exponencial Entre las 5:00 y las 6:00 PM, los autos llegan a Jiffy Lube con una tasa de 9 autos por hora (0.15 autos por minuto). La siguiente fórmula del campo de probabilidades se utiliza para determinar la probabilidad de que llegue un auto en los siguientes t minutos después de las 5:00 PM.

$$F(t) = 1 - e^{-0.15t}$$

a) Determine la probabilidad de que llegue un auto en los 15 minutos siguientes a las 5:00 PM (esto es, antes de las 5:15 PM).
b) Determine la probabilidad de que llegue un auto en los 30 minutos siguientes a las 5:00 PM (esto es, antes de las 5:30 PM).
c) ¿A qué valor tiende F cuando t se vuelve no acotada en la dirección positiva?
d) Grafique F usando una calculadora gráfica.
e) Use TRACE para determinar cuántos minutos se necesitan para que la probabilidad llegue a 60%.

83. Probabilidad de Poisson Entre las 5:00 y las 6:00 PM los autos llegan al AutoMac con una tasa de 20 autos por hora. La siguiente fórmula del campo de probabilidades se utiliza para determinar la probabilidad de que lleguen x autos entre las 5:00 y las 6:00 PM.

$$P(x) = \frac{20^x e^{-20}}{x!}$$

donde

$$x! = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

a) Determine la probabilidad de que lleguen $x = 15$ autos entre las 5:00 y las 6:00 PM.
b) Determine la probabilidad de que lleguen $x = 20$ autos entre las 5:00 y las 6:00 PM.

84. Probabilidad de Poisson Las personas llegan a la fila para la *Montaña Rusa de Demon* con una tasa de 4 por minuto. La siguiente fórmula de la teoría de probabilidades se utiliza para determinar la probabilidad de que lleguen x personas en el siguiente minuto.

$$P(x) = \frac{4^x e^{-4}}{x!}$$

donde

$$x! = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

a) Determine la probabilidad de que lleguen $x = 5$ personas en el siguiente minuto.
b) Determine la probabilidad de que lleguen $x = 8$ personas en el siguiente minuto.

85. Depreciación El precio p de un Honda Civic DX sedán con x años de uso está dado por

$$p(x) = 16{,}630(0.90)^x$$

a) ¿Cuál es el precio de un Civic DX sedán con 3 años de uso?
b) ¿Cuál es el precio de un Civic DX sedán con 9 años de uso?

86. Curva de aprendizaje Suponga que un estudiante debe aprender 500 palabras de vocabulario. Si aprende 15 palabras en 5 minutos, la función

$$L(t) = 500(1 - e^{-0.0061t})$$

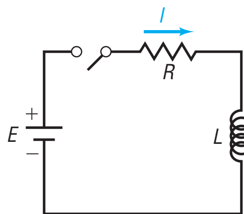
se aproxima al número de palabras L que el estudiante aprenderá después de t minutos.

a) ¿Cuántas palabras aprenderá el estudiante en 30 minutos?

b) ¿Cuántas palabras aprenderá el estudiante en 60 minutos?

87. Corriente en un circuito *RL* La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en amperes) después del tiempo t (en segundos) en un circuito RL simple, que consiste en una resistencia R (en ohms), una inductancia L (en henrys) y una fuerza electromotriz E (en volts) es

$$I = \frac{E}{R}[1 - e^{-(R/L)t}]$$



a) Si $E = 120$ volts, $R = 10$ ohms y $L = 5$ henrys, ¿cuánta corriente I_1 fluye después de 0.3 segundos, 0.5 segundos y 1 segundo?

b) ¿Cuál es la corriente máxima?

c) Grafique esta función $I = I_1(t)$, con I en el eje y y t en el x.

d) Si $E = 120$ volts, $R = 5$ ohms y $L = 10$ henrys, ¿cuánta corriente I_2 fluye después de 0.3 segundos, 0.5 segundos y 1 segundo?

e) ¿Cuál es la corriente máxima?

f) Grafique esta función $I = I_2(t)$ en los mismos ejes coordenados que $I_1(t)$.

88. Corriente en un circuito *RC* La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en amperes) después del tiempo t (en microsegundos) en un circuito RC simple que consiste en una resistencia R (en ohms), una capacitancia C (en microfarads) y una fuerza electromotriz E (en volts) es

$$I = \frac{E}{R}e^{-t/(RC)}$$

a) Si $E = 120$ volts, $R = 2000$ ohms y $C = 1.0$ microfarad, ¿cuánta corriente I_1 fluye en (t =0), después de 1000 microsegundos, y de 3000 microsegundos?

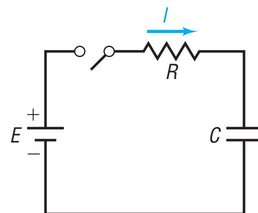
b) ¿Cuál es la corriente máxima?

c) Grafique esta función $I = I_1(t)$, con I en el eje y y t en el x.

d) Si $E = 120$ volts, $R = 1000$ ohms y $C = 2.0$ microfarad, ¿cuánta corriente I_2 fluye inicialmente, después de 1000 microsegundos, y de 3000 microsegundos?

e) ¿Cuál es la corriente máxima?

f) Grafique esta función $I = I_2(t)$ en los mismos ejes coordenados que $I_1(t)$.



89. Otra fórmula para *e* Use una calculadora para calcular los valores de

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

para $n = 4, 6, 8$ y 10. Compare cada resultado con e.
[**Sugerencia:** $1! = 1, 2! = 2 \cdot 1, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $n! = n(n-1) \cdot \cdots \cdot (3)(2)(1)$.]

90. Otra fórmula para *e* Use una calculadora para calcular los diferentes valores de la expresión. Compare los valores de e.

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{\text{etc.}}}}}}$$

△ **91. Cociente de diferencias** Si $f(x) = a^x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

92. Si $f(x) = a^x$, demuestre que $f(A + B) = f(A) \cdot f(B)$.

93. Si $f(x) = a^x$, demuestre que $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

94. Si $f(x) = a^x$, demuestre que $f(\alpha x) = [f(x)]^\alpha$.

95. Humedad relativa La humedad relativa es la razón (expresada como porcentaje) de la cantidad de vapor de agua en el aire entre la cantidad máxima que habría a una temperatura específica. La humedad relativa R, se encuentra con la siguiente fórmula.

$$R = 10^{\left(\frac{4221}{T+459.4} - \frac{4221}{D+459.4} + 2\right)}$$

donde T es la temperatura del aire (en °F) y D es el punto de condensación (en °F).

a) Determine la humedad relativa si la temperatura del aire es de 50° Fahrenheit y la temperatura del punto de condensación es de 41° Fahrenheit.

b) Determine la humedad relativa si la temperatura del aire es de 68° Fahrenheit y la temperatura del punto de condensación es de 59° Fahrenheit.

c) ¿Cuál es la humedad relativa si la temperatura del aire y la temperatura del punto de condensación son la misma?

96. Problema histórico Pierre de Fermat (1601-1665) conjeturó que la función

$$f(x) = 2^{(2^x)} + 1$$

para $x = 1, 2, 3, \ldots$, siempre tendría un valor igual a un número primo. Pero Leonhard Euler (1707-1783) demostró que esta fórmula falla para $x = 5$. Use una calculadora para determinar los números primos producidos por f para $x = 1, 2, 3, 4$. Después muestre que $f(5) = 641 \times 6{,}700{,}417$, no es primo.

Los problemas 97 y 98, proporcionan definiciones para otras dos funciones trascendentes.

97. La **función seno hiperbólico**, denotada por senh x, se define como

$$\text{senh}\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

a) Demuestre que $f(x) = \text{senh}\, x$ es una función impar.
b) Grafique $f(x) = \text{senh}\, x$ usando una calculadora gráfica.

98. La **función coseno hiperbólico**, denotada por cosh x, se define como

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

a) Demuestre que $f(x) = \cosh x$ es una función par.
b) Grafique $f(x) = \cosh x$ usando una calculadora gráfica.
c) Vea el problema 97. Demuestre que para toda x.

$$(\cosh x)^2 - (\text{senh}\, x)^2 = 1$$

99. La cantidad de bacterias en un contenedor de 4 litros se duplica cada minuto. Después de 60 minutos, el contenedor está lleno. ¿Cuánto tiempo fue necesario para llenar la mitad del contenedor?

100. Explique en sus palabras qué es el número e. Proporcione al menos dos aplicaciones que requieran el uso de este número.

101. ¿Cree que existe una función de potencias que aumente más rápido que una función exponencial cuya base es mayor que 1? Explique.

102. Cuando aumenta la base a de una función exponencial $f(x) = a^x, a > 1$, ¿qué ocurre con el comportamiento de su gráfica para $a > 0$? ¿Qué ocurre con el comportamiento de su gráfica para $x < 0$?

103. Las gráficas de $y = a^{-x}$ y $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son idénticas. ¿Por qué?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $64; 4; \frac{1}{9}$ **2.** $\left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$ **3.** Falso **4.** 3 **5.** Verdadero

5.4 Funciones logarítmicas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Solución de desigualdades (sección 1.5, pp. 129-133)
- Desigualdades de polinomios y racionales (sección 4.5, pp. 356-360)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?" en la página 437.

OBJETIVOS
1. Cambiar expresiones exponenciales a expresiones logarítmicas
2. Cambiar expresiones logarítmicas a expresiones exponenciales
3. Evaluar funciones logarítmicas
4. Determinar el dominio de una función logarítmica
5. Graficar funciones logarítmicas
6. Resolver ecuaciones logarítmicas

Recuerde que una función uno a uno $y = f(x)$ tiene una función inversa que está definida de manera implícita por la ecuación $x = f(y)$. En particular, la función exponencial $y = f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$, es uno a uno y, por lo tanto, tiene una función inversa que está definida de manera implícita por la ecuación

$$x = a^y, \qquad a > 0, \quad a \neq 1$$

Esta función inversa es tan importante que se le ha dado un nombre, la *función logarítmica*.

La **función logarítmica base *a***, donde $a > 0$ y $a \neq 1$, se denota por $y = \log_a x$ (leído "y es el logaritmo base a de x") y se define por

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y$$

El dominio de la función logarítmica $y = \log_a x$ es $x > 0$.

El *logaritmo* es meramente un nombre para cierto exponente.

EJEMPLO 1 Relación de logaritmos con exponentes

a) Si $y = \log_3 x$, entonces $x = 3^y$. Por ejemplo, $4 = \log_3 81$ es equivalente a $81 = 3^4$.

b) Si $y = \log_5 x$, entonces $x = 5^y$. Por ejemplo, $-1 = \log_5\left(\frac{1}{5}\right)$ es equivalente a $\frac{1}{5} = 5^{-1}$. ◀

1

EJEMPLO 2 Cambio de expresiones exponenciales a expresiones logarítmicas

Transforme cada expresión exponencial en una expresión equivalente que incluya un logaritmo.

a) $1.2^3 = m$ b) $e^b = 9$ c) $a^4 = 24$

Solución Se usa el hecho de que $y = \log_a x$ y $x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$, son equivalentes.

a) Si $1.2^3 = m$, entonces $3 = \log_{1.2} m$.

b) Si $e^b = 9$, entonces $b = \log_e 9$.

c) Si $a^4 = 24$, entonces $4 = \log_a 24$. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

2

EJEMPLO 3 Cambio de expresiones logarítmicas en expresiones exponenciales

Transforme cada expresión logarítmica en una expresión equivalente que incluya un exponente.

a) $\log_a 4 = 5$ b) $\log_e b = -3$ c) $\log_3 5 = c$

Solución a) Si $\log_a 4 = 5$, entonces $a^5 = 4$.

b) Si $\log_e b = -3$, entonces $e^{-3} = b$.

c) Si $\log_3 5 = c$, entonces $3^c = 5$. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

3 Para encontrar el valor exacto de un logaritmo, se escribe el logaritmo en notación exponencial y se usa el hecho de que si $a^u = a^v$, entonces $u = v$.

EJEMPLO 4 Valor exacto de una expresión logarítmica

Encuentre el valor exacto de

a) $\log_2 16$ b) $\log_3 \frac{1}{27}$

Solución a)

$y = \log_2 16$

$2^y = 16$ Cambiar a la forma exponencial.

$2^y = 2^4$ $16 = 2^4$

$y = 4$ Igualar exponentes.

Por lo tanto, $\log_2 16 = 4$.

b)

$y = \log_3 \frac{1}{27}$

$3^y = \frac{1}{27}$ Cambiar a la forma exponencial.

$3^y = 3^{-3}$ $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$

$y = -3$ Igualar exponentes.

Por lo tanto, $\log_3 \frac{1}{27} = -3$. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 33.

Dominio de una función logarítmica

 La función logarítmica $y = \log_a x$ se definió como la inversa de la función exponencial $y = a^x$. Esto es, si $f(x) = a^x$, entonces $f^{-1}(x) = \log_a x$. Con base en el análisis hecho en la sección 5.2 sobre funciones inversas, se sabe que para una función f y su inversa f^{-1},

$$\text{Dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f \quad \text{y} \quad \text{Rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

En consecuencia, se deduce que

> Dominio de una función logarítmica = rango de una función exponencial = $(0, \infty)$
> Rango de una función logarítmica = dominio de una función exponencial = $(-\infty, \infty)$

En el siguiente cuadro se resumen algunas propiedades de la función logarítmica:

> $y = \log_a x$ (ecuación de definición: $x = a^y$)
> Dominio: $0 < x < \infty$ Rango: $-\infty < y < \infty$

El dominio de una función logarítmica consiste en los números reales *positivos*, de manera que el argumento de la función logarítmica debe ser mayor que cero.

EJEMPLO 5 Dominio de una función logarítmica

Encuentre el dominio de cada función logarítmica.

a) $F(x) = \log_2(x - 5)$ b) $g(x) = \log_5\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ c) $h(x) = \log_{1/2}|x|$

Solución a) El dominio de la función F consiste en todas las x para las que $x - 5 > 0$, es decir, todas las $x > 5$, o en la notación de intervalos, $(5, \infty)$.

b) El dominio de g está restringido a

$$\frac{1 + x}{1 - x} > 0$$

Al resolver esta desigualdad se encuentra que el dominio de g consiste en todas las x entre -1 y 1, esto es, $-1 < x < 1$ o en notación de intervalos, $(-1, 1)$.

c) Como $|x| > 0$, siempre que $x \neq 0$, el dominio de h consiste en todos los números reales diferentes de cero, que en la notación de intervalos es $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. ◀

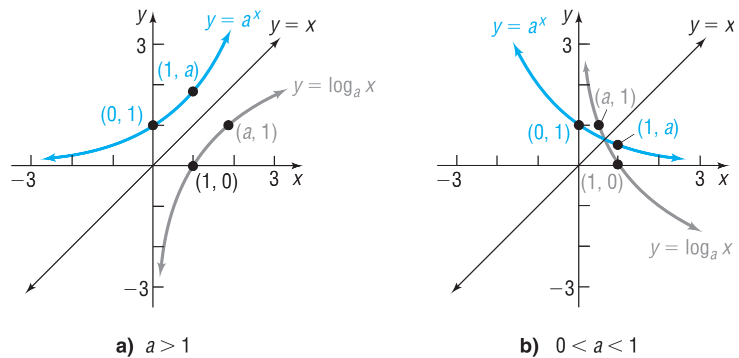


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 47 Y 53.

Gráficas de funciones logarítmicas

5 Como las funciones exponencial y logarítmica son inversas una de otra, la gráfica de la función logarítmica $y = \log_a x$ es la reflexión en la recta $y = x$ de la gráfica de la función exponencial $y = x^a$, como se ve en la figura 25.

Figura 25



Por ejemplo, para graficar $y = \log_2 x$, se grafica $y = 2^x$ y se refleja en la recta $y = x$. Vea la figura 26. Para graficar $y = \log_{1/3} x$, se grafica $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y se refleja en la recta $y = x$. Vea la figura 27.

Figura 26

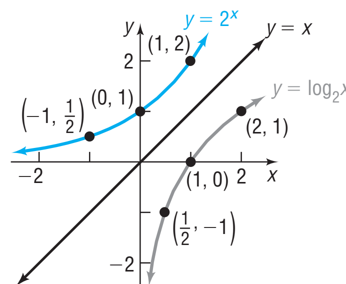
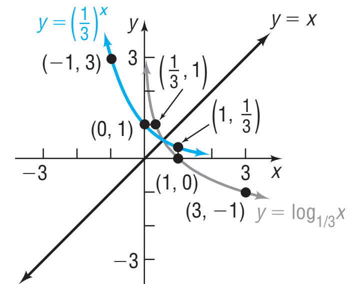


Figura 27





TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 63.

Propiedades de la gráfica de una función logarítmica $f(x) = \log_a x$

1. El dominio es el conjunto de números reales positivos; el rango es el conjunto de todos los números reales.
2. La intercepción x de la gráfica es 1. No hay intercepción y.
3. El eje y $(x = 0)$ es una asíntota vertical de la gráfica.
4. Una función logarítmica es decreciente si $0 < a < 1$ y creciente si $a > 1$.
5. La gráfica de f contiene los puntos $(1, 0)$, $(a, 1)$ y $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$.
6. La gráfica es suave y continua sin esquinas ni saltos.

Si la base de una función logarítmica es el número e, entonces se tiene la **función de logaritmo natural**. Esta función ocurre con tanta frecuencia en las aplicaciones que tiene un nombre especial, **ln** (del latín, *logarithmus naturalis*). Entonces,

$$y = \log_e x = \ln x \quad \text{si y sólo si} \quad x = e^y \tag{1}$$

Como $y = \ln x$ y la función exponencial $y = e^x$ son funciones inversas, se obtiene la gráfica de $y = \ln x$ reflejando la gráfica de $y = e^x$ en la recta $y = x$. Vea la figura 28.

Usando una calculadora con la tecla ln, se obtienen otros puntos de la gráfica de $f(x) = \ln x$. Vea la tabla 7.

Figura 28

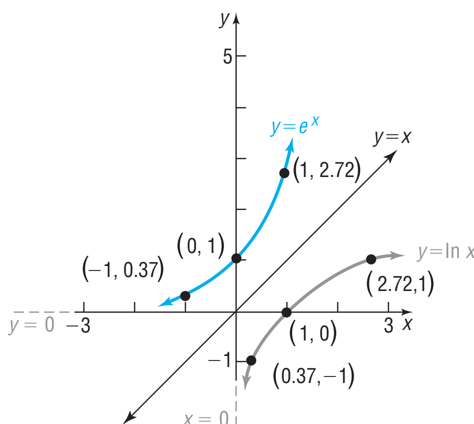


Tabla 7

x	$\ln x$
$\frac{1}{2}$	−0.69
2	0.69
3	1.10



Para ver el concepto

Grafique $Y_1 = e^x$ y $Y_2 = \ln x$ en la misma pantalla. Use VALUE para evaluar y verificar los puntos de la gráfica dados en la figura 28. ¿Ve la simetría de las dos gráficas respecto de la recta $y = x$?

EJEMPLO 6 **Gráfica de funciones logarítmicas usando transformaciones**

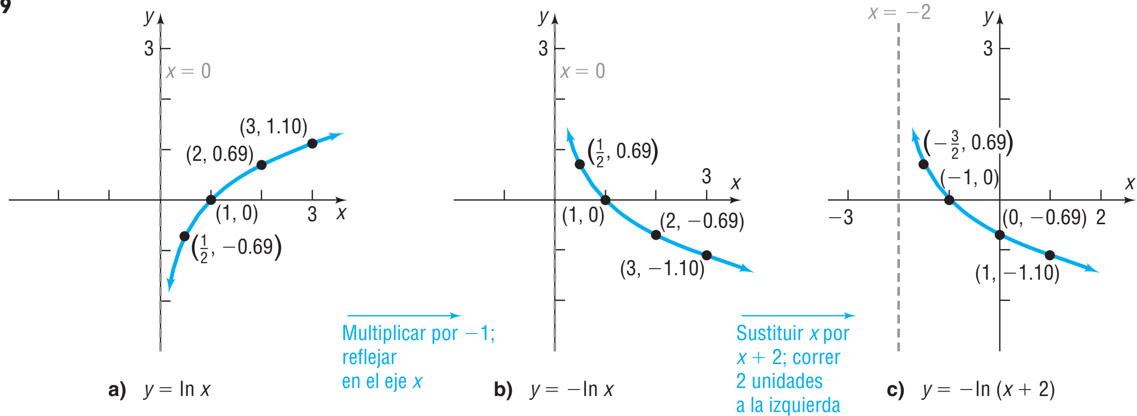
Grafique $f(x) = -\ln(x + 2)$ comenzando con la gráfica de $y = \ln x$. Determine el dominio, el rango y la asíntota vertical de f.

Solución El dominio de f consiste en todas las x para las cuales

$$x + 2 > 0 \quad \text{o} \quad x > -2$$

Para obtener la gráfica de $y = -\ln(x + 2)$, se usan los pasos ilustrados en la figura 29.

Figura 29



El rango de $f(x) = \ln(x + 2)$ es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y la asíntota vertical es $x = -2$. [¿Por qué? La asíntota original $(x = 0)$ se corre a la izquierda 2 unidades.] ◀



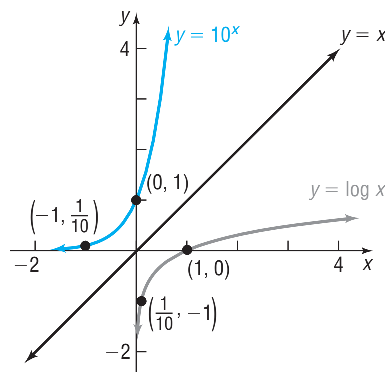
TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 75.

Si la base de una función logarítmica es el número 10, entonces se tiene la **función del logaritmo común**. Si la base a de la función logarítmica no se indica, se entiende que es 10. Así,

$$y = \log x \quad \text{si y sólo si} \quad x = 10^y$$

Como $y = \ln x$ y la función exponencial $y = 10^x$ son funciones inversas, se obtiene la gráfica de $y = \ln x$ reflejando la gráfica de $y = 10^x$ en la recta $y = x$. Vea la figura 30.

Figura 30



EJEMPLO 7 Gráfica de funciones logarítmicas usando transformaciones

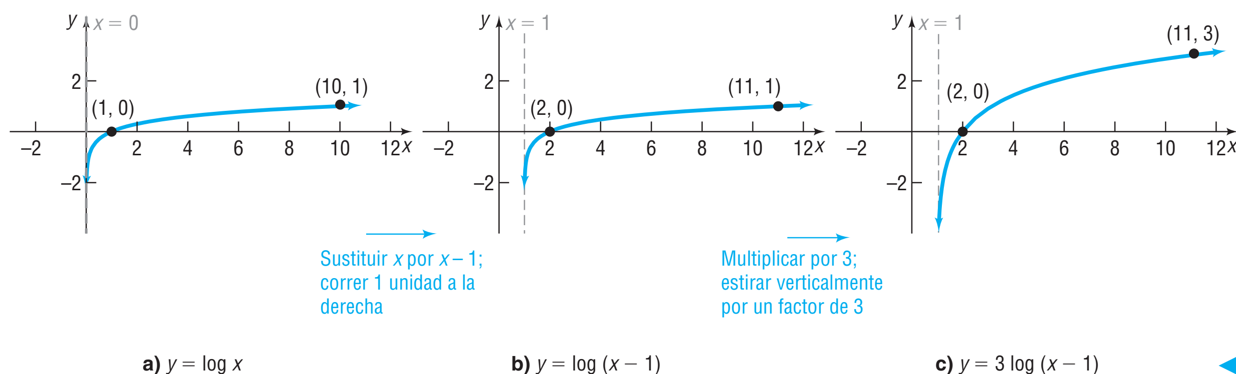
Grafique $f(x) = 3\log(x-1)$. Determine el dominio, rango y asíntota vertical de f.

Solución El dominio consiste en todas las x para las cuales

$$x - 1 > 0 \quad \text{o} \quad x > 1$$

Para obtener la gráfica de $y = 3\log(x-1)$ se siguen los pasos ilustrados en la figura 31. El rango de $f(x) = 3\log(x-1)$ es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y la asíntota vertical es $x = 1$.

Figura 31



 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 85.

Ecuaciones logarítmicas

6 Las ecuaciones que contienen logaritmos se llaman **ecuaciones logarítmicas**. Debe tenerse cuidado al obtener la solución algebraica de las ecuaciones logarítmicas. Asegúrese de verificar cada solución en la ecuación original y descartar las que sean extrañas. En la expresión $\log_a M$, recuerde que a y M son positivos y $a \neq 1$.

Algunas ecuaciones logarítmicas se resuelven cambiando la expresión logarítmica en una expresión exponencial.

EJEMPLO 8 Solución de una ecuación logarítmica

Resuelva: a) $\log_3(4x - 7) = 2$ b) $\log_x 64 = 2$

Solución a) Se obtiene la solución exacta cambiando el logaritmo a la forma exponencial.

$$\begin{aligned}\log_3(4x-7) &= 2\\ 4x - 7 &= 3^2 \quad \text{Cambiar a la forma exponencial.}\\ 4x - 7 &= 9\\ 4x &= 16\\ x &= 4\end{aligned}$$

COMPROBACIÓN: $\log_3(4x - 7) = \log_3(16 - 7) = \log_3 9 = 2 \ (3^2 = 9)$

b) Se obtiene una solución exacta cambiando el logaritmo a la forma exponencial.

$$\log_x 64 = 2$$

$$x^2 = 64 \qquad \text{Cambiar a la forma exponencial}$$

$$x = \pm\sqrt{64} = \pm 8$$

La base de un logaritmo es siempre positiva. Entonces se descarta -8; la única solución es 8.

COMPROBACIÓN: $\log_8 64 = 2 \quad (8^2 = 64)$. ◀

EJEMPLO 9 Uso de logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales

Resuelva: $e^{2x} = 5$

Solución Se obtiene una solución exacta cambiando la ecuación exponencial a la forma logarítmica.

$$e^{2x} = 5$$

$$\ln 5 = 2x \qquad \text{Cambiar a una expresión logarítmica usando (1).}$$

$$x = \frac{\ln 5}{2} \qquad \text{Solución exacta.}$$

$$\approx 0.805 \qquad \text{Solución aproximada.}$$ ◀



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **91** Y **103**.

EJEMPLO 10 Alcohol y conducción de vehículos

Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Una investigación médica reciente sugiere que el riesgo R (dado como porcentaje) de tener un accidente al manejar un automóvil se modela por la ecuación

$$R = 6e^{kx}$$

donde x es la variable de concentración de alcohol en la sangre y k es una constante.

a) Suponga que una concentración de alcohol en la sangre de 0.04 da como resultado 10% de riesgo ($R = 10$) de un accidente. Encuentre la constante k en la ecuación.

b) Utilice este valor de k para encontrar el riesgo si la concentración es de 0.17.

c) Utilice el mismo valor de k para encontrar la concentración de alcohol que corresponde a un riesgo de 100%.

d) Si la ley establece que cualquier individuo con riesgo de 20% o más de sufrir un accidente no debería manejar, ¿con qué concentración de alcohol en la sangre se tendría que arrestar a un conductor con cargos de manejar bajo la influencia del alcohol?

Solución a) Para una concentración de alcohol en la sangre de 0.04 y un riesgo de 10%, se hace $x = 0.04$ y $R = 10$ en la ecuación y se despeja k.

$$R = 6e^{kx}$$

$$10 = 6e^{k(0.04)} \qquad R = 10;\ x = 0.04$$

$$\frac{10}{6} = e^{0.04k} \qquad \text{Dividir ambos lados entre 6.}$$

$$0.04k = \ln\frac{10}{6} \approx 0.510826 \qquad \text{Cambiar a una expresión logarítmica.}$$

$$k \approx 12.77 \qquad \text{Despejar } k.$$

b) Usando $k = 12.77$ y $x = 0.17$ en la ecuación, se encuentra el riesgo R como

$$R = 6e^{kx} = 6e^{(12.77)(0.17)} \approx 52.6$$

Para una concentración de alcohol en la sangre de 0.17, el riesgo de un accidente es de alrededor de 52.6%.

c) Con $k = 12.77$ y $R = 100$ en la ecuación, se encuentra que la concentración x de alcohol en la sangre es

$$R = 6e^{kx}$$

$$100 = 6e^{12.77x} \qquad R = 100;\ k = 12.77$$

$$\frac{100}{6} = e^{12.77x} \qquad \text{Dividir ambos lados entre 6.}$$

$$12.77x = \ln\frac{100}{6} \approx 2.8134 \qquad \text{Cambiar a una expresión logarítmica.}$$

$$x \approx 0.22 \qquad \text{Despejar } x.$$

Para una concentración de alcohol en la sangre de 0.22, el riesgo de un accidente manejando es de 100%.

d) Con $k = 12.77$ y $R = 20$ en la ecuación, se encuentra que la concentración de alcohol en la sangre es

$$R = 6e^{kx}$$

$$20 = 6e^{12.77x}$$

$$\frac{20}{6} = e^{12.77x}$$

$$12.77x = \ln\frac{20}{6} \approx 1.204$$

$$x \approx 0.094$$

Un conductor con una concentración de alcohol en la sangre de 0.094 o más (9.4%) debe quedar arrestado con cargos de conducir bajo la influencia del alcohol. ◀

[***Nota:*** Casi todos los estados de Estados Unidos usan 0.08 o 0.10 como contenido de alcohol en la sangre para hacer un arresto.]

Resumen

Propiedades de la función logarítmica

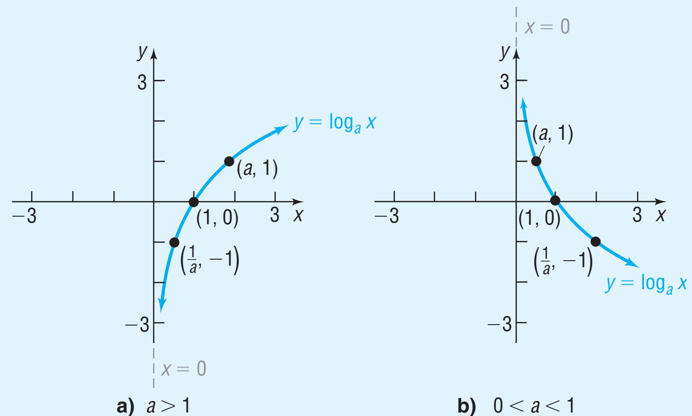
$f(x) = \log_a x, \quad a > 1$
($y = \log_a x$ significa $x = a^y$)

Dominio: intervalo $(0, \infty)$; rango: intervalo $(-\infty, \infty)$; intercepción x: 1; intercepción y: ninguna; asíntota vertical: $x = 0$ (eje y); creciente; uno a uno
Vea una gráfica típica en la figura 32*a*).

$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1$
($y = \log_a x$ significa $x = a^y$)

Dominio: intervalo $(0, \infty)$; rango: intervalo $(-\infty, \infty)$; intercepción x: 1; intercepción y: ninguna; asíntota vertical: $x = 0$ (eje y); decreciente; uno a uno
Vea una gráfica típica en la figura 32*b*).

Figura 32



5.4 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?"

Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.

1. Resuelva la desigualdad: $3x - 7 \le 8 - 2x$ (pp. 129–133)

2. Resuelva la desigualdad: $x^2 - x - 6 > 0$ (pp. 356–360)

3. Resuelva la desigualdad: $\dfrac{x-1}{x+4} > 0$ (pp. 356–360)

Conceptos y vocabulario

4. El dominio de una función logarítmica $f(x) = \log_a x$ es __________.

5. La gráfica de una función logarítmica $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, pasa por tres puntos: __________, __________ y __________.

6. Si la gráfica de una función logarítmica $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, es creciente, entonces su base debe ser mayor que __________.

7. *Falso o verdadero:* si $y = \log_a x$, entonces $y = a^x$.

8. *Falso o verdadero:* la gráfica de toda función logarítmica $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, contendrá los puntos $(1, 0)$, $(a, 1)$ y $\left(\dfrac{1}{a}, -1\right)$.

Ejercicios

En los problemas 9-20, cambie cada expresión exponencial en una expresión equivalente que contenga logaritmos.

9. $9 = 3^2$ **10.** $16 = 4^2$ **11.** $a^2 = 1.6$ **12.** $a^3 = 2.1$

13. $1.1^2 = M$ **14.** $2.2^3 = N$ **15.** $2^x = 7.2$ **16.** $3^x = 4.6$

17. $x^{\sqrt{2}} = \pi$ **18.** $x^\pi = e$ **19.** $e^x = 8$ **20.** $e^{2.2} = M$

En los problemas 21-32, cambie cada expresión logarítmica en una expresión equivalente que contenga un exponente.

21. $\log_2 8 = 3$ **22.** $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$ **23.** $\log_a 3 = 6$ **24.** $\log_b 4 = 2$

25. $\log_3 2 = x$ **26.** $\log_2 6 = x$ **27.** $\log_2 M = 1.3$ **28.** $\log_3 N = 2.1$

29. $\log_{\sqrt{2}} \pi = x$ **30.** $\log_\pi x = \frac{1}{2}$ **31.** $\ln 4 = x$ **32.** $\ln x = 4$

En los problemas 33-44, encuentre el valor exacto de cada logaritmo sin usar una calculadora.

33. $\log_2 1$ **34.** $\log_8 8$ **35.** $\log_5 25$ **36.** $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$

37. $\log_{1/2} 16$ **38.** $\log_{1/3} 9$ **39.** $\log_{10} \sqrt{10}$ **40.** $\log_5 \sqrt[3]{25}$

41. $\log_{\sqrt{2}} 4$ **42.** $\log_{\sqrt{3}} 9$ **43.** $\ln \sqrt{e}$ **44.** $\ln e^3$

En los problemas 45-56, encuentre el dominio de cada función.

45. $f(x) = \ln(x - 3)$ **46.** $g(x) = \ln(x - 1)$ **47.** $F(x) = \log_2 x^2$

48. $H(x) = \log_5 x^3$ **49.** $f(x) = 3 - 2\log_4 \frac{x}{2}$ **50.** $g(x) = 8 + 5\ln(2x)$

51. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x + 1}\right)$ **52.** $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x - 5}\right)$ **53.** $g(x) = \log_5\left(\frac{x + 1}{x}\right)$

54. $h(x) = \log_3\left(\frac{x}{x - 1}\right)$ **55.** $f(x) = \sqrt{\ln x}$ **56.** $g(x) = \frac{1}{\ln x}$

En los problemas 57-60, use una calculadora para evaluar cada expresión. Redondee su respuesta a tres decimales.

57. $\ln \frac{5}{3}$ **58.** $\frac{\ln 5}{3}$ **59.** $\frac{\ln \frac{10}{3}}{0.04}$ **60.** $\frac{\ln \frac{2}{3}}{-0.1}$

61. Encuentre a tal que la gráfica de $f(x) = \log_a x$ contenga el punto $(2, 2)$.

62. Encuentre a tal que la gráfica de $f(x) = \log_a x$ contenga el punto $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$.

En los problemas 63-66, grafique cada función logarítmica.

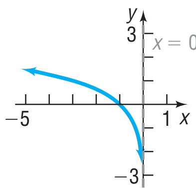
63. $y = \log_3 x$ **64.** $y = \log_{1/2} x$ **65.** $y = \log_{1/4} x$ **66.** $y = \log_5 x$

En los problemas 67-74, se da la gráfica de una función logarítmica. Dé la correspondencia con una de las siguientes funciones:

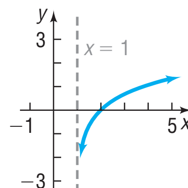
A. $y = \log_3 x$ B. $y = \log_3(-x)$ C. $y = -\log_3 x$ D. $y = -\log_3(-x)$

E. $y = \log_3 x - 1$ F. $y = \log_3(x - 1)$ G. $y = \log_3(1 - x)$ H. $y = 1 - \log_3 x$

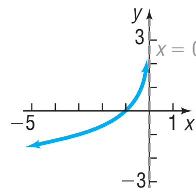
67.



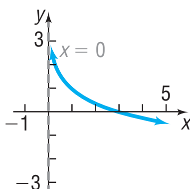
68.



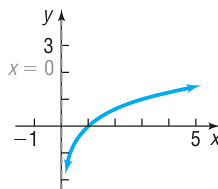
69.



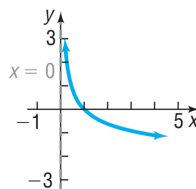
70.



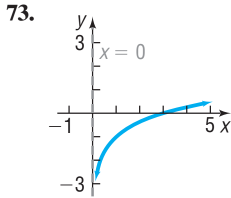
71.



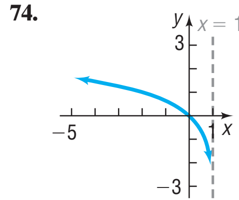
72.



73.



74.



En los problemas 75-90, use transformaciones para graficar cada función. Determine el dominio, el rango y la asíntota vertical de cada función.

75. $f(x) = \ln(x + 4)$ **76.** $f(x) = \ln(x - 3)$ **77.** $f(x) = 2 + \ln x$ **78.** $f(x) = -\ln(-x)$

79. $g(x) = \ln(2x)$ **80.** $h(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x\right)$ **81.** $f(x) = 3 \ln x$ **82.** $f(x) = -2 \ln x$

83. $f(x) = \log(x - 4)$ **84.** $f(x) = \log(x + 5)$ **85.** $h(x) = 4 \log x$ **86.** $g(x) = -3 \log x$

87. $F(x) = \log(2x)$ **88.** $G(x) = \log(5x)$ **89.** $h(x) = 3 + \log(x + 2)$ **90.** $g(x) = 2 - \log(x + 1)$

En los problemas 91-110, resuelva cada ecuación.

91. $\log_3 x = 2$ **92.** $\log_5 x = 3$ **93.** $\log_2(2x + 1) = 3$ **94.** $\log_3(3x - 2) = 2$

95. $\log_x 4 = 2$ **96.** $\log_x\left(\frac{1}{8}\right) = 3$ **97.** $\ln e^x = 5$ **98.** $\ln e^{-2x} = 8$

99. $\log_4 64 = x$ **100.** $\log_5 625 = x$ **101.** $\log_3 243 = 2x + 1$ **102.** $\log_6 36 = 5x + 3$

103. $e^{3x} = 10$ **104.** $e^{-2x} = \frac{1}{3}$ **105.** $e^{2x+5} = 8$ **106.** $e^{-2x+1} = 13$

107. $\log_3(x^2 + 1) = 2$ **108.** $\log_5(x^2 + x + 4) = 2$ **109.** $\log_2 8^x = -3$ **110.** $\log_3 3^x = -1$

---

111. Química El pH de una solución química está dado por la fórmula

$$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+]$$

donde $[\text{H}^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro. Los valores del pH van de 0 (ácido) a 14 (alcalino).

a) ¿Cuál es el pH de una solución para la que $[\text{H}^+]$ es 0.1?

b) ¿Cuál es el pH de una solución para la que $[\text{H}^+]$ es 0.01?

c) ¿Cuál es el pH de una solución para la que $[\text{H}^+]$ es 0.001?

d) ¿Qué ocurre con el pH cuando disminuye la concentración de iones de hidrógeno?

e) Determine la concentración de iones de hidrógeno en una naranja (pH = 3.5).

f) Determine la concentración de iones de hidrógeno en la sangre humana (pH = 7.4).

112. Índice de diversidad El índice de diversidad de Shannon es una medida de la diversidad de una población. El índice de diversidad está dado por la fórmula

$$H = -(p_1 \log p_1 + p_2 \log p_2 + \cdots + p_n \log p_n)$$

donde p_1 es la proporción de la población que es de la especie 1, p_2 es la proporción de la población que es de la especie 2, y así sucesivamente

a) Según el censo de Estados Unidos, la distribución de razas en el país en 2000 era la siguiente:

Raza	Proporción
Indio o nativo americano De Alaska	0.014
Asiático	0.041
Negro o afroamericano	0.128
Hispánico	0.124
Nativo de Hawaii o isleño del Pacífico	0.003
Blanco	0.690

FUENTE: U.S. Census Bureau

Calcule el índice de diversidad de Estados Unidos en 2000.

b) El valor más grande del índice de diversidad está dado por $H_{\text{máx}} = \log(S)$, donde S es el número de categorías de raza. Calcule $H_{\text{máx}}$.

c) La uniformidad de la razón está dada por $E_H = \frac{H}{H_{\text{máx}}}$, donde $0 \le E_H \le 1$. Si $E_H = 1$, se tiene uniformidad completa. Calcule la uniformidad de la razón para Estados Unidos.

d) Obtenga la distribución de razas para Estados Unidos en 1990 a partir del censo de ese país. Calcule el índice de diversidad de Shannon. ¿Está aumentando la diversidad en Estados Unidos? ¿Por qué?

113. Presión atmosférica La presión atmosférica p sobre un globo o un avión disminuye conforme aumenta la altura. Esta presión, medida en milímetros de mercurio, se relaciona con la altura h (en kilómetros) sobre el nivel del mar mediante la fórmula

$$p = 760e^{-0.145h}$$

a) Encuentre la altura de un avión si la presión atmosférica es de 320 milímetros de mercurio.
b) Encuentre la altura de una montaña si la presión es 667 milímetros de mercurio.

114. Heridas que sanan La cicatrización normal de las heridas se modela por una función exponencial. Si A_0 representa el área original de la herida y si A es igual al área de la herida después de n días, entonces la fórmula

$$A = A_0e^{-0.35n}$$

describe el área de una herida en el n-ésimo día después de la lesión, cuando no hay infección que retrase la curación. Suponga que una herida inicialmente tiene un área de 100 milímetros cuadrados.

a) Si la cicatrización se lleva a cabo, ¿cuántos días pasarán antes de que la herida tenga la mitad de su tamaño original?
b) ¿Cuántos días pasarán antes de que la herida tenga 20% de su tamaño original?

115. Probabilidad exponencial Entre las 12:00 PM y la 1:00 PM, los autos llegan al autobanco de Citibank con una tasa de 6 autos por hora (0.1 auto por minuto). La siguiente fórmula de estadística se utiliza para determinar la probabilidad de que un auto llegue en los siguientes t minutos después de las 12:00 PM.

$$F(t) = 1 - e^{-0.1t}$$

a) Determine cuántos minutos se necesitan para que la probabilidad llegue a 50%.
b) Determine cuántos minutos se requieren para que la probabilidad llegue a 80%.
c) ¿Es posible que la probabilidad sea igual a 100%? Explique.

116. Probabilidad exponencial Entre las 5:00 y las 6:00 PM, los autos llegan a Jiffy Lube con una tasa de 9 autos por hora (0.15 autos por minuto). La siguiente fórmula de estadística se utiliza para determinar la probabilidad de que un auto llegue dentro de los t minutos siguientes a las 5:00 PM.

$$F(t) = 1 - e^{-0.15t}$$

a) Determine cuántos minutos se necesitan para que la probabilidad alcance 50%.
b) Determine cuántos minutos se requieren para que la probabilidad llegue a 80%.

117. Tratamiento con drogas La fórmula

$$D = 5e^{-0.4h}$$

se emplea para encontrar el número de miligramos D de cierta droga que está en el torrente sanguíneo de un paciente h horas después de administrarla. Cuando el número de miligramos llega a 2, la droga debe administrarse de nuevo. ¿Cuánto tiempo debe pasar entre inyecciones?

118. Rumores Un modelo para el número de personas N en una universidad del estado que han oído un rumor es

$$N = P(1 - e^{-0.15d})$$

donde P es la población total de la comunidad y d es el número de días que pasan desde que el rumor comienza. En una comunidad de 1000 estudiantes, ¿cuántos días pasan antes de que 450 de ellos oigan el rumor?

119. Corriente en un circuito *RL* La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en amperes) después del tiempo t (en segundos) en un circuito simple que consiste en una resistencia R (en ohms), una inductancia L (en henrys) y una fuerza electromotriz E (en volts), es

$$I = \frac{E}{R}[1 - e^{-(R/L)t}]$$

Si $E = 12$ volts, $R = 10$ ohms $L = 5$ henrys, ¿cuánto tiempo se necesita para obtener una corriente de 0.5 amperes y de 1.0 ampere? Grafique la ecuación.

120. Curva de aprendizaje Los psicólogos en ocasiones usan la función

$$L(t) = A(1 - e^{-kt})$$

para medir la cantidad L aprendida en el tiempo t. El número A representa la cantidad que debe aprenderse y k mide la tasa de aprendizaje. Suponga que un estudiante debe aprender una cantidad A de 200 palabras de vocabulario. Un psicólogo determina que el estudiante aprendió 20 palabras en 5 minutos.

a) Determine la tasa de aprendizaje k.
b) ¿Aproximadamente cuántas palabras aprenderá el estudiante en 10 minutos?
c) ¿Y en 15 minutos?
d) ¿Cuánto le toma aprender 180 palabras?

Volumen del sonido *Los problemas 121-124, usan el siguiente análisis: el* **volumen** $L(x)$, *medido en decibeles, de un sonido de intensidad x, medido en watts por metro cuadrado, se define como* $L(x) = 10 \log \frac{x}{I_0}$, *donde* $I_0 = 10^{-12}$ *watts por metros cuadrado es el sonido menos intenso que puede detectar el oído de un ser humano. Determine el volumen de decibeles de cada uno de los siguientes sonidos.*

121. Conversación normal: intensidad de $x = 10^{-7}$ watts por metro cuadrado.

122. Tránsito pesado en una ciudad: intensidad de $x = 10^{-3}$ watts por metro cuadrado.

123. Música de rock amplificada: intensidad de 10^{-1} watts por metro cuadrado.

124. Un camión a diesel que viaja a 40 millas por hora a 50 pies de distancia: intensidad 10 veces la de un auto que viaja a 50 millas por hora a 50 pies de distancia cuyo volumen es 70 decibeles.

Los problemas 125 y 126, usan el siguiente análisis: la **escala de Richter** *es una manera de convertir lecturas sismológicas en números que proporcionan una referencia sencilla para medir la magnitud M de un terremoto. Todos los terremotos se comparan con el* **temblor de nivel cero** *cuya lectura sismológica es de 0.001 milímetros a una distancia de 100 kilómetros del epicentro. Un temblor cuya lectura sismológica es x milímetros tiene magnitud M(x), dada por*

$$M(x) = \log\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

donde $x_0 = 10^{-3}$ *es la lectura de un temblor de nivel cero a la misma distancia del epicentro. Determine la magnitud de los siguientes terremotos.*

125. Magnitud de un terremoto Ciudad de México en 1985: lectura sismológica de 125,892 milímetros a 100 kilómetros del epicentro.

126. Magnitud de un terremoto San Francisco en 1906: lectura sismológica de 7943 milímetros a 100 kilómetros del epicentro.

127. Alcohol y conducción de vehículos La concentración de alcohol en la sangre de una persona se puede medir. Suponga que el riesgo R (dado como porcentaje) de tener un accidente al conducir un auto se modela por la ecuación

$$R = 3e^{kx}$$

donde x es la variable de concentración de alcohol en la sangre y k es una constante.

a) Suponga que una concentración de alcohol en la sangre de 0.06 da un riesgo de 10% ($R = 10$) de tener un accidente. Encuentre la constante k en la ecuación.

b) Use este valor de k para calcular el riesgo si la concentración de alcohol es 0.17.

c) Use el mismo valor de k para calcular la concentración de alcohol que corresponde a un riesgo de 100%.

d) Si la ley asegura que cualquiera con un riesgo de 15% o más de tener un accidente no debe manejar, ¿para qué concentración de alcohol en la sangre debe arrestarse al conductor con cargos por manejar bajo la influencia del alcohol?

e) Compare esta situación con la del ejemplo 10. Si usted fuera un abogado, ¿qué situación apoyaría? Dé sus razones.

128. ¿Existe una función de la forma $y = x^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$, que aumente más despacio que una función logarítmica con base mayor que 1? Explique.

129. En la definición de la función logarítmica, la base a no puede ser igual a 1. ¿Por qué?

130. Pensamiento crítico Al comprar un auto nuevo, una consideración podría ser que el auto no se deprecie demasiado con el tiempo. Cada marca de autos tiene una tasa de depreciación diferente. Se da aquí una manera de calcular la tasa de depreciación para un auto. Suponga que los precios actuales de cierto Mercedes son los siguientes:

	Años de uso				
Nuevo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$38,000	$36,600	$32,400	$28,750	$25,400	$21,200

Use la fórmula Nuevo = antiguo(e^{Rt}) para encontrar R, la tasa de depreciación anual para un tiempo t especificado. ¿Cuándo será un buen momento para cambiar el auto? Consulte la lista de precios ("libro azul") y compare dos modelos parecidos en los que está interesado. ¿Cuál tiene la mejor tasa de depreciación?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $x \leq 3$ **2.** $x < -2$ o $x > 3$ **3.** $x < -4$ o $x > 1$

5.5 Propiedades de los logaritmos

OBJETIVOS
1 Trabajar con las propiedades de los logaritmos
2 Escribir una expresión logarítmica como una suma o diferencia de logaritmos
3 Escribir una expresión logarítmica como un solo logaritmo
4 Evaluar logaritmos cuya base no es 10 o e

1 Los logaritmos tienen algunas propiedades muy útiles que se derivan directamente de la definición y las leyes de exponentes.

EJEMPLO 1 Propiedades de los logaritmos

a) Demuestre que $\log_a 1 = 0$. b) Demuestre que $\log_a a = 1$.

Solución a) Este hecho se estableció al graficar $y = \log_a x$ (vea la figura 25). Para demostrar el resultado algebraicamente, sea $y = \log_a 1$. Entonces

$$\begin{aligned} y &= \log_a 1 \\ a^y &= 1 && \text{Cambiar a un exponente.} \\ a^y &= a^0 && a^0 = 1 \\ y &= 0 && \text{Despejar } y. \\ \log_a 1 &= 0 && y = \log_a 1 \end{aligned}$$

b) Sea $y = \log_a a$. Entonces

$$\begin{aligned} y &= \log_a a \\ a^y &= a && \text{Cambiar a un exponente.} \\ a^y &= a^1 && a^1 = a \\ y &= 1 && \text{Despejar } y. \\ \log_a a &= 1 && y = \log_a a \end{aligned}$$

◀

Para resumir:

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

Teorema

Propiedades de los logaritmos

En las siguientes propiedades de los logaritmos, M y a son números reales positivos, con $a \neq 1$, y r es un número real.

El número $\log_a M$ es el exponente al cual debe elevarse a para obtener M. Es decir,

$$a^{\log_a M} = M \qquad \textbf{(1)}$$

El logaritmo base a de a elevado a una potencia es igual a esa potencia. Esto es

$$\log_a a^r = r \qquad \textbf{(2)}$$

La demostración utiliza el hecho de que $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son inversas.

Demostración de la propiedad (1) Para las funciones inversas,

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Usando $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, se encuentra

$$f(f^{-1}(x)) = a^{\log_a x} = x$$

Ahora sea $x = M$ para obtener $a^{\log_a M} = M$. ■

Prueba de la propiedad (2) Para funciones inversas,

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Usando $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, se encuentra

$$f^{-1}(f(x)) = \log_a a^x = x$$

Ahora se hace $x = r$ para obtener $\log_a a^r = r$. ■

EJEMPLO 2 Uso de las propiedades (1) y (2)

a) $2^{\log_2 \pi} = \pi$ b) $\log_{0.2} 0.2^{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ c) $\ln e^{kt} = kt$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

A continuación se dan otras propiedades útiles de los logaritmos.

Teorema

Propiedades de los logaritmos
En las siguientes propiedades, M, N y a son números reales positivos, con $a \neq 1$, y r cualquier número real.

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N \quad \textbf{(3)}$$

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N \quad \textbf{(4)}$$

El logaritmo de una potencia es igual al producto de la potencia y el logaritmo

$$\log_a M^r = r \log_a M \quad \textbf{(5)}$$

Se derivarán las propiedades (3) y (5) y se dejará la (4) como ejercicio (vea el problema 101).

Demostración de la propiedad (3) Sea $A = \log_a M$ y $B = \log_a N$. Estas expresiones son equivalentes a las expresiones exponenciales

$$a^A = M \quad \text{y} \quad a^B = N$$

Ahora

$$\begin{aligned} \log_a(MN) = \log_a(a^A a^B) &= \log_a a^{A+B} && \text{Ley de exponentes} \\ &= A + B && \text{Propiedad (2) de logaritmos} \\ &= \log_a M + \log_a N \end{aligned}$$ ■

Demostración de la propiedad (5) Sea $A = \log_a M$. Esta expresión es equivalente a

$$a^A = M$$

Entonces

$$\begin{aligned} \log_a M^r = \log_a (a^A)^r &= \log_a a^{rA} && \text{Ley de exponentes} \\ &= rA && \text{Propiedad (2) de logaritmos} \\ &= r \log_a M \end{aligned}$$

■


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

2  Los logaritmos sirven para transformar productos en sumas, cocientes en diferencias y potencias en factores. Estas transformaciones han resultado útiles en ciertos tipos de problemas de cálculo.

EJEMPLO 3 Expresión logarítmica escrita como la suma de logaritmos

Escriba $\log_a\left(x\sqrt{x^2+1}\right)$, $x > 0$, como una suma de logaritmos. Exprese todas las potencias como factores.

Solución

$$\begin{aligned} \log_a\left(x\sqrt{x^2+1}\right) &= \log_a x + \log_a \sqrt{x^2+1} && \text{Propiedad (3)} \\ &= \log_a x + \log_a (x^2+1)^{1/2} \\ &= \log_a x + \frac{1}{2}\log_a (x^2+1) && \text{Propiedad (5)} \end{aligned}$$

◄

EJEMPLO 4 Expresión logarítmica escrita como una diferencia de logaritmos

Escriba

$$\ln \frac{x^2}{(x-1)^3}, \qquad x > 1$$

como una diferencia de logaritmos. Exprese todas las potencias como factores.

Solución

$$\ln \frac{x^2}{(x-1)^3} \underset{\text{Propiedad (4)}}{=} \ln x^2 - \ln(x-1)^3 \underset{\text{Propiedad (5)}}{=} 2\ln x - 3\ln(x-1)$$

◄

EJEMPLO 5 Expresión logarítmica escrita como suma y diferencia de logaritmos

Escriba

$$\log_a \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3(x+1)^4}, \qquad x > 0$$

como una suma y diferencia de logaritmos. Exprese todas las potencias como factores.

Solución

$$\begin{aligned} \log_a \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3(x+1)^4} &= \log_a \sqrt{x^2+1} - \log_a[x^3(x+1)^4] && \text{Propiedad (4)} \\ &= \log_a \sqrt{x^2+1} - [\log_a x^3 + \log_a (x+1)^4] && \text{Propiedad (3)} \\ &= \log_a (x^2+1)^{1/2} - \log_a x^3 - \log_a (x+1)^4 \\ &= \frac{1}{2}\log_a(x^2+1) - 3\log_a x - 4\log_a(x+1) && \text{Propiedad (5)} \end{aligned}$$

◄

PRECAUCIÓN: Al usar las propiedades (3) a (5), deben revisarse los valores que toma la variable. Por ejemplo, el dominio de la variable para $\log_a x$ es $x > 0$ y para $\log_a(x\text{-}1)$ es $x > 1$. Si se suman estas funciones, el domino es $x > 1$. Entonces

$$\log_a x + \log_a(x - 1) = \log_a[x(x - 1)], \quad x > 1$$

Esta cualidad es cierta sólo para $x > 1$. ■


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45.

3 Otra aplicación útil de las propiedades (3) a (5) es escribir sumas y/o diferencias de logaritmos con la misma base como un solo logaritmo. Esta habilidad será necesaria para resolver ciertas ecuaciones logarítmicas estudiadas en la siguiente sección.

EJEMPLO 6 Expresiones escritas como un solo logaritmo

Escriba cada una de las siguientes expresiones como un solo logaritmo.

a) $\log_a 7 + 4\log_a 3$ b) $\frac{2}{3}\ln 8 - \ln(3^4 - 8)$

c) $\log_a x + \log_a 9 + \log_a(x^2 + 1) - \log_a 5$

Solución a)
$$\begin{aligned}\log_a 7 + 4\log_a 3 &= \log_a 7 + \log_a 3^4 && \text{Propiedad (5)}\\ &= \log_a 7 + \log_a 81\\ &= \log_a(7\cdot 81) && \text{Propiedad (3)}\\ &= \log_a 567\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\ln 8 - \ln(3^4 - 8) &= \ln 8^{2/3} - \ln(81 - 8) && \text{Propiedad (5)}\\ &= \ln 4 - \ln 73\\ &= \ln\left(\frac{4}{73}\right) && \text{Propiedad (4)}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\log_a x + \log_a 9 + \log_a(x^2+1) - \log_a 5 &= \log_a(9x) + \log_a(x^2+1) - \log_a 5\\ &= \log_a[9x(x^2 + 1)] - \log_a 5\\ &= \log_a\left[\frac{9x(x^2+1)}{5}\right]\end{aligned}$$ ◄

ADVERTENCIA: Un error común que cometen algunos estudiantes es expresar el logaritmo de una suma como la suma de los logaritmos.

$$\log_a(M + N) \quad \text{no es igual que} \quad \log_a M + \log_a N$$

Expresión correcta $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ Propiedad (3)

Otro error común es expresar la diferencia de logaritmos como el cociente de dos logaritmos.

$$\log_a M - \log_a N \quad \text{no es igual que} \quad \frac{\log_a M}{\log_a N}$$

Expresión correcta $\log_a M - \log_a N = \log_a\left(\frac{M}{N}\right)$ Propiedad (4)

Un tercer error común es expresar un logaritmo elevado a una potencia como el producto de la potencia por el logaritmo.

$$(\log_a M)^r \quad \text{no es igual que} \quad r \log_a M$$

Expresión correcta $\log_a M^r = r \log_a M$ Propiedad (5) 

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 51.

Otras dos propiedades de los logaritmos que deben conocerse son consecuencias del hecho de que la función logarítmica $y = \log_a x$ es uno a uno.

Teorema

Propiedades de los logaritmos

En las siguientes propiedades, M, N y a son números reales positivos, con $a \neq 1$.

Si $M = N$, entonces $\log_a M = \log_a N$. **(6)**

Si $\log_a M = \log_a N$, entonces $M = N$. **(7)**

Cuando se usa la propiedad (6), comenzamos con la ecuación $M = N$ y decimos "se toma el logaritmo en ambos lados" para obtener $\log_a M = \log_a N$.

Las propiedades (6) y (7) son útiles para resolver *ecuaciones exponenciales y logarítmicas*, tema que se estudia en la siguiente sección.

Uso de una calculadora para evaluar logaritmos con bases que no son 10 o e

 Los logaritmos base 10, logaritmos comunes, se usaban para facilitar los cálculos aritméticos antes de que las calculadoras fueran de uso común. (Vea el aspecto histórico al final de esta sección.) Los logaritmos naturales, es decir, los logaritmos cuya base es el número e, conservan su importancia porque surgen con frecuencia en el estudio de fenómenos naturales.

Los logaritmos comunes suelen abreviarse escribiendo **log**, y se entiende que la base es 10, lo mismo que los logaritmos naturales se abrevian con **ln**, y se entiende que la base es e.

La mayoría de las calculadoras tiene las dos teclas [log] y [ln] para calcular logaritmos comunes y naturales de un número. Se verá un ejemplo para ver cómo se aproximan los logaritmos que tienen bases diferentes a 10 o e.

EJEMPLO 7 Aproximación de logaritmos cuya base no es 10 o e

Aproxime $\log_2 7$. Redondee la respuesta a cuatro decimales.

Solución Sea $y = \log_2 7$. Entonces $2^y = 7$, de manera que

$$\begin{aligned} 2^y &= 7 \\ \ln 2^y &= \ln 7 && \text{Propiedad (6)} \\ y \ln 2 &= \ln 7 && \text{Propiedad (5)} \\ y &= \frac{\ln 7}{\ln 2} && \text{Solución exacta} \\ y &\approx 2.8074 && \text{Aproximada redondeada a cuatro decimales} \end{aligned}$$



El ejemplo 7 muestra cómo aproximar un logaritmo base 2 cambiándolo a logaritmos con base e. En general, se usa la **fórmula para cambio de base**.

Teorema

Fórmula para cambio de base

Si $a \neq 1, b \neq 1$, y M son números reales positivos, entonces

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \quad \textbf{(8)}$$

Demostración Se deriva esta fórmula como sigue: sea $y = \log_a M$. Entonces

$$\begin{aligned} a^y &= M \\ \log_b a^y &= \log_b M && \text{Propiedad (6)} \\ y \log_b a &= \log_b M && \text{Propiedad (5)} \\ y &= \frac{\log_b M}{\log_b a} && \text{Despejar } y. \\ \log_a M &= \frac{\log_b M}{\log_b a} && y = \log_a M \end{aligned}$$

■

Dado que en la práctica las calculadoras tiene teclas sólo para [log] y [ln,] la fórmula para cambio de base usa $b = 10$ o bien $b = e$. Así,

$$\log_a M = \frac{\log M}{\log a} \quad \text{y} \quad \log_a M = \frac{\ln M}{\ln a} \quad \textbf{(9)}$$

EJEMPLO 8 Uso de la fórmula para cambio de base

Aproxime: a) $\log_5 89$ b) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}$
Redondee su respuesta a cuatro decimales.

Solución

a) $$\log_5 89 = \frac{\log 89}{\log 5} \approx \frac{1.949390007}{0.6989700043} \approx 2.7889$$

o

$$\log_5 89 = \frac{\ln 89}{\ln 5} \approx \frac{4.48863637}{1.609437912} \approx 2.7889$$

b) $$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5} = \frac{\log \sqrt{5}}{\log \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}\log 5}{\frac{1}{2}\log 2} \approx 2.3219$$

o

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5} = \frac{\ln \sqrt{5}}{\ln \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}\ln 5}{\frac{1}{2}\ln 2} \approx 2.3219$$

◀



COMENTARIO: Graficar funciones logarítmicas cuando la base es diferente de e o 10 requiere la fórmula para cambio de base. Por ejemplo, para graficar $y = \log_2 x$, se grafica $y = \frac{\ln x}{\ln 2}$. Inténtelo ■



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 17 Y 65.

Resumen

Propiedades de los logaritmos

En la lista que sigue, $a > 0, a \neq 1$ y $b > 0, b \neq 1$; además, $M > 0$ y $N > 0$,

Definición	$y = \log_a x$ significa $x = a^y$	
Propiedades de los logaritmos	$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$	$\log_a M^r = r \log_a M$
	$a^{\log_a M} = M$; $\log_a a^r = r$	Si $M = N$, entonces $\log_a M = \log_a N$.
	$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$	Si $\log_a M = \log_a N$, entonces $M = N$.
	$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$	
Fórmula para cambio de base	$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$	

ASPECTO HISTÓRICO



John Napier (1550–1617)

Los logaritmos fueron inventados alrededor de 1590 por John Napier (1550-1617) y Joost Bürgi (1552-1632), que trabajaron de manera independiente. Napier, cuyo trabajo tenía mayor influencia, era un lord escocés, un hombre reservado cuyos vecinos se inclinaban a pensar que tenía pacto con el diablo. Su enfoque de los logaritmos era muy diferente del nuestro: se basaba en la relación entre las sucesiones aritméticas y las sucesiones geométricas, que se estudian más adelante en este capítulo, y no en la relación de función inversa de los logaritmos con las exponenciales (descrita en la sección 5.4). Las tablas de Napier, publicadas en 1614, enumeran lo que se llamarían logaritmos naturales de senos y eran bastante difíciles de usar. Un profesor en Londres, Henry Briggs, se interesó en las tablas y visitó a Napier. En sus conversaciones desarrollaron la idea de los logaritmos comunes, que se publicó en 1617. Su importancia para el cálculo fue reconocida de inmediato y para 1650 se imprimían en lugares tan remotos como China. Fueron una herramienta de cálculo importante hasta el advenimiento de las calculadoras de mano de bajo costo, más o menos en 1972, que hicieron que disminuyera la necesidad de calcularlos, pero no su importancia teórica.

Un efecto secundario de la invención de los logaritmos fue la popularización de la notación del sistema decimal para los números reales.

5.5 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. El logaritmo de un producto es igual al __________ de los logaritmos.

2. Si $\log_8 M = \frac{\log_5 7}{\log_5 8}$, entonces $M =$ __________.

3. $\log_a M^r =$ __________.

4. *Falso o verdadero:* $\ln(x + 3) - \ln(2x) = \frac{\ln(x + 3)}{\ln(2x)}$

5. *Falso o verdadero:* $\log_2(3x^4) = 4 \log_2(3x)$

6. *Falso o verdadero:* $\log_2 16 = \frac{\ln 16}{\ln 2}$

Ejercicios

En los problemas 7-22, use las propiedades de los logaritmos para encontrar el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

7. $\log_3 3^{71}$ **8.** $\log_2 2^{-13}$ **9.** $\ln e^{-4}$ **10.** $\ln e^{\sqrt{2}}$

11. $2^{\log_2 7}$ **12.** $e^{\ln 8}$ **13.** $\log_8 2 + \log_8 4$ **14.** $\log_6 9 + \log_6 4$

15. $\log_6 18 - \log_6 3$ **16.** $\log_8 16 - \log_8 2$ **17.** $\log_2 6 \cdot \log_6 4$ **18.** $\log_3 8 \cdot \log_8 9$

19. $3^{\log_3 5 - \log_3 4}$ **20.** $5^{\log_5 6 + \log_5 7}$ **21.** $e^{\log_{e^2} 16}$ **22.** $e^{\log_{e^2} 9}$

En los problemas 23-30, suponga que $\ln 2 = a$ *y* $\ln 3 = b$*. Use las propiedades de los logaritmos para escribir cada logaritmo en términos de a y b.*

23. $\ln 6$ **24.** $\ln \frac{2}{3}$ **25.** $\ln 1.5$ **26.** $\ln 0.5$

27. $\ln 8$ **28.** $\ln 27$ **29.** $\ln \sqrt[5]{6}$ **30.** $\ln \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

En los problemas 31-50, escriba cada expresión como una suma y/o diferencia de logaritmos. Exprese las potencias como factores.

31. $\log_5(25x)$ **32.** $\log_3 \frac{x}{9}$ **33.** $\log_2 z^3$ **34.** $\log_7(x^5)$

35. $\ln(ex)$ **36.** $\ln \frac{e}{x}$ **37.** $\ln(xe^x)$ **38.** $\ln \frac{x}{e^x}$

39. $\log_a(u^2v^3)$, $u > 0, v > 0$ **40.** $\log_2\left(\frac{a}{b^2}\right)$, $a > 0, b > 0$ **41.** $\ln\left(x^2\sqrt{1-x}\right)$, $0 < x < 1$ **42.** $\ln\left(x\sqrt{1+x^2}\right)$, $x > 0$

43. $\log_2\left(\frac{x^3}{x-3}\right)$, $x > 3$ **44.** $\log_5\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x^2-1}\right)$, $x > 1$ **45.** $\log\left[\frac{x(x+2)}{(x+3)^2}\right]$, $x > 0$ **46.** $\log\left[\frac{x^3\sqrt{x+1}}{(x-2)^2}\right]$, $x > 2$

47. $\ln\left[\frac{x^2-x-2}{(x+4)^2}\right]^{1/3}$, $x > 2$ **48.** $\ln\left[\frac{(x-4)^2}{x^2-1}\right]^{2/3}$, $x > 4$

49. $\ln \frac{5x\sqrt{1+3x}}{(x-4)^3}$, $x > 4$ **50.** $\ln\left[\frac{5x^2\sqrt[3]{1-x}}{4(x+1)^2}\right]$, $0 < x < 1$

En los problemas 51-64, escriba cada expresión como un solo logaritmo.

51. $3\log_5 u + 4\log_5 v$ **52.** $2\log_3 u - \log_3 v$

53. $\log_3 \sqrt{x} - \log_3 x^3$ **54.** $\log_2\left(\frac{1}{x}\right) + \log_2\left(\frac{1}{x^2}\right)$

55. $\log_4(x^2-1) - 5\log_4(x+1)$ **56.** $\log(x^2+3x+2) - 2\log(x+1)$

57. $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln(x^2-1)$ **58.** $\log\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}\right) - \log\left(\frac{x^2+7x+6}{x+2}\right)$

59. $8\log_2\sqrt{3x-2} - \log_2\left(\frac{4}{x}\right) + \log_2 4$ **60.** $21\log_3\sqrt[3]{x} + \log_3(9x^2) - \log_3 9$

61. $2\log_a(5x^3) - \frac{1}{2}\log_a(2x+3)$ **62.** $\frac{1}{3}\log(x^3+1) + \frac{1}{2}\log(x^2+1)$

63. $2\log_2(x+1) - \log_2(x+3) - \log_2(x-1)$ **64.** $3\log_5(3x+1) - 2\log_5(2x-1) - \log_5 x$

En los problemas 65-72, use la fórmula para cambio de base y una calculadora para evaluar cada logaritmo. Redondee su respuesta a tres lugares decimales.

65. $\log_3 21$ **66.** $\log_5 18$ **67.** $\log_{1/3} 71$ **68.** $\log_{1/2} 15$

69. $\log_{\sqrt{2}} 7$ **70.** $\log_{\sqrt{5}} 8$ **71.** $\log_\pi e$ **72.** $\log_\pi \sqrt{2}$

En los problemas 73-78, grafique cada función usando una calculadora gráfica y la fórmula para cambio de base.

73. $y = \log_4 x$ **74.** $y = \log_5 x$ **75.** $y = \log_2(x+2)$ **76.** $y = \log_4(x-3)$

77. $y = \log_{x-1}(x+1)$ **78.** $y = \log_{x+2}(x-2)$

En los problemas 79-88, exprese y como una función de x. La constante C es un número positivo.

79. $\ln y = \ln x + \ln C$

80. $\ln y = \ln(x + C)$

81. $\ln y = \ln x + \ln(x + 1) + \ln C$

82. $\ln y = 2\ln x - \ln(x + 1) + \ln C$

83. $\ln y = 3x + \ln C$

84. $\ln y = -2x + \ln C$

85. $\ln(y - 3) = -4x + \ln C$

86. $\ln(y + 4) = 5x + \ln C$

87. $3\ln y = \frac{1}{2}\ln(2x + 1) - \frac{1}{3}\ln(x + 4) + \ln C$

88. $2\ln y = -\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{3}\ln(x^2 + 1) + \ln C$

89. Encuentre el valor de $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

90. Encuentre el valor de $\log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8$.

91. Encuentre el valor de$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \cdots \cdot \log_n(n + 1) \cdot \log_{n+1} 2$.

92. Encuentre el valor de $\log_2 2 \cdot \log_2 4 \cdot \cdots \cdot \log_2 2^n$.

93. Demuestre que $\log_a\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \log_a\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 0$.

94. Demuestre que $\log_a\left(\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}\right) + \log_a\left(\sqrt{x} - \sqrt{x - 1}\right) = 0$.

95. Demuestre que $\ln(1 + e^{2x}) = 2x + \ln(1 + e^{-2x})$.

96. Cociente de diferencias Si $f(x) = \log_{1/a} x$, demuestre que $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \log_a\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)^{1/h}$, $h \neq 0$.

97. Si $f(x) = \log_a x$, demuestre que $-f(x) = \log_{1/a} x$.

98. Si $f(x) = \log_a x$, demuestre que $f(AB) = f(A) + f(B)$.

99. Si $f(x) = \log_a x$, demuestre que $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

100. Si $f(x) = \log_a x$, demuestre que $f(x^\alpha) = \alpha f(x)$.

101. Demuestre que $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$, donde a y N son números reales positivos con $a \neq 1$.

102. Demuestre que $\log_a\left(\frac{1}{N}\right) = -\log_a N$, donde a y N son números reales positivos con $a \neq 1$.


103. Grafique $Y_1 = \log(x^2)$ y $Y_2 = 2\log(x)$ usando una calculadora gráfica. ¿Son equivalentes? ¿Qué puede ser responsable de las diferencias entre las dos funciones?

5.6 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

OBJETIVOS
1 Resolver ecuaciones logarítmicas usando las propiedades de los logaritmos
2 Resolver ecuaciones exponenciales
3 Resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales usando una calculadora gráfica

Ecuaciones logarítmicas


En la sección 5.4 se resolvieron ecuaciones logarítmicas cambiando el logaritmo a la forma exponencial. Sin embargo, muchas veces se requiere cierta manipulación de la ecuación (usualmente con las propiedades de los logaritmos) antes de poder ponerla a la forma exponencial.

Nuestra práctica será resolver ecuaciones, siempre que sea posible, encontrando las soluciones exactas mediante métodos algebraicos. Cuando no se puedan usar los métodos algebraicos, se obtendrán soluciones aproximadas con una calculadora gráfica. Se recomienda al lector poner atención especial en la forma de la ecuación para la que son posibles las soluciones exactas.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación logarítmica

Resuelva: $2\log_5 x = \log_5 9$

Solución El dominio de la variable en esta ecuación es $x > 0$. Como cada logaritmo tiene la misma base, 5, se podría obtener una solución exacta como sigue:

$$2\log_5 x = \log_5 9$$
$$\log_5 x^2 = \log_5 9 \quad \log_a M^r = r\log_a M$$
$$x^2 = 9 \quad \text{Si } \log_a M = \log_a N, \text{ entonces } M = N.$$
$$x = 3 \quad \text{o} \quad \cancel{x = -3} \quad \text{Recuerde que } x \text{ debe ser positiva; por lo tanto, } -3 \text{ es extraña y se descarta.}$$

La ecuación sólo tiene una solución, 3. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 5.

EJEMPLO 2 **Solución de una ecuación logarítmica**

Resuelva: $\log_4(x + 3) + \log_4(2 - x) = 1$

Solución El dominio de la variable en esta ecuación requiere que $x + 3 > 0$ y $2 - x > 0$, de manera que $x > -3$ y $x < 2$. Es decir, Cualquier solución debe satisfacer $-3 < x < 2$. Para obtener una solución exacta, es necesario expresar el lado izquierdo como un solo logaritmo. Luego se cambiará la expresión a la forma exponencial.

$$\log_4(x + 3) + \log_4(2 - x) = 1$$
$$\log_4[(x + 3)(2 - x)] = 1 \quad \log_a M + \log_a N = \log_a(MN)$$
$$(x + 3)(2 - x) = 4^1 = 4 \quad \text{Cambiar a una expresión exponencial.}$$
$$-x^2 - x + 6 = 4 \quad \text{Simplificar.}$$
$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{Poner la ecuación cuadrática en forma estándar.}$$
$$(x + 2)(x - 1) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$
$$x = -2 \quad \text{o} \quad x = 1 \quad \text{Propiedad de producto cero.}$$

Como ambos, $x = -2$ y $x = 1$ satisfacen $-3 < x < 2$, ninguna es extraña. El conjunto de soluciones es $\{-2, 1\}$. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

Ecuaciones exponenciales

 En la sección 5.3 y 5.4, se resolvieron ciertas ecuaciones exponenciales expresando cada lado de la ecuación con la misma base. Sin embargo, muchas ecuaciones exponenciales no se pueden escribir de manera que ambos lados tengan la misma base. En esos casos, es posible usar las propiedades de los logaritmos junto con técnicas algebraicas para obtener una solución.

EJEMPLO 3 **Solución de una ecuación exponencial**

Resuelva: $4^x - 2^x - 12 = 0$

Solución Se observa que $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, de manera que la ecuación de hecho tiene forma cuadrática, y se escribe como

$$(2^x)^2 - 2^x - 12 = 0 \quad \text{Sea } u = 2^x\text{; entonces } u^2 - u - 12 = 0.$$

Ahora se factoriza de la manera usual.

$$(2^x - 4)(2^x + 3) = 0 \quad (u - 4)(u + 3) = 0$$
$$2^x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad 2^x + 3 = 0 \quad u - 4 = 0 \text{ o } u + 3 = 0$$
$$2^x = 4 \quad\quad 2^x = -3 \quad u = 2^x = 4 \quad u = 2^x = -3$$

La ecuación de la izquierda tiene la solución $x = 2$, ya que $2^x = 4 = 2^2$; la ecuación de la derecha no tiene solución, ya que $2^x > 0$ para toda x. La única solución es 2.

En el ejemplo 3 se pudo escribir la expresión exponencial usando la misma base después de aplicar algo de álgebra y se obtuvo una solución exacta para la ecuación. Cuando esto no es posible, algunas veces se utiliza logaritmos para obtener la solución.

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación exponencial

Resuelva: $2^x = 5$

Solución A Se escribe la ecuación exponencial como la ecuación logarítmica equivalente.

$$2^x = 5$$

$$x = \log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \quad \text{Solución exacta}$$

Fórmula para cambio de base (9), sección 5.5

Solución B De manera alternativa, se resuelve la ecuación $2^x = 5$ tomando el logaritmo en ambos lados [vea la propiedad (6), sección 5.5]. Tomando el logaritmo natural,

$$\begin{aligned} 2^x &= 5 \\ \ln 2^x &= \ln 5 && \text{Si } M = N, \log_a M = \log_a N. \\ x \ln 2 &= \ln 5 && \log_a M^r = r \log_a M \\ x &= \frac{\ln 5}{\ln 2} && \text{Solución exacta} \end{aligned}$$

Usando una calculadora, la solución redondeada a tres decimales es

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.322 \quad \text{Solución aproximada}$$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 17.

EJEMPLO 5 Solución de una ecuación exponencial

Resuelva: $8 \cdot 3^x = 5$

Solución A Despeje 3^x.

$$\begin{aligned} 8 \cdot 3^x &= 5 \\ 3^x &= \frac{5}{8} && \text{Despejar } 3^x. \\ x &= \log_3\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{\ln \frac{5}{8}}{\ln 3} && \text{Solución exacta} \end{aligned}$$

La solución redondeada a tres decimales es

$$x = \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln 3} \approx -0.428 \quad \text{Solución aproximada}$$

Solución B Se toman logaritmos en ambos lados.

$$\begin{aligned} 8 \cdot 3^x &= 5 \\ \ln(8 \cdot 3^x) &= \ln 5 && \text{Si } M = N, \text{ entonces } \ln M = \ln N \\ \ln 8 + \ln 3^x &= \ln 5 && \ln(MN) = \ln M + \ln N \\ \ln 8 + x \ln 3 &= \ln 5 && \ln M^r = r \ln M \\ x \ln 3 &= \ln 5 - \ln 8 \\ x &= \frac{\ln 5 - \ln 8}{\ln 3} && \text{Dividir entre 3.} \\ &\approx -0.428 \end{aligned}$$

◀

EJEMPLO 6 Solución de una ecuación exponencial

Resuelva: $5^{x-2} = 3^{3x+2}$

Solución Como las bases son diferentes, primero se aplica la propiedad (6), sección 5.5 (tomando el logaritmo natural en ambos lados), y luego usando las propiedades adecuadas de los logaritmos. El resultado es una ecuación en x que se puede resolver.

$$\begin{aligned} 5^{x-2} &= 3^{3x+2} \\ \ln 5^{x-2} &= \ln 3^{3x+2} && \text{Si } M = N, \log_a M = \log_a N. \\ (x-2) \ln 5 &= (3x+2) \ln 3 && \log_a M^r = r \log_a M. \\ x \ln 5 - 2 \ln 5 &= 3x \ln 3 + 2 \ln 3 && \text{Distribuir.} \\ x \ln 5 - 3x \ln 3 &= 2 \ln 3 + 2 \ln 5 && \text{Colocar los términos en } x \text{ en la izquierda.} \\ (\ln 5 - 3 \ln 3)x &= 2 (\ln 3 + \ln 5) && \text{Factorizar.} \\ x &= \frac{2(\ln 3 + \ln 5)}{\ln 5 - 3 \ln 3} && \text{Solución exacta.} \\ &\approx -3.212 && \text{Solución aproximada.} \end{aligned}$$

◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.



Soluciones con calculadora gráfica

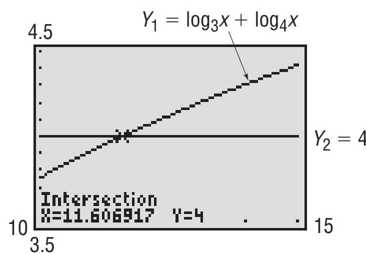
3 Las técnicas introducidas en esta sección se aplican sólo a cierto tipo de ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Las soluciones para otros tipos suelen estudiarse en cálculo, usando métodos numéricos. Sin embargo, se podría utiliza una calculadora gráfica para aproximar la solución.

EJEMPLO 7 Solución de ecuaciones con calculadora gráfica

Resuelva: $\log_3 x + \log_4 x = 4$

Exprese la(s) soluciones redondeadas a dos decimales.

Figura 33



Solución La solución se encuentra graficando

$$Y_1 = \log_3 x + \log_4 x = \frac{\log x}{\log 3} + \frac{\log x}{\log 4} \quad \text{y} \quad Y_2 = 4$$

(recuerde que debe usar la fórmula de cambio de base para graficar Y_1.) Y_1 es una función creciente (¿por qué?), entonces tiene sólo un punto de intersección para Y_1 y Y_2. La figura 33 muestra las gráficas de Y_1 y Y_2. Utilice la instrucción INTERSECT, la solución es 11.61; redondee a dos decimales. ◀



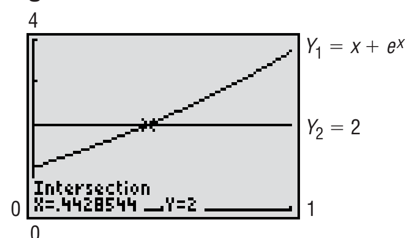
Exploración

¿Podría descubrir una solución algebraica para el ejemplo 7?

[**Sugerencia:** Factorice log x en Y_1.]

EJEMPLO 8 Solución de ecuaciones con una calculadora gráfica

Figura 34



Resuelva: $x + e^x = 2$

Exprese las soluciones redondeadas a dos decimales.

Solución La solución se encuentra graficando $Y_1 = x + e^x$ y $Y_2 = 2$. Y_1 es una función creciente (¿por qué?), entonces hay sólo un punto de intersección para Y_1 y Y_2. La figura 34 muestra las gráficas de Y_1 y Y_2. Utilizando la instrucción INTERSECT, la solución es 0.44 redondeada a dos decimales. ◀

5.6 Evalúe su comprensión

Ejercicios

En los problemas 1-44, resuelva cada ecuación. Exprese las soluciones irracionales en forma exacta y como decimal redondeado a 3 decimales.

1. $\log_4(x + 2) = \log_4 8$
2. $\log_5(2x + 3) = \log_5 3$
3. $\frac{1}{2}\log_3 x = 2\log_3 2$
4. $-2\log_4 x = \log_4 9$
5. $2\log_5 x = 3\log_5 4$
6. $3\log_2 x = -\log_2 27$
7. $3\log_2(x - 1) + \log_2 4 = 5$
8. $2\log_3(x + 4) - \log_3 9 = 2$
9. $\log x + \log(x + 15) = 2$
10. $\log_4 x + \log_4(x - 3) = 1$
11. $\ln x + \ln(x + 2) = 4$
12. $\ln(x + 1) - \ln x = 2$
13. $2^{2x} + 2^x - 12 = 0$
14. $3^{2x} + 3^x - 2 = 0$
15. $3^{2x} + 3^{x+1} - 4 = 0$
16. $2^{2x} + 2^{x+2} - 12 = 0$
17. $2^x = 10$
18. $3^x = 14$
19. $8^{-x} = 1.2$
20. $2^{-x} = 1.5$
21. $3^{1-2x} = 4^x$
22. $2^{x+1} = 5^{1-2x}$
23. $\left(\frac{3}{5}\right)^x = 7^{1-x}$
24. $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-x} = 5^x$
25. $1.2^x = (0.5)^{-x}$
26. $(0.3)^{1+x} = 1.7^{2x-1}$
27. $\pi^{1-x} = e^x$
28. $e^{x+3} = \pi^x$
29. $5(2^{3x}) = 8$
30. $0.3(4^{0.2x}) = 0.2$
31. $\log_a(x - 1) - \log_a(x + 6) = \log_a(x - 2) - \log_a(x + 3)$
32. $\log_a x + \log_a(x - 2) = \log_a(x + 4)$
33. $\log_{1/3}(x^2 + x) - \log_{1/3}(x^2 - x) = -1$
34. $\log_4(x^2 - 9) - \log_4(x + 3) = 3$
35. $\log_2(x + 1) - \log_4 x = 1$
[**Sugerencia:** Cambie $\log_4 x$ a base 2.]
36. $\log_2(3x + 2) - \log_4 x = 3$
37. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$
38. $\log_9 x + 3\log_3 x = 14$
39. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{2-x} = 2^{x^2}$
40. $\log_2 x^{\log_2 x} = 4$
41. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$
[**Sugerencia:** Multiplique los dos lados por e^x.]
42. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 3$
43. $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2$
44. $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -2$


En los problemas 45-60, use una calculadora gráfica para resolver cada ecuación. Exprese su respuesta redondeada a dos decimales.

45. $\log_5 x + \log_3 x = 1$
46. $\log_2 x + \log_6 x = 3$
47. $\log_5(x + 1) - \log_4(x - 2) = 1$
48. $\log_2(x - 1) - \log_6(x + 2) = 2$

49. $e^x = -x$
50. $e^{2x} = x + 2$
51. $e^x = x^2$
52. $e^x = x^3$
53. $\ln x = -x$
54. $\ln(2x) = -x + 2$
55. $\ln x = x^3 - 1$
56. $\ln x = -x^2$
57. $e^x + \ln x = 4$
58. $e^x - \ln x = 4$
59. $e^{-x} = \ln x$
60. $e^{-x} = -\ln x$

 **61.** Proporcione las razones para cada paso en las siguientes soluciones.

Resuelva: $\log_3(x-1)^2 = 2$

Solución A	**Solución B**
$\log_3(x-1)^2 = 2$	$\log_3(x-1)^2 = 2$
$(x-1)^2 = 3^2 = 9$ __________	$2\log_3(x-1) = 2$ __________
$(x-1) = \pm 3$ __________	$\log_3(x-1) = 1$ __________
$x - 1 = -3$ or $x - 1 = 3$ __________	$x - 1 = 3^1 = 3$ __________
$x = -2$ or $x = 4$ __________	$x = 4$ __________

Ambas soluciones dadas en la solución A se cumplen. Explique qué ocasionó que la solución $x = -2$ se perdiera en la solución B.

5.7 Interés compuesto

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Interés simple (sección 1.7, pp. 142-143)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?" en la página 462.

OBJETIVOS
1 Determinar el valor futuro de una suma de dinero
2 Calcular las tasas de retorno efectivas
3 Determinar el valor presente de una suma de dinero
4 Determinar el tiempo requerido para duplicar o triplicar una suma de dinero

1 Interés es el dinero pagado por el uso del dinero. La cantidad total prestada (ya sea un individuo a quien le presta un banco, o un banco al que le presta un individuo en la forma de cuenta de ahorros) se llama **capital**. La **tasa de interés**, expresada como porcentaje, es la cantidad cargada por el uso del capital para un periodo dado, en general, con base en un año (esto es, por año).

Fórmula de interés simple

Si un capital de P dólares se presta por un periodo de t años a una tasa de interés por año r, expresado como decimal, el interés I cargado es

$$I = Prt \qquad (1)$$

El interés cargado de acuerdo con la fórmula (1) se llama **interés simple**.

Al trabajar en los problemas que incluyen interés, se define el término **periodo de pago** como sigue:

Anual	Una vez por año	Mensual	12 veces por año
Semianual	Dos veces por año	Diario	365 veces por año*
Trimestral	Cuatro veces por año		

*Casi todos los bancos usan un "año" de 360 días. ¿Por qué cree que lo hacen?

Cuando el interés debido al final del periodo de pago se suma al capital de manera que el interés calculado al final del siguiente periodo se basa en este nuevo capital (capital anterior + interés), se dice que el interés es **compuesto**. El **interés compuesto** es el interés que se paga sobre el capital y el interés anterior.

EJEMPLO 1 Cálculo del interés compuesto

Una unión de crédito paga 8% de interés por año compuesto cada trimestre para cierto plan de ahorro. Si se depositan $1000 en este plan y el interés se deja acumular, ¿cuánto dinero hay en la cuenta después de 1 año?

Solución Se usa la fórmula de interés simple, $I = Prt$. El capital P es $1000 y la tasa de interés es 8% = 0.08. Después del primer trimestre de un año, el tiempo t es $\frac{1}{4}$ de año, de manera que el interés ganado es

$$I = Prt = (\$1000)(0.08)\left(\frac{1}{4}\right) = \$20$$

El nuevo capital es $P + I = \$1000 + \$20 = \$1020$. Al final del segundo trimestre, el interés sobre el capital es

$$I = (\$1020)(0.08)\left(\frac{1}{4}\right) = \$20.40$$

Al final del tercer trimestre, el interés sobre el nuevo capital de $\$1020 + \$20.40 = \$1040.40$ es

$$I = (\$1040.40)(0.08)\left(\frac{1}{4}\right) = \$20.81$$

Por último, después del cuarto trimestre, el interés es

$$I = (\$1061.21)(0.08)\left(\frac{1}{4}\right) = \$21.22$$

Después de 1 año la cuenta contiene $\$1061.21 + \$21.22 = \$1082.43$. ◄

El patrón de cálculos realizados en el ejemplo 1 lleva a una fórmula general para el interés compuesto. Para organizar estas ideas, sea P el capital invertido a una tasa de interés r que se compone n veces por año, de modo que el tiempo de cada periodo de composición es $\frac{1}{n}$ años. (Para el propósito de los cálculos, r se expresa como decimal.) El interés ganado después de cada periodo de composición está dado por la fórmula (1).

$$\text{Interés} = \text{capital} \times \text{taza} \times \text{tiempo} = P \cdot r \cdot \frac{1}{n} = P \cdot \left(\frac{r}{n}\right)$$

La cantidad A después de un periodo de composición es

$$A = P + I = P + P \cdot \left(\frac{r}{n}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

Después dos periodos de composición, la cantidad A, basada en el nuevo capital $P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)$, es

$$A = \underbrace{P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)}_{\text{Nuevo capital}} + \underbrace{P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)\left(\frac{r}{n}\right)}_{\text{Interés sobre el nuevo capital}} = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)\left(1 + \frac{r}{n}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2$$

Después de tres periodos de composición, la cantidad A es

$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2 + P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2\left(\frac{r}{n}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^3$$

Si se continúa de esta manera, después de n periodos de composición (1 año), la cantidad A es

$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Como t años contienen $n \cdot t$ periodos de composición, después de t años se tiene

$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Teorema

Fórmula para interés compuesto

La cantidad A después de t años que se debe a un capital P invertido a una tasa de interés anual r compuesto n veces por año es

$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \textbf{(2)}$$

Por ejemplo, para trabajar de nuevo en el ejemplo 1 se usaría $P = \$1000$, $r - 0.08$, $n = 4$ (compuesto trimestralmente) y $t = 1$ año, para obtener

$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 1000\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4 = \$1082.43$$

En la ecuación (2), la cantidad A suele llamarse **valor acumulado** o **valor futuro** de la cuenta, mientras que P se llama **valor presente**.

Exploración



Para ver los efectos del interés compuesto mensualmente para un depósito inicial de $1, grafique $Y_1 = \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12x}$ con $r = 0.06$ y $r = 0.12$ para $0 \leq x \leq 30$. ¿Cuál es el valor futuro de $1 en 30 años cuando la tasa de interés por año es $r = 0.12$ (12%)? Si se duplica el interés, ¿se duplica el valor futuro?

Nota: Al usar su calculadora, asegúrese de utilizar los valores almacenados en lugar de aproximaciones, para evitar errores de redondeo. En el último paso, redondee el dinero al centavo más cercano.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 3.

EJEMPLO 2 **Comparación de inversiones con diferentes periodos de composición**

Invertir \$1000 a una tasa anual de 10% compuesta cada año, semestre, trimestre, mes y día dará las siguientes cantidades después de 1 año.

Composición anual:
$$A = P \cdot (1 + r) = (\$1000)(1 + 0.10) = \$1100.00$$

Composición semestral:
$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 = (\$1000)(1 + 0.05)^2 = \$1102.50$$

Composición trimestral:
$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4 = (\$1000)(1 + 0.025)^4 = \$1103.81$$

Composición mensual:
$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} = (\$1000)(1 + 0.00833)^{12} = \$1104.71$$

Composición diaria:
$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365} = (\$1000)(1 + 0.000274)^{365} = \$1105.16$$

◀

En el ejemplo 2, se observa que el efecto de componer con más frecuencia es que la cantidad después de 1 año es más alta: \$1000 al 10% compuesto 4 veces al año da como resultado \$1103.81; \$1000 al 10% compuesto 12 veces al año da 1104.71; \$1000 al 10% compuesto 365 veces al año da \$1105.16. Esto lleva a la siguiente pregunta: ¿qué pasaría con la cantidad después de 1 año si el número de veces que se compone el interés aumentara sin límite?

Se encontrará la respuesta ahora. Suponga que P es el capital, r es la tasa de interés por año y n es el número de veces que se compone el interés cada año. La cantidad después de 1 año es

$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Esta expresión se rescribe como sigue:

$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = P \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^n = P \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{n/r}\right]^r \underset{h = \frac{n}{r}}{\uparrow}= P \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h\right]^r \quad \textbf{(3)}$$

Ahora suponga que el número n de veces por año que se compone el interés crece cada vez más, es decir, $n \to \infty$. Entonces $h = \frac{n}{r} \to \infty$, y la expresión entre paréntesis cuadrados es igual e. [Vea la ecuación (2), página 419.] Esto es, $A \to Pe^r$.

La tabla 8 compara $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$, para valores grandes de n, con e^r para $r = 0.05$, $r = 0.10$, $r = 0.15$ y $r = 1$. Cuanto más grande es n, más se acerca

Tabla 8

	$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$			
	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10{,}000$	e^r
$r = 0.05$	1.0512580	1.0512698	1.051271	1.0512711
$r = 0.10$	1.1051157	1.1051654	1.1051704	1.1051709
$r = 0.15$	1.1617037	1.1618212	1.1618329	1.1618342
$r = 1$	2.7048138	2.7169239	2.7181459	2.7182818

$\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$ e^r. No importa qué tan frecuente sea la composición, la cantidad después de 1 año tiene Pe^r como tope definido.

Cuando el interés se compone de manera que la cantidad después de 1 año es Pe^r, se dice que se tiene interés **compuesto continuamente**.

Teorema

Composición continua

La cantidad A después de t años obtenida de un capital P invertido a una tasa de interés anual r compuesto continuamente es

$$A = Pe^{rt} \qquad \textbf{(4)}$$

EJEMPLO 3 Uso de la composición continua

La cantidad A que resulta de invertir un capital P de \$1000 a una tasa anual r de 10% compuesta continuamente durante un tiempo t de 1 año es

$$A = \$1000e^{0.10} = (\$1000)(1.10517) = \$1105.17$$

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

2 La **tasa de interés efectiva** es la tasa simple anual equivalente de interés que daría la misma cantidad que el compuesto después de 1 año. Por ejemplo, según el ejemplo 3, un capital de \$1000 daría \$1105.17 a una tasa de 10% compuesta continuamente. Para obtener esta misma cantidad usando una tasa de interés simple se requeriría ganar un interés de \$1105.17 − \$1000.00 = \$105.17 sobre el capital. Como \$105.17 es 10.517% de \$1000, se necesita una tasa de interés simple de 10.517% para igualar el 10% de interés compuesto continuamente. La tasa efectiva de interés de 10% compuesto continuamente es de 10.517%.

Con base en los resultados de los ejemplos 2 y 3, encuentre la siguiente comparación:

	Tasa anual	Tasa efectiva
Composición anual	10%	10%
Composición semestral	10%	10.25%
Composición trimestral	10%	10.381%
Composición mensual	10%	10.471%
Composición diaria	10%	10.516%
Composición continua	10%	10.517%

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 23.

EJEMPLO 4 Cálculo del valor de una Afore

El 2 de enero de 2004, se invierten \$2000 en una cuenta de fondo de retiro que pagará un interés de 10% anual compuesto continuamente.

a) ¿Cuánto valdrá la Afore el 1 de enero de 2024?

b) ¿Cuál es la tasa de interés efectiva?

Solución a) La cantidad A después de 20 años es

$$A = Pe^{rt} = \$2000e^{(0.10)(20)} = \$14{,}778.11$$

b) Primero se calcula el interés ganado sobre \$2000 a $r = 10\%$ compuesto continuamente durante 1 año.

$$\begin{aligned} A &= \$2000e^{0.10(1)} \\ &= \$2210.34 \end{aligned}$$

Entonces el interés ganado es \$2210.34 − \$2000.00 = \$210.34. Utilice la fórmula del interés simple $I = Prt$, con $I = \$210.34$, $P = \$2000$ y $t = 1$, y despeje r, la tasa de interés efectivo.

$$\begin{aligned} \$210.34 &= \$2000 \cdot r \cdot 1 \\ r &= \frac{\$210.34}{\$2000} = 0.10517 \end{aligned}$$

La tasa de interés efectivo es de 10.57%. ◄



Exploración

Para la Afore descrita en el ejemplo 4, ¿cuánto tiempo pasará para que A = \$4000 o \$6000?

[**Sugerencia:** Grafique $Y_1 = 2000e^{0.1x}$ y $Y_2 = 4000$. Use INTERSECT para encontrar x.]



3 Cuando las personas que trabajan en finanzas hablan del "valor del dinero en el tiempo" suelen referirse al *valor presente del dinero*. El **valor presente** de A dólares que deben recibirse en una fecha futura es el capital que se necesitaría invertir ahora para tener A dólares en un periodo especificado. El valor presente del dinero que se recibirá en una fecha futura es siempre menos que la cantidad que se recibirá, ya que ésta será igual al valor presente (dinero invertido ahora) *más* el interés acumulado en el periodo.



Se usa la fórmula de interés compuesto (2) para obtener la fórmula del valor presente. Si P es el valor presente de A dólares que se recibirán dentro de t años a una tasa de interés anual r compuesta n veces por año, entonces por la fórmula (2),

$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Para despejar P, se dividen ambos lados entre $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. El resultado es

$$\frac{A}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}} = P \quad \text{o} \quad P = A \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt}$$

Teorema

Fórmulas del valor presente

El valor presente P de A dólares que se recibirán después de t años, suponiendo una tasa de interés anual r compuesto n veces por año, es

$$P = A \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt} \qquad \textbf{(5)}$$

Si el interés se compone continuamente, entonces

$$P = Ae^{-rt} \qquad \textbf{(6)}$$

Para probar (6) se despeja P de la fórmula (4).

EJEMPLO 5 Cálculo del valor de un bono cupón cero

Un bono de cupón cero (no acumula interés) podría redimirse en 10 años por \$1000. ¿Cuánto debe estar dispuesto a pagar por él ahora si desea un rendimiento de

a) 8% compuesto mensualmente?

b) 7% compuesto continuamente?

Solución a) Se busca el valor presente de \$1000. Se usa la fórmula (5) con $A = \$1000$, $n = 12$, $r = 0.08$ y $t = 10$.

$$P = A \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt} = \$1000\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{-12(10)} = \$450.52$$

Para obtener un rendimiento de 8% compuesto mensualmente, debe pagar \$450.52 por el bono.

b) Aquí se usa la fórmula (6) con $A = \$1000$, $r = 0.07$ y $t = 10$.

$$P = Ae^{-rt} = \$1000e^{-(0.07)(10)} = \$496.59$$

Para obtener un rendimiento de 7% compuesto continuamente, debe pagar \$496.59 por el bono. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

EJEMPLO 6 Tasa de interés requerida para duplicar una inversión

¿Qué tasa de interés compuesta anualmente debe buscar si desea duplicar su inversión en 5 años?

Solución Si P es el capital y se quiere duplicar P, la cantidad A será igual a $2P$. Se usa la fórmula de interés compuesto con $n = 1$ y $t = 5$ para encontrar r.

$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$2P = P \cdot (1 + r)^5 \qquad A = 2P,\ n = 1,\ t = 5$$

$$2 = (1 + r)^5 \qquad \text{Cancelar las } P$$

$$1 + r = \sqrt[5]{2} \qquad \text{Tomar raíz quinta en cada lado}$$

$$r = \sqrt[5]{2} - 1 \approx 1.148698 - 1 = 0.148698$$

La tasa de interés anual necesaria para duplicar el capital en 5 años es de 14.87%. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.

4 **EJEMPLO 7** **Tiempo para duplicar y triplicar una inversión**

a) ¿Cuánto tiempo tomará que una inversión se duplique en valor si gana 5% compuesto continuamente?

b) ¿Cuánto tiempo tomará triplicarla a esta tasa?

Solución a) Si P es la inversión inicial y se quiere duplicar P, la cantidad A será $2P$. Se usa la fórmula (4) para interés compuesto continuamente con $r = 0.05$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} \\ 2P &= Pe^{0.05t} && A = 2P,\ r = 0.05 \\ 2 &= e^{0.05t} && \text{Cancelar las } P. \\ 0.05t &= \ln 2 && \text{Rescribir como logaritmo.} \\ t &= \frac{\ln 2}{0.05} \approx 13.86 && \text{Despejar } t. \end{aligned}$$

Tomará cerca de 14 años duplicar la inversión.

b) Para triplicar la inversión se hace $A = 3P$ en la fórmula (4).

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} \\ 3P &= Pe^{0.05t} && A = 3P,\ n = 0.05 \\ 3 &= e^{0.05t} && \text{Cancelar las } P. \\ 0.05t &= \ln 3 && \text{Rescribir como logaritmo.} \\ t &= \frac{\ln 3}{0.05} \approx 21.97 && \text{Despejar } t. \end{aligned}$$

Tomará casi 22 años triplicar la inversión ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

5.7 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas están al final de estos ejercicios. Si obtuvo una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. ¿Cuál es el interés que se debe si se piden 500 prestados durante 6 meses a una tasa de interés simple de 6% anual? (pp. 142–143)

2. Si pide prestados \$5000 y a los 9 meses paga \$5500 para saldar la deuda, ¿qué tasa de interés anual se cargó? (pp. 142–143)

Ejercicios

En los problemas 3-12, encuentre la cantidad que se obtiene con cada inversión.

3. \$100 invertidos al 4% anual compuesto trimestralmente después de 2 años.

4. \$50 invertidos al 6% anual compuesto cada mes después de 3 años.

5. \$500 invertidos al 8% anual compuesto cada trimestre después de $2\frac{1}{2}$ años.

6. \$300 invertidos al 12% anual compuesto cada mes después de $1\frac{1}{2}$ años.

7. \$600 invertidos al 5% anual compuesto diariamente después de 3 años.

8. \$700 invertidos al 6% anual compuesto diariamente después de 2 años.

9. \$10 invertidos al 11% anual compuesto continuamente después de 2 años.

10. \$40 invertidos al 7% anual compuesto continuamente después de 3 años.

11. \$100 invertidos al 10% anual compuesto continuamente después de $2\frac{1}{4}$ años.

12. \$100 invertidos al 12% anual compuesto continuamente después de $3\frac{3}{4}$ años.

En los problemas 13-22, encuentre el capital necesario ahora para obtener cada cantidad; es decir, encuentre el valor presente.

13. Para obtener \$100 después de 2 años al 6% compuesto cada mes.

14. Para obtener \$75 después de 3 años al 8% compuesto cada trimestre.

15. Para obtener \$1000 después de $2\frac{1}{2}$ años al 6% compuesto diariamente.

16. Para obtener \$800 después de $3\frac{1}{2}$ años al 7% compuesto cada mes.

17. Para obtener \$600 después de 2 años al 4% compuesto diariamente.

18. Para obtener \$300 después de 4 años al 3% compuesto diariamente.

19. Para obtener \$80 después de $3\frac{1}{4}$ años al 9% compuesto cada trimestre.

20. Para obtener \$800 después de $2\frac{1}{2}$ años al 8% compuesto continuamente.

21. Para obtener \$400 después de 1 año al 10% compuesto continuamente.

22. Para obtener \$1000 después de 1 años al 12% compuesto continuamente.

23. Encuentre la tasa de interés efectiva para $5\frac{1}{4}$% compuesto cada trimestre.

24. ¿Qué tasa de interés compuesto cada trimestre dará una tasa efectiva de 7%?

25. ¿Qué tasa de interés compuesto anualmente se requiere para duplicar la inversión en 3 años?

26. ¿Qué tasa de interés compuesto cada año se requiere para duplicar una inversión en 10 años?

En los problemas 27-30, ¿cuál de las dos tasas dará una cantidad mayor en 1 año?
[**Sugerencia:** Comience con un capital de \$10,000 en cada caso.]

27. 6% compuesta cada trimestre o $6\frac{1}{4}$% compuesto cada año.

28. 9% compuesto cada trimestre o $9\frac{1}{4}$% compuesto cada año.

29. 9% compuesto mensualmente o 8.8% compuesto diariamente.

30. 8% compuesto semestralmente o 7.9% compuesto diariamente.

---

31. ¿Cuánto tiempo toma duplicar el valor de una inversión si la tasa es 8% anual compuesta cada mes? ¿Y compuesta continuamente?

32. ¿Cuánto tiempo toma duplicar el valor de una inversión si la tasa es 10% anual compuesta cada mes? ¿Y compuesta continuamente?

33. Si Tanisha tiene \$100 para invertir al 8% anual compuesto cada mes, ¿cuánto tiempo pasará para que tenga \$150? Si el interés se compone continuamente, ¿cuánto tiempo se requiere?

34. Si Ángela tiene \$100 para invertir al 10% anual compuesto cada mes, ¿cuánto tiempo debe pasar para que tenga \$175? Si el interés se compone continuamente, ¿cuánto tiempo pasa?

35. ¿Cuántos años se necesitan para que una inversión inicial de \$10,000 crezca a \$25,000? Suponga una tasa de interés de 6% compuesta continuamente.

36. ¿Cuántos años se necesitan para que una inversión inicial de \$25,000 crezca a \$80,000? Suponga una tasa de interés de 7% compuesto continuamente.

37. ¿Cuánto costará una casa de \$90,000 dentro de 5 años si la tasa de inflación en ese periodo tiene un promedio de 3% compuesta cada año?

38. Sears cobra 1.25% por mes sobre saldos insolutos para clientes con cuentas de crédito (el interés se compone mensualmente). Un cliente carga \$200 y no paga en 6 meses. ¿De cuánto es la factura en ese momento?

39. Jerome comprará un auto usado en \$15,000 dentro de 3 años. ¿Cuánto dinero debe pedir a sus padres ahora para que, al invertirlo al 5% compuesto continuamente, tenga suficiente para comprar el auto?

40. John requerirá \$3000 en 6 meses para pagar un préstamo que no admite pago adelantado. Si tiene los \$3000 ahora, ¿cuánto debe ahorrar en una cuenta que paga 3% compuesto mensualmente para tener \$3000 en 6 meses?

41. George contempla la compra de 100 acciones que se venden en \$15 cada una. La acción no paga dividendos. La historia de la acción indica que debe crecer a una tasa anual de 15%. ¿Cuál será el valor de 100 acciones dentro de 5 años?

42. Tracy considera la compra de 100 acciones de una acción que se vende en \$15 cada una. La acción no paga dividendos. Su agente de bolsa dice que las acciones valdrán \$20 cada una en 2 años. ¿Cuál es la tasa de retorno anual sobre esta inversión?

43. Un negocio comprado en \$650,000 en 1994 se vende en \$850,000 en 1997. ¿Cuál es la tasa de retorno anual de esta inversión?

44. Tanya acaba de heredar un anillo de diamantes valuado en \$5000. Si los diamantes suben su valor con una tasa de 8% anual, ¿cuál era el valor del anillo hace 10 años, cuando se compró?

45. Jim deposita \$1000 en una cuenta de banco que paga 5.6% compuesto continuamente. Después de 1 año, ¿tendrá suficiente dinero para comprar un sistema de cómputo que cuesta \$1060? Si otro banco le paga 5.9% compuesto mensualmente, ¿es ésta una mejor inversión?

46. El 1 de enero, Kim deposita \$1000 en un certificado de depósito que paga 6.8% compuesto continuamente y madura en 3 años. En ese momento Kim deposita los \$1000 más el interés en una cuenta de ahorros que paga

5.25% compuesto cada mes. ¿Cuánto tiene Kim en la cuenta de ahorros el 1 de mayo?

47. Will invierte \$2000 en un bono que paga 9% de interés compuesto semestralmente. Su amigo Henry invierte \$2000 en un certificado de depósito que paga $8\frac{1}{2}$% compuesto continuamente. ¿Quién tiene más dinero después de 20 años, Will o Henry?

48. Suponga que Ana tiene acceso a una inversión que paga 10% de interés compuesto continuamente. Diga qué es mejor: que le den ahora \$1000 para aprovechar esta oportunidad de inversión o que le den \$1325 después de 3 años?

49. Colleen y Bill acaban de comprar una casa en \$150,000, donde el vendedor les concede una segunda hipoteca de \$50,000. Prometen pagar al vendedor \$50,000 más todos los intereses acumulados dentro de 5 años. El vendedor les ofrece tres opciones de interés sobre la segunda hipoteca:

a) Interés simple de 12% anual.

b) $11\frac{1}{2}$% de interés compuesto mensualmente.

c) $11\frac{1}{4}$% de interés compuesto continuamente.

¿Qué opción es mejor, es decir, cuál da el menor interés sobre el préstamo?

50. El First National Bank anuncia que paga interés sobre las cuentas de ahorro a una tasa de 4.25% compuesto diariamente. Encuentre la tasa efectiva si el banco usa *a*) 360 días o *b*) 365 días al determinar la tasa diaria.

Los problemas 51-54, se refieren a bonos de cupón cero. Un bono de cupón cero es un bono que se vende ahora con descuento y pagará su valor nominal al madurar; no paga intereses.

51. Un bono de cupón cero se puede redimir en 20 años por \$10,000. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por él ahora si desea un retorno de

a) 10% compuesto mensualmente?

b) 10% compuesto continuamente?

52. Los abuelos de una niña piensan comprar un bono de cupón cero con valor nominal de \$40,000 cuando nazca, de manera que tenga suficiente dinero para pagar sus estudios universitarios a los 17 años. Si desean una tasa de retorno de 8% compuesta anualmente, ¿cuánto deben pagar por el bono?

53. ¿En cuánto debe venderse ahora un bono de cupón cero con valor nominal de \$10,000 que madura en 10 años, si se quiere una tasa de retorno de 8% compuesto anualmente?

54. Si Pat paga \$12,485.52 por un bono de cupón cero con valor nominal de \$25,000 que madura en 8 años, ¿cuál es su tasa de retorno anual?

55. Tiempo para duplicar o triplicar una inversión La fórmula

$$t = \frac{\ln m}{n \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)}$$

se utiliza para encontrar el número de años *t* requeridos para multiplicar una inversión *m* veces cuando *r* es la tasa de interés anual compuesta *n* veces al año.

a) ¿Cuántos años tomará duplicar el valor del fondo de inversión que compone cada año con una tasa de interés de 12%?

b) ¿Cuántos años tomará triplicar el valor de una cuenta de ahorros que compone cada trimestre con una tasa de interés de 6%?

c) Proporcione una derivación de esta fórmula.

56. Tiempo para lograr una meta de inversión La fórmula

$$t = \frac{\ln A - \ln P}{r}$$

se usa para encontrar el número de años *t* requeridos para que una inversión *P* crezca a un valor *A* cuando cada año se compone de una tasa de interés *r*.

a) ¿Cuánto tiempo tomará aumentar una inversión inicial de \$1000 a \$8000 a una tasa anual de 10%?

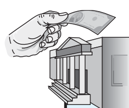
b) ¿Qué tasa anual se requiere para aumentar el valor de un fondo de inversión de \$2000 a \$30,000 en 35 años?

c) Dé una, derivación de estas fórmulas.

57. Explique en sus palabras qué significa el término *interés compuesto*. ¿Qué significa *composición continua*?

58. Explique en sus palabras el significado de *valor presente*.

59. Pensamiento crítico Usted piensa comprar una casa y pedirá financiamiento por la cantidad de \$100,000. Va a varios bancos. El banco 1 le presta \$100,000 a una tasa de 8.75% amortizable en 30 años con un costo de aprobación de crédito de 1.75%. El banco 2 le presta \$100,000 a una tasa de 8.375% amortizable en 15 años con un costo de aprobación del crédito de 1.5%. El banco 3 le presta los \$100,000 a una tasa de 8.625 amortizable a 15 años sin costo de aprobación del crédito. ¿Qué préstamo tomaría? ¿Por qué? Asegúrese de dar razones fundamentadas para su elección. Utilice la información de la tabla como ayuda. Si el pago mensual no fuera importante para usted, ¿qué préstamo tomaría? De nuevo, dé las razones de su elección. Compare su decisión final con la de otros estudiantes. Analice.



	Paso mensual	Costo de apertura de crédito
Banco 1	\$786.70	\$1,750.00
Banco 2	\$977.42	\$1,500.00
Banco 3	\$813.63	\$0.00
Banco 4	\$990.68	\$0.00

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. \$15 **2.** 13.33%

5.8 Crecimiento y decaimiento exponencial; ley de Newton; modelos logísticos

OBJETIVOS
1 Encontrar ecuaciones de población que obedezcan las leyes del crecimiento desinhibido
2 Encontrar ecuaciones de población que obedezcan las leyes de decaimiento
3 Usar la ley de Newton de enfriamiento
4 Usar modelos logísticos

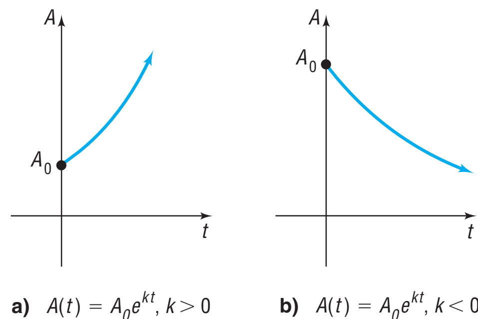
1 Se ha encontrado que muchos fenómenos naturales siguen la ley de que una cantidad A varía con el tiempo de acuerdo con

$$A(t) = A_0 e^{kt} \quad \textbf{(1)}$$

donde $A_0 = A(0)$ es la cantidad original $(t = 0)$ y $k \neq 0$ es una constante.

Si $k > 0$, entonces la ecuación (1) establece que la cantidad A aumenta en el tiempo; si $k < 0$, la cantidad A disminuye con el tiempo. En cualquier caso, cuando A varía en el tiempo de acuerdo con la ecuación (1), se dice que sigue la **ley exponencial** o la **ley de crecimiento** $(k > 0)$ **o decrecimiento** $(k < 0)$ **desinhibido**. Vea la figura 35.

Figura 35



a) $A(t) = A_0e^{kt}, k > 0$ **b)** $A(t) = A_0e^{kt}, k < 0$

Por ejemplo, en la sección 5.7 se vio que un interés compuesto continuamente sigue la ley del crecimiento desinhibido. En esta sección se verán otros tres fenómenos que siguen la ley exponencial.

Crecimiento desinhibido

La división de células es un proceso en el crecimiento de muchos organismos, como amibas, plantas y las células de la piel humana. Con base en una situación ideal en la que no mueren células y no se originan productos secundarios, el número de células presentes en un tiempo dado sigue la ley del crecimiento desinhibido. Sin embargo, en realidad una vez que transcurre suficiente tiempo, se detendrá el crecimiento con tasa exponencial debido a la influencia de factores como falta de espacio de vida y agotamiento de recursos de alimentación. La ley del crecimiento desinhibido refleja con exactitud las primeras etapas del proceso de división de células.

El proceso de división de células comienza con un cultivo que contiene N_0 células. Cada célula en el cultivo crece durante cierto periodo y luego se divide en dos células idénticas. Se supone que el tiempo necesario para que cada célula se divida en dos es constante y no cambia al aumentar el número de células. Estas nuevas células crecen y en algún momento se dividen en dos, y así sucesivamente.

Crecimiento desinhibido de células

Un modelo que proporciona el número N de células en el cultivo al transcurrir un tiempo t (en las primeras etapas de crecimiento) es

$$N(t) = N_0 e^{kt}, \qquad k > 0 \tag{2}$$

donde $N_0 = N(0)$ es el número inicial de células y k es una constante positiva que representa la tasa de crecimiento de las células.

Al usar la fórmula (2) para modelar el crecimiento de células, se está empleando una función que da números reales positivos, aun cuando se esté contando el número de células, que debe ser un entero. Ésta es una práctica común en muchas aplicaciones.

EJEMPLO 1 Crecimiento de bacterias

Una colonia de bacterias crece de acuerdo con la ley de crecimiento desinhibido según la función $N(t) = 100e^{0.045t}$, donde N se mide en gramos y t en días.

a) Determine la cantidad inicial de bacteria.
b) ¿Cuál es la tasa de decrecimiento de la bacteria?
c) ¿Cuál es la población después de 5 días?
d) ¿Cuántos días toma que la población llegue a 140 gramos?
e) ¿En cuánto tiempo se duplica esta población?

Solución

a) La cantidad inicial de bacteria, N_0, se obtiene cuando $t = 0$, así

$$N_0 = N(0) = 100e^{0.045(0)} = 100 \text{ grams.}$$

b) Compare $N(t) = 100e^{0.045t}$ con $N(t) = 100e^{kt}$. El valor de k, 0.045, indica una tasa de crecimiento de 4.5%.

c) La población después de 5 días es $N(t) = 100e^{0.045(5)} \approx 125.2$ gramos.

d) Para encontrar cuánto toma para que la población llegue a 140 gramos, se resuelve la ecuación $N(t) = 140$.

$$\begin{aligned} 100e^{0.045t} &= 140 \\ e^{0.045t} &= 1.4 && \text{Dividir ambos lados de la ecuación entre 100.} \\ 0.045t &= \ln 1.4 && \text{Rescribir como logaritmo.} \\ t &= \frac{\ln 1.4}{0.045} && \text{Dividir ambos lados de la ecuación entre 0.045.} \\ &\approx 7.5 \text{ días} \end{aligned}$$

e) La población se duplica cuando $N(t) = 200$ gramos, entonces se encuentra el tiempo para duplicarla despejando t de la ecuación $200 = 100e^{0.045t}$.

$$\begin{aligned} 200 &= 100e^{0.045t} \\ 2 &= e^{0.045t} && \text{Dividir ambos lados entre 100.} \\ \ln 2 &= 0.045t && \text{Rescribir como logaritmo.} \\ t &= \frac{\ln 2}{0.045} && \text{Dividir ambos lados entre 0.045.} \\ &\approx 15.4 \text{ días} \end{aligned}$$

La población se duplica aproximadamente cada 15.4 días. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 1.

EJEMPLO 2 Crecimiento de bacterias

Una colonia de bacterias aumenta de acuerdo con la ley de crecimiento desinhibido.

a) Si el número de bacterias se duplica en 3 horas, encuentre la función que da el número de células en un cultivo.

b) ¿Cuánto tiempo tarda la colonia en triplicar su tamaño?

c) ¿Cuánto tiempo toma que la población se duplique una segunda vez (es decir, aumente cuatro veces)?

Solución a) Aplicando la fórmula (2), el número de células N en el tiempo t es

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

donde N_0 es el número inicial de bacterias presente y k es un número positivo. Primero se busca el número k. El número de células se duplica en 3 horas, por lo que se tiene

$$N(3) = 2N_0$$

Pero $N(3) = N_0 e^{k(3)}$, de manera que

$$\begin{aligned} N_0 e^{k(3)} &= 2N_0 \\ e^{3k} &= 2 && \text{Dividir ambos lados entre } N_0. \\ 3k &= \ln 2 && \text{Escribir la ecuación exponencial como logaritmo.} \\ k &= \frac{1}{3}\ln 2 \approx \frac{1}{3}(0.6931) \approx 0.2310 \end{aligned}$$

La fórmula (2) para este proceso de crecimiento es entonces

$$N(t) = N_0 e^{\left(\frac{1}{3}\ln 2\right)t}$$

b) El tiempo t necesario para que el tamaño de la colonia se triplique requiere que $N = 3N_0$. Se sustituye N en lugar de $3N_0$ para obtener

$$\begin{aligned} 3N_0 &= N_0 e^{\left(\frac{1}{3}\ln 2\right)t} \\ 3 &= e^{\left(\frac{1}{3}\ln 2\right)t} \\ \left(\frac{1}{3}\ln 2\right)t &= \ln 3 \\ t &= \frac{3\ln 3}{\ln 2} \approx 4.755 \text{ horas} \end{aligned}$$

Tomará cerca de 4.755 horas o 4 horas 45 minutos que el tamaño de la colonia se triplique.

c) Si una población se duplica en 3 horas, se duplicará por segunda vez en 3 horas más, es decir, en un total de 6 horas. ◄

Decaimiento radiactivo

2 Los materiales radiactivos siguen la ley de decaimiento desinhibido.

Decaimiento radiactivo desinhibido

La cantidad A de material radiactivo presente en el tiempo t está dada por

$$A(t) = A_0 e^{kt}, \qquad k < 0 \tag{3}$$

donde A_0 es la cantidad original de material radiactivo y k es un número negativo que representa la tasa de decaimiento.

Todas las sustancias radiactivas tienen una **vida media** específica, que es el tiempo requerido para que la mitad de la sustancia radiactiva decaiga. En la **fechación por carbón** se usa el hecho de que todos lo organismos vivientes contienen dos tipos de carbón, carbón 12 (un carbón estable) y carbón 14 (carbón radiactivo, con vida media de 5600 años). Mientras que el organismo vive, la razón de carbón 12 a carbón 14 es constante. Pero cuando el organismo muere, la cantidad original de carbón 14 comienza a disminuir. Este cambio en la cantidad de carbón 14 presente relativa a la cantidad de carbón 12 presente hace posible calcular cuándo murió un organismo.

EJEMPLO 3 Estimación de la edad de herramientas antiguas

Se encontró que los rastros de madera quemada junto con herramientas de piedra antiguas en una excavación arqueológica en Chile contenían aproximadamente 1.67% de la cantidad original de carbón 14. Si la vida media aproximada del carbón 14 es 5600 años, ¿cuándo se cortó y quemó el árbol?

Solución Usando la fórmula (3), la cantidad A de carbón 14 es

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

donde A_0 es la cantidad original de carbón 14 presente y k es un número negativo. Primero se busca el número k. Para encontrarlo, se usa el hecho de que después de 5600 años se conserva la mitad de la cantidad original de carbón 14, de modo que $A(5600) = \frac{1}{2}A_0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}A_0 &= A_0 e^{k(5600)} \\
\frac{1}{2} &= e^{5600k} \\
5600k &= \ln\frac{1}{2} \\
k &= \frac{\ln\frac{1}{2}}{5600} \approx -0.000124
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula (3) se convierte en

$$A(t) = A_0 e^{-0.000124t}$$

Si la cantidad A de carbón 14 presente ahora es de 1.67% de la cantidad original, se deduce que

$$0.0167A_0 = A_0e^{-0.000124t}$$
$$0.0167 = e^{-0.000124t}$$
$$-0.000124t = \ln 0.0167$$
$$t = \frac{\ln 0.0167}{-0.000124} \approx 33{,}000 \text{ años}$$

El árbol se cortó y quemó hace alrededor de 33,000 años. Algunos arqueólogos se basan en esta conclusión para argumentar que los humanos vivieron en América hace 33,000 años, mucho antes de lo que se acepta en general. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 3.

Ley de enfriamiento de Newton

3 La **ley de enfriamiento de Newton*** establece que la temperatura de un objeto calentado disminuye de manera exponencial con el tiempo, hacia la temperatura del medio que lo rodea.

Ley de enfriamiento de Newton

La temperatura u de un objeto calentado en un tiempo dado t se modela por la siguiente función:

$$u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt}, \qquad k < 0 \tag{4}$$

donde T es la temperatura constante del medio que lo rodea, u_0 es la temperatura inicial del objeto calentado y k es una constante negativa.

EJEMPLO 4 Uso de la ley de enfriamiento de Newton

Se calienta un objeto a 100ºC (grados Celsius) y después se deja enfriar en una habitación cuya temperatura es de 30ºC.

a) Si la temperatura del objeto es de 80ºC después de 5 minutos, ¿cuándo será de 50ºC su temperatura?

b) Determine el tiempo transcurrido antes de que la temperatura del objeto sea de 35ºC.

c) ¿Qué observa acerca de $u(t)$, la temperatura, cuando pasa el tiempo t?

Solución a) Se utiliza la fórmula (4) con $T = 30$ y $u_0 = 100$, la temperatura (en grados Celsius) del objeto en el tiempo t (en minutos) es

$$u(t) = 30 + (100 - 30)e^{kt} = 30 + 70e^{kt} \tag{5}$$

 *Recibe su nombre por sir Isaac Newton (1642-1727), uno de los fundadores del cálculo.

donde k es una constante negativa. Para encontrar k, se usa el hecho de que $u = 80$ cuando $t = 5$. Entonces

$$\begin{aligned} u(t) &= 30 + 70e^{kt} \\ 80 &= 30 + 70e^{k(5)} \qquad t = 5;\ u(5) = 80 \\ 50 &= 70e^{5k} \\ e^{5k} &= \frac{50}{70} \\ 5k &= \ln\frac{5}{7} \\ k &= \frac{\ln\frac{5}{7}}{5} \approx -0.0673 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula (5) se convierte en

$$u(t) = 30 + 70e^{-0.0673t} \tag{6}$$

Se quiere encontrar t cuando $u = 50$ºC, de manera que

$$\begin{aligned} 50 &= 30 + 70e^{-0.0673t} \\ 20 &= 70e^{-0.0673t} \\ e^{-0.0673t} &= \frac{20}{70} \\ -0.0673t &= \ln\frac{2}{7} \\ t &= \frac{\ln\frac{2}{7}}{-0.0673} \approx 18.6 \text{ minutos} \end{aligned}$$

La temperatura del objeto será de 50ºC después de cerca de 18.6 minutos.

b) Si $u = 35$ºC, entonces, según la ecuación (6), se tiene

$$\begin{aligned} 35 &= 30 + 70e^{-0.0673t} \\ 5 &= 70e^{-0.0673t} \\ e^{-0.0673t} &= \frac{5}{70} \\ -0.0673t &= \ln\frac{5}{70} \\ t &= \frac{\ln\frac{5}{70}}{-0.0673} \approx 39.2 \text{ minutos} \end{aligned}$$

El objeto llegará a una temperatura de 35ºC después de alrededor de 39.2 minutos.

c) Vea la ecuación (6). Cuando pasa el tiempo, el valor de t aumenta, el valor de $e^{-0.0673t}$ se acerca a cero y el valor de $u(t)$ se acerca a 30ºC. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

Modelos logísticos

4 El modelo de crecimiento exponencial $A(t) = A_0e^{kt}$, $k > 0$, supone un crecimiento desinhibido, que significa que el valor de la función crece sin límite. Antes se estableció que la división de células se podía modelar mediante esta función, suponiendo que no mueren células y que no se originan productos secundarios. Sin embargo, la división de células con el tiempo está limitada por factores como espacio para vivir y recursos de alimentación. El **modelo de crecimiento logístico** es una función exponencial que podría modelar situaciones donde el crecimiento de la variable dependiente está limitado.

Otras situaciones que llevan a un modelo de crecimiento logístico incluyen el crecimiento de la población y las ventas de un producto debidas a la publicidad. Vea los problemas 21 a 24. A continuación se establece el modelo de crecimiento logístico.

Modelo de crecimiento logístico

En un modelo de crecimiento logístico, la población P después del tiempo t obedece la ecuación

$$P(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$$

donde a, b y c son constantes con $c > 0$ y $b > 0$.

El número c se llama **capacidad de mantenimiento**, porque el valor $P(t)$ se acerca a c cuando t tiende a infinito, es decir, $\lim_{t\to\infty} P(t) = c$.

EJEMPLO 5 Población de moscas de fruta

Se colocan moscas de fruta en una botella de medio litro con un plátano (como alimento) y plantas de hongos (como alimento y estímulo para que pongan huevos). Suponga que la población de moscas P después de t días está dada por

$$P(t) = \frac{230}{1 + 56.5e^{-0.37t}}$$

a) ¿Cuál es la capacidad de mantenimiento de la botella de medio litro? Esto es, ¿cuál es el valor de $P(t)$ cuando $t \to \infty$?

b) ¿Cuántas moscas se colocaron inicialmente en la botella?

c) ¿Cuándo llegará a 180 la población de moscas?

d) Utilice una calculadora gráfica para graficar $P(t)$.

Solución a) Cuando $t \to \infty$, $e^{-0.37t} \to 0$ y $P(t) \to \frac{230}{1}$. La capacidad de mantenimiento de la botella de medio litro es de 230 moscas de fruta.

b) Para encontrar el número inicial de moscas en la botella, se evalúa $P(0)$.

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{230}{1 + 56.5e^{-0.37(0)}} \\ &= \frac{230}{1 + 56.5} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Entonces al inicio había cuatro moscas en la botella de medio litro.

c) Para determinar cuándo será de 180 la población de moscas de fruta, se resuelve la ecuación

$$\frac{230}{1 + 56.5e^{-0.37t}} = 180$$

$$230 = 180(1 + 56.5e^{-0.37t})$$

$$1.2778 = 1 + 56.5e^{-0.37t}$$ Dividir ambos lados entre 180.

$$0.2778 = 56.5e^{-0.37t}$$ Restar 1 en ambos lados.

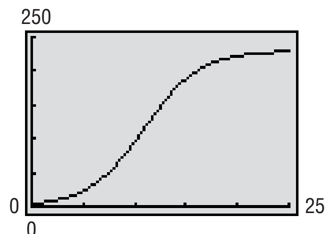
$$0.0049 = e^{-0.37t}$$ Dividir ambos lados entre 56.5.

$$\ln(0.0049) = -0.37t$$ Rescribir como una expresión logarítmica.

$$t \approx 14.4 \text{ días}$$ Dividir ambos lados entre 20.37.

Tomará aproximadamente 14.4 días para que la población llegue a 180 moscas de fruta.

Figura 36





d) Vea en la figura 36 la gráfica de $P(t)$. ◀

Exploración

En la misma pantalla, grafique $Y_1 = \frac{500}{1 + 24e^{-0.03t}}$ y $Y_2 = \frac{500}{1 + 24e^{-0.08t}}$. ¿Qué efecto tiene b en la función de crecimiento logístico?

5.8 Evalúe su comprensión

Ejercicios

1. **Crecimiento de una población de insectos** El tamaño P de cierta población de insectos en el tiempo t (en días) obedece a la función $P(t) = 500e^{0.02t}$.
   a) Determine el número de insectos en $t = 0$ días.
   b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la población de insectos?
   c) ¿Cuál es la población después de 10 días?
   d) ¿Cuándo llegará la población de insectos a 800?
   e) ¿Cuándo se duplicará la población de insectos?

2. **Crecimiento de bacterias** El número N de bacterias presente en un cultivo en el tiempo t (en horas) obedece a la función $N(t) = 1000e^{0.01t}$.
   a) Determine el número de bacterias en $t = 0$ horas.
   b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la bacteria?
   c) ¿Cuál es la población después de 4 horas?
   d) ¿Cuándo llegará el número de bacterias a 1700?
   e) ¿Cuándo se duplicará el número de bacterias?

3. **Decaimiento radiactivo** El estroncio 90 es un material radiactivo que decae de acuerdo con la función $A(t) = A_0e^{-0.0244t}$, donde A_0 es la cantidad inicial presente y A es la cantidad presente en el tiempo t (en años). Suponga que un científico tiene una muestra de 500 gramos de estroncio 90.
   a) ¿Cuál es la tasa de decaimiento del estroncio 90?
   b) ¿Cuánto estroncio 90 queda después de 10 años?
   c) ¿Cuándo quedarán 400 gramos de estroncio 90?
   d) ¿Cuál es la vida media del estroncio 90?

4. **Decaimiento radiactivo** El iodo 131 es un material radiactivo que decae de acuerdo con la función $A(t) = A_0e^{-0.087t}$, donde A_0 es la cantidad inicial presente y A es la cantidad presente en el tiempo t (en días). Suponga que un científico tiene una muestra de 100 gramos de iodo 131.
   a) ¿Cuál es la tasa de decaimiento del iodo 131?
   b) ¿Cuánto iodo 131 queda después de 9 días?
   c) ¿Cuándo quedarán 70 gramos de iodo 131?
   d) ¿Cuál es la vida media del iodo 131?

5. **Crecimiento de una colonia de mosquitos** La población de una colonia de mosquitos obedece a la ley del crecimiento desinhibido. Si al inicio hay 1000 mosquitos y después de 1 día hay 1800, ¿cuál es el tamaño de la colonia después de 3 días? ¿Cuánto tardará en haber 10,000 mosquitos?

6. **Crecimiento de bacterias** Un cultivo de bacterias obedece a la ley de crecimiento desinhibido. Si al inicio están presentes 500 bacterias y hay 800 después de 1 hora, ¿cuántas habrá en el cultivo después de 5 horas? ¿Cuánto tardará en haber 20,000 bacterias?

7. **Crecimiento de población** La población de una ciudad del sur sigue la ley exponencial. Si el tamaño de la población se duplica en un periodo de 18 meses y la población actual es de 10,000, ¿cuál será la población dentro de 2 años?

8. **Crecimiento de población** La población de una ciudad del medio oeste sigue la ley exponencial. Si la población disminuye de 900,000 a 800,000 de 1993 a 1995, ¿cuál será la población en 1997?

9. Decaimiento radiactivo La vida media del radio es de 1590 años. Si se tiene 90 gramos ahora, ¿cuánto habrá dentro de 50 años?

10. Decaimiento radiactivo La vida media del potasio radiactivo es 1300 millones de años. Si se tienen 10 gramos ahora, ¿cuánto se tendrá en 100 años? ¿Y en 1000 años?

11. Estimación de la edad de un árbol Se encuentra que un pedazo de carbón vegetal tiene 30% del carbón 14 que tenía originalmente. ¿Cuándo murió el árbol del que salió? Use 5600 años como la vida media del carbón.

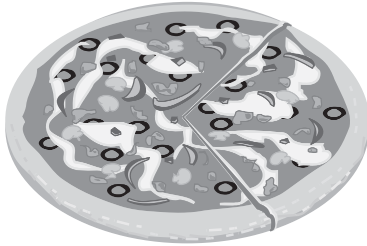
12. Estimación de la edad de un fósil Una hoja fosilizada contiene 70% de su cantidad normal de carbón 14. ¿Qué edad tiene el fósil?

13. Tiempo de enfriamiento de una pizza Una pizza horneada a 450°F se saca del horno a la 5:00 PM a una habitación con temperatura constante de 70°F. Después de 5 minutos la pizza está a 300°F.

a) ¿A qué hora puede empezar a comer la pizza si desea que esté a 135°F?

b) Determine el tiempo que necesita pasar antes de que la pizza esté a 160°F.

c) ¿Qué observa acerca de la temperatura cuando pasa el tiempo?



14. Ley de enfriamiento de Newton Un termómetro que marca 72°F se coloca en un refrigerador donde la temperatura es constante a 38°F.

a) Si el termómetro marca 60°F después de 2 minutos, ¿cuánto marcará después de 7 minutos?

b) ¿Cuánto tiempo pasa para que el termómetro marque 39°F?

c) Determine el tiempo necesario para que el termómetro marque 45°F.

d) ¿Qué observa acerca de la temperatura cuando pasa el tiempo?

15. Ley de calentamiento de Newton Un termómetro que marca 8°C se pone en una habitación con una temperatura constante de 35°C. Si el termómetro marca 15°C después de 3 minutos, ¿cuánto marcará después de estar en la habitación 5 minutos? ¿Y 10 minutos?

[**Sugerencia:** Debe desarrollar una fórmula similar a la ecuación (4).]

16. Tiempo para descongelar carne Un trozo de carne tiene una temperatura de 28°F. Se coloca en una habitación con temperatura constante de 70°F. Después de 10 minutos, la temperatura de la carne se ha elevado a 35°F. ¿Cuál será la temperatura de la carne después de 30 minutos? ¿Cuánto tardará en descongelarse a una temperatura de 45°F? [Vea la sugerencia del problema 15.]

17. Descomposición de agua salada La sal (NaCl) se descompone en el agua en iones de sodio (NA^+) y en iones de cloruro (Cl^-), de acuerdo con la ley de decaimiento desinhibido. Si la cantidad inicial de sal es de 25 kilogramos y después de 10 horas quedan 15 kilogramos, ¿cuánta sal queda después de 1 día? ¿Cuánto tiempo pasará para que quede $\frac{1}{2}$ kilogramo de sal?

18. Voltaje de un conductor El voltaje de cierto conductor disminuye con el tiempo, según la ley de decaimiento desinhibido. Si el voltaje inicial es de 40 volts y 2 segundos después es de 10 volts, ¿cuál es el voltaje después de 5 segundos?

19. Radiactividad de Chernobyl Después de la liberación a la atmósfera de material radiactivo, por parte de una planta de energía nuclear en Chernobyl, Ucrania, en 1986, la paja en Austria estaba contaminada con iodo 131 (vida media de 8 días). Si está bien alimentar a las vacas con la paja, cuando tiene 10% de iodo 131, ¿cuánto tiempo necesitan esperar los granjeros para usar esta paja?

20. Barbacoa de puerco El hotel Bora Bora tiene barbacoa de puerco. A las 12:00 PM, el chef coloca el puerco en un horno grande en la tierra. La temperatura original del puerco es de 75°F. A las 2:00 PM verifica la temperatura y queda contrariado porque sólo ha llegado a 100°F. Si la temperatura del horno es constante a 325°F, ¿a qué hora podría el hotel servir a sus huéspedes, suponiendo que el puerco está cocido cuando llega a 175°F?

21. Proporción de la población que posee un reproductor de DVD El modelo de crecimiento logístico

$$P(t) = \frac{0.9}{1 + 6e^{-0.32t}}$$

relaciona la proporción de casas en Estados Unidos que tienen un reproductor de DVD hasta el año. Sea $t = 0$ el año 2004, $t = 1$ el año 2005, etcétera.

a) ¿Qué proporción de casas en Estados Unidos poseen un reproductor de DVD en 2004?

b) Determine la proporción máxima de casas que tendrán un reproductor de DVD.

c) ¿Cuánto tendrá un reproductor de DVD el 0.8 (80%) de las casas en Estados Unidos?

22. Penetración del mercado para el coprocesador Intel El modelo de crecimiento logístico

$$P(t) = \frac{0.90}{1 + 3.5e^{-0.339t}}$$

relaciona la proporción de computadoras personales nuevas vendidas en la tienda Best Buy que tienen el último coprocesador Intel t meses después de su introducción.

a) ¿Qué proporción de computadoras personales nuevas vendidas en Best Buy tienen el último coprocesador Intel cuando se introduce (es decir, en $t = 0$)?

b) Determine la proporción máxima de computadoras personales nuevas vendidas en Best Buy que tendrán el último coprocesador Intel.

c) ¿Cuándo llegarán a .75 (75%) las computadoras personales nuevas vendidas en Best Buy que tengan el último coprocesador Intel?

23. Población de un cultivo de bacterias El modelo de crecimiento logístico

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 32.33e^{-0.439t}}$$

representa la población de bacterias después de t horas.

a) ¿Cuál es la capacidad de mantenimiento de medio ambiente?

b) ¿Cuál es la cantidad inicial de bacteria en la población?

c) ¿Cuándo será 800 la cantidad de bacteria?

24. Población de especies en peligro de extinción Con frecuencia, los ambientalistas capturan una especie en peligro de extinción y la transportan a un entorno controlado, donde la especie es capaz de reproducirse y regenerar su población. Suponga que se capturan seis águilas calvas americanas, se transportan a Montana y se dejan libres. Con base en la experiencia, los ambientalistas esperan que la población crezca según el modelo



$$P(t) = \frac{500}{1 + 83.33e^{-0.162t}}$$

donde $P(t)$ es la población después de t años.

a) ¿Cuál es la capacidad de mantenimiento del medio ambiente?

b) ¿Cuál es la predicción de población de esta especie de águila americana para dentro de 20 años?

c) ¿Cuándo llegará a 300 la población?

5.9 Ajuste de datos a funciones exponencial, logarítmica y logística

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Diagramas de dispersión; ajuste de curvas lineales (sección 2.6, pp. 199-203)
- Modelo cuadráticos (sección 4.1, pp. 304-306)

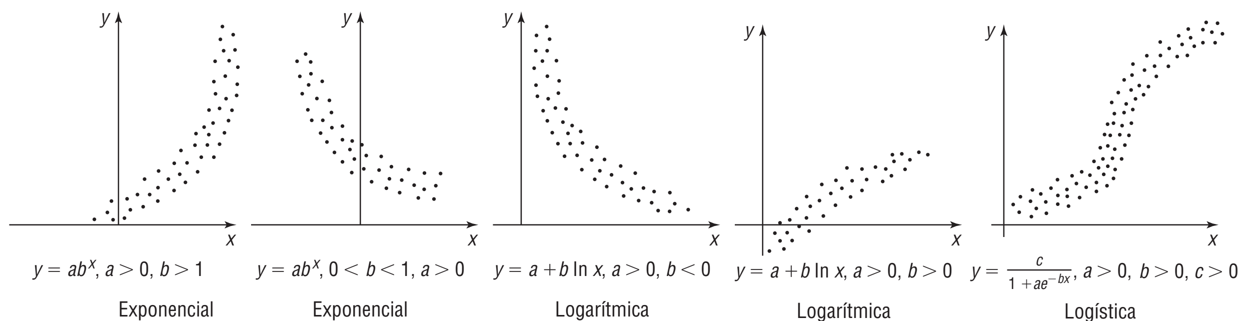
OBJETIVOS
1 Usar una calculadora gráfica para ajustar una función exponencial a los datos
2 Usar una calculadora gráfica para ajustar una función logarítmica a los datos
3 Usar una calculadora gráfica para ajustar una función logística a los datos

En la sección 2.6 se estudió cómo encontrar la función lineal de mejor ajuste ($y = ax + b$) y en la sección 4.1 se estudió cómo encontrar la función cuadrática de mejor ajuste ($y = ax^2 + bx + c$).

En esta sección se analizará la utilización de una calculadora gráfica para encontrar las ecuaciones de mejor ajuste que describen la relación entre dos variables cuando se piensa que la relación es exponencial ($y = ab^x$), logarítmica ($y = a + b\ln x$) o logística $\left(y = \dfrac{c}{1 + ae^{-bx}}\right)$. Como antes, se dibuja un diagrama de dispersión de los datos para ayudar a determinar el modelo adecuado.

La figura 37 muestra diagramas de dispersión que se observan con frecuencia para los tres modelos. Abajo de cada diagrama se encuentran las restricciones sobre los valores de los parámetros.

Figura 37



La mayor parte de las calculadoras gráficas tienen opciones de regresión (REG) que ajustan datos a un tipo específico de curva. Una vez que se introducen los datos y se obtiene un diagrama de dispersión, se selecciona el tipo de curva que se desea ajustar. Luego se usa la opción REG para obtener la curva de "mejor ajuste" del tipo seleccionado.

El coeficiente de correlación r aparecerá sólo si el modelo se escribe como una expresión lineal. En realidad, r aparecerá para los modelos lineal, de potencias, exponencial y logarítmico, ya que estos modelos se pueden escribir como expresiones lineales. Recuerde que cuanto más cerca de 1 esté $|r|$, mejor es el ajuste.

Se verán algunos ejemplos.

Modelos exponenciales

1 En la sección 5.7 se vio que el valor futuro del dinero se comporta de manera exponencial, y en la sección 5.8 se vio que los modelos de crecimiento y decaimiento también tienen un comportamiento exponencial.

EJEMPLO 1 Ajuste de una función exponencial a los datos

Beth está interesada en encontrar una función que explique el precio al cierre de la acción de Harley Davidson al final de cada año. Obtiene los datos mostrados en la tabla 9.

a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión con el año como variable independiente.

b) Utilice una calculadora gráfica para ajustar una función exponencial a los datos.

c) Exprese la función encontrada en el inciso b) en la forma $A = A_0e^{kt}$.

d) Grafique la función exponencial encontrada en los incisos b) o c) sobre el diagrama de dispersión.

e) Use la solución de los incisos b) o c) para predecir el precio al cierre de la acción de Harley Davidson al final de 2002.

f) Interprete el valor de k encontrado en el inciso c).

Tabla 9



Año, x	Precio al cierre, y
1987 (x = 1)	0.392
1988 (x = 2)	0.7652
1989 (x = 3)	1.1835
1990 (x = 4)	1.1609
1991 (x = 5)	2.6988
1992 (x = 6)	4.5381
1993 (x = 7)	5.3379
1994 (x = 8)	6.8032
1995 (x = 9)	7.0328
1996 (x = 10)	11.5585
1997 (x = 11)	13.4799
1998 (x = 12)	23.5424
1999 (x = 13)	31.9342
2000 (x = 14)	39.7277
2001 (x = 15)	54.31

FUENTE: http://finance.yahoo.com

Solución a) Introduzca los datos en la aplicación, donde 1 representa 1987, 2 representa 1988, etcétera. Obtenga el diagrama de dispersión mostrado en la figura 38.

b) Una calculadora gráfica se ajusta a los datos de la figura 38 a una función exponencial de la forma $y = ab^x$, usando la opción de regresión exponencial (EXP REG). Vea la figura 39. Entonces $y = ab^x = 0.40257(1.39745)^x$.

Figura 38

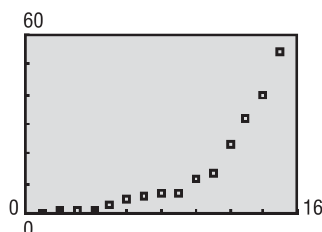


Figura 39

```
ExpReg
 y=a*b^x
 a=.4025702175
 b=1.397449221
 r²=.9812939004
 r=.9906027965
```

c) Para expresar $y = ab^x$ en la forma $A = A_0e^{kt}$, donde $x = t$ y $y = A$, se procede como sigue:

$$ab^x = A_0e^{kt}, \quad x = t$$

Cuando $x = t = 0$, se encuentra $a = A_0$. Esto lleva a

$$a = A_0, \qquad b^x = e^{kt}$$
$$b^x = (e^k)^t$$
$$b = e^k \qquad x = t$$

Como $y = ab^x = 0.40257(1.39745)^x$, se encuentra que $a = 0.40257$ y $b = 1.39745$,

$$a = A_0 = 0.40257 \quad \text{y} \quad b = 1.39745 = e^k$$

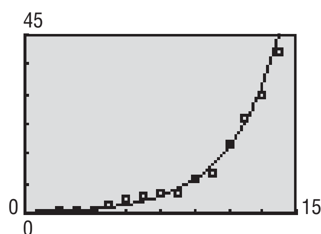
Se quiere encontrar k, de manera que se escribe $1.39745 = e^k$ como logaritmo y se obtiene

$$k = \ln(1.39745) \approx 0.3346$$

Como resultado, $A = A_0e^{kt} = 0.40257e^{0.3346t}$.

d) Vea la gráfica de la función exponencial de mejor ajuste en la figura 40.

Figura 40



e) Sea $t = 16$ (final de 2002) en la función encontrada en el inciso c). La predicción para el precio al cierre de la acción de Harley Davidson al final de 2002 es

$$A = 0.40257e^{0.3346(16)} = \$85.09$$

f) El valor de k representa la tasa de interés anual compuesto continuamente.

$$A = A_0e^{kt} = 0.40257e^{0.3346t}$$
$$= Pe^{rt} \qquad \text{Ecuación (4), sección 5.7}$$

El precio de la acción de Harley Davidson creció a una tasa anual de 33.46% (composición continua) entre 1987 y 2001. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 1.

Modelos logarítmicos

2 Muchas relaciones entre variables no siguen un modelo exponencial; en su lugar, la variable independiente se relaciona con la variable dependiente mediante un modelo logarítmico.

EJEMPLO 2 Ajuste de una función logarítmica a los datos

Jodi, una meteoróloga, está interesada en encontrar una función que explique la relación entre la altura de un globo aerostático (en kilómetros) y la presión atmosférica (medida en milímetros de mercurio) sobre el globo. Recolecte los datos mostrados en la tabla 10.

a) Use una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos con la presión atmosférica como la variable independiente.

Tabla 10

Presión atmosférica, p	Altura, h
760	0
740	0.184
725	0.328
700	0.565
650	1.079
630	1.291
600	1.634
580	1.862
550	2.235

b) Se sabe que la relación entre la presión atmosférica y la altura sigue un modelo logarítmico. Use una calculadora gráfica para ajustar una función logarítmica a los datos

c) Dibuje la función logarítmica encontrada en el inciso b) sobre el diagrama de dispersión.

d) Use la función encontrada en el inciso b) para predecir la altura del globo si la presión atmosférica es de 560 milímetros de mercurio.

Solución a) Después de introducir los datos en la calculadora gráfica, se obtiene al diagrama de dispersión mostrado en la figura 41.

b) Una calculadora gráfica ajusta los datos de la figura 41 a una función logarítmica de la forma $y = a + b \ln x$ usando la opción de regresión logarítmica. Vea la figura 42. La función logarítmica de mejor ajuste para los datos es

$$h(p) = 45.7863 - 6.9025 \ln p$$

donde h es la altura del globo aerostático y p es la presión atmosférica. Observe que $|r|$ está cerca de 1, esto indica un buen ajuste.

c) La figura 43 muestra la gráfica de $h(P) = 45.7863 - 6.9025 \ln p$ sobre el diagrama de dispersión.

Figura 41

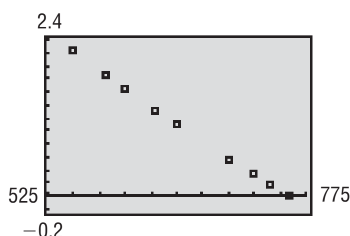


Figura 42

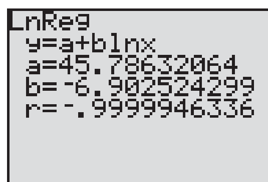
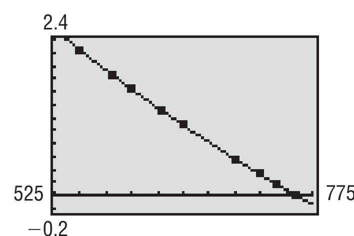


Figura 43



d) Utilice la función encontrada en el inciso b) para darle a Jodi una predicción de la altura del globo cuando la presión atmosférica es de 560:

$$h(560) = 45.7863 - 6.9025 \ln 560$$
$$\approx 2.108 \text{ kilómetros}$$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

Modelos logísticos



Los modelos de crecimiento logísticos se utilizan para modelar situaciones para las que el valor de la variable independiente está limitada. Muchas situaciones reales se amoldan a un escenario. Por ejemplo, la población de la raza humana está limitada por la disponibilidad de recursos naturales como comida y techo. Cuando el valor de la variable dependiente está limitado, suele ser adecuado usar un modelo logístico.

EJEMPLO 3 **Ajuste de una función logística a los datos**

Los datos de la tabla 11, obtenidos de Tor Carlson (Über Geschwindigkeit y Grösse der Hefevermehrung en Würze, *Biochemische Zeitschrift*, vol. 57, pp. 313-334, 1913), representa la cantidad de biomasa en los hongos después de t horas en un cultivo.

Tabla 11

Tiempo (horas)	Biomasa de hongos	Tiempo (horas)	Biomasa de hongos
0	9.6	10	513.3
1	18.3	11	559.7
2	29.0	12	594.8
3	47.2	13	629.4
4	71.1	14	640.8
5	119.1	15	651.1
6	174.6	16	655.9
7	257.3	17	659.6
8	350.7	18	661.8
9	441.0		

a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos con el tiempo como variable independiente.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función logística a los datos.
c) Use una calculadora gráfica para graficar la función encontrada en el inciso *b*) sobre el diagrama de dispersión.
d) ¿Cuál es la predicción de la capacidad de mantener del cultivo?
e) Utilice la función encontrada en el inciso *b*) para predecir la población del cultivo en $t = 19$ horas.

Solución

a) Vea un diagrama de dispersión de los datos en la figura 44.

b) Una calculadora gráfica ajusta un modelo de crecimiento logístico de la forma $y = \dfrac{c}{1 + ae^{-bx}}$ usando la opción de regresión logística (LOGISTIC). Vea la figura 45. La función logística de mejor ajuste para los datos es

$$y = \frac{663.0}{1 + 71.6e^{-0.5470x}}$$

donde y es la cantidad de biomasa de hongos en el cultivo y x es el tiempo.

c) Vea la gráfica de la función logística de mejor ajuste en la figura 46.

Figura 44

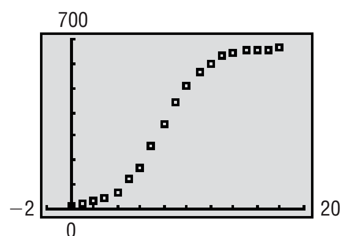


Figura 45

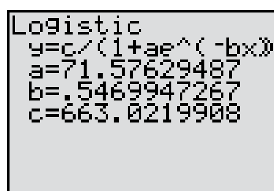
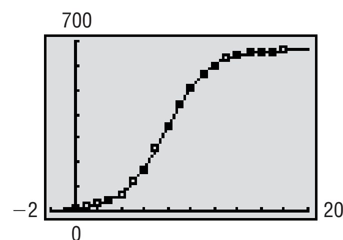


Figura 46



d) Con base en la función logística encontrada en el inciso *b*), la capacidad de mantener del cultivo es 663.

e) Usando la función logística de crecimiento del inciso *b*), la predicción de la cantidad de biomasa en $t = 19$ es

$$y = \frac{663.0}{1 + 71.6e^{-0.5470(19)}} = 661.5$$ ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

5.9 Evalúe su comprensión

Ejercicios

1. **Biología** Un cultivo de *E-coli Beu* 397-recA442 se coloca en un plato de Petri a 30°Celsius y se permite que crezca. Se recolectan los siguientes datos. La teoría establece que el número de bacterias en el plato de Petri crecerá en un inicio de acuerdo con la ley de crecimiento desinhibido. La población se mide usando un dispositivo óptico en que se mide la cantidad de luz que traspasa el plato de Petri.

Tiempo (horas), *x*	Población, *y*
0	0.09
2.5	0.18
3.5	0.26
4.5	0.35
6	0.50

FUENTE: Dr. Polly Lavery, Joliet Junior College

a) Dibuje un diagrama de dispersión con el tiempo como la variable de predicción.
b) Utilice una calculadora gráfica para ajustar una función exponencial a los datos.
c) Exprese la función encontrada en el inciso *b*) en la forma $N(t) = N_0e^{kt}$.
d) Grafique la función exponencial de los incisos *b*) o *c*) sobre el diagrama de dispersión.
e) Utilice la función exponencial de los incisos *b*) o *c*) para predecir la población en $x = 7$ horas.
f) Use la función exponencial de los incisos *b*) o *c*) para predecir cuándo llegará la población a 0.75.

2. **Biología** Un cultivo de *E-coli* SCI8del-recA718 se coloca en un plato de Petri a 30°Celsius y se permite que crezca. Se recolectan los datos siguientes. La teoría establece que el número de bacterias en el plato de Petri al inicio crecerá de acuerdo con la ley de crecimiento desinhibido. La población se mide usando un dispositivo óptico en el que se mide la cantidad de luz que traspasa el plato.

Tiempo (horas), *x*	Población, *y*
2.5	0.175
3.5	0.38
4.5	0.63
4.75	0.76
5.25	1.20

FUENTE: Dr. Polly Lavery, Joliet Junior College

a) Dibuje un diagrama de dispersión con el tiempo como variable de predicción.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función exponencial a los datos.
c) Exprese la función encontrada en el inciso *b*) en la forma $N(t) = N_0e^{kt}$.
d) Grafique la función exponencial de los incisos *b*) o *c*) sobre el diagrama de dispersión.
e) Utilice la función exponencial de los incisos *b*) o *c*) para predecir la población en $x = 6$ horas.
f) Use la función exponencial de los incisos *b*) o *c*) para predecir cuándo llegará la población a 2.1.

3. **Química** Un químico tiene una muestra de 100 gramos de material radiactivo. Registra la cantidad de radiactividad cada una de 6 semanas y obtiene los datos siguientes.

Semana	Peso (gramos)
0	100.0
1	88.3
2	75.9
3	69.4
4	59.1
5	51.8
6	45.5

a) Use una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión con las semanas como variable independiente.
b) Utilice una calculadora gráfica para ajustar una función exponencial a los datos.
c) Exprese la función encontrada en el inciso *b*) en la forma $A(t) = A_0e^{kt}$.
d) Grafique la función de los incisos *b*) o *c*) sobre el diagrama de dispersión.
e) A partir del resultado del inciso *b*), determine la vida media del material radiactivo.
f) ¿Cuánto material radiactivo quedará después de 50 semanas?
g) ¿Cuándo habrá 20 gramos de material radiactivo?

4. **Química** Una química tiene una muestra de 100 gramos de material radiactivo. Ella registra cada día durante una semana la cantidad de material radiactivo que queda en la muestra y obtiene los siguientes datos.

Día	Peso (gramos)
0	1000.0
1	897.1
2	802.5
3	719.8
4	651.1
5	583.4
6	521.7
7	468.3

a) Use una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión con los días como variable independiente.
b) Utilice una calculadora gráfica para ajustar una función exponencial a los datos.
c) Exprese la función encontrada en el inciso *b*) en la forma $A(t) = A_0e^{kt}$.
d) Grafique la función de los incisos *b*) o *c*) sobre el diagrama de dispersión.
e) A partir del resultado del inciso *b*), encuentre la vida media del material radiactivo.
f) ¿Cuánto material radiactivo quedará después de 20 días?
g) ¿Cuándo habrá 200 gramos de material radiactivo?

5. Finanzas Los datos siguientes representan la cantidad de dinero que una inversionista tiene cada año en una cuenta de inversión durante 10 años. Ella desea determinar la tasa de retorno anual sobre su inversión.

Libreta de depósitos

Año	Valor de la cuenta
1994	$10,000
1995	$10,573
1996	$11,260
1997	$11,733
1998	$12,424
1999	$13,269
2000	$13,968
2001	$14,823
2002	$15,297
2003	$16,539

a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión con el tiempo como variable independiente y el valor de la cuenta como variable dependiente.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función exponencial a los datos.
c) Con base en el resultado del inciso *b*), ¿cuál es la tasa de retorno promedio anual de esta cuenta para un periodo de 10 años?
d) Si la inversionista planea retirarse en 2021, ¿cuál será el valor de predicción de esta cuenta?
e) ¿Cuándo valdrá $50,000 esta cuenta?

6. Finanzas Los siguientes datos muestran la cantidad de dinero que un inversionista tiene al final de cada uno de 7 años. Desea determinar la tasa de retorno promedio anual sobre su inversión.

Año	Valor de la cuenta
1997	$20,000
1998	$21,516
1999	$23,355
2000	$24,885
2001	$27,434
2002	$30,053
2003	$32,622

a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión con el tiempo como variable independiente y el valor de la cuenta como variable dependiente.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función exponencial a los datos.
c) Con base en el resultado del inciso *b*), ¿cuál es la tasa de retorno promedio anual de esta cuenta para un periodo de 7 años?
d) Si el inversionista planea retirarse en 2020, ¿cuál será el valor de predicción de esta cuenta?
e) ¿Cuándo valdrá $80,000 esta cuenta?

7. Economía y mercadotecnia Los siguientes datos representan el precio de la cantidad de la demanda de computadoras personales IBM en 2004.

Precio (dólares/computadora)	Cantidad de la demanda
2300	152
2000	159
1700	164
1500	171
1300	176
1200	180
1000	189

a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos con el precio como la variable independiente.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función logarítmica a los datos.
c) Use una calculadora gráfica para dibujar la función logarítmica del inciso *b*) sobre el diagrama de dispersión.
d) Use la función encontrada en el inciso *b*) para predecir la demanda de computadoras personales IBM si el precio fuera de 1650 dólares.

8. Economía y mercadotecnia Los siguientes datos representan el precio y la cantidad surtida de computadoras personales IBM en 2004.

Precio (dólares/computadora)	Cantidad surtida
2300	180
2000	173
1700	160
1500	150
1300	137
1200	130
1000	113

a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos con el precio como la variable independiente.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función logarítmica a los datos.
c) Use una calculadora gráfica para dibujar la función logarítmica del inciso *b*) sobre el diagrama de dispersión.
d) Use la función encontrada en el inciso *b*) para predecir el número de computadoras personales IBM que se entregarían si el precio fuera de 1650 dólares.

9. Modelo de población Los datos siguientes representan la población de Estados Unidos. Un ecologista está interesado en encontrar una función que describa la población de Estados Unidos.

Año	Población
1900	76,212,168
1910	92,228,496
1920	106,021,537
1930	123,202,624
1940	132,164,569
1950	151,325,798
1960	179,323,175
1970	203,302,031
1980	226,542,203
1990	248,709,873
2000	281,421,906

FUENTE: U.S. Census Bureau

a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos con el año como la variable independiente y la población como la variable dependiente.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función logística a los datos.
c) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la función del inciso *b*) sobre el diagrama de dispersión.
d) Según la función encontrada en el inciso *b*), ¿cuál es la capacidad de mantenimiento de Estados Unidos?
e) Utilice la función del inciso *b*) para predecir la población de Estados Unidos en 2004.
f) ¿Cuándo llegará a 300,000,000 la población de Estados Unidos?

10. Modelo de población Los datos siguientes representan la población mundial. Un ecologista está interesado en encontrar una función que describa la población mundial.

Año	Población (miles de millones)
1993	5.531
1994	5.611
1995	5.691
1996	5.769
1997	5.847
1998	5.925
1999	6.003
2000	6.080
2001	6.157

FUENTE: U.S. Census Bureau

a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos con el año como la variable independiente y la población como la variable dependiente.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función logística a los datos.
c) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la función del inciso *b*) sobre el diagrama de dispersión.
d) Según la función encontrada en el inciso *b*), ¿cuál es la capacidad de mantener del mundo?
e) Utilice la función del inciso *b*) para predecir la población mundial en 2004.
f) ¿Cuándo llegará la población mundial a 7 mil millones?

11. Modelo de población Los datos siguientes representan la población del estado de Illinois. Un economista urbano desea encontrar un modelo que describa la población de Illinois.

Año	Población
1900	4,821,550
1910	5,638,591
1920	6,485,280
1930	7,630,654
1940	7,897,241
1950	8,712,176
1960	10,081,158
1970	11,110,285
1980	11,427,409
1990	11,430,602
2000	12,419,293

FUENTE: U.S. Census Bureau

a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos con el año como variable independiente y la población como variable dependiente.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función logística a los datos.
c) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la función del inciso b) sobre el diagrama de dispersión.
d) Según la función encontrada en el inciso b), ¿cuál es la capacidad de mantener del estado de Illinois?
e) Utilice la función del inciso b) para predecir la población de Illinois en 2010.

12. Modelo de población Los datos de la derecha representan la población de Pennsylvania. Un economista urbano desea encontrar un modelo que describa la población de este estado.
a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos con el año como variable independiente y la población como variable dependiente.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función logística a los datos.
c) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la función del inciso b) sobre el diagrama de dispersión.
d) Según la función encontrada en el inciso b), ¿cuál es la capacidad de mantener de Pennsylvania?
e) Utilice la función del inciso b) para predecir la población de Pennsylvania en 2010.

Año	Población
1900	6,302,115
1910	7,665,111
1920	8,720,017
1930	9,631,350
1940	9,900,180
1950	10,498,012
1960	11,319,366
1970	11,800,766
1980	11,864,720
1990	11,881,643
2000	12,281,054

FUENTE: U.S. Census Bureau

Repaso del capítulo

Conocimiento

Función compuesta (p. 392)
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Función uno a uno f
Una función cuya inversa también es una función
Para cualquier elección de elementos x_1, x_2 en el dominio de f, si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Prueba de la recta horizontal (p. 402)
Si toda recta horizontal cruza la gráfica de f en cuando mucho un punto, entonces f es uno a uno.

Función inversa f^{-1} de f (p. 403-405)
Dominio de f = rango de f^{-1}; rango de f = dominio de f^{-1}
$f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$
Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Propiedades de la función exponencial (pp. 416 y 418)

$f(x) = a^x, \quad a > 1$ Dominio: el intervalo $(-\infty, \infty)$;
Rango: el intervalo $(0, \infty)$;
intercepciones x: ninguna; intercepción y: 1;
asíntota horizontal: eje x $(y = 0)$ cuando $x \to -\infty$;
creciente; uno a uno; suave; continua.
Vea una gráfica típica en la figura 16.

$f(x) = a^x, \quad 0 < a < 1$ Dominio: el intervalo $(-\infty, \infty)$;
Rango: el intervalo $(0, \infty)$;
intercepciones x: ninguna; intercepción y: 1;
asíntota horizontal: eje x $(y = 0)$ cuando $x \to \infty$;
decreciente; uno a uno; suave; continua.
Vea una gráfica típica en la figura 20.

Número e (p. 419)
Valor aproximado por la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cuando $n \to \infty$, es decir, $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Propiedades de los exponentes (p. 421)	Si $a^u = a^v$, entonces $u = v$.	
Propiedades de las funciones logarítmicas (pp. 432-433)	$f(x) = \log_a x, \quad a > 1$ $(y = \log_a x$ significa $x = a^y)$	Dominio: el intervalo $(0, \infty)$; Rango: el intervalo $(-\infty, \infty)$; intercepción x: 1; intercepción y: ninguna asíntota vertical: $x = 0$ (eje y); creciente; uno a uno; suave; continua. Vea una gráfica típica en la figura 25*a*).
	$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1$ $(y = \log_a x$ significa $x = a^y)$	Dominio: el intervalo $(0, \infty)$; Rango: el intervalo $(-\infty, \infty)$; intercepción x: 1; intercepción y: ninguna; asíntota vertical: $x = 0$ (eje y); decreciente; uno a uno; suave; continua. Vea una gráfica típica en la figura 25*b*).
Logaritmo natural (p. 432)	$y = \ln x$ significa $x = e^y$.	
Propiedades de los logaritmos (pp. 442-443, 446)	$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad a^{\log_a M} = M \qquad \log_a a^r = r$ $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N \qquad \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$ $\log_a M^r = r \log_a M$ Si $M = N$, entonces $\log_a M = \log_a N$. Si $\log_a M = \log_a N$, entonces $M = N$.	

Fórmulas

Fórmula para cambio de base (p. 447)	$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$
Fórmula de interés compuesto (p. 457)	$A = P \cdot \left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt}$
Interés compuesto continuamente (p. 459)	$A = Pe^{rt}$
Fórmulas de valor presente (p. 461)	$P = A \cdot \left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{-nt}$ o $P = Ae^{-rt}$
Crecimiento y decaimiento (p. 465)	$A(t) = A_0 e^{kt}$
Ley de enfriamiento de Newton (p. 469)	$u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt}, \quad k < 0$
Modelo logístico (p. 471)	$P(t) = \dfrac{c}{1 + ae^{-bt}}$

Objetivos

Sección		Debe ser capaz de...	Ejercicios de repaso
5.1	1	Formar una función compuesta y encontrar su dominio (p. 392)	1–12
5.2	1	Determinar el inverso de una función (p. 399)	13, 14
	2	Obtener la gráfica de la función inversa a partir de la gráfica de la función (p. 404)	15, 16
	3	Encontrar la función inversa f^{-1} (p. 405)	17–22
5.3	1	Evaluar funciones exponenciales (p. 412)	23a), c); 24a), c)
	2	Graficar funciones exponenciales (p. 415)	55–59, 62, 63
	3	Definir el número e (p. 419)	59, 62, 63
	4	Resolver ecuaciones exponenciales (p. 421)	65–68, 73, 74, 76, 77, 78

5.4	1	Cambiar expresiones exponenciales en expresiones logarítmicas (p. 429)	25, 26
	2	Cambiar expresiones logarítmicas en expresiones exponenciales (p. 429)	27, 28
	3	Evaluar funciones logarítmicas (p. 429)	23b), d), 24b), d), 33–34, 85, 86
	4	Determinar el dominio de una función logarítmica (p. 430)	29–32
	5	Graficar funciones logarítmicas (p. 431)	60, 61, 64
	6	Resolver ecuaciones logarítmicas (p. 434)	69, 70, 75
5.5	1	Trabajar con las propiedades de los logaritmos (p. 441)	35–38
	2	Escribir una expresión logarítmica como suma o diferencia de logaritmos (p. 444)	39–44
	3	Escribir una expresión logarítmica como un solo logaritmo (p. 445)	45–50
	4	Evaluar logaritmos cuya base no es 10 ni *e* (p. 446)	51, 52
5.6	1	Resolver ecuaciones logarítmicas usando las propiedades de los logaritmos (p. 450)	79, 80
	2	Resolver ecuaciones exponenciales (p. 451)	71, 72, 81–84
	3	Resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales usando una calculadora gráfica (p. 453)	65–84
5.7	1	Determinar el valor futuro de una sola suma de dinero (p. 455)	90
	2	Calcular las tasas de retorno efectivas (p. 459)	90
	3	Determinar el valor presente de una sola suma de dinero (p.460)	91
	4	Determine el tiempo requerido para duplicar o triplicar una sola suma de dinero (p. 462)	90
5.8	1	Encontrar ecuaciones de población que obedezcan la ley del crecimiento desinhibido (p. 465)	95
	2	Encontrar ecuaciones de población que obedezcan la ley del decaimiento (p. 468)	93, 96
	3	Usar la ley de enfriamiento de Newton (p. 469)	94
	4	Usar modelos logísticos (p. 471)	97
5.9	1	Usar una calculadora gráfica para ajustar una función exponencial a los datos (p. 475)	98
	2	Usar una calculadora gráfica para ajustar una función logarítmica a los datos (p. 476)	99
	3	Usar una calculadora gráfica para ajustar una función logística a los datos (p. 477)	100

Ejercicios de repaso *(Los problemas con asterisco indican que el autor los sugiere para usarse como examen de práctica.)*

En los problemas 1-6, para las funciones f y g dadas, encuentre:

a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(-2)$ c) $(f \circ f)(4)$ d) $(g \circ g)(-1)$

* **1.** $f(x) = 3x - 5;\quad g(x) = 1 - 2x^2$

2. $f(x) = 4 - x;\quad g(x) = 1 + x^2$

3. $f(x) = \sqrt{x + 2};\quad g(x) = 2x^2 + 1$

4. $f(x) = 1 - 3x^2;\quad g(x) = \sqrt{4 - x}$

5. $f(x) = e^x;\quad g(x) = 3x - 2$

6. $f(x) = \dfrac{2}{1 + 2x^2};\quad g(x) = 3x$

En los problemas 7-12, encuentre $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, y $g \circ g$ para cada par de funciones. Establezca el dominio de cada función compuesta.

* **7.** $f(x) = 2 - x;\quad g(x) = 3x + 1$

8. $f(x) = 2x - 1;\quad g(x) = 2x + 1$

9. $f(x) = 3x^2 + x + 1;\quad g(x) = |3x|$

10. $f(x) = \sqrt{3x};\quad g(x) = 1 + x + x^2$

11. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1};\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

12. $f(x) = \sqrt{x - 3};\quad g(x) = \dfrac{3}{x}$

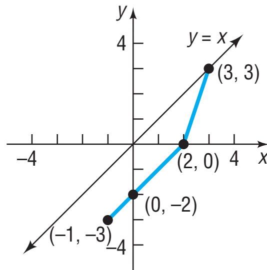
En los problemas 13 y 14, a) *encuentre la inversa de la función dada y* b) *determine si la inversa representa una función.*

13. $\{(1, 2), (3, 5), (5, 8), (6, 10)\}$

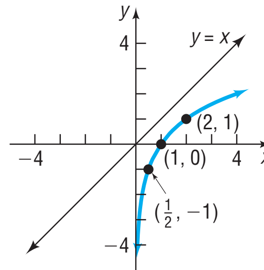
14. $\{(-1, 4), (0, 2), (1, 4), (3, 7)\}$

En los problemas 15 y 16 se da la gráfica de una función uno a uno. Dibuje la gráfica de la función inversa f^{-1}. Por conveniencia (y como sugerencia), también se da la gráfica de $y = x$.

***15.**



16.



En los problemas 17-22, la función f es uno a uno. Encuentre la inversa de cada función y verifique su respuesta. Encuentre el dominio y el rango de f y f^{-1}.

***17.** $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x - 2}$ **18.** $f(x) = \dfrac{2 - x}{3 + x}$ **19.** $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

20. $f(x) = \sqrt{x - 2}$ **21.** $f(x) = \dfrac{3}{x^{1/3}}$ **22.** $f(x) = x^{1/3} + 1$

En los problemas 23 y 24, $f(x) = 3^x$ y $g(x) = \log_3 x$.

***23.** Evalúe:
a) $f(4)$ b) $g(9)$ c) $f(-2)$ d) $g\left(\dfrac{1}{27}\right)$

24. Evalúe:
a) $f(1)$ b) $g(81)$ c) $f(-4)$ d) $g\left(\dfrac{1}{243}\right)$

En los problemas 25 y 26, convierta cada expresión exponencial en una expresión equivalente con logaritmos. En los problemas 27 y 28, convierta cada expresión logarítmica en una expresión equivalente con un exponente.

25. $5^2 = z$ **26.** $a^5 = m$ **27.** $\log_5 u = 13$ **28.** $\log_a 4 = 3$

En los problemas 29-32, encuentre el dominio de cada función logarítmica.

***29.** $f(x) = \log(3x - 2)$ **30.** $F(x) = \log_5(2x + 1)$ **31.** $H(x) = \log_2(x^2 - 3x + 2)$ **32.** $F(x) = \ln(x^2 - 9)$

En los problemas 33-38, evalúe cada expresión. No use calculadora.

33. $\log_2\left(\dfrac{1}{8}\right)$ **34.** $\log_3 81$ ***35.** $\ln e^{\sqrt{2}}$

36. $e^{\ln 0.1}$ **37.** $2^{\log_2 0.4}$ **38.** $\log_2 2^{\sqrt{3}}$

En los problemas 39-44, escriba cada expresión como la suma y/o diferencia de logaritmos. Exprese las potencias como factores.

***39.** $\log_3\left(\dfrac{uv^2}{w}\right), u > 0, v > 0, w > 0$ **40.** $\log_2(a^2\sqrt{b})^4, a > 0, b > 0$ **41.** $\log\left(x^2\sqrt{x^3 + 1}\right), x > 0$

42. $\log_5\left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\right), x > 0$ **43.** $\ln\left(\dfrac{x\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x - 3}\right), x > 3$ **44.** $\ln\left(\dfrac{2x + 3}{x^2 - 3x + 2}\right)^2, x > 2$

En los problemas 45-50, escriba cada expresión como un solo logaritmo.

***45.** $3\log_4 x^2 + \dfrac{1}{2}\log_4\sqrt{x}$ **46.** $-2\log_3\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{3}\log_3\sqrt{x}$

47. $\ln\left(\dfrac{x - 1}{x}\right) + \ln\left(\dfrac{x}{x + 1}\right) - \ln(x^2 - 1)$ **48.** $\log(x^2 - 9) - \log(x^2 + 7x + 12)$

49. $2\log 2 + 3\log x - \dfrac{1}{2}[\log(x + 3) + \log(x - 2)]$ **50.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - 4\ln\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}[\ln(x - 4) + \ln x]$

En los problemas 51 y 52, use la fórmula para cambio de base y una calculadora para evaluar cada logaritmo. Redondee su respuesta a tres decimales.

***51.** $\log_4 19$

52. $\log_2 21$

En los problemas 53 y 54, grafique cada función usando una calculadora gráfica y la fórmula de cambio de base.

53. $y = \log_3 x$

54. $y = \log_7 x$

En los problemas 55-64, use transformaciones para graficar cada función. Determine el dominio, el rango y las asíntotas.

***55.** $f(x) = 2^{x-3}$

56. $f(x) = -2^x + 3$

57. $f(x) = \frac{1}{2}(3^{-x})$

58. $f(x) = 1 + 3^{2x}$

59. $f(x) = 1 - e^x$

60. $f(x) = 3 + \ln x$

61. $f(x) = \frac{1}{2}\ln x$

62. $f(x) = 3e^x$

***63.** $f(x) = 3 - e^{-x}$

64. $f(x) = 4 - \ln(-x)$

En los problemas 65-84, resuelva cada ecuación.

***65.** $4^{1-2x} = 2$

66. $8^{6+3x} = 4$

67. $3^{x^2+x} = \sqrt{3}$

68. $4^{x-x^2} = \frac{1}{2}$

69. $\log_x 64 = -3$

70. $\log_{\sqrt{2}} x = -6$

***71.** $5^x = 3^{x+2}$

72. $5^{x+2} = 7^{x-2}$

***73.** $9^{2x} = 27^{3x-4}$

74. $25^{2x} = 5^{x^2-12}$

75. $\log_3 \sqrt{x-2} = 2$

76. $2^{x+1} \cdot 8^{-x} = 4$

77. $8 = 4^{x^2} \cdot 2^{5x}$

78. $2^x \cdot 5 = 10^x$

***79.** $\log_6(x+3) + \log_6(x+4) = 1$

80. $\log(7x - 12) = 2\log x$

81. $e^{1-x} = 5$

82. $e^{1-2x} = 4$

83. $2^{3x} = 3^{2x+1}$

84. $2^{x^3} = 3^{x^2}$

En los problemas 85 y 86, use el siguiente resultado: si x es la presión atmosférica (medida en milímetros de mercurio), entonces la fórmula para la altitud h(x) (medida en metros sobre el nivel del mar) es

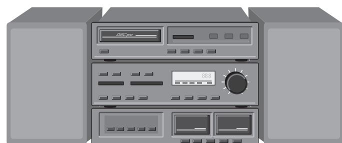
$$h(x) = (30T + 8000)\log\left(\frac{P_0}{x}\right)$$

donde T es la temperatura (en grados Celsius) y P_0 es la presión atmosférica en el nivel del mar, que es aproximadamente de 760 milímetros de mercurio.

85. Altitud de un avión Determine la altura de un Piper Cub cuyos instrumentos registran una temperatura exterior de 0°C y una presión barométrica de 300 milímetros de mercurio.

86. Altura de una montaña Determine la altura de una montaña si los instrumentos colocados en la cima registran una temperatura de 5°C y una presión barométrica de 500 milímetros de mercurio.

***87. Amplificación del sonido** La potencia de salida P de un amplificador (en watts) se relaciona con su ganancia de voltaje d en decibeles por la fórmula $P = 25e^{0.1d}$.



a) Encuentre la potencia de salida para una ganancia de voltaje de 4 decibeles.
b) Para una potencia de salida de 50 watts, ¿cuál es la ganancia de voltaje en decibeles?

88. Magnitud límite de un telescopio Un telescopio está limitado en su utilidad por la brillantez de la estrella que se observa y por el diámetro de sus lentes. Una medida de la brillantez de la estrella es su *magnitud*; cuanto más opaca, mayor es su magnitud. Una fórmula para la magnitud límite L de un telescopio, es decir, la magnitud de la estrella más opaca que puede ver, está dada por

$$L = 9 + 5.1\log d$$

donde d es el diámetro d (en pulgadas) del lente.

a) ¿Cuál es la magnitud límite de un telescopio de 3.5 pulgadas?
b) ¿Qué diámetro se requiere para ver una estrella de magnitud 14?

89. Valor de recuperación El número de años n para que una pieza de maquinaria se deprecie hasta un valor de recuperación dado se encuentra con la fórmula

$$n = \frac{\log s - \log i}{\log(1 - d)}$$

donde s es el valor de recuperación de la maquinaria, i es su valor inicial y d es la tasa anual de depreciación.

a) ¿Cuántos años tomará que el valor de una máquina baje de $90,000 a $10,000 si la tasa anual de depreciación es de 0.20 (20%)?

b) ¿Cuántos años tomará que la máquina pierda la mitad de su valor si la tasa de depreciación anual es 15%?

90. Fondo para estudios universitarios Los abuelos de una niña compran un bono de $10,000 que madura en 18 años y que podrá usar para pagar la universidad. El bono paga 4% de interés compuesto semestralmente. ¿Cuánto valdrá el bono cuando madure? ¿Cuál es la tasa efectiva de interés? ¿Cuánto tiempo se requiere para que el bono duplique su valor en estos términos?

91.* **Fondo para estudios universitarios Los abuelos de un niño desean comprar un bono que madure en 18 años para pagar sus estudios en la universidad. El bono paga 4% de interés compuesto cada semestre. ¿Cuánto dinero deben pagar para que el bono valga $85,000 cuando madure?

92. Fondo de retiro La compañía First Colonial Bankshores anuncia los siguientes planes de inversión en fondo de retiro.

Planes de fondo de retiro

Por cada $5000 de valor deseado a la madurez

Depositar	A un término de:
$620.17	20 años
$1045.02	15 años
$1760.92	10 años
$2967.26	5 años

a) Suponiendo interés continuo, ¿qué tasa de interés anual ofrecen?

b) El First Colonial Bankshores asegura que $4000 invertidos hoy tendrán un valor mayor que $32,000 en 20 años. Use la respuesta del inciso *a*) para encontrar el valor real de $4000 en 20 años. Suponga interés continuo.

93. Estimación de la fecha de la muerte de un hombre prehistórico Los huesos de un hombre prehistórico encontrado en el desierto de Nuevo México contienen cerca de 5% de la cantidad original de carbón 14. Si la vida media del carbón 14 es de 5600 años aproximadamente, ¿hace cuánto murió el hombre?

94. Temperatura de una cacerola Una cacerola se saca de un horno cuya temperatura es de 450°F y se coloca en una habitación a una temperatura de 70°F. Después de 5 minutos, la temperatura de la cacerola es de 400°F. ¿Cuánto tiempo pasará para su temperatura sea de 150°F?

95. Población mundial La tasa de crecimiento de la población mundial en 2003 fue $k = 1.16\% = 0.0116$. La población mundial en 2003 era de 6,302,486,693. Sea $t = 0$ el año 2003, use el modelo de crecimiento desinhibido para predecir la población en el año 2010.

FUENTE: U.S. Census Bureau.

96. Decaimiento radiactivo La vida media del cobalto radiactivo es de 5.27 años. Si se tienen 100 gramos de cobalto radiactivo ahora, ¿cuánto se tendrá en 20 años? ¿Y en 40 años?

97. Crecimiento logístico El modelo de crecimiento logístico

$$P(t) = \frac{0.8}{1 + 1.67e^{-0.16t}}$$

representa la proporción de auto nuevos con sistema de posicionamiento por satélite (GPS). Sea $t = 0$ el año 2003, $t = 1$ el año 2004, etcétera.

a) ¿Qué proporción de autos nuevos en 2003 tenían GPS?

b) Determine la proporción máxima de autos nuevos que tiene GPS

c) Utilice una calculadora gráfica para graficar $P(t)$.

d) ¿Cuándo tendrá un GPS el 75% de autos nuevos?

98. Experimento CBL Los siguientes datos se reunieron colocando un sensor de temperatura en un calentador portátil, removiendo el sensor y luego registrando la temperatura en el tiempo.

Tiempo (segundos)	Temperatura (°F)
0	165.07
1	164.77
2	163.99
3	163.22
4	162.82
5	161.96
6	161.20
7	160.45
8	159.35
9	158.61
10	157.89
11	156.83
12	156.11
13	155.08
14	154.40
15	153.72

Según la ley de enfriamiento de Newton, estos datos deben seguir un modelo exponencial.

a) Use una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión para los datos.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función exponencial a los datos.
c) Grafique la función exponencial encontrada en el inciso b) sobre el diagrama de dispersión.
d) Prediga cuánto tiempo tomará para que el sensor llegue a 110°F.

99. Factor de enfriamiento por viento Los datos en la tabla representan la velocidad del viento (mph) y el factor de enfriamiento por viento para una temperatura ambiente de 15°F.

Velocidad del viento (mph)	Factor de enfriamiento por viento (°F)
5	7
10	3
15	0
20	−2
25	−4
30	−5
35	−7

FUENTE: U.S. National Weather Service

a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión con la velocidad del viento como variable independiente.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función logarítmica a los datos.
c) Con una calculadora gráfica dibuje la función logarítmica del inciso b) sobre el diagrama de dispersión.
d) Use la función del inciso b) para predecir el factor de enfriamiento por viento si la temperatura ambiente es de 15°F y la velocidad del viento es de 23 mph.

100. Contagio de enfermedad Jack y Diane viven en un pequeño pueblo de 50 personas. Desafortunadamente, ambos tienen gripa. Quienes tienen contacto con alguien que tiene esta gripa se contagiarán. Los datos siguientes representan el número de personas en el pueblo que se han contagiado después de t días.



Días, t	Número de personas con gripa, C
0	2
1	4
2	8
3	14
4	22
5	30
6	37
7	42
8	44

a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que parece existir entre los días y el número de personas con gripa.
b) Use una calculadora gráfica para ajustar una función logística a los datos.
c) Grafique la función del inciso b) sobre el diagrama de dispersión.
d) De acuerdo con la función encontrada en el inciso b), ¿cuál es el número máximo de personas que se contagiarán? Y en realidad, ¿cuál es el número máximo de personas que podrían enfermarse de gripa?
e) En algún momento entre el segundo y el tercer día, 10 personas del pueblo tenían gripa. Según el modelo encontrado en el inciso b), ¿cuándo tenían gripa 10 personas?
f) ¿Cuánto tiempo tomará para que 46 personas se contagien de gripa?

Proyectos del capítulo



1. Café caliente Un restaurante de comida rápida requiere un contenedor especial para almacenar café. Se desea que el contendor enfríe con rapidez el café de 200°F a 130°F y luego lo mantenga entre 110°F y 130°F durante el mayor tiempo posible. El restaurante tiene tres opciones.

1. La compañía CentiKeeper tiene un contenedor que reduce la temperatura de un líquido de 200°F a 100°F en 30 minutos manteniendo una temperatura constante de 70°F.

2. La compañía TempControl tiene un contenedor que reduce la temperatura de un líquido de 200°F a 110°F en 25 minutos manteniendo una temperatura constante de 60°F.

3. La compañía Hot'n'Cold tiene un contenedor que reduce la temperatura de un líquido de 200°F a 120°F en 20 minutos manteniendo una temperatura constante de 65°F.

Usted debe recomendar qué contenedor ha de comprar el restaurante.

a) Use la ley de enfriamiento de Newton para encontrar una función que relacione la temperatura del líquido con el tiempo para cada contenedor.

b) ¿Cuánto tiempo toma a cada contenedor reducir la temperatura del café de 200°F a 130°F?

c) ¿Cuánto tiempo permanecerá la temperatura del café entre 110°F y 130°F? Esta temperatura se considera óptima para beber.

d) Grafique cada función usando una calculadora gráfica.

e) ¿Qué compañía recomendaría al restaurante? ¿Por qué?

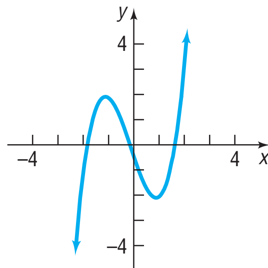
f) ¿Cómo afectaría su decisión el costo del contenedor?

Los siguientes proyectos están disponibles en www.prenhall.com/sullivan

2. **Project at Motorola** ***Thermal Fatigue of Solder Connections***
3. **Depreciation of a New Car**
4. **CBL Experiment**

Repaso acumulativo

1. ¿La siguiente gráfica es la de una función? Si lo es, ¿se trata de una función uno a uno?



2. Para la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, encuentre lo siguiente:

a) $f(3)$ b) $f(-x)$ c) $f(x + h)$

3. Determine cuál de los siguientes puntos está en la gráfica de $x^2 + y^2 = 1$.

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

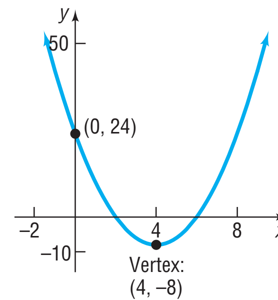
4. Resuelva la ecuación $3(x - 2) = 4(x + 5)$.

5. Grafique la recta $2x - 4y = 16$.

6. a) Grafique la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ determinando si la gráfica abre hacia arriba o hacia abajo y encontrando su vértice, el eje de simetría, la intercepción y y las intercepciones x, si las hay.

b) Resuelva $f(x) \leq 0$.

7. Determine la función cuadrática cuya gráfica está dada en la figura.



8. Grafique $f(x) = 3(x + 1)^3 - 2$ usando transformaciones.

9. Dado que $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = \dfrac{2}{x - 3}$, encuentre $f(g(x))$ y establezca su dominio. ¿Cuánto vale $f(g(5))$?

10. Para la función polinomial
$f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 30x - 8$

a) Encuentre los ceros reales de f.

b) Determine las intercepciones de la gráfica de f.

c) Use una calculadora gráfica para aproximar los máximos y mínimos locales.

d) A mano, dibuje una gráfica completa de f. Asegúrese de etiquetar las intercepciones y los puntos de retorno.

11. Para la función $g(x) = 3^x + 2$:

a) Grafique g usando transformaciones. Establezca el dominio, el rango y la asíntota horizontal de g.

b) Determine la inversa de g. Establezca el dominio, el rango y la asíntota vertical de g^{-1}.

c) En la misma gráfica para g, grafique g^{-1}.

12. Resuelva la ecuación $4^{x-3} = 8^{2x}$.

13. Resuelva la ecuación
$\log_3(x + 1) + \log_3(2x - 3) = \log_9 9$

14. Suponga que $f(x) = \log_3(x + 2)$.

a) Resuelva $f(x) = 0$.

b) Resuelva $f(x) > 0$.

c) Resuelva $f(x) = 3$.

15. Análisis de datos Los siguientes datos representan todos los conductores que fueron detenidos por la policía por cualquier motivo durante el año pasado por edades. La edad promedio representa el punto medio de los límites superior e inferior para el intervalo de edad.

Intervalo de edad	Edad promedio, x	Porcentaje detenido, y
16–19	17.5	18.2
20–29	24.5	16.8
30–39	34.5	11.3
40–49	44.5	9.4
50–59	54.5	7.7
≥60	69.5	3.8

a) Con su calculadora gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos, donde la edad promedio x es la variable independiente.

b) Determine el modelo que piensa que describe mejor la relación entre la edad promedio y el porcentaje detenido. Puede elegir entre los modelos lineal, cuadrático, cúbico, de potencias, exponencial, logarítmico o logístico.

c) Proporcione una justificación para el modelo que eligió en el inciso b).

6 Funciones trigonométricas

Las mareas en la costa y unos baldes con agua

En Florida anuncian con mucha precisión las horas en que las mareas van y vienen, como 11:23 AM. ¿Cómo pueden tener tanta precisión?

Existen más características de las mareas, el agua del mar que sube y baja, que la atracción gravitacional de la Luna y el Sol.

Por supuesto, estos son factores primordiales. Como el movimiento relacionado de la Tierra, el Sol y la Luna se conoce con precisión, es fácil predecir el ritmo de las mareas altas y bajas en las costas.

Pero la hora y la altura de las mareas podrían variar para diferentes puntos de la misma costa, aunque estén reaccionando a fuerzas y presiones similares.

La observación histórica hace posible encontrar la hora exacta de las mareas altas y bajas en una sección específica de la costa durante un mes, un año o más hacia el futuro.

La razón de la diferencia es la oscilación. Piense en varios baldes con diferentes niveles de agua colocados sobre una mesa, dice Charles O'Reilly, jefe de Análisis de Mareas en el *Geological Survey* de Canadá, en Dartmouth, Nueva Escocia. Después mueva la mesa.

"Observará que el agua en los baldes se mueve en forma diferente. Ésa es su oscilación natural", dice O'Reilly. "Si da golpecitos a la mesa con ritmo, verá que el agua de cada balde continúa moviéndose en forma diferente, porque cada uno tiene su propio ritmo."

"Ahora, si une esos baldes, es un poco como el océano en la costa. Sienten el mismo 'golpe', pero todos responden a su manera. Para predecir una marea, debe medirla durante algún tiempo."

FUENTE: *Toronto Star*, 13 de junio de 2001, p. GT02. Reimpreso con autorización de Torstar Sindication Services.

—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO.

C O N T E N I D O

6.1 Ángulos y su medida
6.2 Trigonometría del triángulo rectángulo
6.3 Cálculo de valores de funciones trigonométricas de ángulos agudos
6.4 Funciones trigonométricas de ángulos generales
6.5 Enfoque de círculo unitario; propiedades de las funciones trigonométricas
6.6 Gráficas de las funciones seno y coseno
6.7 Gráficas de las funciones tangente, cotangente, cosecante y secante
6.8 Corrimiento de fase: ajuste con curvas senoidales
Repaso del capítulo
Proyectos del capítulo
Repaso acumulativo

6.1 Ángulos y su medida

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Circunferencia y área de un círculo (Repaso, sección R.3, p. 31)



Trabaje ahora en los problemas de “¿Está preparado?”, en la página 502.

OBJETIVOS
1 Hacer conversiones entre grados, minutos, segundos y formas decimales para los ángulos
2 Encontrar la longitud de arco de un círculo
3 Convertir grados en radianes
4 Convertir radianes en grados
5 Encontrar el área de un sector de un círculo
6 Encontrar la velocidad lineal de un objeto que viaja en movimiento circular

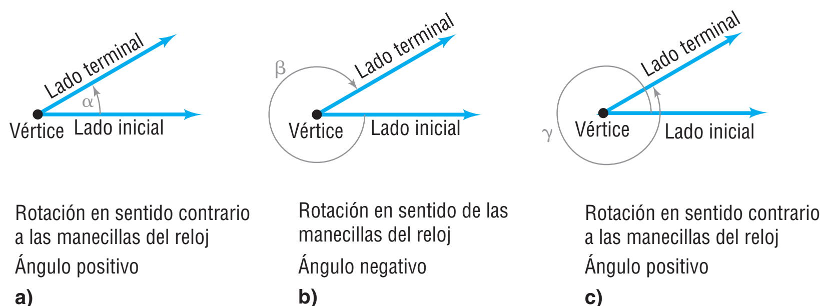
Un **rayo**, o **semirrecta**, es esa porción de una recta que comienza en el punto V sobre la recta y se extiende indefinidamente en una dirección. El punto inicial V de un rayo se llama su **vértice**. Vea la figura 1.

Figura 1



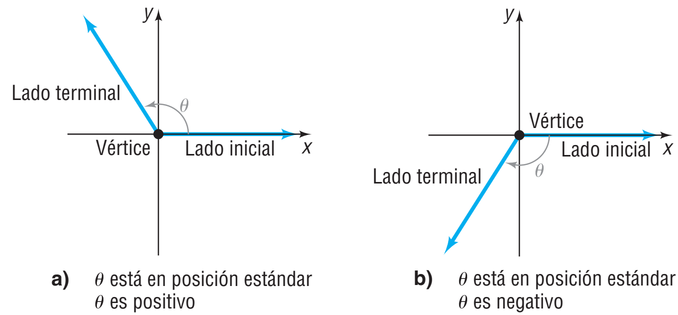
Si se dibujan dos rayos con un vértice común, forman un **ángulo**. Uno de los rayos de un ángulo recibe el nombre de **lado inicial** y el otro, **lado terminal**. El ángulo formado se identifica mostrando la dirección y la cantidad de rotación del lado inicial al lado terminal. Si la rotación es en dirección contraria a las manecillas del reloj, el ángulo es positivo; si la rotación es en dirección de las manecillas de reloj, el ángulo es **negativo**. Vea la figura 2. Se usarán letras griegas minúsculas como α (alfa), β (beta), γ (gama) y θ (theta) para denotar ángulos. Observe en la figura 2*a*) que α es positivo porque la dirección de rotación es en sentido contrario a las manecillas del reloj. El ángulo β en la figura 2*b*) es negativo porque la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj. El ángulo γ en la figura 2*c*) es positivo. Note que el ángulo α en la figura 2*a*) y el ángulo γ en la figura 2*c*) tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal. Sin embargo, α y γ no son iguales porque la cantidad de rotación requerida para ir del lado inicial al lado terminal es mayor para el ángulo γ que para el ángulo α.

Figura 2



Se dice que un ángulo θ está en **posición estándar** si su vértice está en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el lado positivo del eje x. Vea la figura 3.

Figura 3

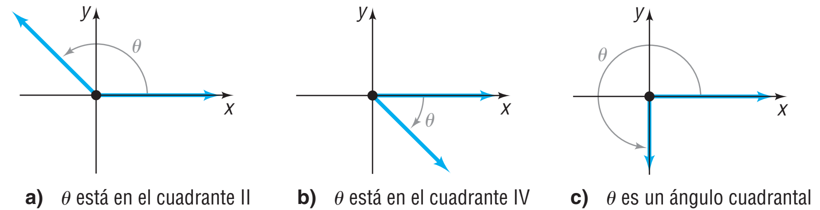


a) θ está en posición estándar
θ es positivo

b) θ está en posición estándar
θ es negativo

Cuando un ángulo θ está en posición estándar, el lado terminal estará ya sea en un cuadrante, en cuyo caso se dice que θ **está en ese cuadrante**, o bien θ sobre el eje x o el eje y; entonces, se dice que θ es un **ángulo cuadrantal**. Por ejemplo, el ángulo θ de la figura 4*a*) está en el cuadrante II, el ángulo θ de la figura 4*b*) está en el cuadrante IV y el ángulo θ de la figura 4*c*) es un ángulo cuadrantal.

Figura 4



a) θ está en el cuadrante II **b)** θ está en el cuadrante IV **c)** θ es un ángulo cuadrantal

Los ángulos se miden determinando la cantidad de rotación necesaria para que el lado inicial coincida con el lado terminal. Las dos medidas de uso común son *grados* y *radianes*.

Grados

El ángulo formado al girar el lado inicial exactamente una vez en dirección contraria a las manecillas del reloj hasta que coincide consigo mismo (1 vuelta), se dice que mide 360 grados, abreviado 360°. **Un grado, 1°,** es $\frac{1}{360}$ de vuelta. Un **ángulo recto** es un ángulo que mide 90°, o $\frac{1}{4}$ de vuelta; un **ángulo plano** mide 180°, o $\frac{1}{2}$ vuelta. Vea la figura 5. Como se muestra en la figura 5*b*), es costumbre indicar un ángulo recto mediante el símbolo ∟.

Figura 5



a) 1 vuelta en sentido positivo, 360° **b)** ángulo recto, $\frac{1}{4}$ de vuelta en sentido positivo, 90° **c)** ángulo plano, $\frac{1}{2}$ vuelta en sentido positivo, 180°

También es costumbre referirse a un ángulo que mide θ grados como un ángulo de θ grados.

EJEMPLO 1 Dibujo de un ángulo

Dibuje cada ángulo

a) 45° b) −90° c) 225° d) 405°

Solución

a) Un ángulo de 45° es $\frac{1}{2}$ ángulo recto. Vea la figura 6.

b) Un ángulo de −90° es $\frac{1}{4}$ de vuelta en sentido negativo (como las manecillas). Vea la figura 7.

Figura 6

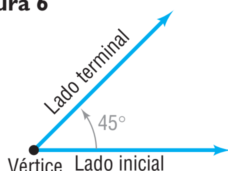
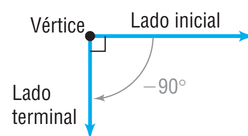


Figura 7



c) Un ángulo de 225° consiste en una rotación de 180° seguida de una rotación de 45°. Vea la figura 8.

d) Un ángulo de 405° consiste en 1 vuelta (360°) seguida de una rotación de 45°. Vea la figura 9.

Figura 8

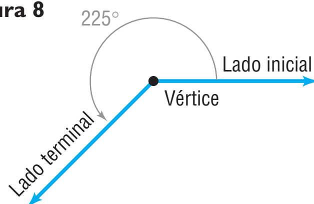
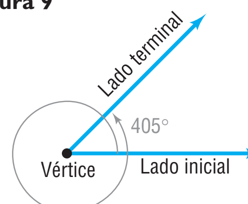


Figura 9



◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.


Aunque se podrían obtener subdivisiones de un grado usando decimales, también se utiliza la notación de *minutos* y *segundos*. **Un minuto**, denotado por **1′**, se define como $\frac{1}{60}$ de grado. **Un segundo**, denotado por **1″**, se define como $\frac{1}{60}$ de minuto, o de manera equivalente, $\frac{1}{3600}$ de grado. Un ángulo, digamos de 30 grados, 40 minutos, 10 segundos se escribe de manera compacta como 30°40′10″. Para resumir:

$$\text{1 vuelta en sentido positivo} = 360^\circ$$
$$1^\circ = 60' \qquad 1' = 60'' \qquad \textbf{(1)}$$

Algunas veces es necesario convertir de la notación de grados, minutos y segundos (G°M′S″) en una forma decimal y viceversa. Verifique su calculadora, seguro que puede hacer la conversión.

Sin embargo, antes de comenzar debe establecer el modo de grados, porque existen dos maneras comunes de medir ángulos: modo de grados y modo de radianes. (Pronto se definirán los radianes). Suele haber un menú

que se usa para cambiar de un modo a otro. Vea el manual del usuario para su calculadora.

Ahora se verá con algunos ejemplos cómo convertir a mano grados, minutos y segundos (G°M′S″) en una forma decimal y viceversa.

$$15°30' = 15.5° \quad \text{porque} \quad 30' \underset{\uparrow}{=} 30 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} = 0.5°$$

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$$

$$32.25° = 32°15' \quad \text{porque} \quad 0.25° = \left(\frac{1}{4}\right)^{\circ} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{4}(60') = 15'.$$

$$1° = 60'$$

EJEMPLO 2 Conversión manual entre grados, minutos y segundos, y las formas decimales

a) Convierta 50°6′21″ en un decimal en grados.

b) Convierta 21.256° en la forma G°M′S″.

Solución a) Dado que $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ y $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{60}\right)^{\circ}$, se convierte como sigue:

$$\begin{aligned} 50°6'21'' &= 50° + 6' + 21'' \\ &= 50° + 6\cdot\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} + 21\cdot\left(\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{60}\right)^{\circ} \\ &\approx 50° + 0.1° + 0.005833° \\ &= 50.105833° \end{aligned}$$

b) Se procede como sigue:

$$\begin{aligned} 21.256° &= 21° + 0.256° \\ &= 21° + (0.256)(60') && \text{Convertir fracciones de grados en minutos, } 1° = 60' \\ &= 21° + 15.36' \\ &= 21° + 15' + 0.36' \\ &= 21° + 15' + (0.36)(60'') && \text{Convertir fracciones de minutos en segundos, } 1' = 60'' \\ &= 21° + 15' + 21.6'' \\ &\approx 21°15'22'' \end{aligned}$$

◀

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 23 Y 29.



En muchas aplicaciones, como las que describen la localización exacta de una estrella o la posición precisa de un barco en el mar, los ángulos se miden en grados, minutos e incluso segundos. Para hacer cálculos, se transforma en la forma decimal. En otras aplicaciones, en especial en cálculo, los ángulos se miden en *radianes*.

Radianes

Un **ángulo central** es un ángulo cuyo vértice está en el centro de un círculo. Los rayos de un ángulo central subtienden (abarcan) un arco sobre el círculo. Si el radio del círculo es r y la longitud del arco subtendido por el ángulo central también es r, entonces la medida del ángulo es **1 radián**. Vea la figura 10*a*).

Para un círculo de radio 1, los rayos del ángulo central que mide 1 radián subtienden un arco de longitud 1. Para un círculo de 3, los rayos de un ángulo central que mide 1 radián subtienden un arco de longitud 3. Vea la figura 10*b*).

Figura 10

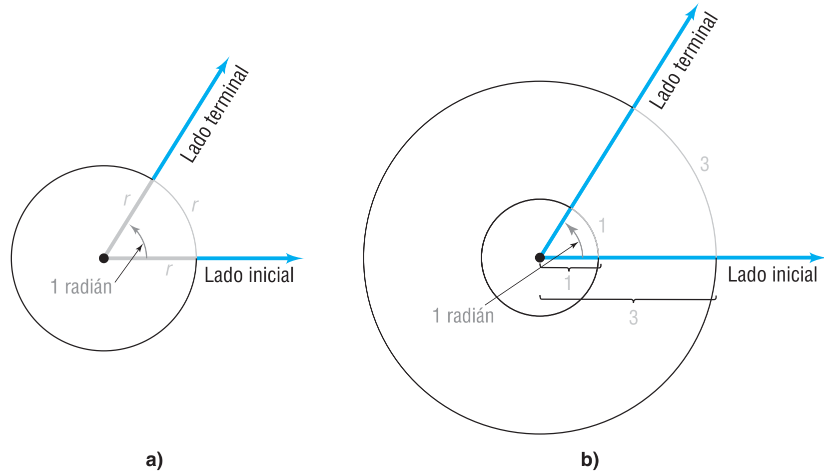
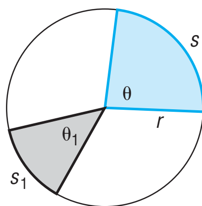


Figura 11 $\dfrac{\theta}{\theta_1} = \dfrac{s}{s_1}$



2 Ahora considere un círculo de radio r y dos ángulos centrales, θ y θ_1, medidos en radianes. Suponga que estos ángulos centrales subtienden arcos de longitudes s y s_1, respectivamente, como se muestra en la figura 11. De la geometría, se sabe que la razón de las medidas de los ángulos es igual a la razón de las longitudes correspondientes de los arcos subtendidos por estos ángulos; esto es,

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{s}{s_1} \tag{2}$$

Suponga que $\theta_1 = 1$ radián. Vea de nuevo la figura 10*a*). El tamaño del arco s_1 subtendido por el ángulo central $\theta_1 = 1$ radián es igual al radio r del círculo. Entonces, $s_1 = r$, de manera que la ecuación (2) se reduce a

$$\frac{\theta}{1} = \frac{s}{r} \quad \text{o} \quad s = r\theta \tag{3}$$

Teorema

Longitud de arco

Para un círculo de radio r, un ángulo central de θ radianes subtiende un arco cuya longitud s es

$$s = r\theta \tag{4}$$

Nota: Las fórmulas deben ser congruentes respecto de las unidades usadas. En la ecuación (4) se escribe

$$s = r\theta$$

Sin embargo, para ver las unidades, se debe regresar a la ecuación (3) y escribir

$$\frac{\theta \text{ radianes}}{1 \text{ radián}} = \frac{s \text{ unidades de longitud}}{r \text{ unidades de longitud}}$$

$$s \text{ unidades de longitud} = r \text{ unidades de longitud} \frac{\theta \text{ radianes}}{1 \text{ radián}}$$

Como los radianes se cancelan, queda

$$s \text{ unidades de longitud} = (r \text{ unidades de longitud})\theta \qquad s = r\theta$$

donde θ aparece "sin dimensión", pero se mide en radianes. Así, al usar la fórmula $s = r\theta$, la dimensión de θ es radianes y se utiliza cualquier unidad de longitud conveniente (como pulgadas o metros) para s y r. ■

EJEMPLO 3 **Longitud del arco de un círculo**

Encuentre la longitud del arco de un círculo de radio 2 metros que subtiende un ángulo central de 0.25 radianes.

Solución Se usa la ecuación (4) con $r = 2$ metros y $\theta = 0.25$. La longitud s del arco es

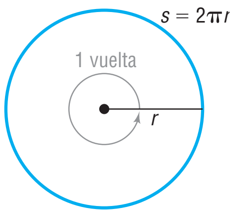
$$s = r\theta = 2(0.25) = 0.5 \text{ metros}$$


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 71.

Relación entre grados y radianes

Considere un círculo de radio r. Un ángulo central de 1 vuelta subtiende un arco igual a la circunferencia del círculo (figura 12). Como la circunferencia de un círculo es igual a $2\pi r$, se usa $s = 2\pi r$ en la ecuación (4) para encontrar que, para un ángulo θ de 1 vuelta,

Figura 12
1 vuelta = 2π radianes



$$s = r\theta$$

$$2\pi r = r\theta \qquad \theta = 1 \text{ vuelta};\ s = 2\pi r.$$

$$\theta = 2\pi \text{ radianes} \qquad \text{Despejar } \theta.$$

De esto se tiene,

$$1 \text{ vuelta} = 2\pi \text{ radianes} \qquad \textbf{(5)}$$

de manera que

$$360° = 2\pi \text{ radianes}$$

o

$$180° = \pi \text{ radianes} \qquad \textbf{(6)}$$

Se dividen ambos lados de la ecuación (6) entre 180. Entonces

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{radianes}$$

Se dividen ambos lados de la ecuación (6) entre π. Entonces

$$\frac{180}{\pi} \text{ grados} = 1 \text{ radián}$$

Se tiene las dos siguientes fórmulas de conversión:

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \qquad 1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados} \qquad \textbf{(7)}$$

3 **EJEMPLO 4**

Conversión de grados a radianes

Convierta cada ángulo de grados a radianes.

a) 60° b) 150° c) −45° d) 90° e) 107°

Solución

a) $60° = 60 \cdot 1 \text{ grado} = 60 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes}$

b) $150° = 150 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} = \frac{5\pi}{6} \text{ radianes}$

c) $-45° = -45 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} = -\frac{\pi}{4} \text{ radián}$

d) $90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$

e) $107° = 107 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} \approx 1.868 \text{ radianes}$ ◀

El ejemplo 4 ilustra que los ángulos que son fracciones de una vuelta, *a*) a *d*), se expresan en radianes como múltiplos fraccionales de π, en lugar de como decimales. Por ejemplo, un ángulo recto, como en el ejemplo 4*d*), se deja en la forma $\frac{\pi}{2}$ radianes, que es una cantidad exacta, en lugar de usar la aproximación $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3.1416}{2} = 1.5708$ radians.


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **35** Y **61**.

4 **EJEMPLO 5**

Conversión de radianes a grados

Convierta cada ángulo de radianes a grados.

a) $\frac{\pi}{6}$ radián b) $\frac{3\pi}{2}$ radianes c) $-\frac{3\pi}{4}$ radianes

d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes e) 3 radianes

Solución

a) $\frac{\pi}{6} \text{ radián} = \frac{\pi}{6} \cdot 1 \text{ radián} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grados} = 30°$

b) $\frac{3\pi}{2} \text{ radianes} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grados} = 270°$

c) $-\frac{3\pi}{4} \text{ radianes} = -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grados} = -135°$

d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes $= \frac{7\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 420°$

e) 3 radianes $= 3 \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $\approx 171.89°$ ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

La tabla 1 enumera las medidas en grados y radianes de algunos ángulos que se encuentran con frecuencia. Usted debe aprender a trabajar a gusto tanto con grados como con radianes para estos ángulos.

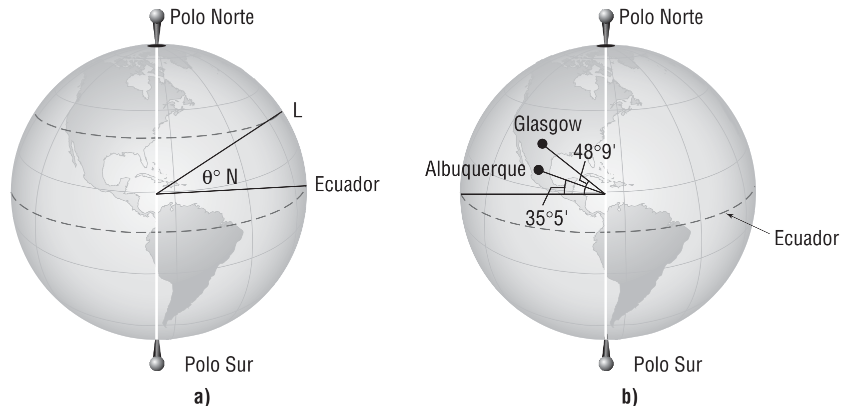
Tabla 1

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Grados		210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

EJEMPLO 6 Distancia entre dos ciudades

Vea la figura 13*a*). La latitud de un lugar L es el ángulo formado por un rayo dibujado desde el centro de la Tierra al ecuador y un rayo dibujado del centro de la Tierra a L. Vea la figura 13*b*). Glasgow, Montana, está justo al norte de Albuquerque, Nuevo México. Encuentre la distancia entre Glasgow (48°9′ latitud norte) y Albuquerque (35°5′ latitud norte). Suponga que el radio de la Tierra es de 3960 millas.

Figura 13



Solución La medida del ángulo central entre las dos ciudades es de $48°9' - 35°5' = 13°4'$. Se usa la ecuación 4, $s = r\theta$, pero primero debe convertirse el ángulo de $13°4'$ a radianes.

$$\theta = 13°4' \approx 13.0667° = 13.0667 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} \approx 0.228 \text{ radián}$$

Se usa $\theta = 0.228$ radianes y $r = 3960$ millas en la ecuación (4). La distancia entre las dos ciudades es de

$$s = r\theta = 3960 \cdot 0.228 \approx 903 \text{ millas}$$

Cuando un ángulo se mide en grados, siempre se muestra el símbolo de grados. Sin embargo, cuando un ángulo se mide en radianes se sigue la práctica usual de omitir la palabra *radianes*. Entonces, si la medida de un ángulo está dada como $\frac{\pi}{6}$, se entiende que son $\frac{\pi}{6}$ radianes.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 101.

Figura 14

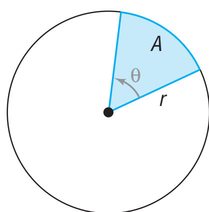
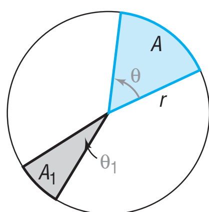


Figura 15



Área de un sector

5 Considere un círculo de radio r. Suponga que θ, medido en radianes, es un ángulo central de este círculo. Vea la figura 14. Se busca una fórmula para el área A del sector formado por el ángulo θ (área sombreada).

Ahora, considere el círculo de radio r y dos ángulos centrales θ y θ_1, ambos medidos en radianes. Vea la figura 15. De geometría se sabe que la razón de las medidas de los ángulos es igual a la razón de las áreas correspondientes de los sectores formados por estos ángulos. Esto es,

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{A}{A_1}$$

Suponga que $\theta_1 = 2\pi$ radianes. Entonces $A_1 =$ área del círculo $= \pi r^2$. Al despejar A se encuentra

$$A = A_1 \frac{\theta}{\theta_1} = \pi r^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Teorema

Área de un sector

El área del sector de un círculo de radio r formada por un ángulo central del θ radianes es

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta \qquad \textbf{(8)}$$

EJEMPLO 7 **Área de un sector de un círculo**

Encuentre el área del sector de un círculo de radio 2 pies formado por un ángulo de 30°. Redondee la respuesta a dos decimales.

Solución Se usa la ecuación (8) con $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$ radianes. [Recuerde, en la ecuación (8), θ debe estar en radianes]. El área A del sector es de

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2}(2)^2 \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ pies cuadrados} \approx 1.05 \text{ pies cuadrados}$$

redondeado a dos decimales.

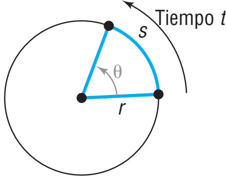

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 79.

Movimiento circular

6 Se definió previamente la velocidad promedio de un objeto como la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido. Suponga que un objeto se mueve alrededor de un círculo de radio r a una velocidad constante. Si s es la distancia recorrida en el tiempo t alrededor del círculo, entonces la **velocidad lineal** v del objeto se define como

Figura 16

$v = \frac{s}{t} \quad \omega = \frac{\theta}{t}$



$$v = \frac{s}{t} \qquad \textbf{(9)}$$

Mientras este objeto viaja alrededor del círculo, suponga que θ (medido en radianes) es el ángulo central barrido en el tiempo t. Vea la figura 16. Entonces, la **velocidad angular** ω (la letra griega omega) de este objeto es el ángulo (medido en radianes) que se barre dividido entre el tiempo transcurrido, es decir,

$$\omega = \frac{\theta}{t} \qquad \textbf{(10)}$$

La velocidad angular es la manera de describir la razón de rotación de un motor. Por ejemplo, un motor en marcha a 900 rpm (revoluciones por minuto) gira a una velocidad angular de

$$900\frac{\text{revoluciones}}{\text{minutos}} = 900\frac{\cancel{\text{revoluciones}}}{\text{minutos}} \cdot 2\pi\frac{\text{radianes}}{\cancel{\text{revoluciones}}} = 1800\pi\frac{\text{radianes}}{\text{minutos}}$$

Existe una relación importante entre la velocidad lineal y la velocidad angular:

$$\text{velocidad lineal} = v = \underset{\substack{\uparrow \\ (9)}}{\frac{s}{t}} \underset{\substack{\uparrow \\ s = r\theta}}{=} \frac{r\theta}{t} = r\left(\frac{\theta}{t}\right)$$

Entonces, si se usa la ecuación (10) se obtiene

$$v = r\omega \qquad \textbf{(11)}$$

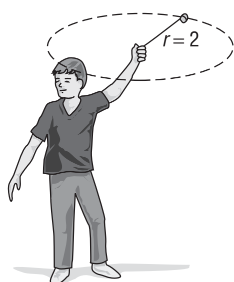
donde ω se mide en radianes por unidad de tiempo.

Al usar la ecuación (11), recuerde que $v = \frac{s}{t}$ (la velocidad lineal) tiene dimensiones de longitud por unidad de tiempo (como pies por segundo o millas por hora), r (el radio del movimiento circular) tiene la misma dimensión de longitud que s y ω (la velocidad angular) tiene las dimensiones de radianes por unidad de tiempo. Si la velocidad angular está dada en términos de *revoluciones* por unidad de tiempo (como con frecuencia es el caso), asegúrese de convertirla a *radianes* por unidad de tiempo antes de intentar usar la ecuación (11).

EJEMPLO 8 Velocidad lineal

Un niño hace girar una piedra atada a una cuerda de 2 pies de largo a una tasa de 180 revoluciones por minuto (rpm). Encuentre la velocidad lineal de la piedra cuando se suelta.

Figura 17



Solución Vea la figura 17. La piedra se mueve alrededor de un círculo de radio $r = 2$ pies. La velocidad angular ω de la piedra es

$$\omega = 180\frac{\text{revoluciones}}{\text{minutos}} = 180\frac{\cancel{\text{revoluciones}}}{\text{minutos}}\cdot 2\pi\frac{\text{radianes}}{\cancel{\text{revoluciones}}} = 360\pi\frac{\text{radianes}}{\text{minutos}}$$

De la ecuación (11), la velocidad lineal v de la piedra es

$$v = r\omega = 2 \text{ pies}\cdot 360\pi\frac{\text{radianes}}{\text{minutos}} = 720\pi\frac{\text{pies}}{\text{minutos}} \approx 2262\frac{\text{pies}}{\text{minutos}}$$

La velocidad lineal de la piedra cuando se suelta es de 2262 pies/min $\approx$ 25.7 millas/h. ◄

ASPECTO HISTÓRICO

La trigonometría fue desarrollada por astrónomos griegos, quienes veían el cielo como el interior de una esfera, de manera que fue natural que los triángulos en una esfera se investigaran muy pronto (Menelaus de Alejandría en el año 100 dC) y que los triángulos en el plano se investigarán después. El astrónomo persa Nasîr Eddin escribió el primer libro que contiene un tratado sistemático de trigonometría plana y esférica (alrededor de 1250 dC).

Regiomontanus (1436-1476) es la persona más responsable de que la trigonometría se moviera de la astronomía a las matemáticas. Su trabajo fue mejorado por Copérnico (1473-1543) y su alumno Rhaeticus (1514-1576). El libro de Rhaeticus fue el primero en definir las seis funciones trigonométricas como razones de los lados de los triángulos, aunque no dio a las funciones sus nombres actuales. Éstos se deben a Thomas Finck (1583), aunque la notación de Finck no se aceptó de manera universal en el momento. Con el tiempo, la notación se estabilizó gracias a los libros de texto de Leonhard Euler (1707-1783).

La trigonometría ha evolucionado desde sus aplicaciones en geodesia, navegación e ingeniería a los estudios actuales de las mareas, el aumento y la disminución de los recursos alimenticios en ciertas ecologías, los patrones de ondas en el cerebro y muchos otros fenómenos.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 97.

6.1 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. ¿Cuál es la fórmula para la circunferencia C de un círculo de radio r? (p. 31)

2. ¿Cuál es la fórmula para el área A de un círculo de radio r? (p. 31)

Conceptos y vocabulario

3. Un ángulo θ está en _________ _________ si su vértice está en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el lado positivo del eje x.

4. En un círculo de radio r, un ángulo central de θ radianes subtiende un arco de longitud $s =$ _________; el área del sector formado por este ángulo θ es $A =$ _________.

5. Un objeto viaja alrededor de un círculo de radio r con velocidad constante. Si s es la distancia recorrida en el tiempo t alrededor del círculo y θ es el ángulo central (en radianes) barrido en el tiempo t, entonces la velocidad lineal del objeto es $v =$ _________ y la velocidad angular es $\omega =$ _________.

6. *Falso o verdadero:* $\pi = 180$.

7. *Falso o verdadero:* $180° = \pi$ radianes.

8. *Falso o verdadero:* en un círculo unitario, si s es la longitud del arco subtendido por un ángulo central θ, medido en radianes, entonces $s = \theta$.

9. *Falso o verdadero:* el área A de un sector de un círculo *f* de radio r formado por un ángulo central de θ grados es $A = \frac{1}{2}r^2\theta$.

10. *Falso o verdadero:* para el movimiento circular sobre un círculo de radio r, la velocidad lineal es igual a la velocidad angular entre r.

Ejercicios

En los problemas 11-22, dibuje cada ángulo.

11. $30°$ **12.** $60°$ **13.** $135°$ **14.** $-120°$ **15.** $450°$ **16.** $540°$

17. $\frac{3\pi}{4}$ **18.** $\frac{4\pi}{3}$ **19.** $-\frac{\pi}{6}$ **20.** $-\frac{2\pi}{3}$ **21.** $\frac{16\pi}{3}$ **22.** $\frac{21\pi}{4}$

En los problemas 23-28, convierta cada ángulo a un decimal en grados. Redondee su respuesta a dos decimales.

23. $40°10'25''$ **24.** $61°42'21''$ **25.** $1°2'3''$ **26.** $73°40'40''$ **27.** $9°9'9''$ **28.** $98°22'45''$

En los problemas 29-34, dé cada ángulo en la forma G°M'S". Redondee su respuesta al segundo más cercano.

29. $40.32°$ **30.** $61.24°$ **31.** $18.255°$ **32.** $29.411°$ **33.** $19.99°$ **34.** $44.01°$

En los problemas 35-46, convierta cada ángulo de grados a radianes. Exprese su respuesta como un múltiplo de π.

35. $30°$ **36.** $120°$ **37.** $240°$ **38.** $330°$ **39.** $-60°$ **40.** $-30°$

41. $180°$ **42.** $270°$ **43.** $-135°$ **44.** $-225°$ **45.** $-90°$ **46.** $-180°$

En los problemas 47-58, convierta cada ángulo de radianes a grados.

47. $\frac{\pi}{3}$ **48.** $\frac{5\pi}{6}$ **49.** $-\frac{5\pi}{4}$ **50.** $-\frac{2\pi}{3}$ **51.** $\frac{\pi}{2}$ **52.** 4π

53. $\frac{\pi}{12}$ **54.** $\frac{5\pi}{12}$ **55.** $-\frac{\pi}{2}$ **56.** $-\pi$ **57.** $-\frac{\pi}{6}$ **58.** $-\frac{3\pi}{4}$

En los problemas 59-64, convierta cada ángulo de grados a radianes. Exprese su respuesta en la forma decimal, redondeada a dos decimales.

59. $17°$ **60.** $73°$ **61.** $-40°$ **62.** $-51°$ **63.** $125°$ **64.** $350°$

En los problemas 65-70, convierta cada ángulo de radianes a grados. Exprese su respuesta en la forma decimal redondeada a dos decimales.

65. 3.14 **66.** 0.75 **67.** 2 **68.** 3 **69.** 6.32 **70.** $\sqrt{2}$

En los problemas 71-78, s denota la longitud del arco de un círculo de radio r subtendido por el ángulo central θ. Encuentre la cantidad que falta. Redondee sus respuestas a tres decimales.

71. $r = 10$ metros, $\theta = \frac{1}{2}$ radián, $s = ?$

72. $r = 6$ pies, $\theta = 2$ radianes, $s = ?$

73. $\theta = \frac{1}{3}$ radianes, $s = 2$ pies, $r = ?$

74. $\theta = \frac{1}{4}$ radianes, $s = 6$ centímetros, $r = ?$

75. $r = 5$ millas, $s = 3$ millas, $\theta = ?$

76. $r = 6$ metros, $s = 8$ metros, $\theta = ?$

77. $r = 2$ pulgadas, $\theta = 30°$, $s = ?$

78. 3 metros, $\theta = 120°$, $s = ?$

En los problemas 79-86, A denota el área del sector de un círculo de radio r formado por el ángulo central θ. Encuentre la cantidad que falta. Redondee sus respuestas a tres decimales.

79. $r = 10$ metros, $\theta = \frac{1}{2}$ radián, $A = ?$

80. $r = 6$ pies, $\theta = 2$ radianes, $A = ?$

81. $\theta = \frac{1}{3}$ radianes, $A = 2$ pies cuadrados, $r = ?$

82. $\theta = \frac{1}{4}$ radianes, $A = 6$ centímetros cuadrados, $r = ?$

83. $r = 5$ millas, $A = 3$ millas cuadradas, $\theta = ?$

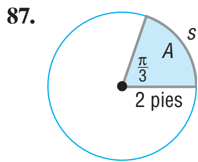
84. $r = 6$ metros, $A = 8$ metros cuadrados, $\theta = ?$

85. $r = 2$ pulgadas, $\theta = 30°$, $A = ?$

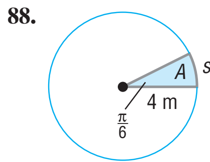
86. $r = 3$ metros, $\theta = 120°$, $A = ?$

En los problemas 87-90, encuentre la longitud s y el área A. Redondee las respuestas a tres decimales.

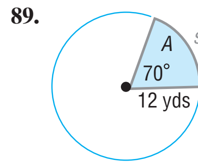
87.



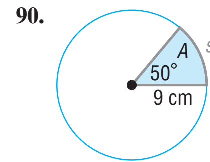
88.



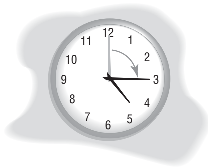
89.



90.



91. Minutero de un reloj El minutero de un reloj tiene 6 pulgadas de largo. ¿Qué distancia recorre la punta del minutero en 15 minutos? ¿Cuánto se mueve en 25 minutos?

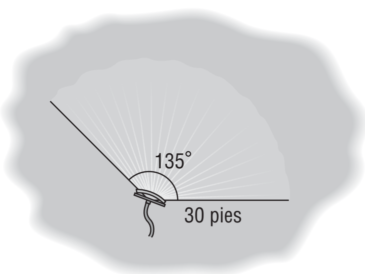


92. Movimiento de un péndulo Un péndulo se mueve un ángulo de 20° cada segundo. Si tiene 40 pulgadas de largo, ¿cuánto se mueve su punta cada segundo?

93. Área de un sector Encuentre el área de un círculo con radio de 4 metros formado por un ángulo de 45°. Redondee la respuesta a dos decimales.

94. Área de un sector Encuentre el área de un sector de un círculo con radio de 3 centímetros formado por un ángulo de 60°. Redondee la respuesta a dos decimales.

95. Riego del pasto Un aspersor riega agua a una distancia de 30 pies al girar un ángulo de 135°. ¿Qué área del pasto recibe agua?



96. Diseño de un aspersor Se pide a un ingeniero que diseñe un aspersor que cubra un campo de 100 yardas cuadradas con la forma de un sector circular con radio de 50 yardas. ¿Qué ángulo debe recorrer el aspersor al girar?

97. Movimiento en círculo Un objeto viaja alrededor de un círculo con radio de 5 centímetros. Si en 20 segundos recorre un ángulo central de $\frac{1}{3}$ radianes, ¿cuál es la velocidad angular del objeto? ¿Cuál es la velocidad lineal?

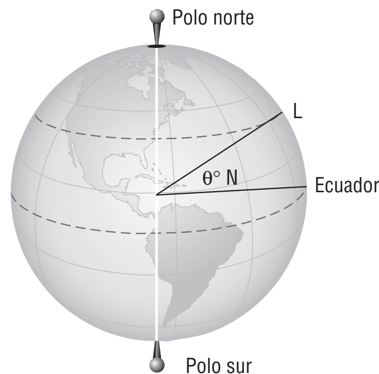
98. Movimiento en círculo Un objeto viaja alrededor de un círculo con un radio de 2 metros. Si en 20 segundos el objeto recorre 5 metros, ¿cuál es su velocidad angular? ¿Cuál es su velocidad lineal?

99. Llantas de bicicleta El diámetro de cada llanta de una bicicleta es de 26 pulgadas. Si el ciclista va a una velocidad de 35 millas por hora, ¿a cuántas revoluciones por minuto giran las llantas?



100. Llantas de un auto El radio de las llantas de un auto es de 15 pulgadas. Si giran a razón de 3 revoluciones por segundo, ¿a qué velocidad se mueve el auto? Exprese su respuesta en pulgadas por segundo y en millas por hora.

En los problemas 101-104, la latitud de un lugar L es el ángulo formado por un rayo dibujado del centro de la Tierra al ecuador y un rayo dibujado del centro de la Tierra a L. Vea la figura.



101. Distancia entre dos ciudades Memphis, Tennessee, está al norte de Nueva Orleans, Louisiana. Encuentre la distancia entre Memphis (35°9′ latitud norte) y Nueva Orleans (29°57′ latitud norte). Suponga que el radio de la Tierra es de 3960 millas.

102. Distancia entre dos ciudades Charleston, West Virginia, está al norte de Jacksonville, Florida. Encuentre la distancia entre Charleston (38°21′ latitud norte) y Jacksonville (30°20′ latitud norte). Suponga que el radio de la Tierra es de 3960 millas.

103. Velocidad lineal en la Tierra La Tierra gira sobre un eje que pasa por los polos. La distancia del eje a un lugar 30° latitud norte es de alrededor de 3429.5 millas. Por lo tanto, un lugar en la Tierra 30° latitud norte da vueltas sobre un círculo con radio de 3429.5 millas. Calcule la velocidad lineal en la superficie de la Tierra a 30° latitud norte.

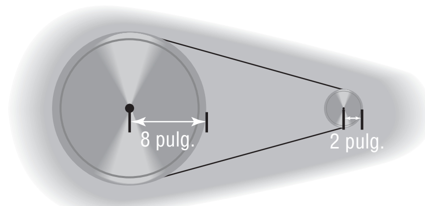
104. Velocidad lineal en la Tierra La Tierra gira sobre un eje que pasa por los polos. La distancia del eje a un lugar 40° latitud norte es de alrededor de 3033.5 millas. Por lo tanto, un lugar en la Tierra a 40° latitud norte da vueltas sobre un círculo con radio de 3033.5 millas. Calcule la velocidad lineal en la superficie de la Tierra a 40° latitud norte.

105. Velocidad de la Luna La distancia media de la Luna a la Tierra es de 2.39×10^5 millas. Suponga que la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es circular y que 1 vuelta toma 27.3 días, encuentre la velocidad lineal de la Luna. Exprese su respuesta en millas por hora.

106. Velocidad de la Tierra La distancia promedio a la Tierra desde el Sol es de 9.29×10^7 millas. Suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular y que una vuelta toma 365 días, determine la velocidad lineal de la Tierra. Exprese su respuesta en millas por hora.

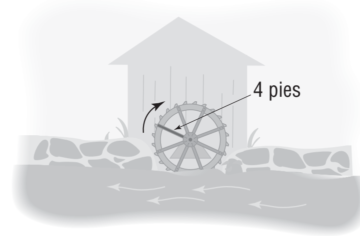
107. Poleas Dos poleas, una con radio de 2 pulgadas y la otra con radio de 8 pulgadas, están conectadas por una correa. (Vea la figura). Si se hace girar la polea de 2 pulgadas a 3 revoluciones por minuto, determine las revoluciones por minuto de la polea de 8 pulgadas.

[**Sugerencia:** Las velocidades lineales de las poleas son iguales, ambas son iguales a la velocidad de la correa].



108. Rueda de la fortuna Una feria local tiene una rueda de la fortuna cuyo radio es de 30 pies. El tiempo que toma una vuelta es de 70 segundos. ¿Cuál es la velocidad lineal (en pies por segundo) de esta rueda de la fortuna? ¿Cuál es la velocidad angular en radianes por segundo?

109. Cálculo de la velocidad de la corriente de un río Para aproximar la velocidad de la corriente de un río, se baja al agua una rueda de paletas con radio de 4 pies. Si la corriente hace que la rueda gire a una velocidad de 10 revoluciones por minuto, ¿cuál es la velocidad de la corriente? Exprese su respuesta en millas por hora.

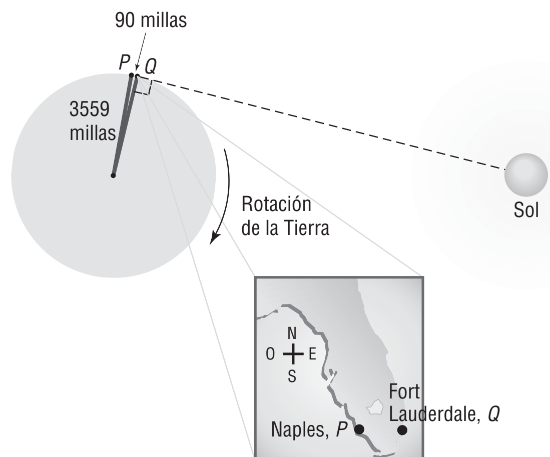


110. Balanceo de llantas Un balanceador gira la llanta de un auto a 480 revoluciones por minuto. Si el diámetro de la llanta es de 26 pulgadas, ¿a qué velocidad de carretera se está probando? Exprese su respuesta en millas por hora. ¿A cuántas revoluciones por minuto debe establecerse el balanceador para probar una velocidad de carretera de 80 millas por hora?

111. Teleférico de San Francisco En el Museo del Teleférico (Cable Car Museum) se observan cuatro líneas de cable que se usan para jalar las cabinas arriba y abajo de las colinas de San Francisco. Cada cabina va a una velocidad de 9.55 millas por hora como resultado de hacer girar una rueda con diámetro de 8.5 pies. ¿Qué tan rápido gira la rueda? Exprese su respuesta en revoluciones por minuto.

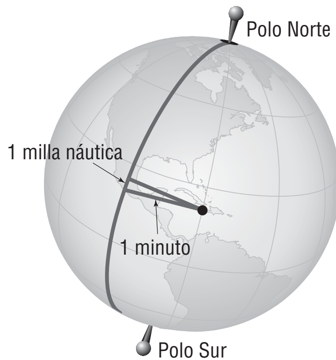
112. Diferencia en la hora del amanecer Naples, Florida, está alrededor de 90 millas al oeste de Ft. Lauderdale. ¿Cuánto tiempo antes una persona en Ft. Lauderdale verá el amanecer que una persona en Naples?

[**Sugerencia:** Consulte la figura. Cuando una persona en Q ve los primeros rayos del Sol, una persona en P todavía está en la oscuridad. La persona en P ve los primeros rayos del Sol después de que la Tierra gira hasta que P es en el lugar de Q. Ahora use el hecho de que a la latitud de Ft. Lauderdale en 24 horas se subtiende un arco de longitud de $2\pi(3559)$ millas].



113. Viajando igual que el Sol ¿Qué tan rápido debe viajar sobre la superficie de la Tierra en el ecuador para mantenerse igual que el Sol (es decir, para que el Sol parezca permanecer en la misma posición en cielo)?

114. Millas náuticas Una **milla náutica** es igual a la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 1 minuto en un gran círculo* sobre la superficie de la Tierra. (Vea la figura.) Si el radio de la Tierra se aproxima por 3960 millas, exprese 1 milla náutica en términos de millas normales.



115. Poleas Dos poleas, una con radio r_1 y otra con radio r_2, están conectadas con una correa. La polea con radio r_1 rota a ω_1 revoluciones por minuto, mientras que la polea con radio r_2 rota a ω_2 revoluciones por minuto. Demuestre que $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

116. ¿Prefiere medir ángulos en grados o radianes? Proporcione una justificación y un razonamiento para su elección.

117. ¿Qué es un radián?

118. ¿Qué ángulo tiene la medida más grande: 1 grado o 1 radián? ¿O son iguales?

119. Explique la diferencia entre la velocidad lineal y la velocidad angular.

120. Para un círculo de radio r, un ángulo central de θ grados subtiende un arco cuya longitud s es $s = \frac{\pi}{180} r\theta$. Analice si ésta es una proposición falsa o verdadera. Dé razones para defender su posición.

121. Analice por qué los barcos y los aviones usan millas náuticas para medir la distancia. Explique la diferencia entre una milla náutica y una milla normal.

122. Investigue cómo funcionan las bicicletas de velocidades. En particular, explique las diferencias y similitudes entre el sistema de cambios de una bicicleta de 5 velocidades y una de 9 velocidades. Asegúrese de incluir un análisis de velocidad lineal y velocidad angular.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $C = 2\pi r$ **2.** $A = \pi r^2$

*Cualquier círculo dibujado sobre la superficie de la Tierra que la divide en dos hemisferios iguales.

6.2 Trigonometría del triángulo rectángulo

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

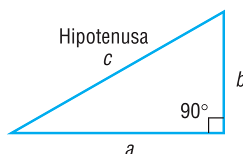
- Teorema de Pitágoras (Repaso, sección R.3, p. 30)
- Funciones (sección 3.1, pp. 218-226)



Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 515.

OBJETIVOS
1 Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos
2 Usar las identidades fundamentales
3 Encontrar el resto de las funciones trigonométricas dado el valor de una de ellas
4 Usar el teorema de ángulos complementarios

Figura 18



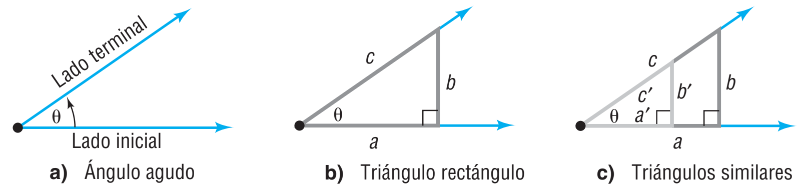
Un triángulo en el que un ángulo es recto (90°) se llama **triángulo rectángulo**. Recuerde que el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los otros lados **catetos** del triángulo. En la figura 18 se etiquetó la hipotenusa como c para indicar que su longitud es c unidades y, de manera similar, se etiquetaron los catetos como a y b. Dado que el triángulo es un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras dice que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ahora, suponga que θ es un **ángulo agudo,** es decir, $0° < \theta < 90°$ (si θ se mide en grados) y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (si θ se mide en radianes). Vea la figura 19*a*). Con este ángulo agudo θ, se forma un triángulo rectángulo, como el ilustrado en la figura 19*b*), con hipotenusa de longitud c, y catetos de longitudes a y b. Al usar los tres lados de este triángulo, se podrían formar justo seis razones:

$$\frac{b}{c}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{b}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{a}{b}$$

Figura 19



a) Ángulo agudo **b)** Triángulo rectángulo **c)** Triángulos similares

De hecho, estas razones dependen sólo del tamaño del ángulo θ y no del triángulo formado. Para ver por qué, observe la figura 19*c*). Cualesquiera dos triángulos rectángulos formados usando el ángulo θ serán similares; por lo tanto, las razones correspondientes serán iguales. Como resultado,

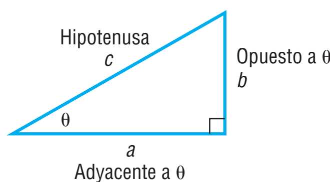
$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \qquad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \qquad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \qquad \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \qquad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Como las razones dependen sólo del ángulo θ y no del triángulo en sí, se da a cada razón un nombre que involucra a θ: seno de θ, coseno de θ, tangente de θ, cosecante de θ, secante de θ y cotangente de θ.

Las seis razones de un triángulo rectángulo se llaman **funciones trigonométricas de ángulos agudos** y se definen como sigue:

Nombre de la función	Abreviatura	Valor
seno de θ	sen θ	$\frac{b}{c}$
coseno de θ	$\cos\theta$	$\frac{a}{c}$
tangente de θ	$\tan\theta$	$\frac{b}{a}$
cosecante de θ	$\csc\theta$	$\frac{c}{b}$
secante de θ	$\sec\theta$	$\frac{c}{a}$
cotangente de θ	$\cot\theta$	$\frac{a}{b}$

Figura 20



Como ayuda para recordar estas definiciones, puede ser útil referirse a las longitudes de los lados del triángulo por los nombres *hipotenusa* c), *opuesto* b) y *adyacente* a). Vea la figura 20. En términos de estos nombres, se tienen las siguientes razones:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{b}{a}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{c}{b} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{a}{b} \qquad \textbf{(1)}$$

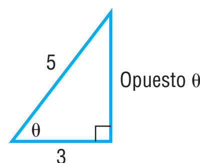
Como a, b y c son positivos, cada una de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo θ es positiva.



EJEMPLO 1 Valores de las funciones trigonométricas

Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ de la figura 21.

Figura 21



Solución En la figura 21 se ve que los dos lados dados del triángulo son

$$c = \text{hipotenusa} = 5 \qquad a = \text{adyacente} = 3$$

Para encontrar la longitud del lado opuesto, se usa el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned}
(\text{adyacente})^2 + (\text{opuesto})^2 &= (\text{hipotenusa})^2 \\
3^2 + (\text{opuesto})^2 &= 5^2 \\
(\text{opuesto})^2 &= 25 - 9 = 16 \\
\text{opuesto} &= 4
\end{aligned}$$

Ahora que se conocen las longitudes de los tres lados, se usan las razones en (1) para encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{3}{4}$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

Identidades fundamentales



Tal vez observó algunas relaciones existentes entre las seis funciones trigonométricas de ángulos agudos. Por ejemplo, las **identidades recíprocas** son

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \textbf{(2)}$$

Otras dos identidades fundamentales que es fácil comprender son las **identidades de cociente**.

Identidades de cociente

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \textbf{(3)}$$

Si sen θ y cos θ se conocen, las fórmulas (2) y (3) facilitan encontrar los valores de las funciones trigonométricas restantes.

EJEMPLO 2 Valores de las funciones trigonométricas restantes, dados sen θ y cos θ

Dados sen $\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ y cos $\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, encuentre el valor de las funciones trigonométricas restantes de θ.

Solución Con base en la fórmula (3), se tiene

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}$$

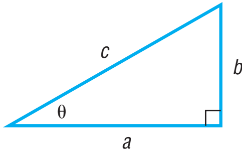
Entonces se usan las identidades recíprocas de la fórmula (2) para obtener

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\dfrac{1}{2}} = 2$$

◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

Figura 22 $a^2 + b^2 = c^2$



Vea ahora el triángulo de la figura 22. El teorema de Pitágoras establece que $a^2 + b^2 = c^2$, que se escribe como

$$b^2 + a^2 = c^2$$

Al dividir cada lado entre c^2, se tiene

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = 1 \quad \text{o} \quad \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$$

En términos de las funciones trigonométricas del ángulo θ, esta ecuación establece que

$$(\text{sen}\,\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \qquad \textbf{(4)}$$

La ecuación (4), de hecho, es una identidad, ya que la ecuación es verdadera para cualquier ángulo θ.

Es costumbre escribir $\text{sen}^2\,\theta$ en lugar de $(\text{sen}\,\theta)^2$, $\cos^2\theta$ en lugar de $(\cos\theta)^2$, etcétera. Con esta notación, la ecuación (4) se puede escribir como

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \textbf{(5)}$$

Otra identidad se obtiene de la ecuación (5) dividiendo cada lado entre $\cos^2\theta$.

$$\frac{\text{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

Ahora use las fórmulas (2) y (3) para obtener

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \textbf{(6)}$$

De manera similar, al dividir cada lado de la ecuación (5) entre $\text{sen}^2\,\theta$ se obtiene $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$, que se escribe como

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta \qquad \textbf{(7)}$$

En forma colectiva, las identidades en las ecuaciones (5), (6) y (7) reciben el nombre de **identidades pitagóricas**.

Se hará una pausa para resumir las identidades fundamentales.

Identidades fundamentales

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

EJEMPLO 3 Valor exacto de una expresión trigonométrica usando identidades

Encuentre el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

a) $\tan 20° - \dfrac{\operatorname{sen} 20°}{\cos 20°}$ b) $\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{1}{\sec^2\dfrac{\pi}{12}}$

Solución a) $\tan 20° - \dfrac{\operatorname{sen} 20°}{\cos 20°} = \tan 20° - \tan 20° = 0$

↑ $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

b) $\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{1}{\sec^2\dfrac{\pi}{12}} = \operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{12} + \cos^2\dfrac{\pi}{12} = 1$

↑ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ ↑ $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

3 Una vez que se conoce el valor de una función trigonométrica, es posible encontrar el valor de las otras cinco funciones trigonométricas.

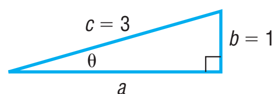
EJEMPLO 4 Valores de las otras funciones trigonométricas, dado sen θ, θ agudo

Dado que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{3}$ y θ es un ángulo agudo, encuentre el valor exacto de las cinco funciones trigonométricas de θ restantes.

Solución Este problema se resuelve de dos formas: la primera usa las definiciones de las funciones trigonométricas, la segunda usa las identidades fundamentales.

Solución 1 Usando la definición Se dibuja un triángulo rectángulo con el ángulo agudo θ, opuesto al lado de longitud $b = 1$ e hipotenusa de longitud $c = 3$ $\left(\text{porque } \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{3} = \dfrac{b}{c}\right)$. Vea la figura 23. El lado adyacente a se encuentra usando el teorema de Pitágoras.

Figura 23



$$\begin{aligned} a^2 + 1^2 &= 3^2 \qquad a^2 + b^2 = c^2;\ b = 1,\ c = 3 \\ a^2 + 1 &= 9 \\ a^2 &= 8 \\ a &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ahora las definiciones dadas en la ecuación (1) se utilizan para encontrar el valor de las cinco funciones trigonométricas que faltan. (Regrese al método usado en el ejemplo 1). Con $a = 2\sqrt{2}$, $b = 1$ y $c = 3$, se tiene

$$\cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{b} = \frac{3}{1} = 3 \quad \sec\theta = \frac{c}{a} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad \cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$

Solución 2 Usando identidades Se comienza por buscar $\cos\theta$, que se calcula usando la identidad de Pitágoras de la ecuación (5).

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad (5)$$

$$\frac{1}{9} + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Como $\cos\theta > 0$ para un ángulo agudo θ, se tiene

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ahora se sabe que $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{3}$ y $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, de manera que se procede como se hizo en el ejemplo 2.

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

◀

Encontrar los valores de las funciones trigonométricas cuando se conoce uno

Dado el valor de una función trigonométrica de un ángulo agudo θ, el valor exacto de las otras cinco funciones trigonométricas de θ se encuentra de dos formas.

Método 1 Usando la definición

PASO 1: Se dibuja un triángulo rectángulo que muestre el ángulo θ.

PASO 2: Se podrían asignar valores a dos de los lados basados en la función trigonométrica dada.

PASO 3: Se encuentra la longitud del tercer lado usando el teorema de Pitágoras.

PASO 4: Se usan las definiciones en la ecuación (1) para encontrar el valor de las funciones trigonométricas que faltan.

Método 2 Usando identidades

Se utilizan las identidades adecuadas para encontrar el valor de las funciones trigonométricas restantes.

EJEMPLO 5 **Dado el valor de una función trigonométrica, encuentre los valores de las otras**

Dado $\tan\theta = \frac{1}{2}$, θ un ángulo agudo, encuentre el valor exacto de las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

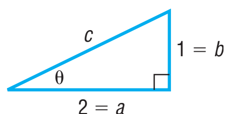
Solución 1 Usando la definición

La figura 24 muestra un triángulo rectángulo con el ángulo agudo θ, donde

$$\tan\theta = \frac{1}{2} = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{b}{a}$$

Figura 24

$\tan\theta = \frac{1}{2}$



Se elige $b = 1$ y $a = 2$. La hipotenusa c se determina mediante el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$
$$c = \sqrt{5}$$

Ahora se aplican las definiciones con $a = 2$, $b = 1$ y $c = \sqrt{5}$.

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{2}{1} = 2$$

Solución 2 Usando identidades

Se usa la identidad de Pitágoras que involucra $\tan\theta$:

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \sec^2\theta \qquad \tan\theta = \frac{1}{2}$$

$$\sec^2\theta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \qquad \text{Proceder a despejar } \sec\theta.$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ahora

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}, \quad \text{así,} \quad \text{sen}\,\theta = (\tan\theta)(\cos\theta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{5}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

◀



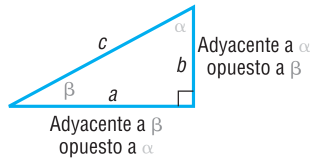
TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.

Ángulos complementarios; cofunciones



4 Dos ángulos agudos se llaman **complementarios** si su suma es un ángulo recto. Como la suma de los ángulos en cualquier triángulo es de 180°, se deduce que, para un triángulo rectángulo, los dos ángulos agudos son complementarios.

Figura 25



Vea la figura 25; se etiquetó el ángulo opuesto al lado b como β y el ángulo opuesto al lado a como α. Observe que el lado a es adyacente al ángulo β y opuesto al ángulo α. De manera similar, el lado b es opuesto al ángulo β y adyacente al ángulo α. Como resultado,

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}\beta = \dfrac{b}{c} = \cos\alpha & \cos\beta = \dfrac{a}{c} = \operatorname{sen}\alpha & \tan\beta = \dfrac{b}{a} = \cot\alpha \\ \csc\beta = \dfrac{c}{b} = \sec\alpha & \sec\beta = \dfrac{c}{a} = \csc\alpha & \cot\beta = \dfrac{a}{b} = \tan\alpha \end{array} \quad \textbf{(8)}$$

Debido a estas relaciones, las funciones seno y coseno, tangente y cotangente, y secante y cosecante reciben el nombre de **cofunciones** una de la otra. Las identidades (8) se expresan en palabras como sigue:

Teorema

Teorema de ángulos complementarios

Las cofunciones de ángulos complementarios son iguales.

Se presentan algunos ejemplos de este teorema.

Ángulos complementarios — $\operatorname{sen} 30° = \cos 60°$ — Cofunciones

Ángulos complementarios — $\tan 40° = \cot 50°$ — Cofunciones

Ángulos complementarios — $\sec 80° = \csc 10°$ — Cofunciones

Si un ángulo θ se mide en grados, se usará el símbolo de grados al escribir una función trigonométrica de θ; por ejemplo, sen 30° y tan 45°. Si un ángulo θ se mide en radianes, no se usará un símbolo al escribir una función trigonométrica de θ, como en $\cos\pi$ y $\sec\dfrac{\pi}{3}$.

Si θ es un ángulo agudo medido en grados, el ángulo $90° - \theta$ $\left(\text{o } \dfrac{\pi}{2} - \theta,\ \text{si } \theta \text{ esta en radianes}\right)$ es el ángulo complementario de θ. La tabla 2 establece de nuevo el teorema anterior de cofunciones.

Tabla 2

θ (Grados)	θ (Radianes)
$\operatorname{sen}\theta = \cos(90° - \theta)$	$\operatorname{sen}\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\cos\theta = \operatorname{sen}(90° - \theta)$	$\cos\theta = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\tan\theta = \cot(90° - \theta)$	$\tan\theta = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\csc\theta = \sec(90° - \theta)$	$\csc\theta = \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\sec\theta = \csc(90° - \theta)$	$\sec\theta = \csc\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\cot\theta = \tan(90° - \theta)$	$\cot\theta = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

El ángulo θ en la tabla 2 es agudo. Se verá más adelante (sección 7.4) que estos resultado son válidos para cualquier ángulo θ.

EJEMPLO 6 Uso del teorema de ángulos complementarios

a) $\text{sen } 62° = \cos(90° - 62°) = \cos 28°$

b) $\tan \frac{\pi}{12} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cot \frac{5\pi}{12}$

c) $\cos \frac{\pi}{4} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{4}$

d) $\csc \frac{\pi}{6} = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sec \frac{\pi}{3}$ ◄

EJEMPLO 7 Uso del teorema de ángulos complementarios

Encuentre el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

a) $\sec 28° - \csc 62°$ b) $\dfrac{\text{sen } 35°}{\cos 55°}$

Solución a) $\sec 28° - \csc 62° = \csc(90° - 28°) - \csc 62°$

$= \csc 62° - \csc 62° = 0$

b) $\dfrac{\text{sen } 35°}{\cos 55°} = \dfrac{\cos(90° - 35°)}{\cos 55°} = \dfrac{\cos 55°}{\cos 55°} = 1$ ◄


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **43** Y **57**.

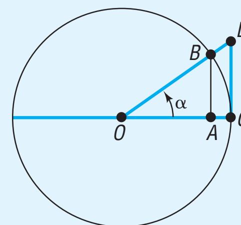
ASPECTO HISTÓRICO

El nombre *seno* para la función seno se debe a una confusión medieval. Viene de la palabra en sánscrito *jīva* (que significa *cuerda*); fue usado primero en India por Araybhata el Mayor (510 dC). Él realmente quiso decir media cuerda, pero lo abrevió. Esto incluyó en el árabe la palabra *jība* que no tenía significado. Debido a que la palabra árabe *jaib* se escribe de la misma manera (las vocales cortas no se escriben en árabe), *jiba* se pronunciaba como *jaib*, que quiere decir pecho o *seno*; hasta la fecha, *jaib* es la palabra árabe para *seno*. Los académicos que traducían los trabajos del árabe al latín encontraron que la palabra *sinus* también quería decir pecho o *seno*; para *sinus*, nosotros tenemos la palabra *seno*.

El nombre tangente, debido a Thomas Finck (1583), se entiende al observar la figura 26. El segmento de recta $\overline{DC}$ es tangente al círculo en C. Si $d(O, B) = d(O, C) = 1$, entonces la longitud del segmento $\overline{DC}$ es

$$d(D, C) = \frac{d(D, C)}{1} = \frac{d(D, C)}{d(O, C)} = \tan \alpha$$

Figura 26



El nombre antiguo para la tangente es *umbra versa* (que significa sombra volteada); se refiere al uso de la tangente en la solución de problemas de altura con sombras.

Los nombres de las cofunciones surgieron como sigue. Si α y β son ángulos complementarios, entonces $\cos \alpha = \text{sen } \beta$. Como β es complemento de α, era natural escribir el coseno de α como *sen co* α. Tal vez por razones de facilidad de pronunciación, *co* migró al frente y después se dio una abreviatura de tres letras al coseno para uniformarlo con sen, sec y tan. Las otras dos cofunciones tuvieron un trato similar, excepto que las formas largas de *cotan* y *cosec* sobreviven hasta hoy en algunos países.

6.2 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. En un triángulo rectángulo, con catetos a y b e hipotenusa c, el teorema de Pitágoras establece que __________. (p. 30)

2. El valor de la función $f(x) = 3x - 7$ en 5 es __________. (pp. 218–226)

Conceptos y vocabulario

3. Dos ángulos agudos cuya suma es un ángulo recto se llaman __________.

4. Las funciones seno y _________ son cofunciones.

5. $\tan 28° = \cot$ __________.

6. Para cualquier ángulo θ, $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta =$__________.

7. *Falso o verdadero:* $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

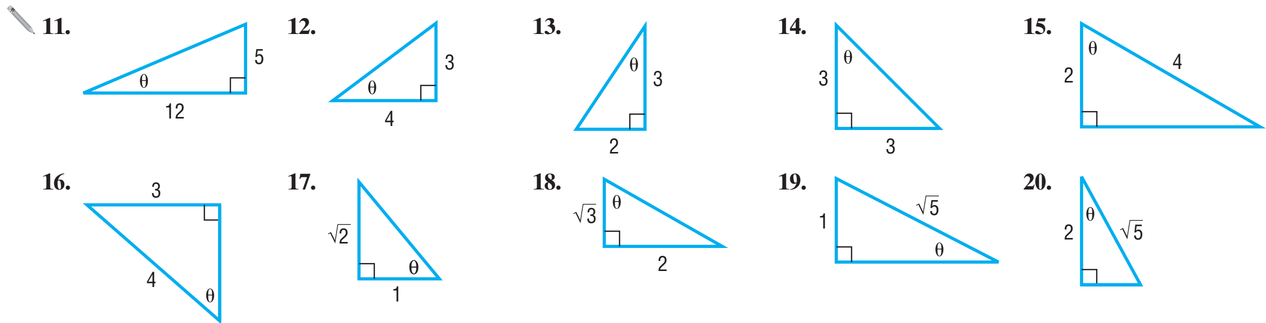
8. *Falso o verdadero:* $1 + \tan^2\theta = \csc^2\theta$.

9. *Falso o verdadero:* si θ es un ángulo agudo y $\sec\theta = 3$, entonces $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$.

10. *Falso o verdadero:* $\tan\dfrac{\pi}{5} = \cot\dfrac{4\pi}{5}$.

Ejercicios

En los problemas 11-20, encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ en cada figura.



En los problemas 21-24, use las identidades para encontrar el valor exacto de las cuatro funciones trigonométricas restantes del ángulo agudo θ.

21. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

22. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

23. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{3}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

24. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{3}$, $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

En los problemas 25-36, use la definición o las identidades para encontrar el valor exacto de las otras cinco funciones trigonométricas del ángulo agudo θ.

25. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

26. $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

27. $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

28. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

29. $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$

30. $\cot\theta = \dfrac{1}{2}$

31. $\sec\theta = 3$

32. $\csc\theta = 5$

33. $\tan\theta = \sqrt{2}$

34. $\sec\theta = \dfrac{5}{3}$

35. $\csc\theta = 2$

36. $\cot\theta = 2$

En los problemas 37-54, use las identidades fundamentales y/o el teorema de ángulos complementarios para encontrar el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

37. $\operatorname{sen}^2 20° + \cos^2 20°$

38. $\sec^2 28° - \tan^2 28°$

39. $\operatorname{sen} 80° \csc 80°$

40. $\tan 10° \cot 10°$

41. $\tan 50° - \dfrac{\operatorname{sen} 50°}{\cos 50°}$

42. $\cot 25° - \dfrac{\cos 25°}{\operatorname{sen} 25°}$

43. $\operatorname{sen} 38° - \cos 52°$

44. $\tan 12° - \cot 78°$

45. $\dfrac{\cos 10°}{\text{sen } 80°}$

46. $\dfrac{\cos 40°}{\text{sen } 50°}$

47. $1 - \cos^2 20° - \cos^2 70°$

48. $1 + \tan^2 5° - \csc^2 85°$

49. $\tan 20° - \dfrac{\cos 70°}{\cos 20°}$

50. $\cot 40° - \dfrac{\text{sen } 50°}{\text{sen } 40°}$

51. $\tan 35° \cdot \sec 55° \cdot \cos 35°$

52. $\cot 25° \cdot \csc 65° \cdot \text{sen } 25°$

53. $\cos 35° \text{ sen } 55° + \cos 55° \text{ sen } 35°$

54. $\sec 35° \csc 55° - \tan 35° \cot 55°$

---

55. Dado $\text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de

a) $\cos 60°$ b) $\cos^2 30°$

c) $\csc \dfrac{\pi}{6}$ d) $\sec \dfrac{\pi}{3}$

56. Dado $\text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de

a) $\cos 30°$ b) $\cos^2 60°$

c) $\sec \dfrac{\pi}{6}$ d) $\csc \dfrac{\pi}{3}$

57. Dado $\tan \theta = 4$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de

a) $\sec^2 \theta$ b) $\cot \theta$

c) $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ d) $\csc^2 \theta$

58. Dado $\sec \theta = 3$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de

a) $\cos \theta$ b) $\tan^2 \theta$

c) $\csc(90° - \theta)$ d) $\text{sen}^2 \theta$

59. Dado $\csc \theta = 4$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de

a) $\text{sen } \theta$ b) $\cot^2 \theta$

c) $\sec(90° - \theta)$ d) $\sec^2 \theta$

60. Dado $\cot \theta = 2$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de

a) $\tan \theta$ b) $\csc^2 \theta$

c) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ d) $\sec^2 \theta$

61. Dada la aproximación $\text{sen } 38° \approx 0.62$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor aproximado de

a) $\cos 38°$ b) $\tan 38°$

c) $\cot 38°$ d) $\sec 38°$

e) $\csc 38°$ (f) $\text{sen } 52°$

(g) $\cos 52°$ (h) $\tan 52°$

62. Dada la aproximación $\cos 21° \approx 0.93$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor aproximado de

a) $\text{sen } 21°$ b) $\tan 21°$

c) $\cot 21°$ d) $\sec 21°$

e) $\csc 21°$ f) $\text{sen } 69°$

g) $\cos 69°$ h) $\tan 69°$

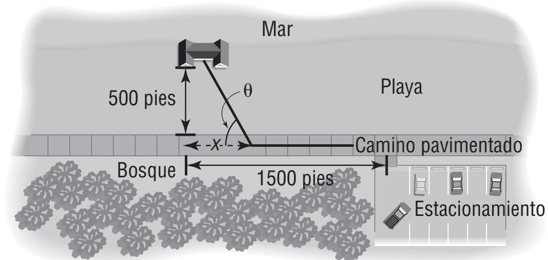
63. Si $\text{sen } \theta = 0.3$, encuentre el valor exacto de $\text{sen } \theta + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$.

64. Si $\tan \theta = 4$, encuentre el valor exacto de $\tan\theta + \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$.

65. Encuentre un ángulo agudo θ que satisfaga la ecuación $\text{sen } \theta = \cos(2\theta + 30°)$.

66. Encuentre un ángulo agudo θ que satisfaga la ecuación $\tan \theta = \cot(\theta + 45°)$.

67. Cálculo del tiempo de viaje Se quiere caminar de un estacionamiento a una casa en la playa. La casa se localiza a 1500 pies por un camino pavimentado paralelo a la playa, que tiene 500 pies de ancho. En el camino se avanza a 300 pies por minuto, pero en la arena se avanza a 100 pies por minuto. Vea la ilustración.



a) Calcule el tiempo T si camina 1500 pies por el camino y luego 500 pies por la arena hasta la casa.

b) Calcule el tiempo T si camina 500 pies en la arena directamente hacia el mar y luego voltea a la izquierda para caminar 1500 pies por la arena hasta la casa.

c) Exprese el tiempo T para llegar del estacionamiento a la casa en la playa como función del ángulo θ mostrado en la ilustración.

d) Calcule el tiempo T si camina directamente del estacionamiento a la casa.

[**Sugerencia:** $\tan \theta = 500/1500$]

e) Calcule el tiempo T si camina 1000 pies por el camino pavimentado y luego camina directamente a la casa.

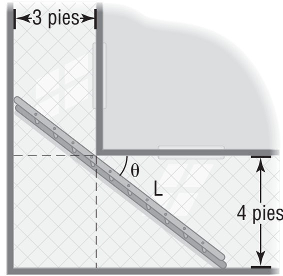
f) Grafique $T = T(\theta)$. ¿Para qué ángulo θ es menor T? ¿Cuanto vale x para este ángulo? ¿Cuál es el tiempo mínimo?

g) Explique por qué $\tan \theta = \dfrac{1}{3}$ da el ángulo θ más pequeño posible.

68. Cargar una escalera dando la vuelta a una esquina Dos corredores, uno con 3 pies de ancho y el otro con 4 pies de ancho, se unen en ángulo recto. Vea la ilustración.

a) Exprese la longitud L del segmento de recta mostrado como función del ángulo θ.

b) Analice por qué la longitud de la escalera más larga que se puede cargar de un corredor a otro es igual al valor más pequeño de L.

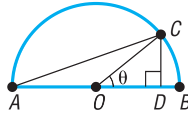


69. Suponga que el ángulo θ es un ángulo central de un círculo de radio 1 (vea la figura). Demuestre que

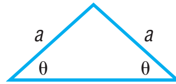
a) Ángulo $OAC = \dfrac{\theta}{2}$

b) $|CD| = \operatorname{sen}\theta$ y $|OD| = \cos\theta$

c) $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$

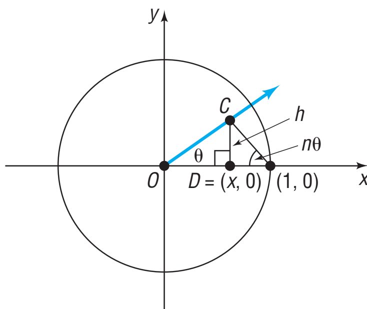


70. Demuestre que el área A de un triángulo isósceles es $A = a^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$, donde a es la longitud de uno de los lados iguales y θ es la medida de uno de los ángulos iguales (vea la figura).



71. Sea $n \geq 1$ cualquier número real y sea θ un ángulo para el que $0 < n\theta < \dfrac{\pi}{2}$. Entonces se dibuja un triángulo con los ángulos θ y $n\theta$ y el lado incluido de longitud 1 (¿por qué?) y se coloca en el círculo unitario como se ilustra. Ahora baje una perpendicular de C a $D = (x, 0)$ y demuestre que

$$x = \frac{\tan(n\theta)}{\tan\theta + \tan(n\theta)}$$

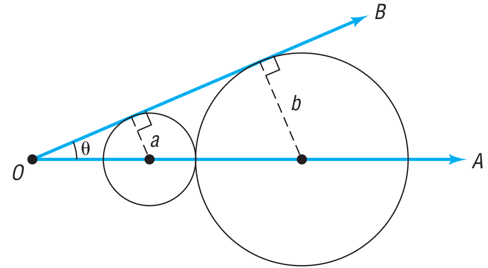


72. Vea la figura. El círculo más pequeño, cuyo radio es a, es tangente al círculo más grande, con radio b. El rayo $\overrightarrow{OA}$ contiene un diámetro de cada círculo y el rayo $\overrightarrow{OB}$ es tangente a cada círculo. Demuestre que

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{ab}}{\dfrac{a+b}{2}}$$

(Esto muestra que $\cos\theta$ es la razón de la media geométrica de a y b entre la media aritmética de a y b).

[**Sugerencia:** Primero demuestre que $\operatorname{sen}\theta = (b - a)/(b + a)$].



73. Vea la figura. Si $|OA| = 1$, demuestre que

a) Área $\triangle OAC = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

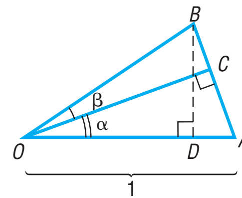
b) Área $\triangle OCB = \dfrac{1}{2}|OB|^2 \operatorname{sen}\beta\cos\beta$

c) Área $\triangle OAB = \dfrac{1}{2}|OB|\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

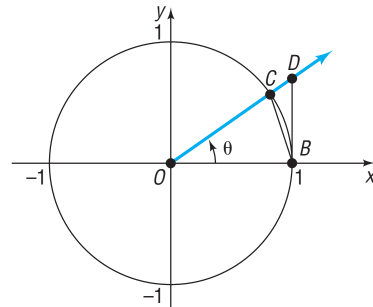
d) $|OB| = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

e) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

[**Sugerencia:** Área $\triangle OAB$ = Área $\triangle OAC$ + Área $\triangle OCB$]



74. Vea la figura en la que se dibujó un círculo unitario. La recta DB es tangente al círculo.



a) Exprese el área de $\triangle OBC$ en términos de sen θ y cos θ.
[**Sugerencia:** Use la altura de C a la base $\overline{OB} = 1$].

b) Exprese el área de $\triangle OBD$ en términos de sen θ y cos θ.

c) El área del sector circular OBC es $\frac{1}{2}\theta$, donde θ se mide en radianes. Use los resultados de los incisos *a*) y *b*) y el hecho de que

$$\text{Área } \Delta OBC < \text{Área } \widehat{OBC} < \text{Área } \Delta OBD$$

para demostrar que

$$1 < \frac{\theta}{\text{sen } \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

75. Si $\cos \alpha = \tan \beta$ y $\cos \beta = \tan \alpha$, donde α y β son ángulos agudos, demuestre que

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

76. Si θ es un ángulo agudo, explique por qué $\sec \theta > 1$.

77. Si θ es un ángulo agudo, explique por qué $0 < \text{sen } \theta < 1$.

78. ¿Cómo explicaría el significado de la función seno a un compañero que acaba de terminar el curso de álgebra en la universidad?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $c^2 = a^2 + b^2$ **2.** $f(5) = 8$

6.3 Cálculo de valores de funciones trigonométricas de ángulos agudos

OBJETIVOS

1 Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4} = 45°$

2 Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6} = 30°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$

3 Usar una calculadora para aproximar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos

En la sección anterior, se desarrollaron formas de encontrar el valor de cada función trigonométrica de un ángulo agudo cuando se conoce una de las funciones. En esta sección se analiza el problema de encontrar el valor de cada función trigonométrica de un ángulo agudo, cuando se da el ángulo.

Para tres ángulos agudos especiales, se usan algunos resultados de la geometría plana para encontrar los valores exactos de cada una de las seis funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4} = 45°$



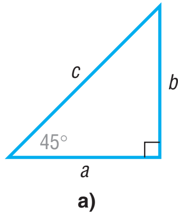
EJEMPLO 1 **Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4} = 45°$**

Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4} = 45°$.

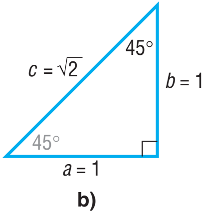
Solución Al utilizar el triángulo rectángulo de la figura 27*a*), en donde uno de los ángulos es $\frac{\pi}{4} = 45°$, se deduce que el otro ángulo agudo también es $\frac{\pi}{4} = 45°$, y, por lo tanto, el triángulo es isósceles. Como un resultado, el lado a y el lado b tienen la misma longitud. Como los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo dependen sólo del ángulo y no del tamaño del triángulo, se puede optar por usar el triángulo para el que

$$a = b = 1$$

Figura 27



a)



b)

Entonces, por el teorema de Pitágoras,

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2$$
$$c = \sqrt{2}$$

Como resultado, se tiene el triángulo de la figura 27*b*), de donde se encuentra

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \text{sen}\,45° = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si se utilizan las identidades recíprocas y de cociente, se tiene

$$\tan\frac{\pi}{4} = \tan 45° = \frac{\text{sen}\,45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{4} = \cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec\frac{\pi}{4} = \sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \qquad \csc\frac{\pi}{4} = \csc 45° = \frac{1}{\text{sen}\,45°} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

◀

EJEMPLO 2 **Encontrar el valor exacto de una expresión trigonométrica**

Encuentre el valor exacto de cada expresión.

a) $(\text{sen}\,45°)(\tan 45°)$ b) $\left(\sec\frac{\pi}{4}\right)\left(\cot\frac{\pi}{4}\right)$

Solución Se usan los resultados obtenidos en el ejemplo 1.

a) $(\text{sen}\,45°)(\tan 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\left(\sec\frac{\pi}{4}\right)\left(\cot\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$

◀


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **5** Y **17**.

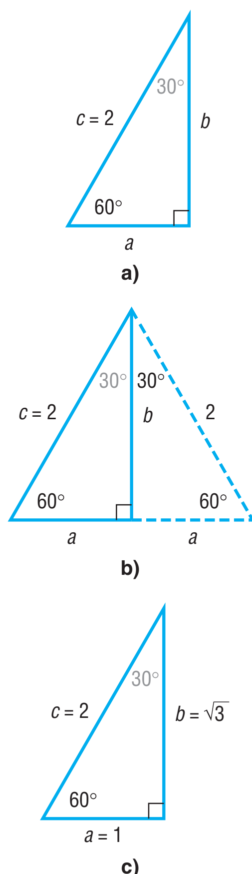
Funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6} = 30°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$

2 **EJEMPLO 3** **Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6} = 30°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$**

Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6} = 30°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$.

Solución Se forma un triángulo rectángulo en el que uno de los ángulos es $\frac{\pi}{6} = 30°$. Entonces, el tercer ángulo es $\frac{\pi}{3} = 60°$. La figura 28*a*) ilustra este triángulo con hipotenusa de longitud 2. El problema es determinar *a* y *b*.

Figura 28



Se comienza por colocar al lado del triángulo de la figura 28*a*) otro triángulo congruente con el primero, como se muestra en la figura 28*b*). Observe que ahora se tiene un triángulo cuyos ángulos son de 60° cada uno. Por lo tanto, este triángulo es equilátero y sus lados tienen longitud 2. En particular, la base es $2a = 2$, es decir, $a = 1$. Por el teorema de Pitágoras, b satisface la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$, de manera que se tiene

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 1^2 + b^2 &= 2^2 \qquad a = 1, c = 2 \\ b^2 &= 4 - 1 = 3 \\ b &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Si se usa el triángulo de la figura 28*c*) y el hecho de que $\frac{\pi}{6} = 30°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$ son ángulos complementarios, se encuentra

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} 30° = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30° = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \tan 30° = \frac{\operatorname{sen} 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot\frac{\pi}{3} = \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{6} = \csc 30° = \frac{1}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \qquad \sec\frac{\pi}{3} = \sec 60° = 2$$

$$\sec\frac{\pi}{6} = \sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc\frac{\pi}{3} = \csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\frac{\pi}{6} = \cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \tan 60° = \sqrt{3}$$

◀

La tabla 3 resume la información que se acaba de desarrollar para los ángulos $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$. Mientras no memorice los elementos de la tabla 3, debe dibujar el triángulo adecuado para determinar los valores dados en la tabla.

Tabla 3

θ (Radianes)	θ (Grados)	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

EJEMPLO 4 **Encontrar el valor exacto de una expresión trigonométrica**

Encuentre el valor exacto de cada expresión.

a) $\text{sen } 45° \cos 30°$ b) $\tan \frac{\pi}{4} - \text{sen } \frac{\pi}{3}$ c) $\tan^2 \frac{\pi}{6} + \text{sen}^2 \frac{\pi}{4}$

Solución

a) $\text{sen } 45° \cos 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

b) $\tan \frac{\pi}{4} - \text{sen } \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

c) $\tan^2 \frac{\pi}{6} + \text{sen}^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ b

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 9 Y 19.

Es relativamente sencillo calcular los valores exactos de las funciones trigonométricas para los ángulos $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$, porque los triángulos que contienen esos ángulos tiene características geométricas "agradables". Para casi todos los otros ángulos, sólo se pueden aproximar los valores de cada función trigonométrica. Para hacerlo, se necesitará una calculadora.

Uso de una calculadora para encontrar el valor de las funciones trigonométricas

 Antes de comenzar, debe decidir si va a introducir el ángulo en la calculadora en radianes o grados y establecerla en el modo (MODE)* correcto. (Vea el manual del usuario de su calculadora para saber cómo maneja grados y radianes). Su calculadora tiene las teclas [sin], [cos] y [tan]. Para encontrar los valores de las tres funciones trigonométricas restantes (secante, cosecante y cotangente), se usan las identidades recíprocas.

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \csc \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} \qquad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

EJEMPLO 5 **Uso de una calculadora para aproximar el valor de funciones trigonométricas**

Utilice una calculadora para aproximar el valor de:

a) $\cos 48°$ b) $\csc 21°$  c) $\tan \frac{\pi}{12}$

Exprese su respuesta redondeada a dos decimales.

*Si su calculadora no despliega el modo, una manera de determinar el modo actual es evaluar [sin] [30]. Si está en el modo de grados, la pantalla mostrará [0.5] (sen 30° = 0.5). Si está en el modo de radianes aparecerá [−0.9880316].

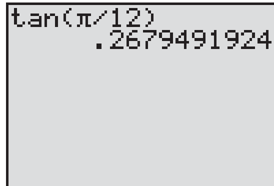
Solución a) Establezca el modo de grados. Redondee a dos decimales,

$$\cos 48° = 0.67$$

b) Casi ninguna calculadora tiene una tecla csc. Los fabricantes suponen que el usuario sabe trigonometría. Para encontrar el valor de csc 21°, utilice el hecho de que $\csc 21° = \frac{1}{\text{sen } 21°}$. Redondee a dos decimales,

$$\csc 21° = 2.79$$

Figura 29



c) Establezca el modo de radianes. La figura 29 muestra la solución usando una calculadora TI-83 Plus. Redondee a dos decimales,

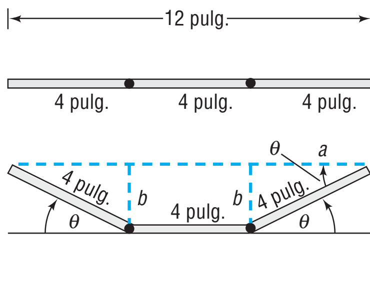
$$\tan \frac{\pi}{12} = 0.27$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

EJEMPLO 6 Construcción de drenaje pluvial

Figura 30



Debe construirse un drenaje pluvial a partir de hojas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar una medida a 4 pulgadas de las orillas, se dobla hacia arriba un ángulo θ. Vea la figura 30.

a) Exprese el área A de la abertura como función de θ.

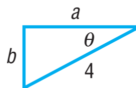
[**Sugerencia:** Sea b la altura vertical del doblez de θ].

b) Encuentre el área A del claro del drenaje para $\theta = 30°, \theta = 45°, \theta = 60°$ y $\theta = 75°$.

c) Grafique $A - A(\theta)$. Encuentre el ángulo θ que da la mayor A. (Este doblez permitirá el mayor flujo de agua por el drenaje).

Solución a) Vea de nuevo la figura 30. El área A del claro es la suma de las áreas de dos triángulos rectángulos congruentes y un rectángulo. Vea la figura 31, que muestra el triángulo de la figura 30 vuelto a dibujar. Se ve que

Figura 31



$$\cos\theta = \frac{a}{4} \quad \text{entonces} \quad a = 4\cos\theta \qquad \text{sen }\theta = \frac{b}{4} \quad \text{entonces} \quad b = 4\text{ sen }\theta$$

El área del triángulo es

$$\text{área} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(4\cos\theta)(4\text{ sen }\theta) = 8\text{ sen }\theta\cos\theta$$

De manera que el área de los dos triángulos es $16 \text{ sen } \theta \cos \theta$.

El rectángulo tiene 4 de largo 4 y b de altura, entonces el área es

$$4b = 4(4\text{ sen }\theta) = 16\text{ sen }\theta$$

El área A del claro es

$$A = \text{área de los dos triángulos} + \text{área del rectángulo}$$
$$A(\theta) = 16\text{ sen }\theta\cos\theta + 16\text{ sen }\theta = 16\text{ sen }\theta(\cos\theta + 1)$$

b) Para $\theta = 30°$: $A(30°) = 16 \text{ sen } 30°(\cos 30° + 1)$

$$= 16\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = 4\sqrt{3} + 8$$

El área del claro para $\theta = 30°$ es alrededor de 14.9 pulgadas cuadradas.

Para $\theta = 45°$: $A(45°) = 16 \text{ sen } 45°(\cos 45° + 1)$

$$= 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = 8 + 8\sqrt{2}$$

El área del valor para $\theta = 45°$ es cercana a 19.3 pulgadas cuadradas.

Para $\theta = 60°$: $A(60°) = 16 \text{ sen } 60°(\cos 60° + 1)$

$$= 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 12\sqrt{3}$$

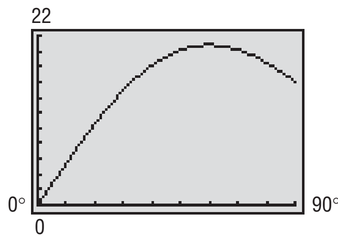
El área del valor para $\theta = 60°$ es cercana a 20.8 pulgadas cuadradas.

Para $\theta = 75°$: $A(75°) = 16 \text{ sen } 75°(\cos 75° + 1) \approx 19.5$

El área del valor para $\theta = 75°$ es cercana a 19.5 pulgadas cuadradas.

c) La figura 32 muestra la gráfica de $A = A(\theta)$. Usando MAXIMUM, el ángulo θ que da la mayor A es 60°. ◀

Figura 32



6.3 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. $\tan \frac{\pi}{4} + \text{sen } 30° =$ __________.

2. Usando una calculadora, sen 2 = __________, redondeado a dos decimales.

3. *Falso o verdadero:* se pueden encontrar valores exactos para las funciones trigonométricas de 60°.

4. *Falso o verdadero:* se pueden encontrar valores exactos para el seno de cualquier ángulo.

Ejercicios

5. Escriba los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de 45°.

6. Escriba los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de 30° y 60°.

En los problemas 7-16, encuentre el valor exacto de cada expresión si $\theta = 60°$. No use calculadora.

7. $\text{sen } \theta$ **8.** $\cos \theta$ **9.** $\text{sen } \frac{\theta}{2}$ **10.** $\cos \frac{\theta}{2}$ **11.** $(\text{sen } \theta)^2$

12. $(\cos \theta)^2$ **13.** $2 \text{ sen } \theta$ **14.** $2 \cos \theta$ **15.** $\frac{\text{sen } \theta}{2}$ **16.** $\frac{\cos \theta}{2}$

En los problemas 17-28, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

17. $4 \cos 45° - 2 \text{ sen } 45°$ **18.** $2 \text{ sen } 45° + 4 \cos 30°$ **19.** $6 \tan 45° - 8 \cos 60°$

20. $\text{sen } 30° \cdot \tan 60°$ **21.** $\sec \frac{\pi}{4} + 2 \csc \frac{\pi}{3}$ **22.** $\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4}$

23. $\sec^2 \frac{\pi}{6} - 4$ **24.** $4 + \tan^2 \frac{\pi}{3}$ **25.** $\text{sen}^2 30° + \cos^2 60°$

26. $\sec^2 60° - \tan^2 45°$ **27.** $1 - \cos^2 30° - \cos^2 60°$ **28.** $1 + \tan^2 30° - \csc^2 45°$

En los problemas 29-46, use una calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión. Redondee la respuesta a dos decimales.

29. sen 28° **30.** cos 14° **31.** tan 21° **32.** cot 70° **33.** sec 41° **34.** csc 55°

35. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{10}$ **36.** $\cos \frac{\pi}{8}$ **37.** $\tan \frac{5\pi}{12}$ **38.** $\cot \frac{\pi}{18}$ **39.** $\sec \frac{\pi}{12}$ **40.** $\csc \frac{5\pi}{13}$

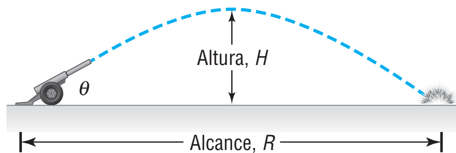
41. sen 1 **42.** tan 1 **43.** sen 1° **44.** tan 1° **45.** tan 0.3 **46.** tan 0.1

Movimiento de un proyectil La trayectoria de un proyectil disparado con una inclinación θ respecto de la horizontal, con velocidad inicial v_0 es una parábola (vea la figura). El alcance R del proyectil, es decir, la distancia horizontal que recorre el proyectil, se encuentra usando la fórmula

$$R = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g}$$

donde g ≈ 32.2 pies por segundo ≈ 9.8 metros por segundo es la aceleración debida a la gravedad. La máxima altura H del proyectil es

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$



En los problemas 47-50, encuentre el alcance R y la altura máxima H. Redondee las respuestas a dos decimales.

47. El proyectil se dispara a un ángulo de 45° con la horizontal, con velocidad inicial de 100 pies por segundo.

48. El proyectil se dispara a un ángulo de 30° con la horizontal, con velocidad inicial de 150 metros por segundo.

49. El proyectil se dispara a un ángulo de 55° con la horizontal, con velocidad inicial de 500 metros por segundo.

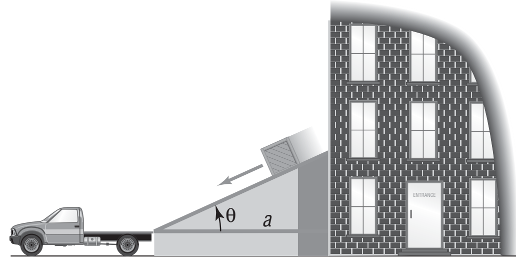
50. El proyectil se dispara a un ángulo de 50° con la horizontal, con velocidad inicial de 300 pies por segundo.

51. Plano inclinado Si se ignora la fricción, el tiempo t (en segundos) requerido para deslizar un bloque por un plano inclinado (vea la figura) está dado por la fórmula

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g \operatorname{sen}\theta \cos\theta}}$$

donde a es la longitud (en pies) de la base y $g \approx 32$ pies por segundo es la aceleración de la gravedad. Cuánto tarda un bloque en deslizarse por un plano inclinado con base $a = 10$ pies cuando

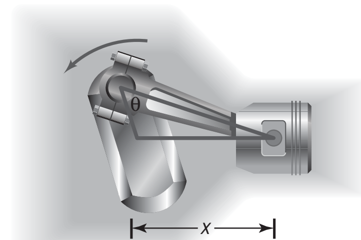
a) $\theta = 30°$? b) $\theta = 45°$? c) $\theta = 60°$?



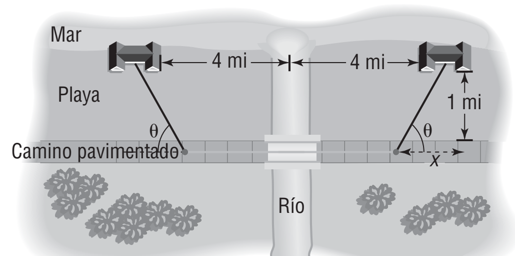
52. Motores de pistones En cierto motor de pistones, la distancia x (en metros) del centro del eje de transmisión a la cabeza del pistón está dada por

$$x = \cos\theta + \sqrt{16 + 0.5(2\cos^2\theta - 1)}$$

donde θ es el ángulo entre el cigüeñal y la trayectoria de la cabeza del pistón (vea la figura). Encuentre x cuando $\theta = 30°$ y cuando $\theta = 45°$.

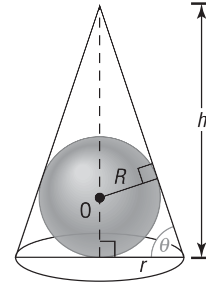


53. Tiempo de viaje Dos casas frente al mar están separadas 8 millas en una extensión recta de la playa, cada una a 1 milla de un camino pavimentado paralelo al mar. Sally es capaz de correr 8 millas por hora en el camino, pero sólo 3 millas por hora en la arena. Como hay un río entre las dos casas, debe correr por la arena hasta el camino, correr por el camino y luego en la arena otra vez para llegar de una casa a la otra. Vea la ilustración.



a) Exprese el tiempo T para ir de una casa a otra como función del ángulo θ mostrado en la ilustración.
b) Calcule el tiempo T para $\theta = 30°$. ¿Cuánto tiempo está Sally en el camino pavimentado?
c) Calcule el tiempo T para $\theta = 45°$. ¿Cuánto tiempo está Sally en el camino pavimentado?
d) Calcule el tiempo T para $\theta = 60°$. ¿Cuánto tiempo está Sally en el camino pavimentado?
e) Calcule el tiempo T para $\theta = 90°$. Describa la trayectoria.
f) Calcule el tiempo T para $\tan \theta = \frac{1}{4}$. Describa la trayectoria. Explique por qué θ debe ser mayor que 14°.
g) Grafique $T = T(\theta)$. ¿En qué ángulo θ se da el menor tiempo? ¿Cuál es el menor tiempo? ¿Cuánto tiempo está Sally en el camino pavimentado?

54. Diseño de piezas decorativas finas Un diseñador de arte decorativo planea vender esferas sólidas de oro colocadas dentro de conos de cristal. Cada esfera tiene radio fijo R y está dentro de un cono de altura h y radio r. Vea la ilustración. Se pueden usar muchos conos para guardar la esfera, cada uno con un ángulo de inclinación θ diferente.



a) Exprese el volumen V del cono como función del ángulo de inclinación θ del cono.

[**Sugerencia:** El volumen V de un cono con altura h y radio r es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$].

b) ¿Qué volumen se requiere para encerrar a una esfera con radio de 2 cm en un cono cuyo ángulo de inclinación θ es de 30°, 45° o 60°?
c) ¿Qué ángulo de inclinación θ debe usarse para que el volumen V del cono sea mínimo? (Esta elección minimiza la cantidad de cristal requerido y da el máximo énfasis a la esfera de oro).

---

55. Use una calculadora en el modo de radianes para completar la siguiente tabla. ¿Qué se concluye acerca de la razón $\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$ cuando θ tiende a 0?

θ	0.5	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
sen θ								
$\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$								

56. Use una calculadora en el modo de radianes para completar la siguiente tabla. ¿Qué se concluye acerca de la razón $\frac{\cos\theta - 1}{\theta}$ cuando θ tiende a 0?

θ	0.5	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$\cos\theta - 1$								
$\frac{\cos\theta - 1}{\theta}$								

57. Encuentre el valor exacto de tan 1°· tan 2°· tan 3°·...· tan 89°.

58. Encuentre el valor exacto de cot 1°· cot 2°· cot 3°·...· cot 89°.

59. Encuentre el valor exacto de cos 1°· cos 2°·...· cos 45°· csc 46° ·...· csc 89°.

60. Encuentre el valor exacto de sen 1°· sen 2°·...· sen 45°· sec 46° ·...· sec 89°.

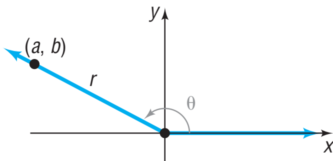
61. Escriba un párrafo breve que explique cómo calcular con rapidez las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.

6.4 Funciones trigonométricas de ángulos generales

OBJETIVOS
1. Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas para ángulos generales
2. Usar ángulos coterminales para encontrar el valor exacto de una función trigonométrica
3. Determinar los signos de las funciones trigonométricas de un ángulo en un cuadrante dado
4. Encontrar el ángulo de referencia de un ángulo general
5. Usar el teorema de ángulos de referencia
6. Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de un ángulo dado uno de ellos y el cuadrante del ángulo

Para ampliar las definiciones de las funciones trigonométricas de manera que incluyan ángulos que no son agudos, se emplea un sistema de coordenadas rectangulares y se coloca el ángulo en la posición estándar, de modo que su vértice esté en el origen y su lado inicial en el lado positivo del eje x. Vea la figura 33.

Figura 33



Sea θ cualquier ángulo en posición estándar y sean (a, b) las coordenadas de cualquier punto diferente al origen $(0, 0)$, en el lado terminal de θ. Si $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ denota la distancia de $(0, 0)$ a (a, b), entonces las **seis funciones trigonométricas de θ** se definen como las razones

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{r} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$
$$\csc\theta = \frac{r}{b} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

siempre que ningún denominador sea igual a 0. Si un denominador es igual a 0, esa función trigonométrica del ángulo θ no está definida.

Observe en la definición anterior que si $a = 0$, es decir, si el punto $(0, b)$ está en el eje y, entonces la función tangente y la función secante no están definidas. Además, si $b = 0$, es decir, si el punto $(a, 0)$ está en el eje x, entonces la función cosecante y la función cotangente no están definidas.

Al construir triángulos semejantes, debe estar convencido de que los valores de las seis funciones trigonométricas de un ángulo θ no dependen de la selección del punto (a, b) en el lado terminal de θ, sino que dependen sólo del propio ángulo θ. Vea en la figura 34 la ilustración de esto cuando θ está en el cuadrante II. Como los triángulos son similares, la razón $\frac{b}{r}$ es igual a la razón $\frac{b'}{r'}$, donde el valor común es sen θ. Además, la razón $\frac{|a|}{r}$ es igual a la razón $\frac{|a'|}{r'}$, de manera que $\frac{a}{r} = \frac{a'}{r'}$, donde el valor común es $\cos\theta$ y así sucesivamente.

Figura 34

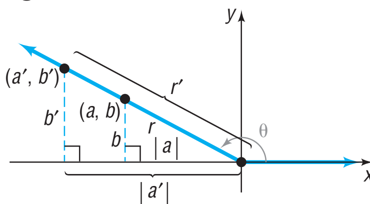
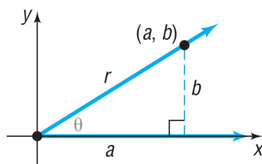


Figura 35

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{r} = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$
y así sucesivamente.



También observe que si θ es agudo, estas definiciones se reducen a las definiciones del triángulo rectángulo dadas en la sección 6.2, como se ilustra en la figura 35.

Por último, de la definición de las seis funciones trigonométricas de un ángulo general, se ve que se cumplen las identidades de cocientes y recíprocos. Además, usando $r^2 = a^2 + b^2$, y dividiendo cada lado entre r^2, se derivan las identidades de Pitágoras para los ángulos generales.

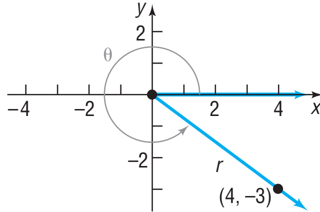


EJEMPLO 1

Encontrar los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ dado un punto en el lado terminal

Encuentre el valor exacto de cada una de las seis funciones trigonométricas de un ángulo positivo θ si $(4, -3)$ es un punto en el lado terminal.

Figura 36



Solución La figura 36 ilustra la situación. Para el punto $(a, b) - (4, -3)$, se tiene $a = 4$ y $b = -3$. Entonces $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$, de manera que

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{r} = -\frac{3}{5} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{4}{5} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{b} = -\frac{5}{3} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a} = \frac{5}{4} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} = -\frac{4}{3}$$

◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

En el siguiente ejemplo se encuentran los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ y $\frac{3\pi}{2}$.

EJEMPLO 2

Encontrar los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales

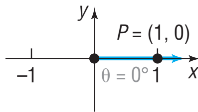
Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de

a) $\theta = 0 = 0°$ b) $\theta = \frac{\pi}{2} = 90°$

c) $\theta = \pi = 180°$ d) $\theta = \frac{3\pi}{2} = 270°$

Solución a) El punto $P = (1, 0)$ está en el lado terminal de $\theta = 0 = 0°$ y está a una distancia de 1 unidad del origen. Vea la figura 37. Entonces

Figura 37 $\theta = 0 = 0°$



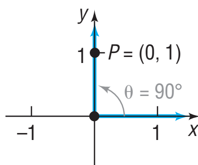
$$\text{sen } 0 = \text{sen } 0° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 0 = \cos 0° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0 = \tan 0° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sec 0 = \sec 0° = \frac{1}{1} = 1$$

Como la coordenada y de P es 0, csc 0 y cot 0 no están definidas.

b) El punto $P = (0, 1)$ está en el lado terminal de $\theta = \frac{\pi}{2} = 90°$ y está a una distancia de 1 unidad del origen. Vea la figura 38. Entonces

Figura 38 $\theta = \frac{\pi}{2} = 90°$

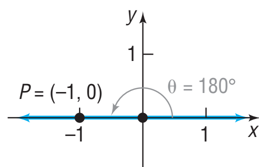


$$\text{sen } \frac{\pi}{2} = \text{sen } 90° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = \frac{0}{1} = 0$$

$$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \cot 90° = \frac{0}{1} = 0$$

Como la coordenada x de P es 0, $\tan\frac{\pi}{2}$ y $\sec\frac{\pi}{2}$ no están definidas.

Figura 39
$\theta = \pi = 180°$



c) El punto $P = (-1, 0)$ está en el lado terminal de $\theta = \pi = 180°$ y está a una distancia de 1 unidad del origen. Vea la figura 39. Entonces

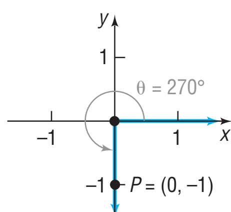
$$\operatorname{sen} \pi = \operatorname{sen} 180° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos \pi = \cos 180° = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\tan \pi = \tan 180° = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \sec \pi = \sec 180° = \frac{1}{-1} = -1$$

Como la coordenada y de P es 0, $\csc \pi$ y $\cot \pi$ no están definidas.

d) El punto $P = (0, 1)$ está en el lado terminal de $\theta = \frac{3\pi}{2} = 270°$ y está a una distancia de 1 unidad del origen. Vea la figura 40. Entonces

Figura 40
$\theta = \frac{3\pi}{2} = 270°$



$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = \operatorname{sen} 270° = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos \frac{3\pi}{2} = \cos 270° = \frac{0}{1} = 0$$

$$\csc \frac{3\pi}{2} = \csc 270° = \frac{1}{-1} = -1 \qquad \cot \frac{3\pi}{2} = \cot 270° = \frac{0}{-1} = 0$$

Como la coordenada x de P es 0, $\tan \frac{3\pi}{2}$ y $\sec \frac{3\pi}{2}$ no están definidas. ◀

La tabla 4 resume los valores de las funciones trigonométricas encontradas en el ejemplo 2.

Tabla 4

θ (Radianes)	θ (Grados)	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0	0°	0	1	0	No definida	1	No definida
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	No definida	1	No definida	0
π	180°	0	−1	0	No definida	−1	No definida
$\frac{3\pi}{2}$	270°	−1	0	No definida	−1	No definida	0

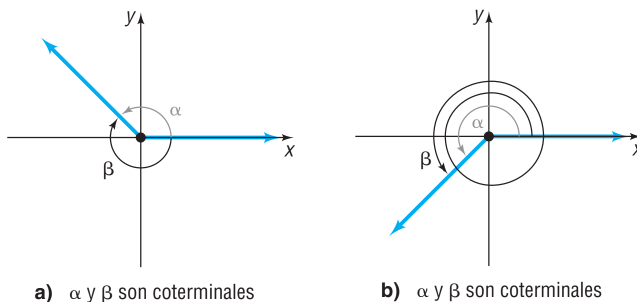
No hay necesidad de memorizar la tabla 4. Para encontrar el valor de una función trigonométrica de un ángulo en un cuadrante, dibuje el ángulo y aplique la definición, como se hizo en el ejemplo 2.

Ángulos coterminales

Se dice que dos ángulos en posición estándar son **coterminales** si tienen el mismo lado terminal.

Vea la figura 41.

Figura 41



a) α y β son coterminales **b)** α y β son coterminales

Por ejemplo, los ángulos 60° y 420° son coterminales, al igual que los ángulos −40° y 320°.

En general, si θ es un ángulo medido en grados, entonces $\theta \pm 360°k$, donde k es cualquier entero, es un ángulo coterminal con θ. Si θ se mide en radianes, entonces $\theta \pm 2\pi k$, donde k es cualquier entero, es un ángulo coterminal con θ.

2 Debido a que los ángulos coterminales tienen el mismo lado terminal, se deduce que los valores de las funciones trigonométricas de ángulos coterminales son iguales. Se usa este hecho en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Uso de ángulos coterminales para encontrar el valor exacto de una función trigonométrica

Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes:

a) $\operatorname{sen} 390°$ b) $\cos 420°$ c) $\tan \dfrac{9\pi}{4}$ d) $\sec\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)$ e) $\csc(-270°)$

Solución

a) Es mejor dibujar primero el ángulo. Vea la figura 42. El ángulo 390° es coterminal con 30°.

$$\operatorname{sen} 390° = \operatorname{sen}(360° + 30°) = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$$

b) Vea la figura 43. El ángulo 420° es coterminal con 60°.

$$\cos 420° = \cos(360° + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

Figura 42

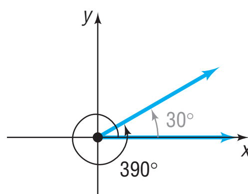
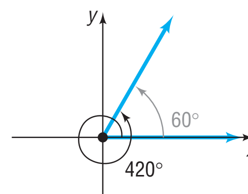


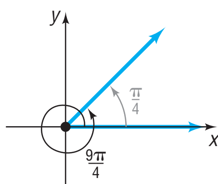
Figura 43



c) El ángulo $\dfrac{9\pi}{4}$ es coterminal con $\dfrac{\pi}{4}$ $\left(\dfrac{9\pi}{4} = \dfrac{8\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = 2\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Vea la figura 44.

$$\tan\frac{9\pi}{4} = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

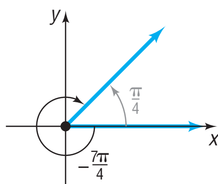
Figura 44



d) Vea la figura 45. El ángulo $-\dfrac{7\pi}{4}$ es coterminal con $\dfrac{\pi}{4}$.

$$\sec\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \sec\left(-2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Figura 45

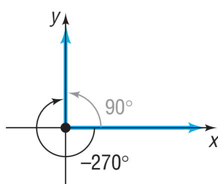


e) Vea la figura 46. El ángulo −270° es coterminal con 90°.

$$\csc(-270°) = \csc(-360° + 90°) = \csc 90° = 1$$

◀

Figura 46



Como se ilustra en el ejemplo 3, el valor de una función trigonométrica de cualquier ángulo es igual al valor de la misma función trigonométrica de un ángulo θ coterminal con él, donde $0° \le \theta < 360°$ (o $0 \le \theta < 2\pi$). Como los ángulos θ y $\theta \pm 360°k$ (o $\theta \pm 2\pi k$), donde k es cualquier entero, son coterminales-

les y dado que los valores de las funciones trigonométricas son iguales para ángulos coterminales, se deduce que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta \pm 360°k) &= \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}(\theta \pm 2\pi k) &= \operatorname{sen}\theta \\ \cos(\theta \pm 360°k) &= \cos\theta & \cos(\theta \pm 2\pi k) &= \cos\theta \\ \tan(\theta \pm 360°k) &= \tan\theta & \tan(\theta \pm 2\pi k) &= \tan\theta \\ \csc(\theta \pm 360°k) &= \csc\theta & \csc(\theta \pm 2\pi k) &= \csc\theta \\ \sec(\theta \pm 360°k) &= \sec\theta & \sec(\theta \pm 2\pi k) &= \sec\theta \\ \cot(\theta \pm 360°k) &= \cot\theta & \cot(\theta \pm 2\pi k) &= \cot\theta \end{aligned} \quad (1)$$

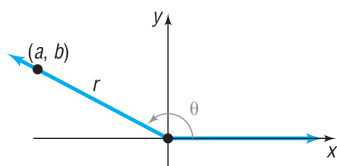
Estas fórmulas muestran que los valores de las funciones trigonométricas se repiten cada 360° (o 2π radianes).


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

Signos de las funciones trigonométricas

3 Si θ no es un ángulo cuadrantal, entonces estará en un cuadrante específico. En tal caso, se conocen los signos de las coordenadas x y y de un punto o (a, b) en el lado terminal de θ. Como $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, entonces se encuentran los signos de las funciones trigonométricas de un ángulo θ si se sabe en qué cuadrante está.

Figura 47
θ en el cuadrante II, $a < 0$, $b > 0$, $r > 0$



Por ejemplo, si θ está en el cuadrante II, como se ve en la figura 47, entonces un punto (a, b) en el lado terminal de θ tiene coordenada x negativa y coordenada y positiva. Así,

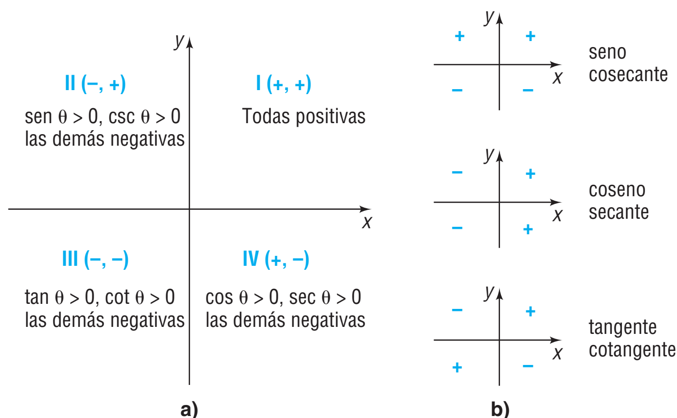
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} > 0 \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} < 0 \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} < 0$$
$$\csc\theta = \frac{r}{b} > 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{a} < 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} < 0$$

La tabla 5 enumera los signos de las seis funciones trigonométricas para cada cuadrante. Vea la figura 48.

Tabla 5

Cuadrante de θ	sen θ, csc θ	cos θ, sec θ	tan θ, cot θ
I	Positivo	Positivo	Positivo
II	Positivo	Negativo	Negativo
III	Negativo	Negativo	Positivo
IV	Negativo	Positivo	Negativo

Figura 48



EJEMPLO 4 Encontrar el cuadrante donde está un ángulo

Si sen $\theta < 0$ y cos $\theta < 0$, determine el cuadrante en el que está el ángulo θ.

Solución Si sen $\theta < 0$, entonces θ está en el cuadrante III o en el IV. Si cos $\theta < 0$, entonces θ está en el cuadrante II o en el III. Por lo tanto, θ está en el cuadrante III. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 33.

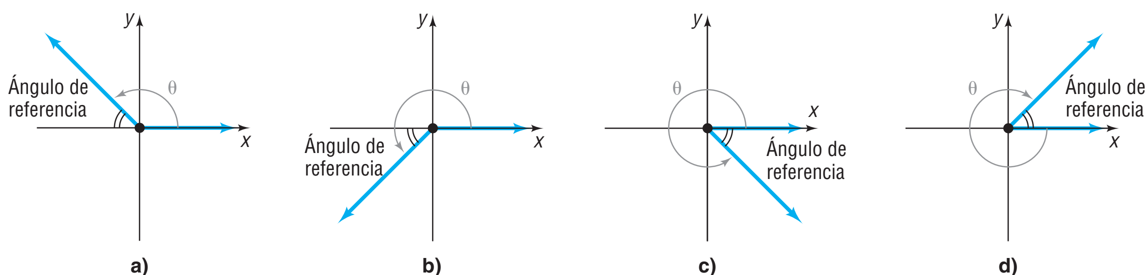
Ángulo de referencia

4 Una vez que se sabe en qué cuadrante está un ángulo, se determina el signo de cada función trigonométrica de este ángulo. Utilizar cierto ángulo de referencia puede ayudar a evaluar las funciones trigonométricas de ese ángulo.

> Sea θ un ángulo no agudo que está en un cuadrante. El ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y ya sea el lado positivo del eje x o el lado negativo del eje x se llama ángulo de referencia para θ.

La figura 49 ilustra el ángulo de referencia para algunos ángulos generales θ. Note que un ángulo de referencia siempre es un ángulo agudo, es decir, mide entre 0° y 90°.

Figura 49



Aunque es posible obtener una fórmula para calcular los ángulos de referencia, suele ser más fácil encontrar el ángulo de referencia para un ángulo dado con un bosquejo del ángulo.

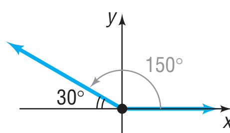
EJEMPLO 5 Buscar ángulos de referencia

Encuentre el ángulo de referencia para cada uno de los siguientes ángulos.

a) 150° b) −45° c) $\frac{9\pi}{4}$ d) $-\frac{5\pi}{6}$

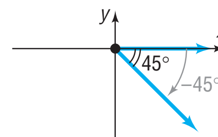
Solución a) Vea la figura 50. El ángulo de referencia para 150° es 30°.

Figura 50



b) Vea la figura 51. El ángulo de referencia para −45° es 45°.

Figura 51



c) Vea la figura 52. El ángulo de referencia para $\frac{9\pi}{4}$ es $\frac{\pi}{4}$.

d) Vea la figura 53. El ángulo de referencia para $-\frac{5\pi}{6}$ es $\frac{\pi}{6}$.

Figura 52

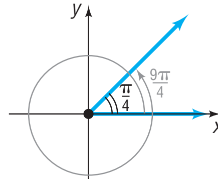
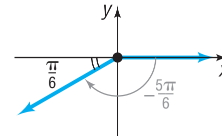


Figura 53





TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 41.

5 La ventaja de usar ángulos de referencia es que, excepto por el signo correcto, los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo general θ son iguales a los valores de las funciones trigonométricas de su ángulo de referencia.

Teorema

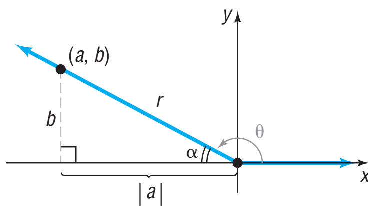
Ángulos de referencia

Si θ es un ángulo que está en un cuadrante y α es su ángulo de referencia, entonces

$$\begin{array}{lll} \text{sen}\,\theta = \pm\text{sen}\,\alpha & \cos\theta = \pm\cos\alpha & \tan\theta = \pm\tan\alpha \\ \csc\theta = \pm\csc\alpha & \sec\theta = \pm\sec\alpha & \cot\theta = \pm\cot\alpha \end{array} \quad \textbf{(2)}$$

donde el signo + o − depende del cuadrante en el que está θ.

Figura 54



Por ejemplo, suponga que θ está en el cuadrante II y α es su ángulo de referencia. Vea la figura 54. Si (a, b) es un punto en el lado terminal de θ y $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, se tiene

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{r} = \text{sen}\,\alpha \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-|a|}{r} = -\cos\alpha$$

y así sucesivamente.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se aplica el teorema de ángulos de referencia.

EJEMPLO 6 Uso del ángulo de referencia para encontrar el valor exacto de una función trigonométrica

Encuentre el valor exacto de cada función trigonométrica usando ángulos de referencia.

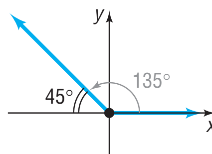
a) sen 135° b) cos 600° c) $\cos\frac{17\pi}{6}$ d) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Solución

a) Vea la figura 55. El ángulo 135° está en el cuadrante II, donde la función seno es positiva. El ángulo de referencia para 135° es 45°.

$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

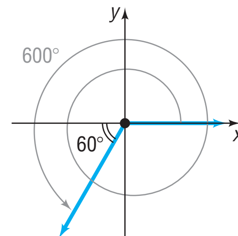
Figura 55



b) Vea la figura 56. El ángulo 600° está en el cuadrante III, donde la función coseno es negativa. El ángulo de referencia para 600° es 60°.

$$\cos 600° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

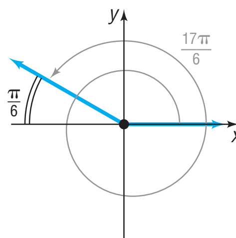
Figura 56



c) Vea la figura 57. El ángulo $\frac{17\pi}{6}$ está en el cuadrante II, donde la función coseno es negativa. El ángulo de referencia para $\frac{17\pi}{6}$ es $\frac{\pi}{6}$.

$$\cos \frac{17\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

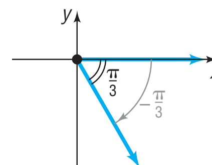
Figura 57



d) Vea la figura 58. El ángulo $-\frac{\pi}{3}$ está en el cuadrante IV, donde la función tangente es negativa. El ángulo de referencia para $-\frac{\pi}{3}$ es $\frac{\pi}{3}$.

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Figura 58



◀

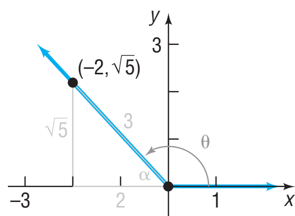
 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 59 Y 63.

6 **EJEMPLO 7** **Buscar los valores exactos de funciones trigonométricas**

Dado que $\cos \theta = -\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, encuentre el valor exacto de las funciones trigonométricas restantes.

Solución El ángulo θ está en el cuadrante II, de manera que sen θ y csc θ son positivos, mientras que las otras funciones trigonométricas son negativas. Si α es el ángulo de referencia para θ, entonces $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Los valores de las funciones trigonométricas restantes del ángulo α se encuentran dibujando el

Figura 59
$\cos\alpha = \frac{2}{3}$



triángulo adecuado y utilizando el teorema de Pitágoras. Se usa la figura 59 para obtener

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \cos\alpha = \frac{2}{3} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\alpha = \frac{3}{2} \qquad \cot\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Ahora se asignan los signos correctos a cada valor para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de θ.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \cos\theta = -\frac{2}{3} \qquad \tan\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc\theta = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\theta = -\frac{3}{2} \qquad \cot\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

◄

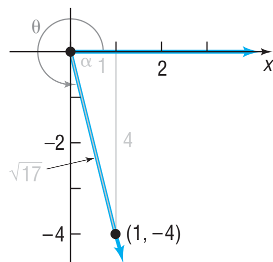
TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 89.

EJEMPLO 8 Valores exactos de funciones trigonométricas

Si $\tan\theta = -4$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$, encuentre el valor exacto de las funciones trigonométricas restantes de θ.

Solución Como $\tan\theta = -4 < 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$, se deduce que θ está en el cuadrante IV. Si α es el ángulo de referencia para θ, entonces $\tan\alpha = 4$. Vea la figura 60. Entonces

Figura 60
$\tan\alpha = 4$



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17} \qquad \tan\alpha = \frac{4}{1} = 4$$

$$\csc\alpha = \frac{\sqrt{17}}{4} \qquad \sec\alpha = \frac{\sqrt{17}}{1} = \sqrt{17} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{4}$$

Se determinan los signos correctos para cada una y se obtienen los valores de las funciones trigonométricas de θ.

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{4\sqrt{17}}{17} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{17}}{17} \qquad \tan\theta = -4$$

$$\csc\theta = -\frac{\sqrt{17}}{4} \qquad \sec\theta = \sqrt{17} \qquad \cot\theta = -\frac{1}{4}$$

◄

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 99.

Resumen

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo general:

PASO 1: Si el ángulo θ es un ángulo cuadrantal, dibuje el ángulo, elija un punto en el lado terminal y aplique la definición de las funciones trigonométricas.

PASO 2: Si el ángulo θ está en un cuadrante, determine los signos correctos de las funciones trigonométricas en ese cuadrante y el ángulo de referencia α para θ. Después exprese cada función trigonométrica de θ en términos del mismo valor (excepto por el signo) de la función trigonométrica de α, un ángulo agudo. Por último, aplique el signo correcto a cada función.

6.4 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Para un ángulo θ que está en el cuadrante III, las funciones trigonométricas ________ y ________ son positivas.
2. Dos ángulos en posición estándar que tienen el mismo lado terminal, son ____________.
3. El ángulo de referencia de 240° es ___________.
4. *Falso o verdadero:* sen 182° = cos 2°.
5. *Falso o verdadero:* $\tan \frac{\pi}{2}$ no está definida.
6. *Falso o verdadero:* el ángulo de referencia siempre es un ángulo agudo.
7. ¿Cuál es el ángulo de referencia de 600°?
8. ¿En qué cuadrantes es positiva la función coseno?
9. Si $0 \le \theta \le 2\pi$, ¿para qué ángulos θ, si los hay, $\tan \theta$ no está definida?
10. ¿Cuál es el ángulo de referencia de $\frac{13\pi}{3}$?

Ejercicios

En los problemas 11-20 se da un punto en el lado terminal del ángulo θ. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas.

11. $(-3, 4)$ **12.** $(5, -12)$ **13.** $(2, -3)$ **14.** $(-1, -2)$ **15.** $(-3, -3)$

16. $(2, -2)$ **17.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **18.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **19.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **20.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

En los problemas 21-32, use un ángulo coterminal para encontrar el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

21. sen 405° **22.** cos 420° **23.** tan 405° **24.** sen 390° **25.** csc 450° **26.** sec 540°

27. cot 390° **28.** sec 420° **29.** $\cos \frac{33\pi}{4}$ **30.** $\operatorname{sen} \frac{9\pi}{4}$ **31.** $\tan(21\pi)$ **32.** $\csc \frac{9\pi}{2}$

En los problemas 33-40, diga en qué cuadrante se encuentra el ángulo θ.

33. $\operatorname{sen} \theta > 0, \quad \cos \theta < 0$ **34.** $\operatorname{sen} \theta < 0, \quad \cos \theta > 0$ **35.** $\operatorname{sen} \theta < 0, \quad \tan \theta < 0$

36. $\cos \theta > 0, \quad \tan \theta > 0$ **37.** $\cos \theta > 0, \quad \cot \theta < 0$ **38.** $\operatorname{sen} \theta < 0, \quad \cot \theta > 0$

39. $\sec \theta < 0, \quad \tan \theta > 0$ **40.** $\csc \theta > 0, \quad \cot \theta < 0$

En los problemas 41-58, encuentre el ángulo de referencia de cada ángulo.

41. −30° **42.** 60° **43.** 120° **44.** 300° **45.** 210° **46.** 330°

47. $\frac{5\pi}{4}$ **48.** $\frac{5\pi}{6}$ **49.** $\frac{8\pi}{3}$ **50.** $\frac{7\pi}{4}$ **51.** −135° **52.** −240°

53. $-\frac{2\pi}{3}$ **54.** $-\frac{7\pi}{6}$ **55.** 440° **56.** 490° **57.** $\frac{15\pi}{4}$ **58.** $\frac{19\pi}{6}$

En los problemas 59-88, use el ángulo de referencia para encontrar el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

59. sen 150° **60.** cos 210° **61.** cos 315° **62.** sen 120° **63.** sen 510° **64.** cos 600°

65. cos(−45°) **66.** sen(−240°) **67.** sec 240° **68.** csc 300° **69.** cot 330° **70.** tan 225°

71. $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}$ **72.** $\cos \frac{2\pi}{3}$ **73.** $\cot \frac{7\pi}{6}$ **74.** $\csc \frac{7\pi}{4}$ **75.** $\cos \frac{13\pi}{4}$ **76.** $\tan \frac{8\pi}{3}$

77. $\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ **78.** $\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **79.** $\tan \frac{14\pi}{3}$ **80.** $\sec \frac{11\pi}{4}$ **81.** csc(−315°) **82.** sec(−225°)

83. $\operatorname{sen}(8\pi)$ **84.** $\cos(-2\pi)$ **85.** $\tan(7\pi)$ **86.** $\cot(5\pi)$ **87.** $\sec(-3\pi)$ **88.** $\csc\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$

En los problemas 89-106, encuentre el valor exacto de las funciones trigonométricas de θ que faltan.

89. $\operatorname{sen} \theta = \frac{12}{13}, \quad \theta$ en Cuadrante II **90.** $\cos \theta = \frac{3}{5}, \quad \theta$ en Cuadrante IV **91.** $\cos \theta = -\frac{4}{5}, \quad \theta$ en Cuadrante III

92. $\operatorname{sen} \theta = -\frac{5}{13}, \quad \theta$ en Cuadrante III **93.** $\operatorname{sen} \theta = \frac{5}{13}, \quad 90° < \theta < 180°$ **94.** $\cos \theta = \frac{4}{5}, \quad 270° < \theta < 360°$

95. $\cos\theta = -\frac{1}{3}$, $180° < \theta < 270°$

96. $\text{sen}\,\theta = -\frac{2}{3}$, $180° < \theta < 270°$

97. $\text{sen}\,\theta = \frac{2}{3}$, $\tan\theta < 0$

98. $\cos\theta = -\frac{1}{4}$, $\tan\theta > 0$

99. $\sec\theta = 2$, $\text{sen}\,\theta < 0$

100. $\csc\theta = 3$, $\cot\theta < 0$

101. $\tan\theta = \frac{3}{4}$, $\text{sen}\,\theta < 0$

102. $\cot\theta = \frac{4}{3}$, $\cos\theta < 0$

103. $\tan\theta = -\frac{1}{3}$, $\text{sen}\,\theta > 0$

104. $\sec\theta = -2$, $\tan\theta > 0$

105. $\csc\theta = -2$, $\tan\theta > 0$

106. $\cot\theta = -2$, $\sec\theta > 0$

107. Encuentre el valor exacto de $\text{sen}\,45° + \text{sen}\,135° + \text{sen}\,225° + \text{sen}\,315°$.

108. Encuentre el valor exacto de $\tan 60° + \tan 150°$.

109. Si $\text{sen}\,\theta = 0.2$, entonces encuentre $\text{sen}(\theta + \pi)$.

110. Si $\cos\theta = 0.4$, encuentre $\cos(\theta + \pi)$.

111. Si $\tan\theta = 3$, encuentre $\tan(\theta + \pi)$.

112. Si $\cot\theta = -2$, encuentre $\cot(\theta + \pi)$.

---

113. Si $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{5}$, encuentre $\csc\theta$.

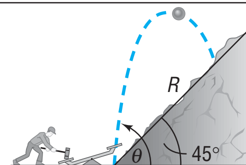
114. Si $\cos\theta = \frac{2}{3}$, encuentre $\sec\theta$.

115. Encuentre el valor exacto de
$\text{sen}\,1° + \text{sen}\,2° + \text{sen}\,3° + \cdots + \text{sen}\,358° + \text{sen}\,359°$

116. Encuentre el valor exacto de
$\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \cdots + \cos 358° + \cos 359°$

117. **Movimiento de un proyectil** Un objeto se dispara hacia arriba a un ángulo θ, $45° < \theta < 90°$, con la horizontal, con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo desde la base de un plano que forma un ángulo de 45° con la horizontal. Vea la ilustración. Si se ignora la resistencia del aire, la distancia R que recorre hacia arriba del plano inclinado está dada por

$$R = \frac{v_0^2\sqrt{2}}{32}[(\text{sen}(2\theta) - \cos(2\theta) - 1)]$$



a) Encuentre la distancia R que recorre el objeto a lo largo del plano inclinado si la velocidad inicial es de 32 pies por segundo y $\theta = 60°$.



b) Grafique $R = R(\theta)$ si la velocidad inicial es de 32 pies por segundo.

c) ¿Qué valor de θ da la mayor R?

118. Proporcione tres ejemplos que muestren cómo usar el teorema de ángulos de referencia.

119. Escriba un breve párrafo que explique cómo calcular rápidamente el valor de las funciones trigonométricas de 0°, 90°, 180° y 270°.

6.5 Enfoque del círculo unitario; propiedades de las funciones trigonométricas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Círculo unitario (sección 2.4, p. 176)
- Funciones (sección 3.1, pp. 218-226)
- Funciones pares e impares (sección 3.3, pp. 240-242)

Ahora trabaje en los problemas de "¿Está preparado?", de la página 545.

OBJETIVOS
1. Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas usando el círculo unitario
2. Conocer el dominio y el rango de las funciones trigonométricas
3. Usar las propiedades periódicas para encontrar el valor exacto de las funciones trigonométricas
4. Usar las propiedades pares-impares para encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas

En esta sección se desarrollan propiedades o características importantes de las funciones trigonométricas. Se comienza por introducir las funciones trigonométricas usando el círculo unitario. Este enfoque llevará a la definición dada antes de las funciones trigonométricas de un ángulo general.

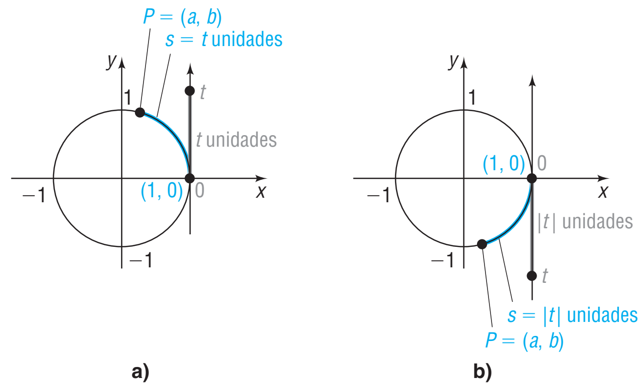
El círculo unitario

1 Recuerde que el círculo unitario es un círculo cuyo radio es 1 y cuyo centro está en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Además, recuerde que cualquier círculo de radio r tiene circunferencia de longitud $2\pi r$. Por lo tanto, el círculo unitario (radio $= 1$) tiene una circunferencia de longitud 2π. En otras palabras, para una vuelta alrededor del círculo unitario la longitud del arco es 2π unidades.

La siguiente presentación establece el escenario para definir las funciones trigonométricas usando el círculo unitario.

Sea $t \geq 0$ cualquier número real y sea s la distancia del origen a t en la recta de números reales. Véase la parte azul de la figura 61*a*). Ahora vea el círculo unitario de la figura 61*a*). Comenzando en el punto $(1, 0)$ de ese círculo, recorra $s = t$ unidades en sentido contrario a las manecillas del reloj sobre el círculo para llegar al punto $P = (a, b)$. En este sentido, la longitud $s = t$ unidades está **rodeando** el círculo unitario.

Figura 61



Si $t < 0$, se comienza en el punto $(1, 0)$ sobre el círculo y se recorre $s = |t|$ unidades en sentido contrario a las manecillas del reloj para llegar al punto $P = (a, b)$. Vea la figura 61*b*).

Si $t > 2\pi$ o si $t < -2\pi$, será necesario recorrer el círculo unitario más de una vez antes de llegar al punto P. ¿Por qué?

Se describirá este proceso de otra manera. Imagine un cordón de $s = |t|$ unidades de largo con el que se rodea a un círculo de radio 1 unidad. Se comienza en el punto $(1, 0)$. Si $t \geq 0$, se rodea con el cordón en sentido contrario a las manecillas del reloj; si $t > 0$, se rodea en el sentido de las manecillas. El punto $P = (a, b)$ es el punto en el que el cordón termina.

Esta descripción indica que, para cualquier número real t, se puede localizar un punto único $P = (a, b)$ sobre el círculo unitario. Este punto P se conoce como **el punto *P* en el círculo unitario que corresponde a *t***. Ésta es una idea importante. No importa qué número real t se elija, existe un punto P único en el círculo unitario que le corresponde. Se usan las coordenadas del punto $P = (a, b)$ en el círculo unitario correspondiente a t para definir las **seis funciones trigonométricas de *t***.

Sea t un número real y sea $P = (a, b)$ el punto en el círculo unitario que corresponde a t.

La **función seno** asocia la coordenada y de P con t y se denota por

$$\text{sen}\, t = b$$

La **función coseno** asocia la coordenada x de P con t y se denota por

$$\cos t = a$$

Si $a \neq 0$, la **función tangente** se define como

$$\tan t = \frac{b}{a}$$

Si $b \neq 0$ la **función cosecante** se define como

$$\csc t = \frac{1}{b}$$

Si $a \neq 0$, la **función secante** se define como

$$\sec t = \frac{1}{a}$$

Si $b \neq 0$, la **función cotangente** se define como

$$\cot t = \frac{a}{b}$$

Una vez más observe en estas definiciones que si $a = 0$ [es decir, el punto $P = (0, b)$ está en el eje y] la función tangente y la función secante no están definidas. Además, si $b = 0$ [es decir, el punto $P = (a, 0)$ está en el eje x], la función cosecante y la función cotangente no están definidas.

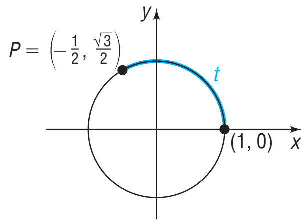
Debido a que se usa el círculo unitario en estas definiciones de las funciones trigonométricas, también reciben el nombre de **funciones circulares**.

EJEMPLO 1 Buscar los valores de las funciones trigonométricas usando un punto sobre el círculo unitario

Encuentre los valores de sen t, cos t, tan t, csc t, sec t, y cot t si $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es el punto en el círculo unitario que corresponde al número real t.

Solución Vea la figura 62. Se sigue la definición de las seis funciones trigonométricas usando $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (a, b)$. Entonces con $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, se tiene

Figura 62



$$\operatorname{sen} t = b = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos t = a = -\frac{1}{2} \qquad \tan t = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{b} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec t = \frac{1}{a} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \cot t = \frac{a}{b} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

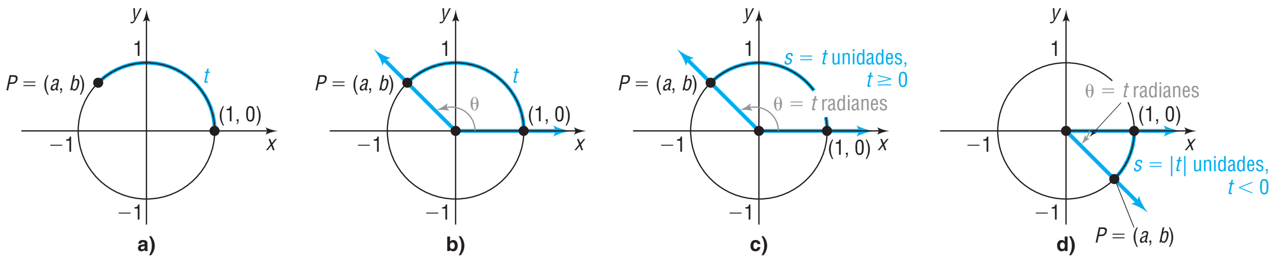
Funciones trigonométricas de ángulos

Sea $P = (a, b)$ el punto en el círculo unitario que corresponde al número real t. Vea la figura 63*a*). Sea θ el ángulo en posición estándar, medido en radianes, cuyo lado terminal es el rayo que parte del origen y pasa por P. Vea la figura 63*b*). Como el círculo unitario tiene radio 1, de la fórmula para la longitud de arco, $s = r\theta$, se encuentre que

$$s = r\theta = \theta$$
$$\uparrow$$
$$r = 1$$

De manera que si $s = |t|$ unidades, entonces $\theta = t$ radianes. Vea las figuras 63*c*) y *d*).

Figura 63



El punto $P = (a, b)$ en el círculo unitario que corresponde al número real t es el punto P en el lado terminal del ángulo $\theta = t$ radianes. Como resultado, se afirma que

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} \theta$$

↑ número real ↑ $\theta = t$ radianes

etcétera. Ahora se definen las funciones trigonométricas del ángulo θ.

Si $\theta = t$ radianes, las seis **funciones trigonométricas del ángulo θ** se definen como

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} t \qquad \cos\theta = \cos t \qquad \tan\theta = \tan t$$
$$\csc\theta = \csc t \qquad \sec\theta = \sec t \qquad \cot\theta = \cot t$$

Aun cuando es importante la distinción entre funciones trigonométricas de números reales y funciones trigonométricas de ángulos, es costumbre referirse a los dos tipos de funciones de manera colectiva como *funciones trigonométricas*. Se seguirá esta práctica en adelante.

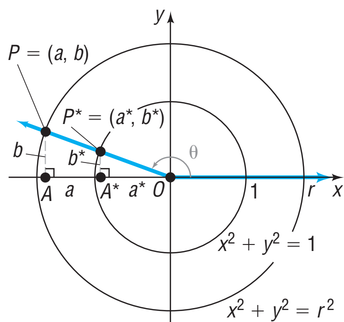
Puesto que los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ están determinadas por las coordenadas del punto $P = (a, b)$ en el círculo unitario que corresponde a θ, las unidades usadas para medir el ángulo θ son irrelevantes. Por ejemplo, no importa si se escribe $\theta = \frac{\pi}{2}$ radianes 0 $\theta = 90°$. En los dos casos, el punto en el círculo unitario que corresponde a este ángulo es $P = (0, 1)$. Como resultado,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen} 90° = 1 \quad \text{y} \quad \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$$

Encontrar el valor exacto de una función trigonométrica de un ángulo θ requiere que se localice el punto $P^* = (a^*, b^*)$ correspondiente en el círculo unitario. De hecho, se puede usar cualquier círculo con centro en el origen.

Sea θ cualquier ángulo no cuadrantal colocado en posición estándar. Sea $P = (a, b)$ el punto en el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ que corresponde a θ y sea $P^* = (a^*, b^*)$ el punto en el círculo unitario que corresponde a θ. Vea la figura 64.

Figura 64



Observe que los triángulos OA^*P^* y OAP son similares; así, las razones de lados correspondientes son iguales.

$$\frac{b^*}{1} = \frac{b}{r} \qquad \frac{a^*}{1} = \frac{a}{r} \qquad \frac{b^*}{a^*} = \frac{b}{a}$$
$$\frac{1}{b^*} = \frac{r}{b} \qquad \frac{1}{a^*} = \frac{r}{a} \qquad \frac{a^*}{b^*} = \frac{a}{b}$$

Estos resultados llevan a formular el siguiente teorema:

Teorema

Para un ángulo θ en posición estándar, sea $P = (a, b)$ cualquier punto en el lado terminal de θ que también esté en el círculo $x^2 + y^2 = r^2$. Entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0$$
$$\csc\theta = \frac{r}{b}, \quad b \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{a}, \quad a \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

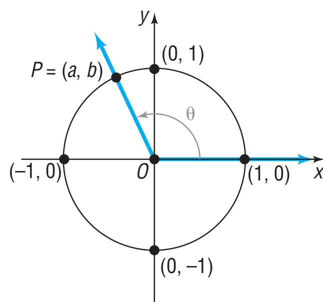
Este resultado coincide con la definición dada en la sección 6.4 para las seis funciones trigonométricas de un ángulo general θ.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 15.

Dominio y rango de las funciones trigonométricas

2 Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P = (a, b)$ el punto en el círculo unitario que corresponde a θ. Vea la figura 65. Entonces, por definición,

Figura 65



$\operatorname{sen}\theta = b$	$\cos\theta = a$	$\tan\theta = \dfrac{b}{a}, \quad a \neq 0$
$\csc\theta = \dfrac{1}{b}, \quad b \neq 0$	$\sec\theta = \dfrac{1}{a}, \quad a \neq 0$	$\cot\theta = \dfrac{a}{b}, \quad b \neq 0$

Para sen θ y cos θ, θ puede ser cualquier ángulo, de manera que el dominio de la función seno y la función coseno es el conjunto de todos los números reales.

El dominio de la función seno es el conjunto de todos los números reales.
El dominio de la función coseno es el conjunto de todos los números reales.

Si $a = 0$, entonces la función tangente y la función secante no están definidas. Es decir, para las funciones tangente y secante, la coordenada x de $P = (a, b)$ no puede ser 0. En el círculo unitario, existen dos puntos de este tipo, $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Estos dos puntos corresponden a los ángulos $\frac{\pi}{2}$ (90°) y $\frac{3\pi}{2}$ (270°) (270°) o, de manera más general, a cualquier ángulo que sea un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ (90°), como $\frac{\pi}{2}$ (90°), $\frac{3\pi}{2}$ (270°), $\frac{5\pi}{2}$ (450°), $-\frac{\pi}{2}$ (−90°) y $-\frac{3\pi}{2}$ (−270°). Estos ángulos deben entonces excluirse del dominio de las funciones tangente y secante.

El dominio de la función tangente es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ (90°).
El dominio de la función secante es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ (90°).

Si $b = 0$, entonces la función cotangente y la función cosecante no están definidas. Para estas funciones, la coordenada y de $P = (a, b)$ no puede ser 0. En el círculo unitario existen dos puntos de este tipo, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Estos puntos corresponden a los ángulos 0 (0°) y π (180°) o, de manera más general, a cualquier ángulo que es un múltiplo entero de π (180°) como 0 (0°), π (180°), 2π (360°), 3π (540°) y $-\pi$ (−180°). Por lo tanto, estos ángulos deben excluirse del dominio de la función cotangente y la función cosecante.

El dominio de la función cotangente es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos enteros de π (180°).
El dominio de la función cosecante es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos enteros de π (180°).

Ahora se determinará el rango de cada una de las seis funciones trigonométricas. De nuevo vea la figura 65. Sea $P = (a, b)$ el punto en el círculo

unitario que corresponde al ángulo θ. Se deduce que $-1 \leq a \leq 1$ y $-1 \leq b \leq 1$. Como sen $\theta = b$ y $\cos\theta = a$, se tiene

$$-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

El rango de ambas funciones, seno y coseno, consiste en todos los números reales entre -1 y 1, inclusive. Si se usa la notación de valor absoluto se tiene $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$ y $|\cos\theta| \leq 1$.

Si θ no es un múltiplo de π (180°), entonces $\csc\theta = \frac{1}{b}$. Como $b = \operatorname{sen}\theta$ y $|b| = |\operatorname{sen}\theta| \leq 1$, se deduce que $|\csc\theta| = \frac{1}{|\operatorname{sen}\theta|} = \frac{1}{|b|} \geq 1$. El rango de la función cosecante consiste en todos los números reales menores o iguales que -1 o mayores o iguales que 1. Esto es

$$\csc\theta \leq -1 \quad \text{o} \quad \csc\theta \geq 1$$

En la notación de valor absoluto se tiene $|\csc\theta| \geq 1$.

Si θ no es un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ (90°), entonces $\sec\theta = \frac{1}{a}$. Como $a =$ |$\cos\theta$ y $|a| = |\cos\theta| \leq 1$, se deduce que $|\sec\theta| = \frac{1}{|\cos\theta|} = \frac{1}{|a|} \geq 1$. El rango de la función secante consiste en todos los números reales menores o iguales que -1 o mayores o iguales que 1. Esto es

$$\sec\theta \leq -1 \quad \text{o} \quad \sec\theta \geq 1$$

En la notación de valor absoluto, se tiene $|\sec\theta| \geq 1$.

El rango de las dos funciones, tangente y cotangente, consiste en todos los números reales. Es decir,

$$-\infty < \tan\theta < \infty \quad \text{y} \quad -\infty < \cot\theta < \infty$$

Se pide que pruebe este resultado en los problemas 89 y 90.

La tabla 6 resume estos resultados.

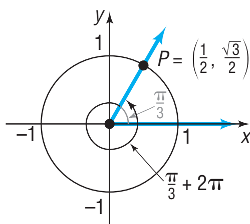
Tabla 6

Función	Símbolo	Dominio	Rango
seno	$f(\theta) = \operatorname{sen}\theta$	Todos los números reales	Todos los números reales entre -1 y 1, inclusive
coseno	$f(\theta) = \cos\theta$	Todos los números reales	Todos los números reales entre -1 y 1, inclusive
tangente	$f(\theta) = \tan\theta$	Todos los números reales, excepto múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ (90°)	Todos los números reales
cosecante	$f(\theta) = \csc\theta$	Todos los números reales, excepto múltiplos enteros de π (180°)	Todos los números reales mayores o iguales que 1 o menores o iguales que -1
secante	$f(\theta) = \sec\theta$	Todos los números reales, excepto múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ (90°)	Todos los números reales mayores o iguales que 1 o menores o iguales que -1
cotangente	$f(\theta) = \cot\theta$	Todos los números reales, excepto múltiplos enteros de π (180°)	Todos los números reales

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **61** Y **65**.

Periodos de las funciones trigonométricas

Figura 66



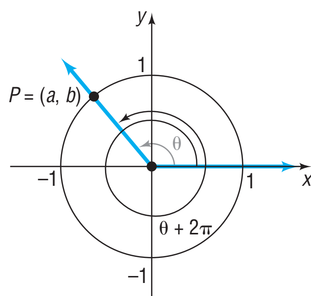
3 Vea la figura 66. Esta figura muestra que para un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes el punto correspondiente P en el círculo unitario es $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Observe que para un ángulo de $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ radianes el punto P correspondiente en el círculo unitario también es $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Como resultado,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{1}{2}$$

Este ejemplo ilustra una situación más general. Suponga que, para un ángulo dado θ, medido en radianes, se conoce el punto correspondiente $P = (a, b)$ en el círculo unitario. Ahora, sume 2π a θ. El punto en el círculo unitario que corresponde a $\theta + 2\pi$ es idéntico al punto P que corresponde a θ. Vea la figura 67. Los valores de las funciones trigonométricas de $\theta + 2\pi$ son iguales a los valores de las funciones trigonométricas correspondientes de θ.

Figura 67



Si se suman (o restan) múltiplos enteros de 2π a θ, los valores trigonométricos no cambian. Es decir, para toda θ,

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi k) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi k) = \cos\theta \qquad \text{donde } k \text{ es un entero} \tag{1}$$

Las funciones que exhiben este tipo de comportamiento se llaman *funciones periódicas*.

Una función f se llama **periódica** si existe número positivo p tal que, siempre que θ esté en el dominio de f, también esté $\theta + p$, y

$$f(\theta + p) = f(\theta)$$

Si existe un número p mínimo con esta condición, este valor menor se llama **periodo (fundamental)** de f.

Con base en la ecuación (1), las funciones seno y coseno son periódicas. De hecho, las funciones seno y coseno tienen periodo 2π. Se pide que pruebe esto en los problemas 91 y 92. Las funciones secante y cosecante también son periódicas con periodo 2π; y las funciones tangente y cotangente son periódicas con periodo π. Se pide que demuestre estas proposiciones en los problemas 93 a 96.

Estos hechos se resumen como sigue:

Propiedades periódicas

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \quad \tan(\theta + \pi) = \tan\theta$$
$$\csc(\theta + 2\pi) = \csc\theta \quad \sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta \quad \cot(\theta + \pi) = \cot\theta$$

En palabras
La tangente y la cotangente tienen periodo π; las otras tienen periodo 2π.

Como las funciones seno, coseno, secante y cosecante tienen periodo 2π, una vez que se conocen sus valores para $0 \le \theta < 2\pi$, se conocen todos sus valores; de manera similar, como las funciones tangente y cotangente tiene periodo π, una vez que se conocen sus valores para $0 \le \theta < \pi$, se conocen todos sus valores.

EJEMPLO 2 **Uso de propiedades periódicas para encontrar valores exactos**

Encuentre el valor exacto de:

a) $\operatorname{sen} 420°$ b) $\tan \frac{5\pi}{4}$ c) $\cos \frac{11\pi}{4}$

Solución

a) $\operatorname{sen} 420° = \operatorname{sen}(360° + 60°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\tan \frac{5\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

c) $\cos \frac{11\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ◄

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 21 Y 79.

Las propiedades periódicas de las funciones trigonométricas serán muy útiles cuando se estudien sus gráficas en la siguiente sección.

Propiedades pares-impares

Recuerde que una función f es par si $f(-\theta) = f(\theta)$ para toda θ en el dominio de f: una función f es impar si $f(-\theta) = -f(\theta)$ para toda θ en el dominio de f. Se mostrará que las funciones trigonométricas seno, tangente, cotangente y cosecante son funciones impares, mientras que las funciones coseno y secante son funciones pares.

Teorema

Propiedades pares-impares

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\csc(-\theta) = -\csc\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

En palabras
Las funciones coseno y secante son funciones pares, las otras son funciones impares.

Demostración Sea $P = (a, b)$ el punto en el círculo unitario que corresponde al ángulo θ. Vea la figura 68. El punto Q en el círculo unitario que corresponde al ángulo $-\theta$ tendrá coordenadas $(a, -b)$. Si se usa la definición de las funciones trigonométricas, se tiene

$$\operatorname{sen}\theta = b \qquad \cos\theta = a \qquad \operatorname{sen}(-\theta) = -b \qquad \cos(-\theta) = a$$

de manera que

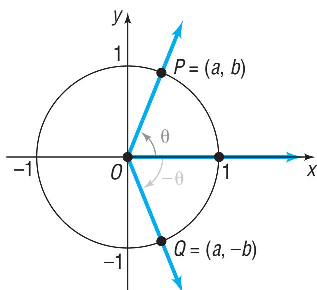
$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

Ahora, si se usan estos resultados y algunas identidades fundamentales, se tiene

$$\tan(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{1}{\tan(-\theta)} = \frac{1}{-\tan\theta} = -\cot\theta$$

Figura 68



$$\sec(-\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\csc(-\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-\theta)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}\theta} = -\csc\theta$$

■

4 **EJEMPLO 3** **Buscar los valores exactos usando las propiedades pares-impares**

Encuentre el valor exacto de

a) $\operatorname{sen}(-45°)$ b) $\cos(-\pi)$ c) $\cot\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ d) $\tan\left(-\frac{37\pi}{4}\right)$

Solución

a) $\operatorname{sen}(-45°) = -\operatorname{sen} 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (↑ Función impar)

b) $\cos(-\pi) = \cos\pi = -1$ (↑ Función par)

c) $\cot\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\cot\frac{3\pi}{2} = 0$ (↑ Función impar)

d) $\tan\left(-\frac{37\pi}{4}\right) = -\tan\frac{37\pi}{4} = -\tan\left(\frac{\pi}{4} + 9\pi\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$ (↑ Función impar; ↑ El periodo es π)

◀


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 37 Y 73.

6.5 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtuvo una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. ¿Cuál es la ecuación de un círculo? (p. 176)
2. El dominio de la función $f(x) = \frac{3x - 6}{x - 4}$ es __________. (pp. 218–226)
3. Una función para la que $f(x) = f(-x)$ para toda x en el dominio de f se llama función ____________________. (pp. 240–242)

Conceptos y vocabulario

4. Las funciones seno, coseno, cosecante y secante tienen periodo ___________; las funciones tangente y cotangente tienen periodo ___________.
5. El dominio de la función tangente es ___________.
6. El rango de la función seno es ___________.
7. Si $\operatorname{sen}\theta = 0.2$, entonces $\operatorname{sen}(-\theta) =$ _______________ y $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) =$ _______________.
8. *Falso o verdadero:* las únicas funciones trigonométricas son las funciones coseno y secante.

Ejercicios

En los problemas 9-14, se da el punto P en círculo unitario que corresponde al número real t. Encuentre sen *t*, cos *t*, tan *t*, csc *t*, sec *t y* cot *t*.

9. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **10.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **11.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **12.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **13.** $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ **14.** $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

En los problemas 15-20, se da el punto P en el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, que también está en el lado terminal de un ángulo θ en la posición estándar. Encuentre sen θ, cos θ, tan θ, csc θ, *sec θ y* cot θ.

15. $(3, -4)$ **16.** $(4, -3)$ **17.** $(-2, 3)$ **18.** $(2, -4)$ **19.** $(-1, -1)$ **20.** $(-3, 1)$

En los problemas 21-36, use el hecho de que las funciones trigonométricas son periódicas para encontrar el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

21. sen 405° **22.** cos 420° **23.** tan 405° **24.** sen 390°

25. csc 450° **26.** sec 540° **27.** cot 390° **28.** sec 420°

29. $\cos \frac{33\pi}{4}$ **30.** $\operatorname{sen} \frac{9\pi}{4}$ **31.** $\tan(21\pi)$ **32.** $\csc \frac{9\pi}{2}$

33. $\sec \frac{17\pi}{4}$ **34.** $\cot \frac{17\pi}{4}$ **35.** $\tan \frac{19\pi}{6}$ **36.** $\sec \frac{25\pi}{6}$

En los problemas 37-54, use las propiedades pares-impares para encontrar el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

37. sen(−60°) **38.** cos(−30°) **39.** tan(−30°) **40.** sen(−135°) **41.** sec(−60°)

42. csc(−30°) **43.** sen(−90°) **44.** cos(−270°) **45.** $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **46.** $\operatorname{sen}(-\pi)$

47. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **48.** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **49.** $\tan(-\pi)$ **50.** $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

51. $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **52.** $\sec(-\pi)$ **53.** $\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **54.** $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

En los problemas 55-60, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

55. $\operatorname{sen}(-\pi) + \cos(5\pi)$ **56.** $\tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \cot\frac{7\pi}{2}$ **57.** $\sec(-\pi) + \csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

58. $\tan(-6\pi) + \cos\frac{9\pi}{4}$ **59.** $\operatorname{sen}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$ **60.** $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

---

61. ¿Cuál es el dominio de la función seno?

62. ¿Cuál es el dominio de la función coseno?

63. ¿Para qué números θ no está definida $f(\theta) = \tan\theta$?

64. ¿Para qué números θ no está definida $f(\theta) = \cot\theta$?

65. ¿Para qué números θ no está definida $f(\theta) = \sec\theta$?

66. ¿Para qué números θ no está definida $f(\theta) = \csc\theta$?

67. ¿Cuál es el rango de la función seno?

68. ¿Cuál es el rango de la función coseno?

69. ¿Cuál es el rango de la función tangente?

70. ¿Cuál es el rango de la función cotangente?

71. ¿Cuál es el rango de la función secante?

72. ¿Cuál es el rango de la función cosecante?

73. ¿La función seno es par, impar o ninguna? ¿Es simétrica su gráfica? ¿Con respecto a qué?

74. ¿La función coseno es par, impar o ninguna? ¿Es simétrica su gráfica? ¿Con respecto a qué?

75. ¿La función tangente es par, impar o ninguna? ¿Es simétrica su gráfica? ¿Con respecto a qué?

76. ¿La función cotangente es par, impar o ninguna? ¿Es simétrica su gráfica? ¿Con respecto a qué?

77. ¿La función secante es par, impar o ninguna? ¿Es simétrica su gráfica? ¿Con respecto a qué?

78. ¿La función cosecante es par, impar o ninguna? ¿Es simétrica su gráfica? ¿Con respecto a qué?

79. Si sen θ = 0.3, encuentre el valor de $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) + \operatorname{sen}(\theta + 4\pi)$.

80. Si cos θ = 0.2, encuentre el valor de $\cos\theta + \cos(\theta + 2\pi) + \cos(\theta + 4\pi)$.

81. Si tan θ = 3, encuentre el valor de $\tan\theta + \tan(\theta + \pi) + \tan(\theta + 2\pi)$.

82. Si cot θ = −2, encuentre el valor de $\cot\theta + \cot(\theta - \pi) + \cot(\theta - 2\pi)$.

En los problemas 83-88, use las propiedades periódicas y pares-impares.

83. Si $f(x) = \text{sen } x$ y $f(a) = \dfrac{1}{3}$, encuentre el valor exacto de:
a) $f(-a)$ b) $f(a) + f(a + 2\pi) + f(a + 4\pi)$

84. Si $f(x) = \cos x$ y $f(a) = \dfrac{1}{4}$, encuentre el valor exacto de:
a) $f(-a)$ b) $f(a) + f(a + 2\pi) + f(a - 2\pi)$

85. Si $f(x) = \tan x$ y $f(a) = 2$, encuentre el valor exacto de:
a) $f(-a)$ b) $f(a) + f(a + \pi) + f(a + 2\pi)$

86. Si $f(x) = \cot x$ y $f(a) = -3$, encuentre el valor exacto de:
a) $f(-a)$ b) $f(a) + f(a + \pi) + f(a + 4\pi)$

87. Si $f(x) = \sec x$ y $f(a) = -4$, encuentre el valor exacto de:
a) $f(-a)$ b) $f(a) + f(a + 2\pi) + f(a + 4\pi)$

88. Si $f(x) = \csc x$ y $f(a) = 2$, encuentre el valor exacto de:
a) $f(-a)$ b) $f(a) + f(a + 2\pi) + f(a + 4\pi)$

89. Demuestre que el rango de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.

90. Demuestre que el rango de la función cotangente es el conjunto de todos los números reales.

91. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \text{sen } \theta$ es 2π.

[**Sugerencia:** Suponga que existe $0 < p < 2\pi$, de manera que sen $(\theta + p) = \text{sen } (\theta + p) = \text{sen } \theta$ para toda θ. Haga $\theta = 0$ para encontrar p. Luego haga $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ para llegar a una contradicción].

92. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \cos \theta$ es 2π.

93. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \sec \theta$ es 2π.

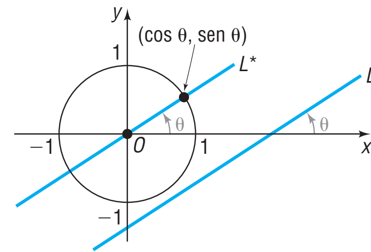
94. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \csc \theta$ es 2π.

95. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \tan \theta$ es π.

96. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \cot \theta$ es π.

97. Si θ $(0 < \theta < \pi)$ es el ángulo entre un rayo horizontal dirigido a la derecha (digamos el lado positivo del eje x) y una recta L distinta de la horizontal y de la vertical, demuestre que la pendiente m de L es igual a $\tan \theta$. El ángulo θ se llama **inclinación** de L.

[**Sugerencia:** Vea la ilustración, donde se ha dibujado la recta L^* paralela a L y que pasa por el origen. Utilice el hecho de que L^* intercepta el círculo unitario en el punto $(\cos \theta, \text{sen } \theta)$.]



98. Explique cómo encontraría el valor de sen 390° usando las propiedades periódicas.

99. Explique cómo encontraría el valor de cos (−45°) usando las propiedades pares-impares.

100. Escriba cinco propiedades de la función tangente. Explique el significado de cada una.

101. Describa lo que entiende del significado de una función periódica.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $x^2 + y^2 = 1$ **2.** $\{x|x \neq 4\}$ **3.** par

6.6 Gráficas de las funciones seno y coseno

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Técnicas para graficar: transformaciones (sección 3.5, pp. 262-272)



Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 559.

OBJETIVOS
1 Graficar transformaciones de la función seno
2 Graficar transformaciones de la función coseno
3 Determinar la amplitud y el periodo de las funciones senoidales
4 Graficar funciones senoidales: $y = A \text{ sen}(\omega x)$
5 Encontrar una ecuación para una gráfica senoidal

Como se desea graficar las funciones trigonométricas en el plano xy, se usarán los símbolos tradicionales x para la variable independiente (o argumento) y y para la variable dependiente (o valor en x) para cada función. Entonces, las seis funciones trigonométricas se escriben como

$y = f(x) = \text{sen } x$	$y = f(x) = \cos x$	$y = f(x) = \tan x$
$y = f(x) = \csc x$	$y = f(x) = \sec x$	$y = f(x) = \cot x$

En este caso, la variable independiente x representa un ángulo, medido en radianes. En cálculo, x suele manejarse como un número real. Como se dijo, éstas son formas equivalentes de ver a x.

Gráfica de y = sen x

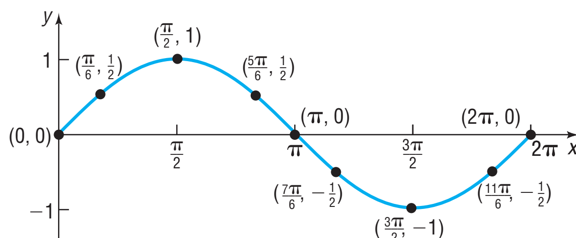
Tabla 7

x	$y = \text{sen } x$	(x, y)
0	0	$(0, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	1	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$
π	0	$(\pi, 0)$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
2π	0	$(2\pi, 0)$

Como la función seno tiene periodo 2π, se necesita graficar $y = \text{sen } x$ sólo en el intervalo $[0, 2\pi]$. El resto de la gráfica consistirá en repeticiones de esta parte de la gráfica.

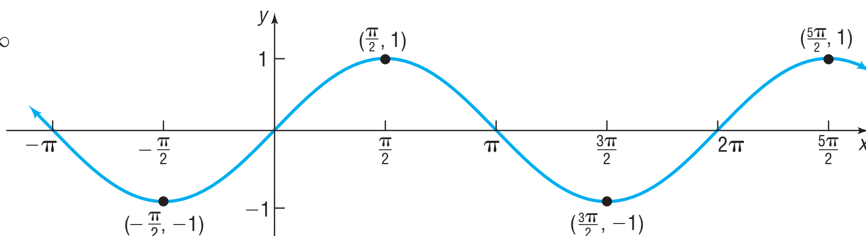
Se comienza por construir la tabla 7, que enumera algunos puntos en la gráfica de $y = \text{sen } x, 0 \leq x \leq 2\pi$. Como se muestra en la tabla, la gráfica de $y = \text{sen } x, 0 \leq x \leq 2\pi$, comienza en el origen. Cuando x aumenta 0 a $\frac{\pi}{2}$, el valor de $y = \text{sen } x$ aumenta de 0 a 1; cuando x aumenta de $\frac{\pi}{2}$ a π y a $\frac{3\pi}{2}$, el valor de y disminuye de 1 a 0 y a -1; cuando x aumenta de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, el valor de y crece de -1 a 0. Si se grafican estos puntos dados en la tabla 7 y se conectan con una curva suave, se obtiene la gráfica que se muestra en al figura 69.

Figura 69
$y = \text{sen } x, 0 \leq x \leq 2\pi$



La gráfica de la figura 69 es un periodo, o **ciclo**, de la gráfica de $y = \text{sen } x$. Para obtener una gráfica más completa de $y = \text{sen } x$, se repite este ciclo en cada dirección, como se muestra en la figura 70.

Figura 70
$y = \text{sen } x, -\infty < x < \infty$



La gráfica de $y = \text{sen } x$ ilustra algunos hechos que ya se conocen de la función seno.

Propiedades de la función seno

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales.
2. El rango consiste en todos los números reales entre -1 y 1, inclusive.
3. La función seno es una función impar, como lo indica la simetría de la gráfica respecto del origen.
4. La función seno es periódica, con periodo 2π.
5. Las intercepciones x son $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$; la intercepción $-y$ es 0.
6. El valor máximo es 1 y ocurre en $x = \ldots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$; el valor mínimo es -1 y ocurre en $x = \ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$.

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 9, 11 Y 13.

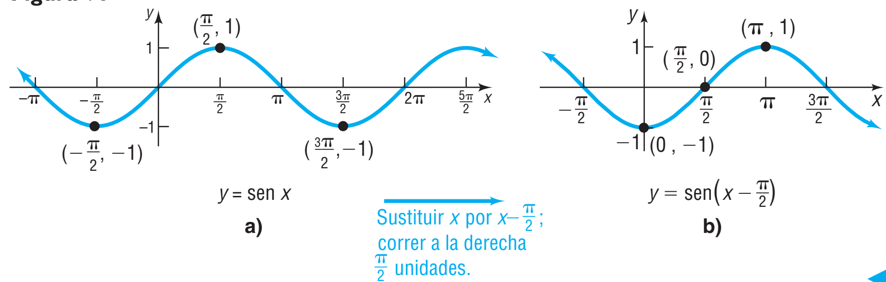
 Las técnicas para graficar introducidas en el capítulo 3 sirven para graficar funciones que son transformaciones de la función seno (vea la sección 3.5).

EJEMPLO 1 Gráfica de variaciones de $y = \text{sen}\, x$ usando transformaciones

Use la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ para graficar $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución La figura 71 ilustra los pasos.

Figura 71



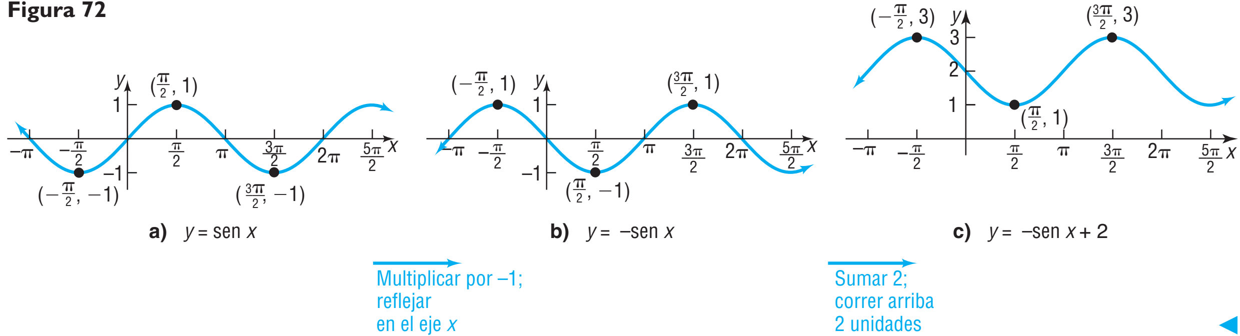
 ✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ y compare el resultado con la figura 71*b*).

EJEMPLO 2 Gráfica de variaciones de $y = \text{sen}\, x$ usando transformaciones

Use la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ para graficar $y = -\text{sen}\, x + 2$.

Solución La figura 72 ilustra los pasos.

Figura 72





✔ **Comprobación** Grafique $Y_1 = -\text{sen } x + 2$ y compare el resultado con la figura 72*c*).



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.

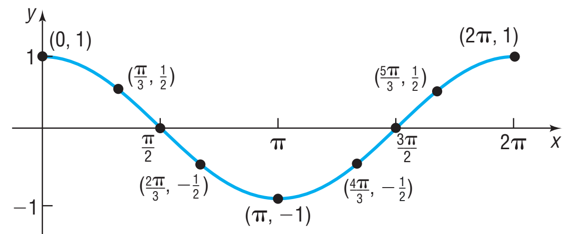
Gráfica de y = cos x

La función coseno también tiene periodo 2π. Se procede como se hizo con la función seno construyendo la tabla 8, que enumera algunos puntos en la gráfica de $y = \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Como lo muestra la tabla, la gráfica de $y = \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, comienza en el punto $(0, 1)$. Cuando x aumenta de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y a π, el valor de y disminuye de 1 a 0 y a -1; cuando x aumenta de π a $\frac{3\pi}{2}$ y a 2π, el valor de y aumenta de -1 a 0 y a 1. Como antes, se grafican los puntos en la tabla 8 para obtener un periodo o ciclo de la gráfica. Vea la figura 73.

Tabla 8

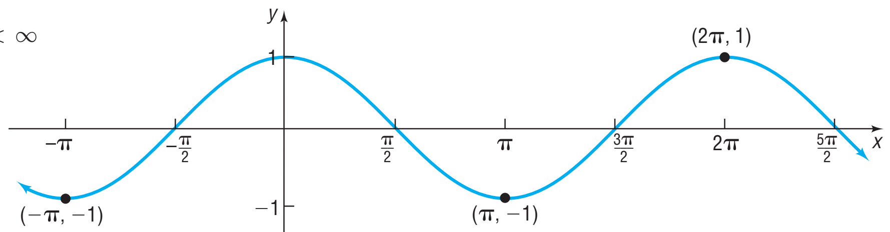
x	y = cos x	(x, y)
0	1	$(0, 1)$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$
π	-1	$(\pi, -1)$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$
2π	1	$(2\pi, 1)$

Figura 73
$y = \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$



Una gráfica más completa de $y = \cos x$ se obtiene repitiendo este periodo en las dos direcciones, como es muestra en la figura 74.

Figura 74
$y = \cos x$, $-\infty < x < \infty$



La gráfica de $y = \cos x$ ilustra algunos hechos que ya se conocen de la función coseno.

Propiedades de la función coseno

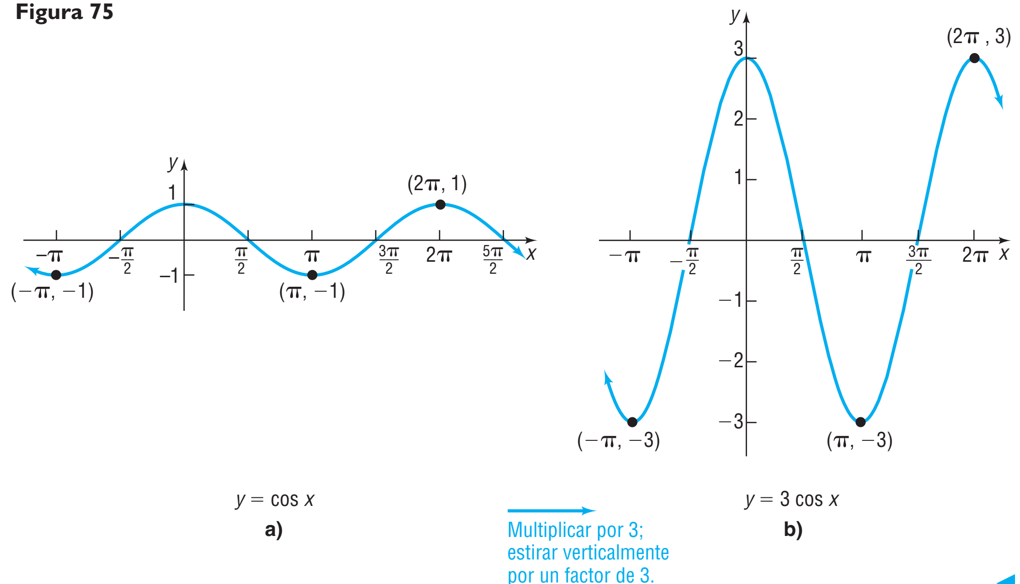
1. El dominio es el conjunto de todos los números reales.
2. El rango consiste en todos los números reales de -1 a 1, inclusive.
3. La función coseno es una función par, como lo indica la simetría de la gráfica respecto del eje y.
4. La función coseno es periódica, con periodo 2π.
5. Las intercepciones x son $\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$; la intercepción y es 1.
6. El valor máximo es 1 y ocurre en $x = \ldots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$; el valor mínimo es -1 y ocurre en $x = \ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$.

2 De nuevo, se pueden usar las técnicas para graficar del capítulo 3 para graficar transformaciones de la función coseno.

EJEMPLO 3 **Gráficas de variaciones de $y = \cos x$ usando transformaciones**

Utilice la gráfica de $y = \cos x$ para graficar $y = 3 \cos x$.

Solución La figura 75 ilustra los pasos.




✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = 3 \cos x$ y compare el resultado con la figura 75.

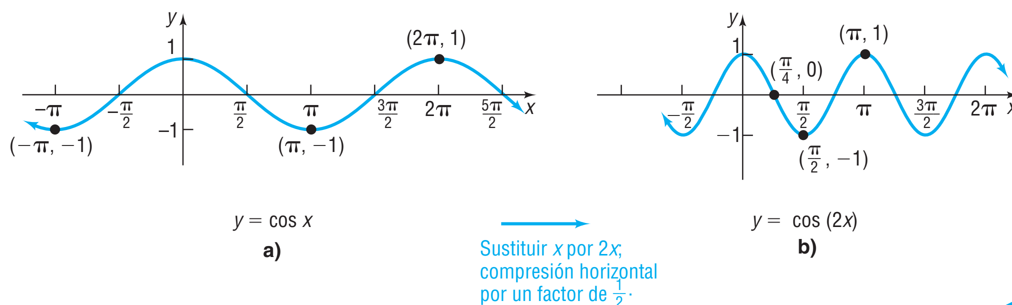
EJEMPLO 4 **Gráficas de variaciones de $y = \cos x$ usando transformaciones**

Utilice la gráfica de $y = \cos x$ para graficar $y = \cos(2x)$.

Solución La figura 76 ilustra la gráfica, que es una compresión horizontal de la gráfica de $y = \cos x$. $\left(\text{Se multiplica cada coordenada } x \text{ por } \frac{1}{2}.\right)$ Observe que, debido

a esta compresión, el periodo de $y = \cos(2x)$ es $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$, mientras que el periodo de $y = \cos x$ es 2π.

Figura 76





✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = \cos(2x)$. Use TRACE para verificar que el periodo es π.

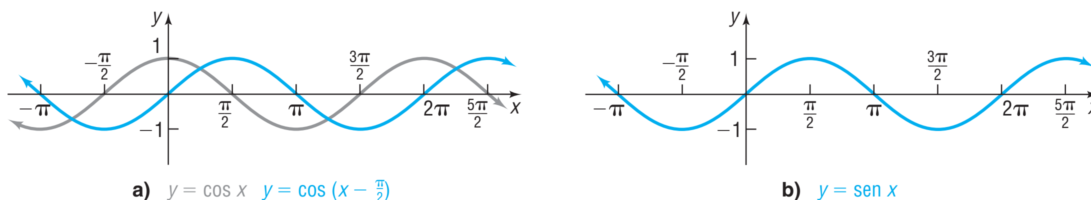


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 33.

Gráficas senoidales

Corra la gráfica de $y = \cos x$ a la derecha $\frac{\pi}{2}$ unidades para obtener la gráfica de $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Vea la figura 77*a*). Ahora vea la gráfica de $y = \text{sen } x$ en la figura 77*b*). Se ve que la gráfica de $y = \text{sen } x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Figura 77



Con base en la figura 77, se concluye que

$$\text{sen } x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

(Se probará este hecho en el capítulo 7). Debido a esta similitud, las gráficas de funciones seno y funciones coseno se conocen como **gráficas senoidales**.

Para ver el concepto

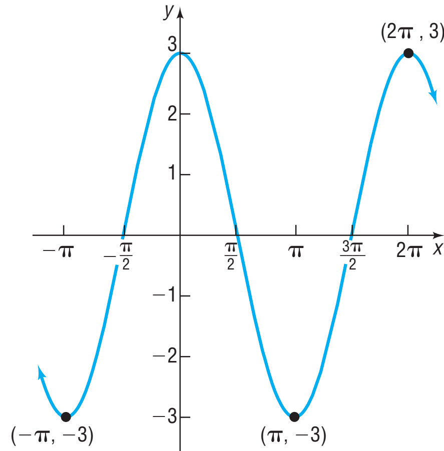


Grafique $Y_1 = \text{sen } x$ y $Y_2 = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. ¿Cuántas gráficas ve?

Se verán algunas propiedades de las gráficas senoidales.

3 En el ejemplo 3 se obtuvo la gráfica de $y = 3 \cos x$, que se reproduce en la figura 78. Observe que los valores de $y = 3 \cos x$ están entre -3 y 3, inclusive.

Figura 78
$y = 3 \cos x$

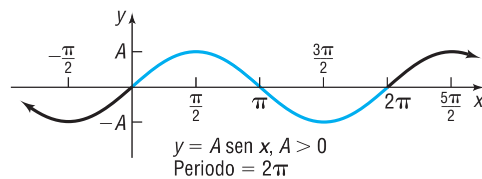


En general, los valores de las funciones $y = A \operatorname{sen} x$ y $y = A \cos x$, donde $A \neq 0$ siempre cumplirán las desigualdades

$$-|A| \leq A \operatorname{sen} x \leq |A| \quad \text{y} \quad -|A| \leq A \cos x \leq |A|$$

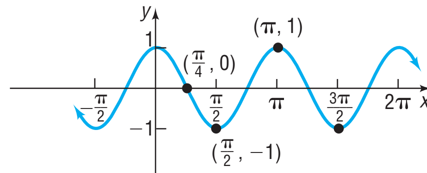
respectivamente. El número $|A|$ se llama **amplitud** de $y = A \operatorname{sen} x$ o $y = A \cos x$. Vea la figura 79.

Figura 79



En el ejemplo 4, se obtiene la gráfica de $y = \cos(2x)$, que se reproduce en la figura 80. Observe que el periodo de esta función es π.

Figura 80
$y = \cos(2x)$



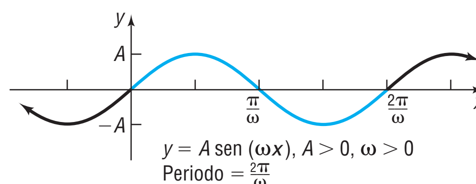
En general, si $\omega > 0$, las funciones $y = \operatorname{sen}(\omega x)$ y $y = \cos(\omega x)$ tendrán periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Para ver por qué, recuerde que la gráfica de $y = \operatorname{sen}(\omega x)$ se obtiene de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ mediante una compresión o un estira-

miento horizontal por un factor de $\frac{1}{\omega}$. Esta compresión horizontal sustituye el intervalo $[0, 2\pi]$, que contiene un periodo de la gráfica de $y = \text{sen } x$, por el intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$, que contiene un periodo de la gráfica de $y = \text{sen}(\omega x)$. El periodo de las funciones $y = \text{sen}(\omega x)$ y $y = \cos(\omega x)$, $\omega > 0$, es $\frac{2\pi}{\omega}$.

Por ejemplo, para la función $y = \cos(2x)$ graficada en la figura 80, $\omega = 2$, de manera que el periodo es $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Un periodo de la gráfica de $y = \text{sen}(\omega x)$ o $y = \cos(\omega x)$ se llama **ciclo**. La figura 81 ilustra la situación general. La parte punteada de la gráfica es un ciclo.

Figura 81



Si $\omega < 0$ en $y = \text{sen}(\omega x)$ o $y = \cos(\omega x)$, se usan las propiedades pares-impares de las funciones seno y coseno como sigue:

$$\text{sen}(-\omega x) = -\text{sen}(\omega x) \quad \text{y} \quad \cos(-\omega x) = \cos(\omega x)$$

Ésta da una forma equivalente en la que el coeficiente de x es positivo. Por ejemplo,

$$\text{sen}(-2x) = -\text{sen}(2x) \quad \text{y} \quad \cos(-\pi x) = \cos(\pi x)$$

Teorema

Si $\omega > 0$, la amplitud y periodo de $y = A\ \text{sen}(\omega x)$ y $y = A\ \text{sen}(\omega x)$ están dados por

$$\text{Amplitud} = |A| \qquad \text{Periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \textbf{(1)}$$

EJEMPLO 5 Buscar la amplitud y el periodo de una función senoidal

Determine la amplitud y el periodo de $y = 3\ \text{sen}(4x)$.

Solución Al comparar $y = 3\ \text{sen}(4x)$ con $y = A\ \text{sen}(\omega x)$, se encuentra que $A = 3$ y $\omega = 4$. De la ecuación (1),

$$\text{Amplitud} = |A| = 3 \qquad \text{Periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

◄



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 41.

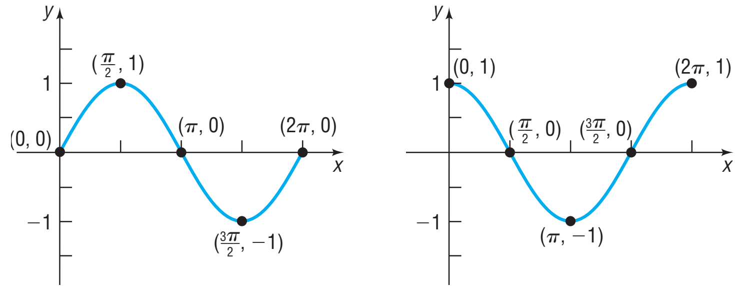
Antes, se graficaron las funciones seno y coseno usando transformaciones. Ahora se introduce otro método que sirve para graficar estas funciones.

La figura 82 muestra un ciclo de las gráficas de $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Observe que cada gráfica consiste en cuatro partes, que corresponden a los cuatro subintervalos.

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \quad \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

Cada subintervalo de longitud $\frac{\pi}{2}$ (el periodo 2π dividido entre 4), y los puntos terminales de estos intervalos dan lugar a cinco puntos clave, como se muestra en la figura 82.

Figura 82



4 Al graficar una función senoidal de la forma $y = A\, \text{sen}(\omega x)$ o $y = A \cos(\omega x)$, se usa la amplitud para determinar los valores máximo y mínimo de la función. El periodo se usa para dividir el eje x en cuatro subintervalos. Los puntos terminales de los subintervalos dan lugar a cinco puntos clave de la gráfica, los cuales se usan para bosquejar un ciclo. Por último, se extiende la gráfica en las dos direcciones para completarla. Se verá un ejemplo.

EJEMPLO 6 Gráfica de una función senoidal

Grafique: $y = 3\, \text{sen}(4x)$

Solución Del ejemplo 5, la amplitud es 3 y el periodo es $\frac{\pi}{2}$. La gráfica de $y = 3\, \text{sen}(4x)$ está entre -3 y 3 en el eje y. Un ciclo comienza en $x = 0$ y termina en $x = \frac{\pi}{2}$.

Se divide el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $\frac{\pi}{2} \div 4 = \frac{\pi}{8}$:

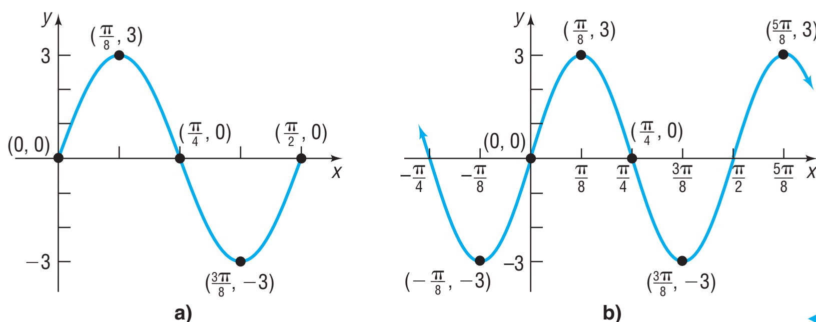
$$\left[0, \frac{\pi}{8}\right], \quad \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right], \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right], \quad \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Los puntos terminales de estos intervalos producen cinco puntos clave de la gráfica:

$$(0, 0), \quad \left(\frac{\pi}{8}, 3\right), \quad \left(\frac{\pi}{4}, 0\right), \quad \left(\frac{3\pi}{8}, -3\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Se grafican estos cinco puntos y se une la gráfica con la curva del seno como se muestra en la figura 83*a*). Si se extiende hacia ambos lados, se obtiene la gráfica completa mostrada en la figura 83*b*).

Figura 83



✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $y = 3\ \text{sen}(4x)$ usando transformaciones.

 ¿Qué método para graficar prefiere?



✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $y = 3\ \text{sen}(4x)$ usando un dispositivo de graficación.

[**Sugerencia:** Use la amplitud para establecer *Y*mín, *Y*máx. Use el periodo para establecer *X*mín, *X*máx].

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

EJEMPLO 7 Bucar la amplitud y el periodo de una función senoidal y su gráfica

Determine la amplitud y el periodo de $y = -4\cos(\pi x)$, y grafique la función.

Solución Al comparar $y = -4\cos(\pi x)$ con $y = A\cos(\omega x)$, se encuentra que $A = -4$ y $\omega = \pi$. La amplitud es $|A| = |-4| = 4$, y el periodo de $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

La gráfica de $y = -4\cos(\pi x)$ está entre -4 y 4 en el eje y. Un ciclo comienza en $x = 0$ y termina en $x = 2$. Se divide el intervalo $[0, 2]$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $2 \div 4 = \dfrac{1}{2}$:

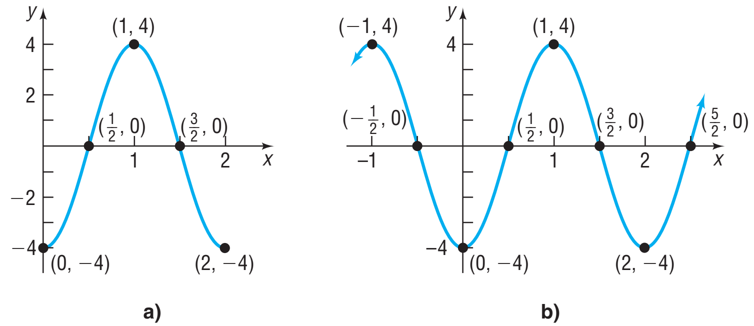
$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad \left[1, \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

Los cinco puntos de la gráfica son

$$(0, -4), \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad (1, 4), \quad \left(\frac{3}{2}, 0\right), \quad (2, -4)$$

Se grafican estos puntos y se unen con la gráfica de la función coseno como se muestra en la figura 84*a*). Se extiende la gráfica en ambas direcciones y se obtiene la figura 84*b*).

Figura 84



✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $y = -4\cos(\pi x)$ usando transformaciones.

¿Qué método para graficar prefiere?



✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = -4\cos(\pi x)$ usando una calculadora gráfica.

EJEMPLO 8 Buscar la amplitud y el periodo de una función senoidal y su gráfica

Determine la amplitud y el periodo de $y = 2\,\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right)$, y grafique la función.

Solución Como la función seno es impar, se utiliza la forma equivalente:

$$y = -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Al comparar con $y = A\,\text{sen}(\omega x)$, se encuentra que $A = -2$ y $\omega = \dfrac{\pi}{2}$. La amplitud es $|A| = 2$, y el periodo es $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

La gráfica de $y = -2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ está entre -2 y 2 en el eje y. Un ciclo comienza en $x = 0$ y termina en $x = 4$. Se divide el intervalo $[0, 4]$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $4 \div 4 = 1$:

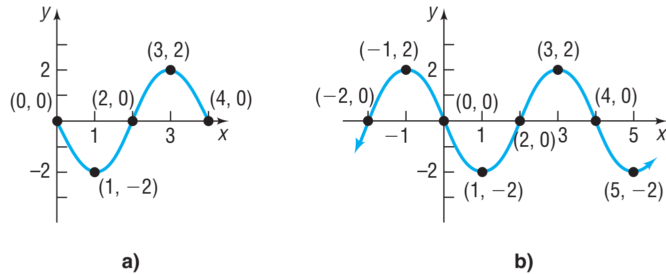
$$[0, 1], \quad [1, 2], \quad [2, 3], \quad [3, 4]$$

Los cinco puntos clave de la gráfica son

$$(0, 0), \quad (1, -2), \quad (2, 0), \quad (3, 2), \quad (4, 0)$$

Se grafican estos puntos y se unen con la gráfica de la función seno, como se muestra en la figura 85*a*). Al extender la gráfica en las dos direcciones se obtiene la gráfica de la figura 85*b*).

Figura 85



✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $y = 2\ \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}x\right)$ usando transformaciones.

 ¿Qué método para graficar prefiere?

 ✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = 2\ \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}x\right)$ usando un dispositivo de graficación.

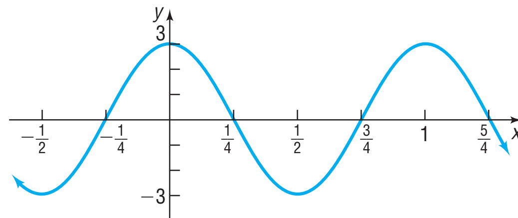
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 61.

5 También se pueden usar las ideas de amplitud y periodo para identificar funciones senoidales a partir de su gráfica.

EJEMPLO 9 Buscar una ecuación para una gráfica senoidal

Encuentre una ecuación para la gráfica mostrada en la figura 86.

Figura 86



Solución La gráfica tiene las características de la función coseno. ¿Por qué? Entonces la ecuación se ve como una función coseno $y = A \cos(\omega x)$ con $A = 3$ y periodo $T = 1$. Así, $\frac{2\pi}{\omega} = 1$, de manera que $\omega = 2\pi$. La función coseno cuya gráfica se da en la figura 86 es

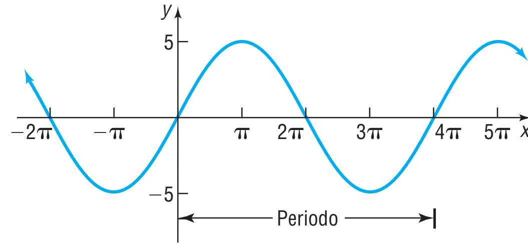
$$y = A\cos(\omega x) = 3\cos(2\pi x)$$

 ✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = 3\cos(2\pi x)$ y compare el resultado con la figura 86.

EJEMPLO 10 **Buscando una ecuación para una gráfica senoidal**

Encuentre una ecuación para la gráfica mostrada en la figura 87.

Figura 87



Solución Esta gráfica tiene las características de una función seno* $y = A\ \text{sen}(\omega x)$ con $A = 5$. Se observa que el periodo T es 4π. Por la ecuación (1),

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$4\pi = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

La función seno cuya gráfica se da en la figura 87 es

$$y = A\ \text{sen}(\omega x) = 5\ \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$$

◀



✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = 5\ \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ y compare el resultado con la figura 87.



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 71 Y 75.

*También se observa la grafica como una función coseno con un corrimiento horizontal, pero verla como una función seno es más sencillo, porque la gráfica pasa por el origen.

6.6 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Use transformaciones para graficar $y = 3x^2$. (pp. 262–271)
2. Use transformaciones para graficar $y = -x^2$. (pp. 262–271)

Conceptos y vocabulario

3. El valor máximo de $y = \text{sen}\ x$ es ________ y ocurre en x = ________.
4. La función $y = A\ \text{sen}(\omega x)$, $A > 0$, tiene amplitud 3 y periodo 2; entonces, A = __________ y ω = __________.
5. La función $y = 3\cos(6x)$ tiene amplitud ____________ y periodo ________.
6. *Falso o verdadero:* las gráficas de $y = \text{sen}\ x$ y $y = \cos x$ son idénticas, excepto por un corrimiento horizontal.
7. *Falso o verdadero:* para $y = 2\ \text{sen}(\pi x)$, la amplitud es 2 y el periodo es $\frac{\pi}{2}$.
8. *Falso o verdadero:* la gráfica de la función seno tiene un número infinito de intercepciones x.

Ejercicios

En los problemas 9-18, responda cada pregunta y vea las gráficas si es necesario.

9. ¿Cuál es la intercepción y de $y = \text{sen } x$?

10. ¿Cuál es la intercepción y de $y = \cos x$?

11. ¿Para qué números x, $-\pi \leq x \leq \pi$, la gráfica de $y = \text{sen } x$ es creciente?

12. ¿Para qué números x, $-\pi \leq x \leq \pi$, la gráfica de $y = \cos x$ es creciente?

13. ¿Cuál es el valor más grande de $y = \text{sen } x$?

14. ¿Cuál es el valor menor de $y = \cos x$?

15. ¿Para qué números x, $0 \leq x \leq 2\pi$, ocurre que $\text{sen } x = 0$?

16. ¿Para qué números x, $0 \leq x \leq 2\pi$, ocurre que $\cos x = 0$?

17. ¿Para qué números x, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, ocurre que $\text{sen } x = 1$? ¿Y $\text{sen } x = -1$?

18. ¿Para qué números x, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, ocurre que $\cos x = 1$? ¿Y $\cos x = -1$?

En los problemas 19 y 20, asigne una función a cada gráfica. Hay tres respuestas posibles.

A. $y = -\text{sen } x$

B. $y = -\cos x$

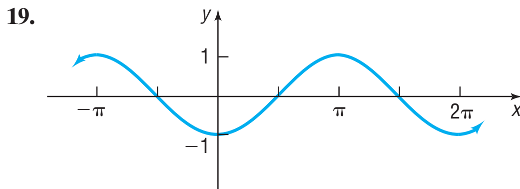
C. $y = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

D. $y = -\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

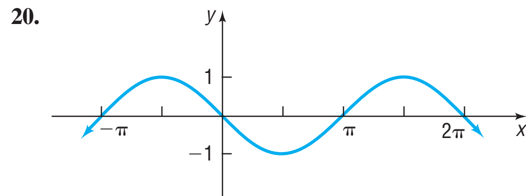
E. $y = \text{sen}(x + \pi)$

F. $y = \cos(x + \pi)$

19.



20.



En los problemas 21-36, use transformaciones para graficar cada función.

21. $y = 3 \text{ sen } x$

22. $y = 4 \cos x$

23. $y = -\cos x$

24. $y = -\text{sen } x$

25. $y = \text{sen } x - 1$

26. $y = \cos x + 1$

27. $y = \text{sen}(x - \pi)$

28. $y = \cos(x + \pi)$

29. $y = \text{sen}(\pi x)$

30. $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

31. $y = 2 \text{ sen } x + 2$

32. $y = 3 \cos x + 3$

33. $y = 4 \cos(2x)$

34. $y = 3 \text{ sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)$

35. $y = -2 \text{ sen } x + 2$

36. $y = -3 \cos x - 2$

En los problemas 37-46, determine la amplitud y el periodo de cada función sin graficarla.

37. $y = 2 \text{ sen } x$

38. $y = 3 \cos x$

39. $y = -4 \cos(2x)$

40. $y = -\text{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)$

41. $y = 6 \text{ sen}(\pi x)$

42. $y = -3 \cos(3x)$

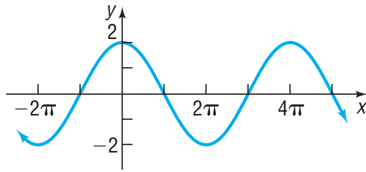
43. $y = -\dfrac{1}{2} \cos\left(\dfrac{3}{2}x\right)$

44. $y = \dfrac{4}{3} \text{ sen}\left(\dfrac{2}{3}x\right)$

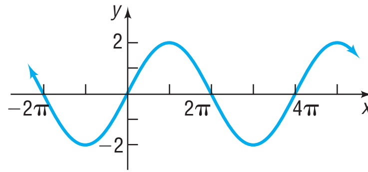
45. $y = \dfrac{5}{3} \text{ sen}\left(-\dfrac{2\pi}{3}x\right)$

46. $y = \dfrac{9}{5} \cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}x\right)$

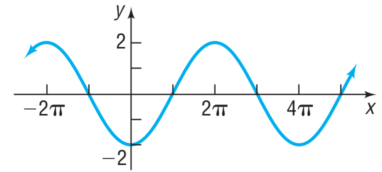
En los problemas 47-56, asigne la función dada a una de las gráficas A) *a* J).



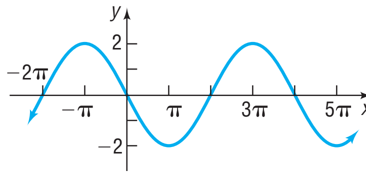
A)



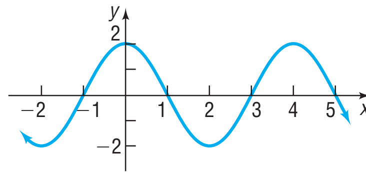
B)



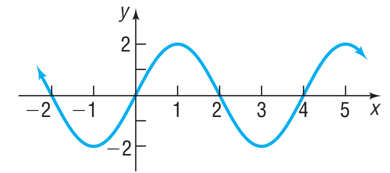
C)



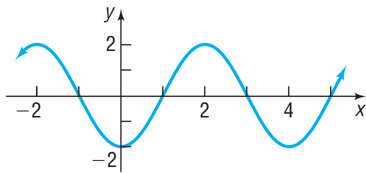
D)



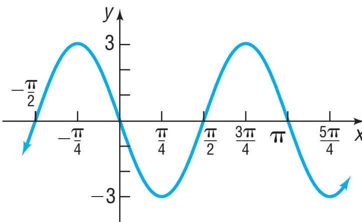
E)



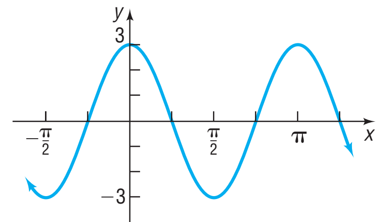
F)



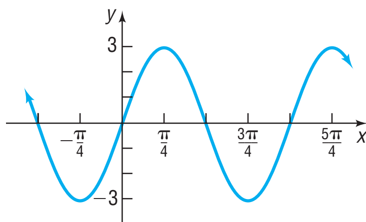
G)



H)



I)



J)

47. $y = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

48. $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

49. $y = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

50. $y = 3\cos(2x)$

51. $y = -3\,\text{sen}(2x)$

52. $y = 2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

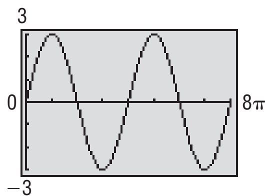
53. $y = -2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

54. $y = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

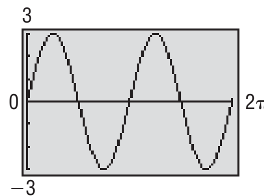
55. $y = 3\,\text{sen}(2x)$

56. $y = -2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

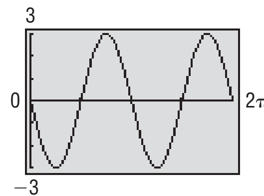
En los problemas 57-60, asigne la función dada a una de las gráficas A) *a* D).



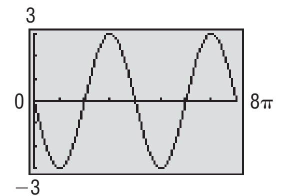
A)



B)



C)



D)

57. $y = 3\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

58. $y = -3\,\text{sen}(2x)$

59. $y = 3\,\text{sen}(2x)$

60. $y = -3\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

En los problemas 61-70, grafique cada función senoidal.

61. $y = 5\,\text{sen}(4x)$

62. $y = 4\cos(6x)$

63. $y = 5\cos(\pi x)$

64. $y = 2\,\text{sen}(\pi x)$

65. $y = -2\cos(2\pi x)$

66. $y = -5\cos(2\pi x)$

67. $y = -4\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

68. $y = -2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

69. $y = \frac{3}{2}\,\text{sen}\left(-\frac{2}{3}x\right)$

70. $y = \frac{4}{3}\cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$

En los problemas 71-74, escriba la ecuación de una función seno que tenga las características dadas.

71. Amplitud: 3
Periodo: π

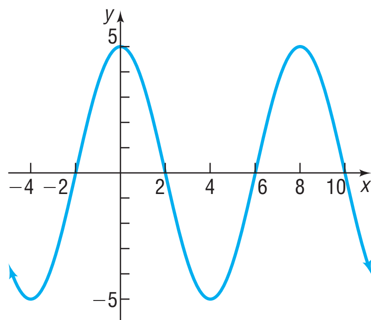
72. Amplitud: 2
Periodo: 4π

73. Amplitud: 3
Periodo: 2

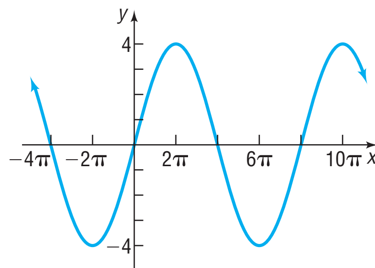
74. Amplitud: 4
Periodo: 1

En los problemas 75-88, encuentre una ecuación para cada gráfica.

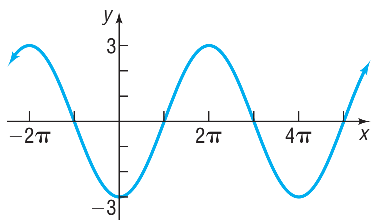
75.



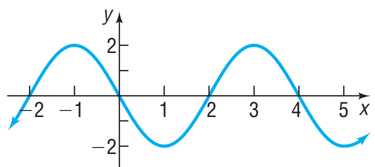
76.



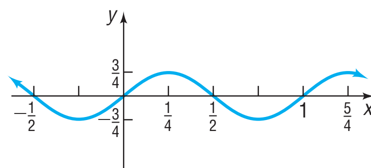
77.



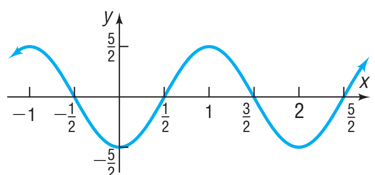
78.



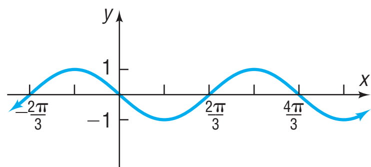
79.



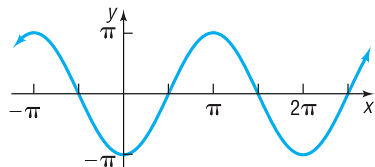
80.



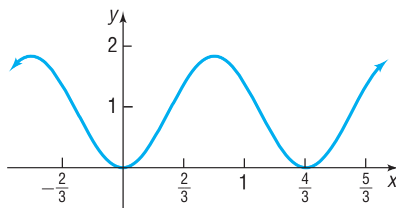
81.



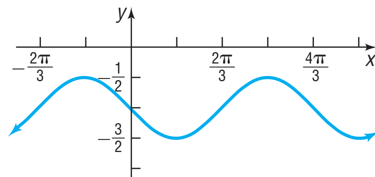
82.



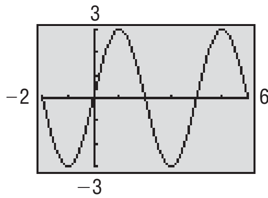
83.



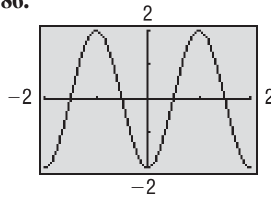
84.



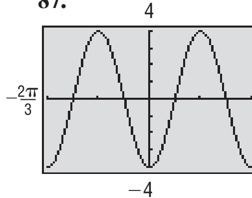
85.



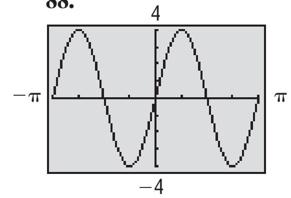
86.



87.



88.



89. Circuitos de corriente alterna (ca) La corriente I, en amperes, que fluye por un circuito de ca (corriente alterna) en el tiempo t es

$$I = 220 \operatorname{sen}(60\pi t), \qquad t \geq 0$$

¿Cuál es el periodo? ¿Cuál es la amplitud? Grafique esta función para dos periodos.

90. Circuitos de corriente alterna (ca) La corriente I, en amperes, que fluye por un circuito de ca (corriente alterna) en el tiempo t es

$$I = 120 \operatorname{sen}(30\pi t), \qquad t \geq 0$$

¿Cuál es el periodo? ¿Cuál es la amplitud? Grafique esta función para dos periodos.

91. Generadores de corriente alterna (ca) El voltaje V producido por un generador de ca es

$$V = 220 \operatorname{sen}(120\pi t)$$

a) ¿Cuál es la amplitud? ¿Cuál es el periodo?
b) Grafique V para dos periodos, comenzando en $t = 0$.
c) Si está presente una resistencia de $R = 10$ ohms, ¿cuál es la corriente I?
[**Sugerencia:** use la ley de Ohm, $V = IR$].
d) ¿Cuáles son la amplitud y el periodo de la corriente I?
e) Grafique I para dos periodos, comenzando en $t = 0$.

92. Generadores de corriente alterna (ca) El voltaje V producido por un generador de ca es

$$V = 120 \operatorname{sen}(120\pi t)$$

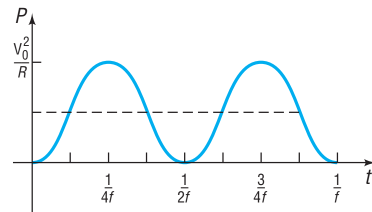
a) ¿Cuál es la amplitud? ¿Cuál es el periodo?
b) Grafique V para dos periodos, comenzando en $t = 0$.
c) Si está presente una resistencia de $R = 20$ ohms, ¿cuál es la corriente I?
[**Sugerencia:** use la ley de Ohm, $V = IR$].
d) ¿Cuáles son la amplitud y el periodo de la corriente I?
e) Grafique I para dos periodos, comenzando en $t = 0$.

93. Generadores de corriente alterna (ca) El voltaje V producido por un generador de ac es senoidal. Como una función del tiempo, el voltaje V es

$$V = V_0 \operatorname{sen}(2\pi f t)$$

donde f es la **frecuencia**, el número de oscilaciones completas (ciclos) por segundo. [En Estados Unidos, Canadá y México, f es 60 hertz (Hz)]. La **potencia** P entregada a una resistencia R en el tiempo t se define como

$$P = \frac{V^2}{R}$$



Potencia en un generador de ac

a) Demuestre que $P = \dfrac{V_0^2}{R}\operatorname{sen}^2(2\pi f t)$.
b) La gráfica de P se muestra en la figura. Exprese P como una función senoidal.
c) Deduzca que

$$\operatorname{sen}^2(2\pi f t) = \frac{1}{2}[1 - \cos(4\pi f t)]$$

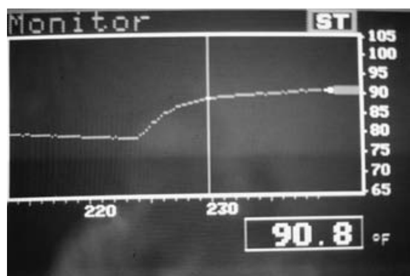
94. Biorritmos En la teoría de biorritmos, se usa una función seno de la forma

$$P = 50 \operatorname{sen}(\omega t) + 50$$

para medir el porcentaje P del potencial de una persona en el tiempo t, donde t se mide en días y $t = 0$ es la fecha de nacimiento de la persona. Comúnmente se miden tres características:

Potencial físico: periodo de 23 días
Potencial emocional: periodo de 28 días
Potencial intelectual: periodo de 33 días

a) Encuentre ω para cada característica.
b) Grafique las tres funciones.
c) ¿Existe un tiempo t en que las tres características tengan un potencial de 100%? ¿Cuál es?
d) Suponga que hoy tiene 20 años ($t = 7305$ días). Describa su potencial físico, emocional e intelectual para los siguientes 30 días.



95. Grafique $y = |\cos x|, -2\pi \leq x \leq 2\pi$.

96. Grafique $y = |\text{sen } x|, -2\pi \leq x \leq 2\pi$.

97. Haga un bosquejo de $y = \text{sen } x$. Etiquete por lo menos cinco puntos.



98. Explique qué escala utilizaría en el eje x y el eje y antes de graficar $y = 3\cos(\pi x)$.

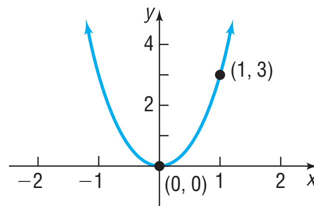
99. Explique el término *amplitud* respecto de su relación con la gráfica de una función senoidal.

100. Explique cómo se usan la amplitud y el periodo para establecer la escala de cada eje coordenado.

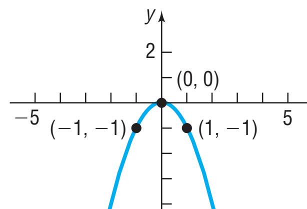
101. Encuentre una aplicación en el campo de su interés que lleve a una gráfica senoidal. Escriba un resumen de lo que encontró.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. Estiramiento vertical por un factor de 3



2. Reflexión en el eje x.



6.7 Gráficas de las funciones tangente, cotangente, cosecante y secante

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Asíntotas verticales (sección 4.3, pp. 333-335)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 570.

OBJETIVOS
1 Graficar transformaciones de las funciones tangente y cotangente
2 Graficar transformaciones de las funciones cosecante y secante

Graficas de $y = \tan x$ y $y = \cot x$

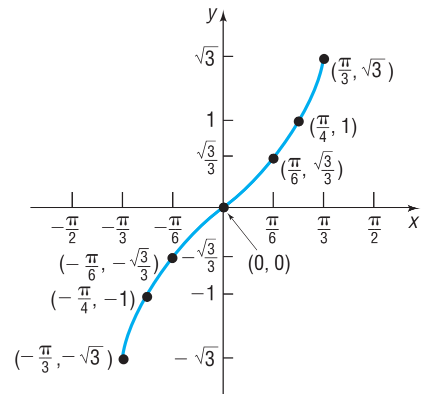
1 Debido a que la función tangente tiene periodo π, sólo es necesario determinar la gráfica en un intervalo de longitud π. El resto de la gráfica consiste en repeticiones. Como la función tangente no está definida en $\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$, se concentrará la atención en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, de longitud π, y se construye la tabla 9, que da algunos puntos de la gráfica de $y = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Se grafican los puntos en la tabla y se conectan con una curva suave. Vea en la figura 88 una gráfica parcial de $y = \tan x$, donde $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

Tabla 9

x	$y = \tan x$	(x, y)
$-\frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3} \approx -1.73$	$\left(-\frac{\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$
$-\frac{\pi}{4}$	-1	$\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0.58$	$\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
0	0	(0, 0)
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.58$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	1	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3} \approx 1.73$	$\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$

Figura 88

$y = \tan x,\ -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}$



Para completar un periodo de la gráfica de $y = \tan x$, debe investigarse el comportamiento de la función cuando x se acerca a $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Sin embargo, debe tenerse cuidado, porque $y = \tan x$ no está definida para estos números. Para determinar este comportamiento, se usa la identidad

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Vea la tabla 10. Si x está cerca de $\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$, pero sigue siendo menor que $\frac{\pi}{2}$, entonces sen x es cercano a 1 y cos x es positivo y cercano a 0. (Repase las gráficas del seno y el coseno). Entonces, la razón $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es positiva y grande. De hecho, cuanto más cerca está x de $\frac{\pi}{2}$, sen x se acerca más a 1 y cos x a 0, de manera que tan x tiende a ∞ $\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty\right)$. En otras palabras, la recta vertical $x = \pi/2$ es una asíntota vertical, la recta vertical $x = \frac{\pi}{2}$ es una asíntota vertical de la gráfica de $y = \tan x$.

Tabla 10

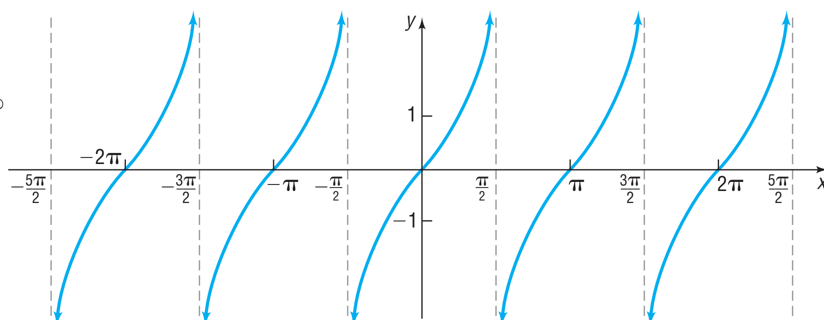
x	sen x	cos x	$y = \tan x$
$\frac{\pi}{3} \approx 1.05$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} \approx 1.73$
1.5	0.9975	0.0707	14.1
1.57	0.9999	$7.96E^{-4}$	1255.8
1.5707	0.9999	$9.6E^{-5}$	10381
$\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$	1	0	No definida

Si x esta cerca de $-\frac{\pi}{2}$, pero es mayor que $-\frac{\pi}{2}$, entonces sen x es cercano a -1 y cos x es positivo y cercano a 0. De esta manera, la razón $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$ tiende a $-\infty$ $\left(\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty\right)$. En otras palabras, la recta vertical $x = -\frac{\pi}{2}$ también es una asíntota vertical de la gráfica.

Con estas observaciones, se completa un periodo de la gráfica. La gráfica completa de $y = \tan x$ se obtiene repitiendo este periodo, como se muestra en la figura 89.

Figura 89

$y = \tan x$, $-\infty < x < \infty$, x diferente de los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, $-\infty < y < \infty$





✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = \tan x$ y compare el resultado con la figura 89. Use TRACE para ver qué ocurre cuando x se acerca a $\frac{\pi}{2}$, pero es menor que $\frac{\pi}{2}$. Asegúrese de establecer la ventana correctamente y use el modo de puntos (DOT mode).

La gráfica de $y = \tan x$ ilustra algunas características que ya se conocen de la función tangente.

Propiedades de la función tangente

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
2. El rango es el conjunto de todos los números reales.
3. La función tangente es una función impar, como lo indica la simetría de la gráfica respecto del origen.
4. La función tangente es periódica, con periodo π.
5. Las intercepciones x son $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$; la intercepción y es 0.
6. Las asíntotas verticales ocurre en $x = \ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$.



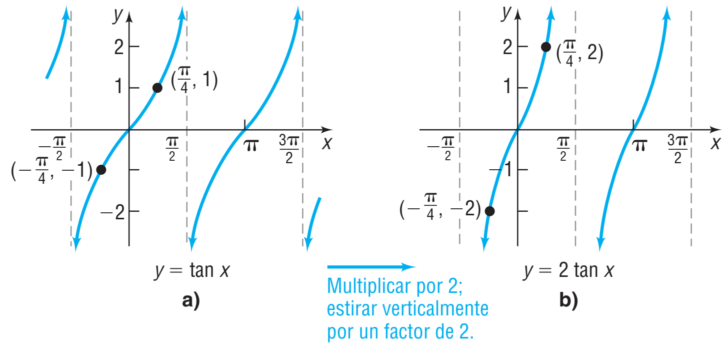
TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **7** Y **15**.

EJEMPLO 1 Gráficas de variaciones de $y = \tan x$ usando transformaciones

Grafique: $y = 2 \tan x$

Solución Se comienza con la gráfica de $y = \tan x$ y se hace un estiramiento vertical por un factor de 2. Vea la figura 90.

Figura 90





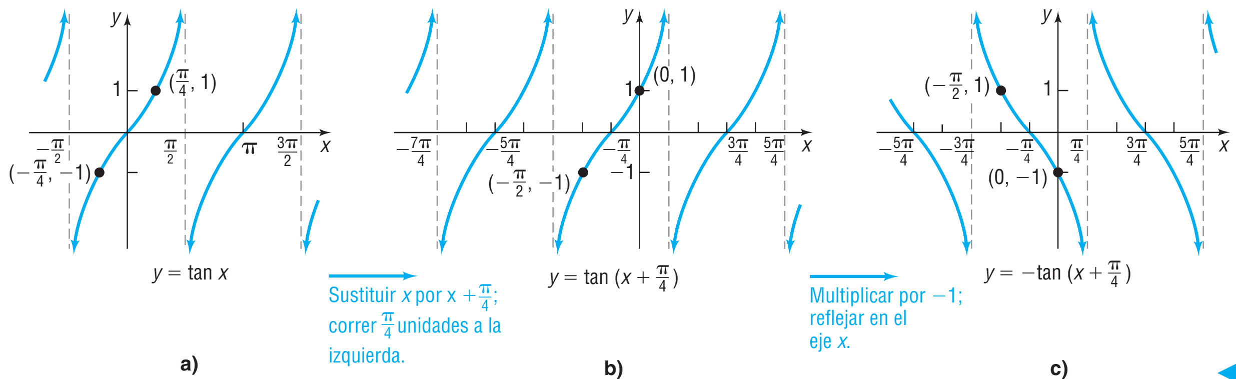
✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = 2 \tan x$ y compare el resultado con la figura 90*b*).

EJEMPLO 2 Gráficas de variaciones de $y = \tan x$ usando transformaciones

Grafique: $y = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Solución Se comienza con la gráfica de $y = \tan x$. Vea la figura 91.

Figura 91





✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ y compare el resultado con la figura 91*c*).



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.

La gráfica de $y = \cot x$ se obtiene igual que la gráfica de $y = \tan x$. El periodo de $y = \cot x$ es π. Como la función cotangente no está definida para

Tabla 11

x	$y = \cot x$	(x, y)
$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$	$\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	1	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	-1	$\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3}$	$\left(\frac{5\pi}{6}, -\sqrt{3}\right)$

múltiplos enteros de π, la atención se centra en el intervalo $(0, \pi)$. La tabla 11 muestra algunos puntos de la gráfica de $y = \cot x$, $0 < x < \pi$. Cuando x se acerca a 0, pero es mayor que 0, el valor de $\cos x$ es cercano a 1 y el valor de $\operatorname{sen} x$ es positivo y cercano a 0. Entonces, la razón $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$ será positiva y grande; así, cuando x se acerca a 0, con $x > 0$, $\cot x$ se acerca a $\infty \left(\lim_{x \to 0^+} \cot x = \infty\right)$. Asimismo, como x se acerca a π, pero es menor que π, el valor de $\cos x$ es cercano a -1, y el valor de $\operatorname{sen} x$ es positivo y cercano a 0. Por lo tanto, la razón $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$ es negativa y tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a $\pi \left(\lim_{x \to \pi^-} \cot x = -\infty\right)$. La figura 92 muestra la gráfica.

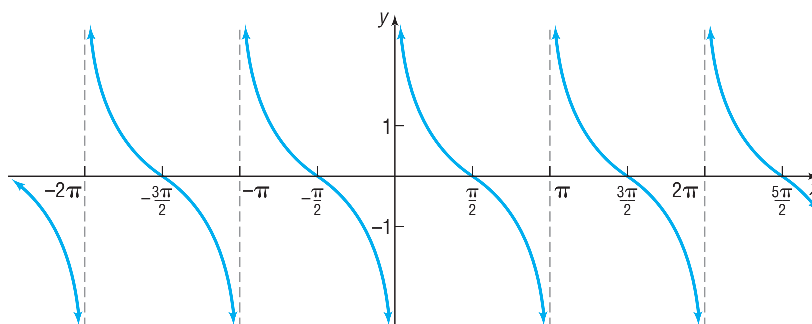


Figura 92
$y = \cot x$, $-\infty < x < \infty$, con x diferente de los múltiplos enteros de π, $-\infty < y < \infty$



✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = \cot x$ y compare el resultado con la figura 92. Use TRACE para ver qué ocurre cuando x se acerca a 0.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

Gráficas de $y = \csc x$ y $y = \sec x$



Las funciones cosecante y secante, que suelen llamarse **funciones recíprocas**, se grafican usando las identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \text{y} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Por ejemplo, el valor de la función cosecante $y = \csc x$ en un número dado x es igual al recíproco del valor correspondiente de la función seno, siempre que ese valor no sea 0. Si el valor de $\operatorname{sen} x$ es 0, en tales números x, la función cosecante no está definida. De hecho, la gráfica de la función cosecante tiene asíntotas verticales en los múltiplos enteros de π. La figura 93 muestra la gráfica.

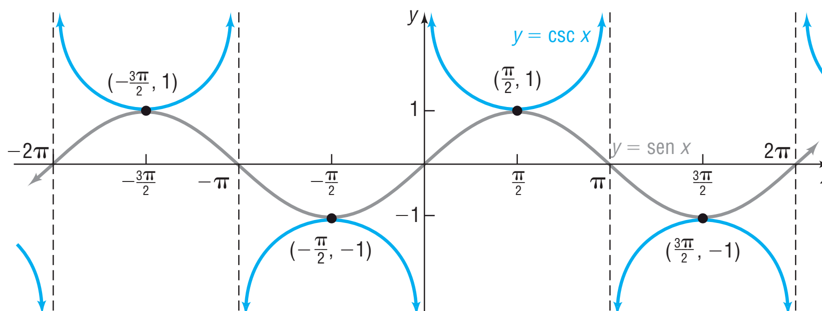


Figura 93
$y = \csc x$, $-\infty < x < \infty$, con x diferente de los múltiplos enteros de π, $|y| \geq 1$



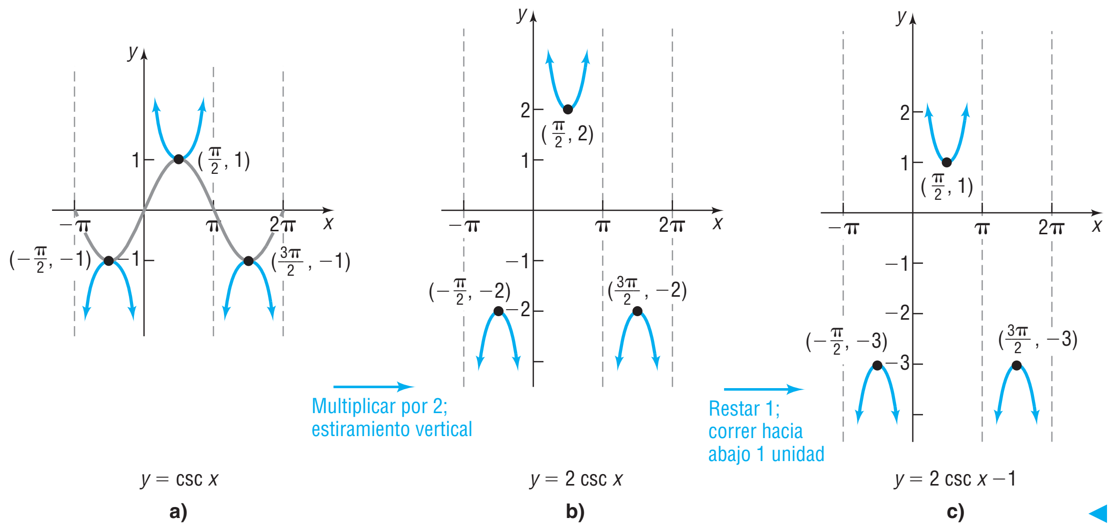
✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = \csc x$ y compare el resultado con la figura 93. Use TRACE para ver qué ocurre cuando x se acerca a 0.

EJEMPLO 3 Gráficas de variaciones de $y = \csc x$ usando transformaciones

Grafique: $y = 2 \csc x - 1$

Solución La figura 94 muestra los pasos necesarios.

Figura 94





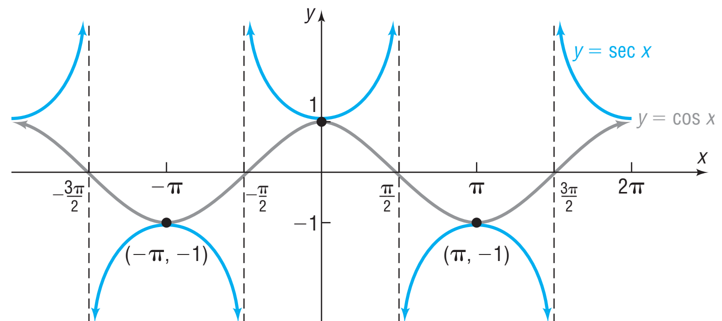
✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = 2 \csc x - 1$ y compare el resultado con la figura 94.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37.

Si se usa la idea de los recíprocos, la gráfica de $y = \sec x$ se puede obtener de manera similar. Vea la figura 95.

Figura 95
$y = \sec x$, $-\infty < x < \infty$, con x diferente de los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, $|y| \geq 1$



6.7 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas mostradas en azul.*

1. La gráfica de $y = \dfrac{3x - 6}{x - 4}$ tiene una asíntota vertical. ¿Cuál es? (pp. 333–335)

2. *Falso o verdadero:* si una función f tiene asíntota vertical $x = c$, entonces $f(c)$ no está definido. (pp. 333–335)

Conceptos y vocabulario

3. La gráfica de $y = \tan x$ es simétrica respecto de __________ y tiene asíntotas verticales en __________.

4. La gráfica de $y = \sec x$ es simétrica respecto de __________ y tiene asíntotas verticales en __________.

5. Lo más sencillo para graficar $y = \sec x$ es primero hacer un bosquejo de __________.

6. *Falso o verdadero:* las gráficas de $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$ y $y = \csc x$ tienen cada una un número infinito de asíntotas verticales.

Ejercicios

En los problemas 7-16, si es necesario, vea las gráficas para responder cada pregunta.

7. ¿Cuál es la intercepción y de $y = \tan x$?

8. ¿Cuál es la intercepción y de $y = \cot x$?

9. ¿Cuál es la intercepción y de $y = \sec x$?

10. ¿Cuál es la intercepción y de $y = \csc x$?

11. ¿Para qué números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que $\sec x = 1$? ¿Y $\sec x = -1$?

12. ¿Para qué números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que $\csc x = 1$? ¿Y $\csc x = -1$?

13. ¿Para qué números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, la gráfica de $y = \sec x$ tiene asíntotas verticales?

14. ¿Para qué números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, la gráfica de $y = \csc x$ tiene asíntotas verticales?

15. ¿Para qué números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, la gráfica de $y = \tan x$ tiene asíntotas verticales?

16. ¿Para qué números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, la gráfica de $y = \cot x$ tiene asíntotas verticales?

En los problemas 17-20, asigne cada función a su gráfica.

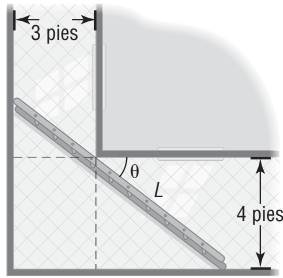
A. $y = -\tan x$ B. $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ C. $y = \tan(x + \pi)$ D. $y = -\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

17. **18.** **19.** **20.**

En los problemas 21-40, use transformaciones para graficar cada función.

21. $y = -\sec x$
22. $y = -\cot x$
23. $y = \sec\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
24. $y = \csc(x - \pi)$
25. $y = \tan(x - \pi)$
26. $y = \cot(x - \pi)$
27. $y = 3\tan(2x)$
28. $y = 4\tan\left(\dfrac{1}{2}x\right)$
29. $y = \sec(2x)$
30. $y = \csc\left(\dfrac{1}{2}x\right)$
31. $y = \cot(\pi x)$
32. $y = \cot(2x)$
33. $y = -3\tan(4x)$
34. $y = -3\tan(2x)$
35. $y = 2\sec\left(\dfrac{1}{2}x\right)$
36. $y = 2\sec(3x)$
37. $y = -3\csc\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
38. $y = -2\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
39. $y = \dfrac{1}{2}\cot\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
40. $y = 3\sec\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

41. Cargar una escalera a la vuelta de una esquina Dos corredores, uno con 3 pies de ancho y el otro con 4 pies de ancho, se unen en ángulo recto. Vea la ilustración.



a) Demuestre que la longitud L del segmento de recta mostrado como función del ángulo θ es

$$L(\theta) = 3 \sec \theta + 4 \csc \theta$$

b) Grafique L, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

c) ¿Para qué valor de θ es L menor?

d) ¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que puede dar la vuelta a la esquina? ¿Por qué este valor también es el menor valor de L?

42. Exploración Grafique

$$y = \tan x \quad \text{y} \quad y = -\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

¿Piensa que $\tan x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $x = 4$ **2.** Verdadero

6.8 Corrimiento de fase; ajuste con curvas senoidales

OBJETIVOS
1. Determinar el corrimiento de fase de una función senoidal
2. Graficar funciones senoidales: $y = A\,\text{sen}(\omega x - \phi)$
3. Encontrar una función senoidal a partir de datos

Corrimiento de fase

1 Se ha visto que la gráfica de $y = A\,\text{sen}(\omega x)$, $\omega > 0$ tiene amplitud $|A|$ y periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Se podría dibujar un ciclo cuando x varía de 0 a $\frac{2\pi}{\omega}$ o, de manera equivalente, cuando ωx varía de 0 a 2π. Vea la figura 96.

Se desea analizar la gráfica de

$$y = A\,\text{sen}(\omega x - \phi)$$

que también se escribe como

$$y = A\,\text{sen}\left[\omega\left(x - \frac{\phi}{\omega}\right)\right]$$

donde $\omega > 0$ y ϕ (la letra griega fi) son números reales. La gráfica será una curva seno de amplitud $|A|$. Cuando $\omega x - \phi$ varía de 0 a 2π, se reconstruye un periodo. Este periodo comienza cuando

$$\omega x - \phi = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{\phi}{\omega}$$

y termina cuando

$$\omega x - \phi = 2\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{\phi}{\omega}$$

Vea la figura 97.

Figura 96
Un ciclo de $y = A\,\text{sen}(\omega x)$, $A > 0$, $\omega > 0$

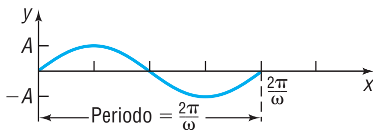
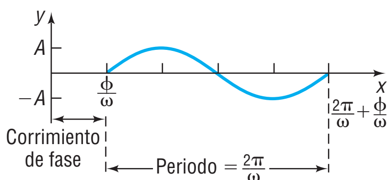


Figura 97
Un ciclo de $y = A\,\text{sen}(\omega x - \phi)$, $A > 0$, $\omega > 0$, $\phi > 0$



Se ve que la gráfica de $y = A\,\text{sen}(\omega x - \phi) = A\,\text{sen}\left[\omega\left(x - \frac{\phi}{\omega}\right)\right]$ es la misma que la gráfica de $y = A$ sen(ωx), excepto que se ha corrido $\frac{\phi}{\omega}$ unidades (a la derecha si $\phi > 0$ y a la izquierda si $\phi < 0$). Este número $\frac{\phi}{\omega}$ se llama **corrimiento de fase** de la gráfica de $y = A$ sen $(\omega x - \phi)$.

Para las gráficas de $y = A\,\text{sen}(\omega x - \phi)$ o $y = A\cos(\omega x - \phi)$, $\omega > 0$,

$$\text{Amplitud} = |A| \qquad \text{Periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{Corrimiento de fase} = \frac{\phi}{\omega}$$

El corrimiento de fase es a la izquierda si $\phi < 0$ y a la derecha si $\phi > 0$.



EJEMPLO 1 Buscar la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de una función senoidal y su gráfica

Encuentre la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de $y = 3$ sen$(2x - \pi)$, y grafique la función.

Solución Al comparar

$$y = 3\,\text{sen}(2x - \pi) = 3\,\text{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

con

$$y = A\,\text{sen}(\omega x - \phi) = A\,\text{sen}\left[\omega\left(x - \frac{\phi}{\omega}\right)\right]$$

se encuentra que $A = 3, \omega = 2$ y $\phi = \pi$. La gráfica es un curva seno con amplitud $|A| = 3$, periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, y corrimiento de fase $= \frac{\phi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$.

La gráfica de $y = 3$ sen$(2x - \pi)$ está entre -3 y 3 en el eje y. Un ciclo comienza en $x = \frac{\phi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$ y termina en $x = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{\phi}{\omega} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$. Se divide el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $\pi \div 4 = \frac{\pi}{4}$:

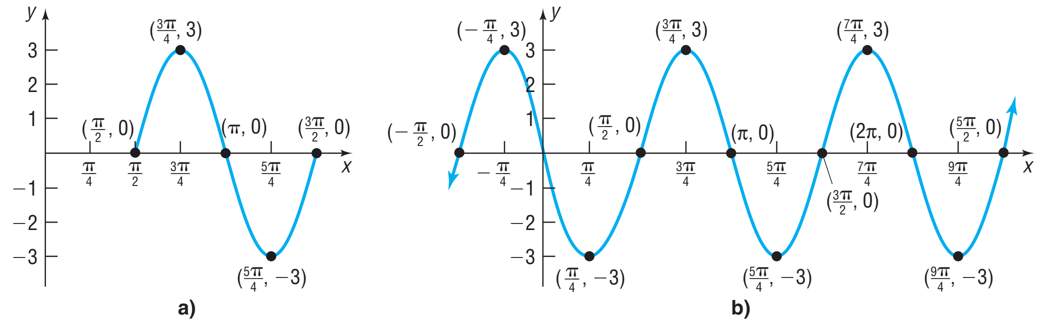
$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right], \quad \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right], \quad \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right], \quad \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Los cinco puntos clave de la gráfica son

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4}, 3\right), \quad (\pi, 0), \quad \left(\frac{5\pi}{4}, -3\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$$

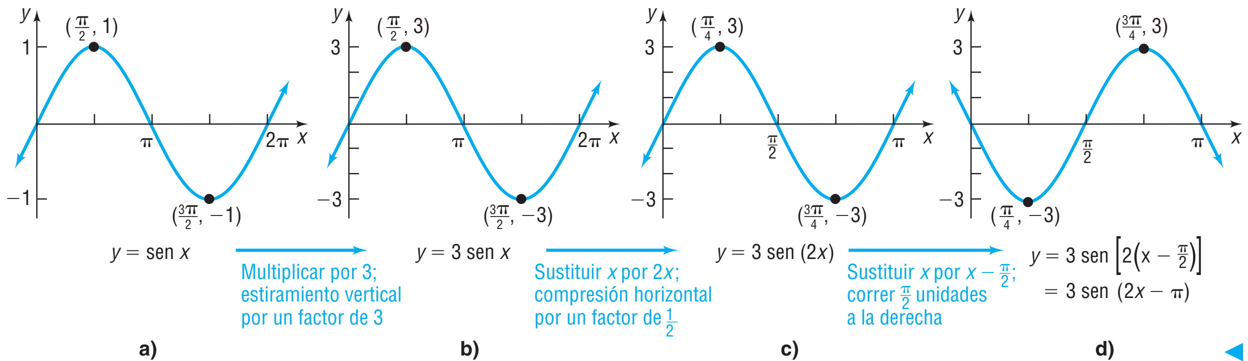
Se grafican estos cinco puntos y se unen con una gráfica de la función seno como se muestra en la figura 98*a*). Al extender la gráfica en cualquier dirección, obtenemos la figura 98*b*).

Figura 98



La gráfica de $y = 3\,\text{sen}(2x - \pi) = 3\,\text{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$ también se puede obtener usando transformaciones. Vea la figura 99.

Figura 99





✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = 3\,\text{sen}(2x - \pi)$ usando un dispositivo de graficación.

EJEMPLO 2 Buscar la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de una función senoidal y su gráfica

Encuentre la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de $y = 2\cos(4x + 3\pi)$ y grafique la función.

Solución Al comparar

$$y = 2\cos(4x + 3\pi) = 2\cos\left[4\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

con

$$y = A\cos(\omega x - \phi) = A\cos\left[\omega\left(x - \frac{\phi}{\omega}\right)\right]$$

se ve que $A = 2, \omega = 4$ y $\phi = -3\pi$. La gráfica es una curva coseno con amplitud $|A| = 2$, periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, y corrimiento de fase $= \frac{\phi}{\omega} = -\frac{3\pi}{4}$.

La gráfica de $y = 2\cos(4x + 3\pi)$ está entre -2 y 2 en el eje y. Un ciclo comienza en $x = \frac{\phi}{\omega} = -\frac{3\pi}{4}$ y termina en $x = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{\phi}{\omega} = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$. Se divide el intervalo $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $\frac{\pi}{2} \div 4 = \frac{\pi}{8}$:

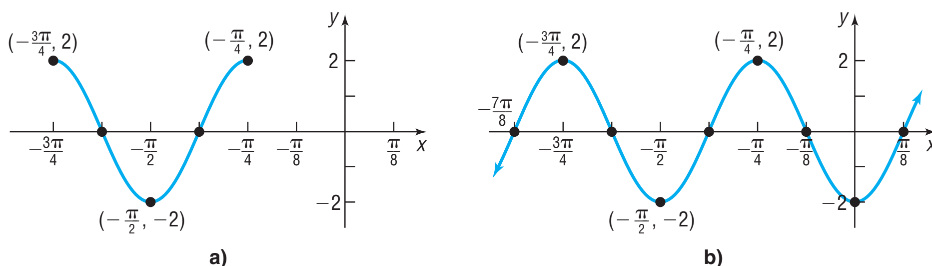
$$\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{8}\right], \quad \left[-\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{2}\right], \quad \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{8}\right], \quad \left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right]$$

Los cinco puntos clave de la gráfica son

$$\left(-\frac{3\pi}{4}, 2\right), \quad \left(-\frac{5\pi}{8}, 0\right), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, -2\right), \quad \left(-\frac{3\pi}{8}, 0\right), \quad \left(-\frac{\pi}{4}, 2\right)$$

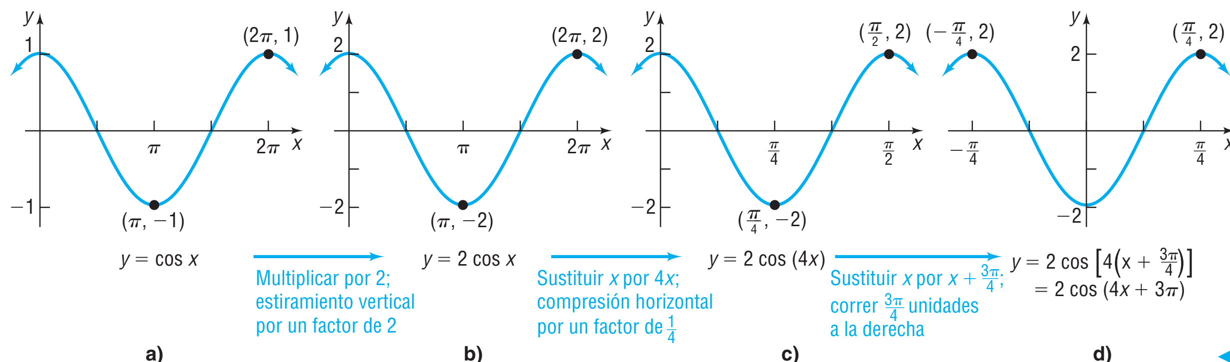
Se grafican estos puntos y se unen con la gráfica de la función coseno, como se muestra en el figura 100*a*). Al extender la gráfica en ambas direcciones, se obtiene la figura 100*b*).

Figura 100



La gráfica de $y = 2\cos(4x + 3\pi) = 2\cos\left[4\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)\right]$ también se puede obtener usando transformaciones. Vea la figura 101.

Figura 101





✔ **COMPROBACIÓN:** Grafique $Y_1 = 2\cos(4x + 3\pi)$ usando un dispositivo de graficación.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 3.

Resumen

Pasos para graficar funciones senoidales

Para graficar funciones senoidales de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi)$ o $y = A \cos(\omega x - \phi)$:

Paso 1: Determine la amplitud $|A|$ y el periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Paso 2: Determine el punto de inicio de un ciclo de la gráfica, $\dfrac{\phi}{\omega}$.

Paso 3: Determine el punto terminal de un ciclo de la gráfica, $\dfrac{2\pi}{\omega} + \dfrac{\phi}{\omega}$.

Paso 4: Divida el intervalo $\left[\dfrac{\phi}{\omega}, \dfrac{2\pi}{\omega} + \dfrac{\phi}{\omega}\right]$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $\dfrac{2\pi}{\omega} \div 4$.

Paso 5: Use los puntos terminales de los subintervalos para encontrar los cinco puntos clave de la gráfica.

Paso 6: Una un ciclo de la gráfica.

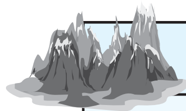
Paso 7: Extienda la gráfica en ambas direcciones para completarla.

Encontrar funciones senoidales a partir de datos

3 En ocasiones los diagramas de dispersión de los datos toman la forma de funciones senoidales. Se verá un ejemplo.

Los datos dados en la tabla 12 representan las temperaturas mensuales promedio en Denver, Colorado. Como los datos representan *promedios* recolectados durante muchos años, estos datos no varían mucho de un año a otro, y en esencia se repetirán cada año. En otras palabras, los datos son periódicos. La figura 102 muestra el diagrama de dispersión de estos datos repetidos más de dos años, donde $x = 1$ es enero, $x = 2$ es febrero, etcétera.

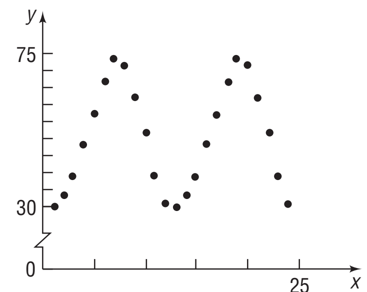
Tabla 12



Mes, *x*	Temperatura mensual promedio, °F
Enero, 1	29.7
Febrero, 2	33.4
Marzo, 3	39.0
Abril, 4	48.2
Mayo, 5	57.2
Junio, 6	66.9
Julio, 7	73.5
Agosto, 8	71.4
Septiembre, 9	62.3
Octubre, 10	51.4
Noviembre, 11	39.0
Diciembre, 12	31.0

FUENTE: U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration

Figura 102



Observe que el diagrama de dispersión se ve como la gráfica de una función senoidal. Se desea ajustar estos datos a una función seno de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$$

donde A, B, ω y ϕ son constantes.

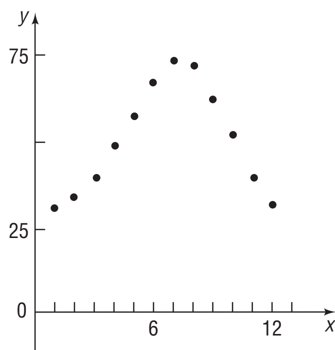
EJEMPLO 3 Buscar la función senoidal a partir de datos

Ajuste una función seno a los datos de la tabla 12.

Solución Comenzamos con un diagrama de dispersión de los datos para un año. Vea la figura 103. Los datos se ajustarán a una función seno de la forma

$$y = A\,\text{sen}(\omega x - \phi) + B$$

Figura 103



Paso 1: Para encontrar la amplitud A, se calcula

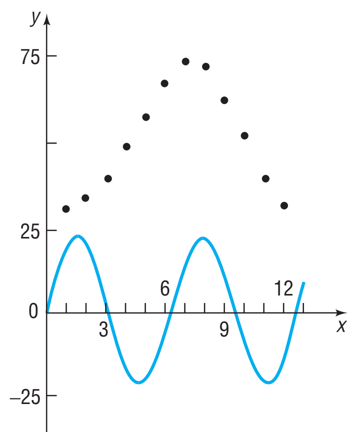
$$\text{Amplitud} = \frac{\text{valor máximo de los datos} - \text{valor mínimo de los datos}}{2}$$

$$= \frac{73.5 - 29.7}{2} = 21.9$$

Para ver el resto de los pasos de este proceso, se sobrepone la gráfica de la función $y = 21.9\,\text{sen}\,x$, donde x representa los meses en el diagrama de dispersión. La figura 104 muestra las dos gráficas.

Para ajustar los datos, la gráfica necesita un corrimiento vertical y uno horizontal, y un estiramiento horizontal.

Figura 104



Paso 2: El corrimiento vertical se determina calculando el promedio entre el valor mayor y el menor de los datos.

$$\text{Corrimiento vertical} = \frac{73.5 + 29.7}{2} = 51.6$$

Ahora se sobrepone la gráfica de $y = 21.9\,\text{sen}\,x + 51.6$ en el diagrama de dispersión. Vea la figura 105.

Se observa que la gráfica necesita un corrimiento y un estiramiento horizontales.

Paso 3: Es más sencillo encontrar primero el factor de estiramiento horizontal. Como las temperaturas se repiten cada 12 meses, el periodo de la función es $T = 12$. Como $T = \frac{2\pi}{\omega} = 12$, se ve que

$$\omega = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Ahora se sobrepone la gráfica de $y = 21.9\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 51.6$ en el diagrama de dispersión. Vea la figura 106. Se observa que la gráfica todavía necesita un corrimiento horizontal.

Figura 105

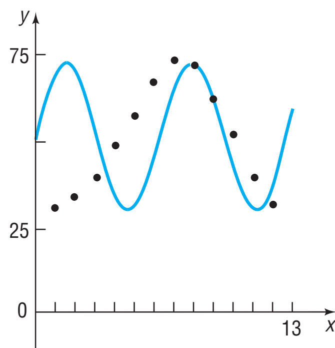
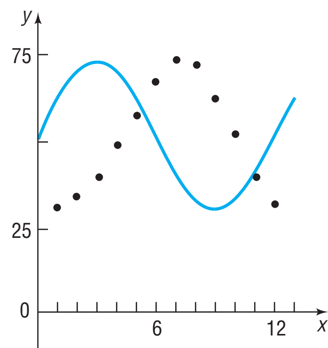


Figura 106



PASO 4: Para determinar el corrimiento horizontal, se despeja ϕ de la ecuación

$$y = 21.9\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}x - \phi\right) + 51.6$$

haciendo $y = 29.7$ y $x = 1$ (la temperatura promedio en Denver en enero).*

$$29.7 = 21.9\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1 - \phi\right) + 51.6$$

$$-21.9 = 21.9\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) \qquad \text{Restar 51.6 en ambos lados de la ecuación}$$

$$-1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) \qquad \text{Dividir ambos lados de la ecuación entre 21.9}$$

$$-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - \phi \qquad \operatorname{sen}\theta = -1 \text{ cuando } \theta = -\frac{\pi}{2}.$$

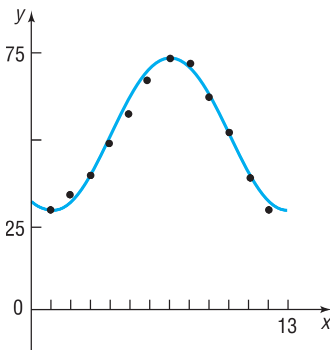
$$\phi = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{Despejar } \phi.$$

La función seno que se ajusta a los datos es

$$y = 21.9\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{2\pi}{3}\right) + 51.6$$

La gráfica de $y = 21.9\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{2\pi}{3}\right) + 51.6$ y el diagrama de dispersión se muestran en la figura 107. ◀

Figura 107



A continuación se dan los pasos para ajustar una función seno

$$y = A\operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$$

a datos senoidales.

Pasos para ajustar datos a una función seno $y = A\operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$

PASO 1: Determinar A, la amplitud de la función

$$\text{Amplitud} = \frac{\text{valor máximo de datos} - \text{valor mínimo de datos}}{2}$$

PASO 2: Determinar B, el corrimiento vertical de la función

$$\text{Corrimiento vertical} = \frac{\text{valor máximo de datos} - \text{valor mínimo de datos}}{2}$$

PASO 3: Determinar ω, Como el periodo T, el tiempo que toma que los datos se repitan, es $T = \frac{2\pi}{\omega}$, se tiene

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Continúa en la siguiente página

*El dato seleccionado para encontrar ϕ es arbitrario. En general, al elegir un dato diferente se obtendrá otro valor para ϕ. Para conservar la congruencia, siempre se elegirá el punto para el que y es menor (en este caso, enero da la menor temperatura).

PASO 4: Determinar el corrimiento horizontal de la función despejando ϕ de la ecuación

$$y = A\,\text{sen}(\omega x - \phi) + B$$

eligiendo un par ordenado (x, y) entre los datos. Como las respuestas varían dependiendo del par ordenado seleccionado, siempre se elegirá el par ordenado para el que y es menor, con el fin de ser congruentes.

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 21 a)–c).

Se verá otro ejemplo. Como el número de horas de luz en un día tiene un ciclo anual, ese número de horas para un lugar dado se puede modelar por una función senoidal.

El día más largo del año (en términos de horas de luz) ocurre en el solsticio de verano (para lugares en el hemisferio norte). El solsticio de verano es la época cuando el Sol se encuentra más lejos del norte (es decir, de los lugares que están en el hemisferio norte). En 1997, el solsticio de verano ocurrió el 21 de junio (el día número 172 del año) a la 8:21 AM del tiempo del meridiano de Greenwich (GMT). El día más corto del año ocurre en el día del solsticio de invierno. El solsticio de invierno es el tiempo cuando el Sol está más al sur (de nuevo para lugares en el hemisferio norte). En 1997, el solsticio de invierno ocurrió el 21 de diciembre (el día número 355 del año) a las 8:09 PM (GMT).

EJEMPLO 4 Buscar la función senoidal para las horas de luz

De acuerdo con el *Old Farmer's Alamanc*, el número de horas de luz en Boston en el solsticio de verano es de 15.283 y el número de horas de luz en el solsticio de invierno es de 9.067.

a) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A\,\text{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a estos datos.

b) Use la función encontrada en el inciso *a*) para predecir el número de horas de luz al 1 de abril, el día número 91 del año.



c) Dibuje una gráfica de la función encontrada en el inciso *a*).

d) Busque el número de horas de luz para el 1 de abril en el *Old Farmer's Almanac* y compare las horas reales de luz con los resultados del inciso *b*).

Solución a) **PASO 1:**

$$\text{Amplitud} = \frac{\text{valor máximo de datos} - \text{valor mínimo de datos}}{2}$$

$$= \frac{15.283 - 9.067}{2} = 3.108$$

PASO 2:

$$\text{Corrimiento vertical} = \frac{\text{valor máximo de datos} - \text{valor mínimo de datos}}{2}$$

$$= \frac{15.283 + 9.067}{2} = 12.175$$

Paso 3: Los datos se repiten cada 365 días. Como $T = \frac{2\pi}{\omega} = 365$, se encuentra que

$$\omega = \frac{2\pi}{365}$$

Hasta ahora se tiene $y = 3.108 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}x - \phi\right) + 12.175$.

Paso 4: Para determinar el corrimiento horizontal, se despeja ϕ de la ecuación

$$y = 3.108 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}x - \phi\right) + 12.175$$

haciendo $y = 9.067$ y $x = 355$ (el número de horas de luz en Boston el 21 de diciembre).

$$9.067 = 3.108 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}\cdot 355 - \phi\right) + 12.175$$

$$-3.108 = 3.108 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}\cdot 355 - \phi\right)$$ Restar 12.175 en ambos lados de la ecuación.

$$-1 = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}\cdot 355 - \phi\right)$$ Dividir ambos lados de la ecuación entre 3.108

$$-\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{365}\cdot 355 - \phi$$ $\operatorname{sen}\theta = -1$ cuando $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

$$\phi \approx 2.45\pi$$ Despejar ϕ.

La función que proporciona el número de horas de luz en Boston para cualquier día, x, está dada por

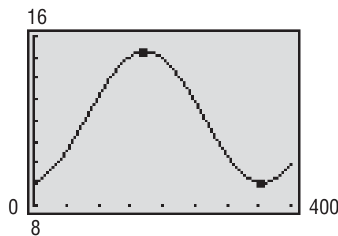
$$y = 3.108 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}x - 2.45\pi\right) + 12.175$$

b) Para predecir el número de horas de luz el 1 de abril, sea $x = 91$ en la función encontrada en el inciso *a*), se obtiene

$$y = 3.108 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}\cdot 91 - 2.45\pi\right) + 12.175$$
$$\approx 3.108 \operatorname{sen}(-1.95\pi) + 12.175$$
$$\approx 12.69$$

De manera que se pronostica que habrá alrededor de 12.69 horas de luz el 1 de abril en Boston.

Figura 108





c) La gráfica de la función encontrada en el inciso *a*) está dada en la figura 108.



d) De acuerdo con el *Old Farmer's Almanac*, habrá 12 horas 43 minutos de luz el 1 de abril en Boston. La predicción de 12.69 horas se convierte en 12 horas 41 minutos. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

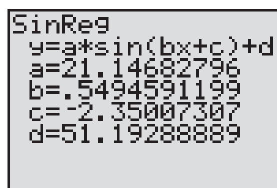
Ciertas calculadoras gráficas (como TI-83 Plus y TI-86) tienen la capacidad de encontrar la función seno de mejor ajuste para datos senoidales. Se requieren al menos cuatro puntos para este proceso.



EJEMPLO 5 Buscar la función seno de mejor ajuste

Utilice una calculadora gráfica para encontrar la función seno de mejor ajuste para los datos de la tabla 12. Grafique esta función junto con el diagrama de dispersión de los datos.

Figura 109



Solución Introduzca los datos de la tabla 12 y ejecute el programa SIN REG (regresión de seno). El resultado se muestra en la figura 109.

La salida que proporciona la aplicación muestra la ecuación

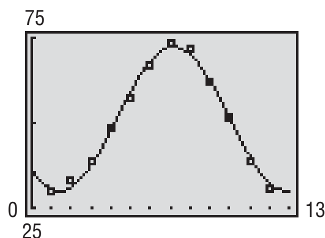
$$y = a\,\text{sen}(bx + c) + d$$

La función senoidal de mejor ajuste es

$$y = 21.15\,\text{sen}(0.55x - 2.35) + 51.19$$

donde x representa el mes y y representa la temperatura promedio. La figura 110 muestra la gráfica de la función senoidal de mejor ajuste sobre el diagrama de dispersión.

Figura 110



 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 21D)–E).

6.8 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Para la gráfica de $y = A\,\text{sen}(\omega x - \phi)$, el número $\dfrac{\phi}{\omega}$ se llama __________.

2. *Falso o verdadero:* sólo se requieren dos datos puntuales para encontrar la función seno de mejor ajuste con un dispositivo de graficación.

Ejercicios

En los problemas 3-14, encuentre la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de cada función. Grafique cada una. Muestre al menos un periodo.



3. $y = 4\,\text{sen}(2x - \pi)$
4. $y = 3\,\text{sen}(3x - \pi)$
5. $y = 2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
6. $y = 3\cos(2x + \pi)$
7. $y = -3\,\text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
8. $y = -2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
9. $y = 4\,\text{sen}(\pi x + 2)$
10. $y = 2\cos(2\pi x + 4)$
11. $y = 3\cos(\pi x - 2)$
12. $y = 2\cos(2\pi x - 4)$
13. $y = 3\,\text{sen}\left(-2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
14. $y = 3\cos\left(-2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

En los problemas 15-18, escriba la ecuación de una función seno que tenga las características dadas.

15. Amplitud: 2
    Periodo: π
    Corrimiento de fase: $\dfrac{1}{2}$

16. Amplitud: 3
    Periodo: $\dfrac{\pi}{2}$
    Corrimiento de fase: 2

17. Amplitud: 3
    Periodo: 3π
    Corrimiento de fase: $-\dfrac{1}{3}$

18. Amplitud: 2
    Periodo: π
    Corrimiento de fase: -2

19. Circuitos de corriente alterna La corriente I, en amperes, que fluye por un circuito de ca (corriente alterna) en el tiempo t es

$$I = 120 \operatorname{sen}\left(30\pi t - \frac{\pi}{3}\right), \qquad t \geq 0$$

¿Cuál es el periodo? ¿Cuál es la amplitud? ¿Cuál es el corrimiento de fase? Grafique dos periodos de esta función.

20. Circuitos de corriente alterna (ca) La corriente I, en amperes, que fluye por un circuito de ca (corriente alterna) en el tiempo t es

$$I = 220 \operatorname{sen}\left(60\pi t - \frac{\pi}{6}\right), \qquad t \geq 0$$

¿Cuál es el periodo? ¿Cuál es la amplitud? ¿Cuál es el corrimiento de fase? Grafique dos periodos de esta función.

21. Temperatura mensual Los siguientes datos representan las temperaturas mensuales promedio en Juneau, Alaska.

Mes, *x*	Temperatura mensual promedio, °F
Enero, 1	24.2
Febrero, 2	28.4
Marzo, 3	32.7
Abril, 4	39.7
Mayo, 5	47.0
Junio, 6	53.0
Julio, 7	56.0
Agosto, 8	55.0
Septiembre 9	49.4
Octubre, 10	42.2
Noviembre, 11	32.0
Diciembre, 12	27.1

FUENTE: U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos para un periodo.

b) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a los datos.

c) Dibuje la función senoidal del inciso *b*) sobre el diagrama de dispersión.

d) Use una calculadora gráfica para encontrar la función senoidal de mejor ajuste.

e) Grafique la función senoidal de mejor ajuste sobre el diagrama de dispersión.

22. Temperatura mensual Los siguientes datos representan las temperaturas mensuales promedio para Washington, D.C.

Mes, *x*	Temperatura mensual promedio, °F
Enero, 1	34.6
Febrero, 2	37.5
Marzo, 3	47.2
Abril, 4	56.5
Mayo, 5	66.4
Junio, 6	75.6
Julio, 7	80.0
Agosto, 8	78.5
Septiembre 9	71.3
Octubre, 10	59.7
Noviembre, 11	49.8
Diciembre, 12	39.4

FUENTE: U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos para un periodo.

b) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a los datos.

c) Dibuje la función senoidal del inciso *b*) sobre el diagrama de dispersión.

d) Use una calculadora gráfica para encontrar la función senoidal de mejor ajuste.

e) Grafique la función senoidal de mejor ajuste sobre el diagrama de dispersión.

23. Temperatura mensual Los siguientes datos representan las temperaturas mensuales promedio para Indianápolis, Indiana.

Mes, *x*	Temperatura mensual promedio, °F
Enero, 1	25.5
Febrero, 2	29.6
Marzo, 3	41.4
Abril, 4	52.4
Mayo, 5	62.8
Junio, 6	71.9
Julio, 7	75.4
Agosto, 8	73.2
Septiembre, 9	66.6
Octubre, 10	54.7
Noviembre, 11	43.0
Diciembre, 12	30.9

FUENTE: U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration

a) Dibuje en diagrama de dispersión de los datos para un periodo.

b) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a los datos.

c) Dibuje la función senoidal del inciso *b*) sobre el diagrama de dispersión.
d) Use una calculadora gráfica para encontrar la función senoidal de mejor ajuste.
e) Grafique la función senoidal de mejor ajuste sobre el diagrama de dispersión.

24. Temperatura mensual Los siguientes datos representan las temperaturas mensuales promedio para Baltimore, Maryland.

Mes, x	Temperatura mensual promedio, °F
Enero, 1	31.8
Febrero, 2	34.8
Marzo, 3	44.1
Abril, 4	53.4
Mayo, 5	63.4
Junio, 6	72.5
Julio, 7	77.0
Agosto, 8	75.6
Septiembre, 9	68.5
Octubre, 10	56.6
Noviembre, 11	46.8
Diciembre, 12	36.7

FUENTE: U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos para un periodo.
b) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a los datos.
c) Dibuje la función senoidal del inciso *b*) sobre el diagrama de dispersión.
d) Use una calculadora gráfica para encontrar la función senoidal de mejor ajuste.
e) Grafique la función senoidal de mejor ajuste sobre el diagrama de dispersión.

25. Mareas Suponga que el tiempo entre mareas altas consecutivas es de alrededor de 12.5 horas. De acuerdo con la National Oceanic and Atmospheric Administration, el sábado 28 de junio de 1997, en Savannah, Georgia, la marea alta ocurrió a las 3:38 AM (3.6333 horas) y la marea baja a las 10:08 AM (10.1333 horas). La altura del agua se mide como la cantidad arriba o abajo del promedio más bajo de la marea baja. La altura del agua en marea alta fue de 8.2 pies y la altura del agua en la marea baja fue de −0.6 pies.
a) Aproxime el momento en que ocurrirá la siguiente marea alta.
b) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a los datos.
c) Dibuje una gráfica de la función encontrada en el inciso *b*).
d) Utilice la función del inciso *b*) para predecir la altura del agua en la siguiente marea alta.

26. Mareas Suponga que el tiempo entre mareas altas consecutivas es de alrededor de 12.5 horas. De acuerdo con la National Oceanic and Atmospheric Administration, el sábado 28 de junio de 1997, en Juneau, Alaska, la marea alta ocurrió a las 8:11 AM (8.1833 horas) y la marea baja a las 2:14 PM (14.2333 horas). La altura del agua se mide como la cantidad arriba o abajo del promedio más bajo de la marea baja. La altura del agua en marea alta fue de 13.2 pies y la altura del agua en la marea baja fue de 2.2 pies.
a) Aproxime el momento en que ocurrirá la siguiente marea alta.
b) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a los datos.
c) Dibuje una gráfica de la función encontrada en el inciso *b*).
d) Utilice la función del inciso *b*) para predecir la altura del agua en la siguiente marea alta.

27. Horas de luz Según el *Old Farmer's Almanac*, en Miami, Florida, el número de horas de luz en el solsticio de verano es de 12.75 y el número de horas de luz en el solsticio de invierno es de 10.583.
a) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a los datos.
b) Utilice la función encontrada en el inciso *a*) para predecir el número de horas de luz el 1 de abril, el día número 91 del año.
c) Grafique la función encontrada en el inciso *a*).
d) Investigue el número de horas de luz para el 1 de abril en el *Old Farmer's Almanac* y compare las horas reales de luz con los resultados del inciso *c*).

28. Horas de luz Según el *Old Farmer's Almanac*, en Detroit, Michigan, el número de horas de luz en el solsticio de verano es de 13.65 y el número de horas de luz en el solsticio de invierno es de 9.067.
a) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a los datos.
b) Utilice la función encontrada en el inciso *a*) para predecir el número de horas de luz el 1 de abril, el día número 91 del año.
c) Grafique la función encontrada en el inciso *a*).
d) Investigue el número de horas de luz para el 1 de abril en el *Old Farmer's Almanac* y compare las horas reales de luz con los resultados del inciso *c*).

29. Horas de luz Según el *Old Farmer's Almanac*, en Anchorage, Alaska, el número de horas de luz en el solsticio de verano es de 16.233 y el número de horas de luz en el solsticio de invierno es de 5.45.
a) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a los datos.
b) Utilice la función encontrada en el inciso *a*) para predecir el número de horas de luz el 1 de abril, el día número 91 del año.
c) Grafique la función encontrada en el inciso *a*).
d) Investigue el número de horas de luz para el 1 de abril en el *Old Farmer's Almanac* y compare las horas reales de luz con los resultados del inciso *c*).

30. Horas de luz Según el *Old Farmer's Almanac*, en Honolulu, Hawaii, el número de horas de luz en el solsticio de verano es de 12.767 y el número de horas de luz en el solsticio de invierno es de 10.783.

a) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a los datos.

b) Utilice la función encontrada en el inciso *a*) para predecir el número de horas de luz el 1 de abril, el día número 91 del año.

c) Grafique la función encontrada en el inciso *a*).

d) Investigue el número de horas de luz para el 1 de abril en el *Old Farmer's Almanac* y compare las horas reales de luz con los resultados del inciso *c*).

31. Explique cómo se usan la amplitud y el periodo de una gráfica senoidal para establecer la escala en los ejes coordenados.

32. Encuentre una aplicación en el campo de su interés que lleva a una gráfica senoidal. Escriba un resumen de lo que encontró.

Repaso del capítulo

Conocimiento

Definiciones

Ángulo en posición estándar (p. 492)	El vértice está en el origen; el lado inicial está sobre el lado positivo del eje x.
1 grado (1°) (p. 493)	$1° = \frac{1}{360}$ vuelta
1 radián (p. 496)	Medida de un ángulo central de un círculo cuyos rayos subtienden un arco de longitud igual al radio del círculo.
Ángulo agudo (p. 507)	Un ángulo θ cuya medida es $0° < \theta < 90° \left(\text{o } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$
Funciones trigonométricas (p. 526)	$P = (a, b)$ es el punto en el lado terminal de θ a una distancia r del origen:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{b}, \quad b \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{a}, \quad a \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

Ángulos complementarios (p. 513)	Dos ángulos agudos cuya suma es $90° \left(\frac{\pi}{2}\right)$
Cofunción (p. 513)	Los siguientes pares de funciones son cofunciones una de la otra: seno y coseno, tangente y cotangente, secante y cosecante.
Ángulo de referencia de θ (p. 531)	El ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el lado positivo o negativo del eje x.
Función periódica (p. 543)	$f(\theta + p) = f(\theta)$, para toda θ, $p > 0$, donde la p menor es el periodo fundamental.

Fórmulas

1 vuelta = 360° (p. 494) $= 2\pi$ radianes (p.497)	
$s = r\theta$ (p. 496)	θ se mide en radianes; s es la longitud del arco subtendido por el ángulo central θ del círculo de radio r; A es el área del sector
$A = \frac{1}{2}r^2\theta$ (p. 500)	
$v = r\omega$ (p. 501)	v es la velocidad lineal a lo largo del círculo de radio r; θ es la velocidad angular (medida en radianes por unidad de tiempo)

Tabla de valores

θ (radianes)	θ (grados)	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0	0°	0	1	0	No definida	1	No definida
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	No definida	1	No definida	0
π	180°	0	-1	0	No definida	-1	No definida
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	No definida	-1	No definida	0

Identidades fundamentales (**p. 510**)

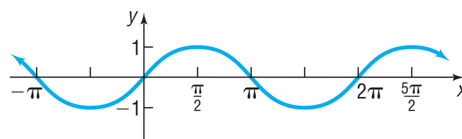
$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

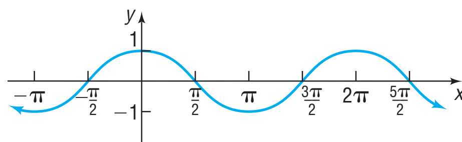
$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta, \quad \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

Propiedades de las funciones trigonométricas

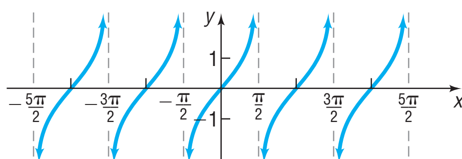
$y = \operatorname{sen} x$ (p. 549)
Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-1 \le y \le 1$
Periódica: periodo $= 2\pi(360°)$
Función impar



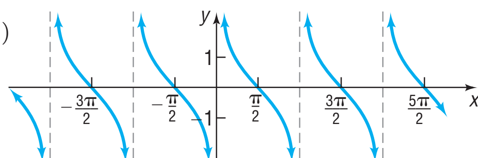
$y = \cos x$ (p. 559)
Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-1 \le y \le 1$
Periódica: periodo $= 2\pi$ (360°)
Función par



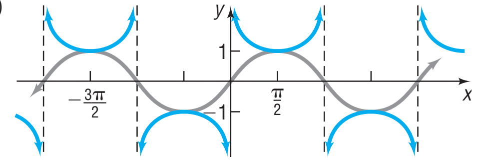
$y = \tan x$ (p. 566)
Dominio: $-\infty < x < \infty$, excepto múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ (90°)
Rango: $-\infty < y < \infty$
Periódica: periodo $= \pi$ (180°)
Función impar



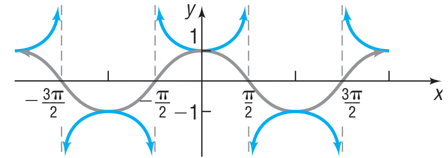
$y = \cot x$ (p. 568)
Dominio: $-\infty < x < \infty$, excepto múltiplos enteros de π (180°)
Rango: $-\infty < y < \infty$
Periódica: periodo $= \pi$ (180°)
Función impar



$y = \csc x$ (p. 568) Dominio: $-\infty < x < \infty$, excepto múltiplos enteros de π (180°)
Rango: $|y| \geq 1$
Periódica: periodo $= 2\pi$ (360°)
Función impar



$y = \sec x$ (p. 569) Dominio: $-\infty < x < \infty$, excepto múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ (90°)
Rango: $|y| \geq 1$
Periódica: periodo $= 2\pi$ (360°)
Función par



Gráficas senoidales

(p. 554) $y = A\,\text{sen}(\omega x), \quad \omega > 0$ Periodo $= \dfrac{2\pi}{\omega}$

$y = A\cos(\omega x), \quad \omega > 0$ Amplitud $= |A|$

(p. 572) $y = A\,\text{sen}(\omega x - \phi) = A\,\text{sen}\left[\omega\left(x - \dfrac{\phi}{\omega}\right)\right]$ Corrimiento de fase $= \dfrac{\phi}{\omega}$

$y = A\cos(\omega x - \phi) = A\cos\left[\omega\left(x - \dfrac{\phi}{\omega}\right)\right]$

Objetivos

Sección		Debe ser capaz de:	Ejercicios de repaso
6.1	1	Hacer conversiones entre grados, minutos, segundos, y las formas decimales para ángulos (p. 494)	82
	2	Encontrar la longitud de arco de un círculo (p. 496)	83, 84
	3	Convertir grados en radianes (p. 498)	1–4
	4	Convertir radianes en grados (p. 498)	5–8
	5	Encontrar el área de un sector de un círculo (p. 500)	83
	6	Encontrar la velocidad lineal de un objeto que viaja en movimiento circular (p. 501)	85–88
6.2	1	Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos (p. 508)	75
	2	Usar las identidades fundamentales (p. 508)	21–24
	3	Encontrar el resto de las funciones trigonométricas dado el valor de una de ellas (p. 510)	31–32
	4	Usar el teorema de ángulos complementarios (p. 512)	25–26
6.3	1	Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4} = 45°$ (p. 518)	9, 11
	2	Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6} = 30°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$ (p. 519)	9–12
	3	Usar una calculadora para aproximar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos (p. 521)	76
6.4	1	Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de ángulos generales (p. 527)	77
	2	Usar ángulos coterminales para encontrar los valores exactos de una función trigonométrica (p. 529)	19–20
	3	Determinar los signos de las funciones trigonométricas de un ángulo en un cuadrante dado (p. 530)	78
	4	Encontrar el ángulo de referencia de un ángulo general (p. 531)	79
	5	Usar el teorema de ángulos de referencia (p. 532)	13–16, 19
	6	Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de un ángulo dada una de ellas y el cuadrante del ángulo (p. 533)	31–46

6.5	1	Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas usando el círculo unitario (p. 537)	80
	2	Conocer el dominio y rango de las funciones trigonométricas (p. 541)	81
	3	Usar las propiedades periódicas para encontrar el valor exacto de las funciones trigonométricas (p. 543)	19–20
	4	Usar las propiedades pares-impares para encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas (p. 545)	13, 15–16, 18–20, 27–30
6.6	1	Graficar transformaciones de la función seno (p. 549)	47, 50
	2	Graficar transformaciones de la función coseno (p. 551)	48, 49
	3	Determinar la amplitud y el periodo de funciones senoidales (p. 553)	59–64
	4	Graficar funciones senoidales: $y = A\ \text{sen}(\omega x)$ (p. 555)	47, 48, 63, 64, 89
	5	Encontrar una ecuación para una gráfica senoidal (p. 558)	71–74
6.7	1	Graficar transformaciones de las funciones tangente y cotangente (p. 564)	51–56
	2	Graficar transformaciones de las funciones cosecante y secante (p. 568)	57–58
6.8	1	Determina el corrimiento de fase de una función senoidal (p. 571)	65–70, 90
	2	Graficar funciones senoidales: $y = A\ \text{sen}(\omega x - \phi)$ (p. 572)	65–70, 90
	3	Encontrar una función senoidal a partir de datos (p. 575)	91–94

Ejercicios de repaso

(*Un asterisco en el número de un problema indica que el autor lo sugiere para un examen de práctica*).

En los problemas 1-4, convierta cada ángulo de grados a radianes. Exprese su respuesta como un múltiplo de π.

* **1.** 135° **2.** 210° **3.** 18° **4.** 15°

En los problemas 5-8, convierta cada ángulo en radianes a grados

* **5.** $\frac{3\pi}{4}$ **6.** $\frac{2\pi}{3}$ **7.** $-\frac{5\pi}{2}$ **8.** $-\frac{3\pi}{2}$

En los problemas 9-30, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

9. $\tan\frac{\pi}{4} - \text{sen}\frac{\pi}{6}$ **10.** $\cos\frac{\pi}{3} + \text{sen}\frac{\pi}{2}$ ***11.** $3\ \text{sen}\ 45° - 4\tan\frac{\pi}{6}$

12. $4\cos 60° + 3\tan\frac{\pi}{3}$ **13.** $6\cos\frac{3\pi}{4} + 2\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **14.** $3\ \text{sen}\frac{2\pi}{3} - 4\cos\frac{5\pi}{2}$

15. $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ **16.** $4\csc\frac{3\pi}{4} - \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ***17.** $\tan\pi + \text{sen}\ \pi$

18. $\cos\frac{\pi}{2} - \csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **19.** $\cos 540° - \tan(-405°)$ **20.** $\text{sen}\ 270° + \cos(-180°)$

21. $\text{sen}^2\ 20° + \frac{1}{\sec^2 20°}$ **22.** $\frac{1}{\cos^2 40°} - \frac{1}{\cot^2 40°}$ **23.** $\sec 50° \cos 50°$

24. $\tan 10° \cot 10°$ ***25.** $\frac{\text{sen}\ 50°}{\cos 40°}$ **26.** $\frac{\tan 20°}{\cot 70°}$

27. $\frac{\text{sen}(-40°)}{\cos 50°}$ **28.** $\tan(-20°)\cot 20°$ **29.** $\text{sen}\ 400° \sec(-50°)$ **30.** $\cot 200° \cot(-70°)$

En los problemas 31-46, calcule el valor exacto de las funciones trigonométricas restantes.

31. $\text{sen}\ \theta = \frac{4}{5}$, θ es aguda **32.** $\tan\theta = \frac{1}{4}$, θ es ayuda **33.** $\tan\theta = \frac{12}{5}$, $\text{sen}\ \theta < 0$

34. $\cot\theta = \frac{12}{5}$, $\cos\theta < 0$ **35.** $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\tan\theta < 0$ **36.** $\csc\theta = -\frac{5}{3}$, $\cot\theta < 0$

37. $\text{sen}\,\theta = \frac{12}{13}$, θ en cuadrante II

38. $\cos\theta = -\frac{3}{5}$, θ en cuadrante III

39. $\text{sen}\,\theta = -\frac{5}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

40. $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

41. $\tan\theta = \frac{1}{3}$, $180° < \theta < 270°$

42. $\tan\theta = -\frac{2}{3}$, $90° < \theta < 180°$

43. $\sec\theta = 3$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

44. $\csc\theta = -4$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

45. $\cot\theta = -2$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

46. $\tan\theta = -2$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

En los problemas 47-58, grafique cada función. Cada gráfica debe contener al menos un periodo.

***47.** $y = 2\,\text{sen}(4x)$

48. $y = -3\cos(2x)$

49. $y = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

50. $y = 3\,\text{sen}(x - \pi)$

51. $y = \tan(x + \pi)$

52. $y = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

53. $y = -2\tan(3x)$

54. $y = 4\tan(2x)$

55. $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

56. $y = -4\cot(2x)$

57. $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

58. $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

En los problemas 59-62, determine la amplitud y el periodo de cada función sin graficarla.

59. $y = 4\cos x$

60. $y = \text{sen}(2x)$

***61.** $y = -8\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

62. $y = -2\cos(3\pi x)$

En los problemas 63-70, encuentre la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de cada función. Grafique cada función, Muestre al menos un periodo.

63. $y = 4\,\text{sen}(3x)$

64. $y = 2\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

65. $y = 2\,\text{sen}(2x - \pi)$

66. $y = -\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

67. $y = \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{3}{2}x - \pi\right)$

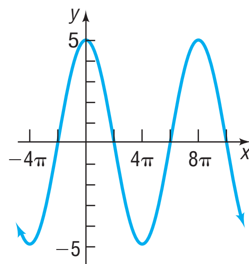
68. $y = \frac{3}{2}\cos(6x + 3\pi)$

***69.** $y = -\frac{2}{3}\cos(\pi x - 6)$

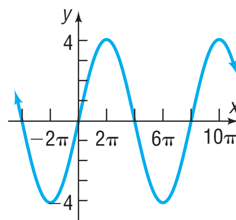
70. $y = -7\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{4}{3}\right)$

En los problemas 71-74, encuentre una función para la gráfica dada.

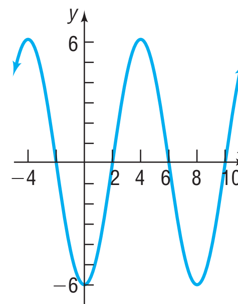
***71.**



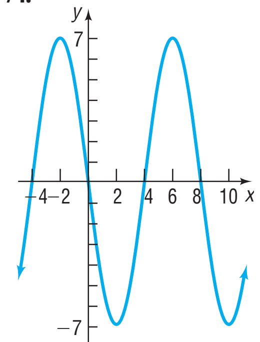
72.



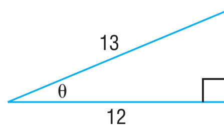
73.



74.



75. Calcule el valor de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ de la ilustración.



76. Utilice una calculadora para aproximar sec 10°. Redondee su respuesta a dos decimales.

***77.** Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas de un ángulo θ si $(3, -4)$ es un punto en el lado terminal de θ.

78. Diga en qué cuadrante está θ si $\cos\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$.

79. Encuentre el ángulo de referencia de $-\frac{4\pi}{5}$.

***80.** Calcule el valor exacto de sen t, cos t y tan t si $P = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ es el punto en el círculo unitario que corresponde a t.

81. ¿Cuáles son el dominio y el rango de la función secante?

82. a) Convierta el ángulo 32°20′35” en un decimal en grados. Redondee la respuesta a dos decimales.
b) Convierta el ángulo 63.18° en la forma G°M′S″. Exprese la respuesta al segundo más cercano.

83. Encuentre la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 30° en un círculo con 2 pies de radio. ¿Cuál es el área del sector?

84. El minutero de un reloj tiene 8 pulgadas de largo. ¿Cuánto se mueve la punta en 30 minutos? ¿Cuánto se mueve en 20 minutos?

85. Velocidad angular de un auto de carreras Se conduce un auto de carreras en una pista circular a velocidad constante de 180 millas por hora. Si el diámetro de la pista es de $\frac{1}{2}$ milla, ¿cuál es la velocidad angular del auto? Exprese su respuesta en revoluciones por hora (lo cual es equivalente a vueltas por hora).

86. Carrusel Un carnaval en el área tiene un carrusel cuyo radio es de 25 pies. Si el tiempo para una vuelta es de 30 segundos, ¿qué tan rápido va el carrusel? Proporcione la velocidad lineal y la velocidad angular.

87. Luz de un faro El faro en Montauk Point, Long Island, tiene un haz doble (dos fuentes de luz opuestas entre sí). Los barcos en el mar observan una luz que centellea cada 5 segundos. ¿Qué velocidad de rotación se requiere?

88. Balanceo de llantas El radio de cada llanta de un auto es de 16 pulgadas. ¿A cuántas revoluciones por minuto debe girar el balanceador para balancear las llantas a una velocidad de 90 millas por hora? ¿La velocidad del balanceador debe ser diferente para una llanta con radio de 14 pulgadas? Si es así, ¿cuál es la velocidad?

89. Voltaje alterno La fuerza electromotriz E, en volts, en cierto circuito de ca obedece a la ecuación

$$E = 120 \operatorname{sen}(120\pi t), \qquad t \geq 0$$

donde t se mide en segundos.
a) ¿Cuál es el valor máximo de E?
b) ¿Cuál es el periodo?
c) Grafique esta función para dos periodos.

90. Corriente alterna La corriente I, en amperes, que fluye por un circuito de ca (corriente alterna) en el tiempo t es

$$I = 220 \operatorname{sen}\left(30\pi t + \frac{\pi}{6}\right), \qquad t \geq 0$$

a) ¿Cuál es el periodo?
b) ¿Cuál es la amplitud?
c) ¿Cuál es el corrimiento de fase?
d) Grafique esta función para dos periodos.

91. Temperatura mensual Los siguientes datos representan las temperaturas mensuales promedio para Phoenix, Arizona.

Mes, *m*	Temperatura mensual promedio, T
Enero, 1	51
Febrero, 2	55
Marzo, 3	63
Abril, 4	67
Mayo, 5	77
Junio, 6	86
Julio, 7	90
Agosto, 8	90
Septiembre, 9	84
Octubre, 10	71
Noviembre, 11	59
Diciembre, 12	52

FUENTE: U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos para un periodo.
b) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajusta a los datos.
c) Grafique la función senoidal en el inciso b) sobre el diagrama de dispersión.
d) Utilice un dispositivo de graficación para encontrar la función senoidal de mejor ajuste.
e) Grafique la función senoidal de mejor ajuste sobre el diagrama de dispersión.

92. Temperatura mensual Los siguientes datos representan las temperaturas mensuales promedio para Chicago, Illinois.

Mes, *m*	Temperatura mensual promedio, T
Enero, 1	25
Febrero, 2	28
Marzo, 3	36
Abril, 4	48
Mayo, 5	61
Junio, 6	72
Julio, 7	74
Agosto, 8	75
Septiembre, 9	66
Octubre, 10	55
Noviembre, 11	39
Diciembre, 12	28

FUENTE: U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos para un periodo.
b) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajusta a los datos.

c) Grafique la función senoidal en el inciso b) sobre el diagrama de dispersión.

d) Utilice una calculadora gráfica para encontrar la función senoidal de mejor ajuste.

e) Grafique la función senoidal de mejor ajuste sobre el diagrama de dispersión.

93. Horas de luz Según el *Old Farmer's Almanac*, en Las Vegas, Nevada, el número de horas de luz en el solsticio de verano es de 13.357 y el número de horas de luz en el solsticio de invierno es de 9.667.

a) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a los datos.

b) Utilice la función encontrada en el inciso a) para predecir el número de horas de luz el 1 de abril, el día número 91 del año.

c) Grafique la función encontrada en el inciso a).

d) Investigue el número de horas de luz para el 1 de abril en el *Old Farmer's Almanac* y compare las horas reales de luz con los resultados del inciso c).

94. Horas de luz Según el *Old Farmer's Almanac*, en Seattle, Washington, el número de horas de luz en el solsticio de verano es de 13.967 y el número de horas de luz en el solsticio de invierno es de 8.417.

a) Encuentre una función senoidal de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$ que se ajuste a los datos.

b) Utilice la función encontrada en el inciso a) para predecir el número de horas de luz el 1 de abril, el día número 91 del año.

c) Grafique la función encontrada en el inciso a).

d) Investigue el número de horas de luz para el 1 de abril en el *Old Farmer's Almanac* y compare las horas reales de luz con los resultados del inciso c).

Proyectos del capítulo



1. Mareas Una tabla parcial de mareas para septiembre de 2001 en Sabine Pass, en la costa de Texas en el golfo de México, se da en la tabla.

a) El 15 de septiembre, ¿en qué momento estuvo alta la marea? Esto se llama *marea alta*. El 19 de septiembre, ¿en qué momento estuvo baja la marea? Esto se llama *marea baja*. La mayoría de los días tienen dos mareas bajas y dos mareas altas.

b) ¿Por qué cree que hay una altura negativa para la marea baja del 14 de septiembre? ¿Contra qué se mide la altura de la marea?

c) En su calculadora gráfica, dibuje un diagrama de dispersión para los datos de la tabla. Considere a T (tiempo) la variable independiente, con $T = 0$ como las 12:00 AM del 1 de septiembre, $T = 24$ como las 12:00 AM del 2 de septiembre, etcétera. Recuerde que hay 60 minutos en una hora. Tome H como la altura en pies al convertir los tiempos. Además, asegúrese de que su calculadora gráfica esté en modo de radianes.

d) ¿Qué forma tienen los datos? ¿Cuál es el periodo de los datos? ¿Cuál es la amplitud? ¿Es la amplitud constante? Explique.

	Marea alta		Marea alta		Marea baja		Marea baja		Fase de Luna/Sol
Sept	Tiempo	Ma (pies)	Tiempo	Ma (pies)	Tiempo	Ma (pies)	Tiempo	Ma (pies)	Sube/baja
F 14	03:08a	2.4	11:12a	2.2	08:14a	2.0	07:19p	−0.1	7:00a/7:23p
S 15	03:33a	2.4	12:56p	2.2	08:15a	1.9	08:13p	0.0	7:00a/7:22p
S 16	03:57a	2.3	02:17p	2.3	08:45a	1.6	09:05p	0.3	7:01a/7:20p
M17	04:20a	2.2	03:33p	2.3	09:24a	1.4	09:54p	0.5	7:01a/7:19p
T18	04:41a	2.2	04:47p	2.3	10:08a	1.0	10:43p	1.0	7:02a/7:08p
W19	05:01a	2.0	06:04p	2.3	10:54a	0.7	11:32p	1.4	7:02a/7:17p
T20	05:20a	2.0	07:27p	2.3	11:44a	0.4			7:03a/7:15p

FUENTE: www.harbortides.com

e) Use los pasos 1-4 dados en las páginas 577-578 para ajustar una curva de seno a los datos. Haga la amplitud igual al promedio de las amplitudes que encontró en el inciso *c*), a menos que la amplitud sea constante. ¿Existe un corrimiento vertical? ¿Existe un corrimiento de fase?

f) Utilice su calculadora gráfica para encontrar la función senoidal de mejor ajuste. Compárela con su ecuación.

g) Utilice la ecuación encontrada en el inciso e) y la ecuación senoidal de mejor ajuste del inciso *f*) para predecir las mareas altas y las mareas baja del 21 de septiembre.

h) Al observar las horas del día en que ocurren las mareas bajas, ¿cuál sería la causa de que varíen tanto cada día? Explique. ¿Parece esto tener el mismo tipo de efecto en las mareas altas? Explique.

Los siguientes proyectos están disponibles en www.prenhall.com/sillivan

2. **Project at Motorola** ***Digital Transmission over the Air***
3. **Identifying Mountain Peaks in Hawaii**
4. **CBL Experiment**

Repaso acumulado

1. Encuentre las soluciones reales, si las hay, de la ecuación $2x^2 + x - 1 = 0$.

2. Encuentre la ecuación de la recta con pendiente -3 que contiene el punto $(-2, 5)$.

3. Encuentre una ecuación para el círculo de radio 4 y centro en el punto $(0, -2)$.

4. Analice la ecuación $2x - 3y = 12$. Dé su gráfica.

5. Analice la ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Dé su gráfica.

6. Use transformaciones para graficar la función $y = (x - 3)^2 + 2$.

7. Dibuje cada una de las siguientes funciones. Etiquete al menos tres puntos en cada gráfica.
a) $y = x^2$ b) $y = x^3$
c) $y = e^x$ d) $y = \ln x$
e) $y = \text{sen } x$ f) $y = \tan x$

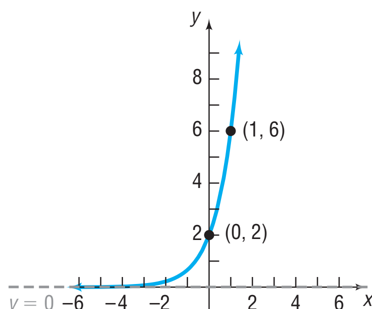
8. Encuentre la función inversa de $f(x) = 3x - 2$.

9. Calcule el valor exacto de $(\text{sen } 14°)^2 + (\cos 14°)^2 - 3$.

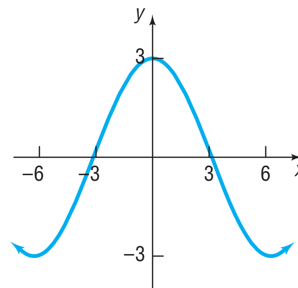
10. Grafique $y = 3 \text{ sen}(2x)$.

11. Calcule el valor exacto de $\tan \frac{\pi}{4} - 3 \cos \frac{\pi}{6} + \csc \frac{\pi}{6}$.

12. Encuentre una función exponencial para la siguiente gráfica. Exprese su respuesta en la forma $y = Ab^x$.



13. Encuentre una función senoidal para la siguiente gráfica.



14. a) Encuentre una función lineal que contenga los puntos $(-2, 3)$ y $(1, -6)$. ¿Cuál es la pendiente? ¿Cuáles son las intercepciones de la función? Grafique la función. Etiquete las intercepciones.
b) Encuentre una función cuadrática que contenga el punto $(-2, 3)$ con vértice en $(1, -6)$. ¿Cuáles son las intercepciones de la función? Grafique la función.
c) Demuestre que no existe una función exponencial de la forma $f(x) = ae^x$ que contenga los puntos $(-2, 3)$ y $(1, -6)$.

15. a) Encuentre una función de polinomios de grado 3, cuya intercepción y es 5, y cuyas intercepciones x son -2, 3 y 5. Grafique la función. Etiquete los mínimos y máximos locales.
b) Encuentre una función racional cuya intercepción y sea 5 y cuyas intercepciones x sean -2, 3 y 5 que tiene la recta $x = 2$ como asíntota vertical. Grafique la función. (Las respuestas podrían variar). Etiquete cualesquiera máximos o mínimos locales.

7 Trigonometría analítica

El temblor fue la señal de la destrucción

Los temblores submarinos que causaron el devastador tsunami habrían sido detectados por los habitantes cerca de 30 minutos antes de la llegada de la ola, informaron ayer los científicos. “El temblor fue sentido por residentes de la costa que tal vez no entendieron su importancia o no tuvieron tiempo de retirarse”, dijo el profesor Ted Bryant, un geocientífico de la Universidad de Wollongong.

El tsunami se debe haber oído como una flota de bombarderos al estrellarse en los 30 kilómetros de costa. “El tsunami debe haber sido el resultado de una rápida elevación o depresión del suelo del mar”, dijo un matemático y cosmólogo de la Universidad del Monash, el profesor Joe Monaghan, quien es uno de los expertos australianos en tsunamis….

Tsunamis, cordilleras de agua de cientos de kilómetros de largo que se extienden por varios kilómetros del frente hacia atrás, se alinean con la playa. “Estamos hablando de un volumen enorme de agua que se mueve muy rápido, 300 kilómetros por hora sería típico”, dice el profesor Monaghan.

(FUENTE: Peter Spinks, *The Age*, martes 21 de julio de 1998. Peter Spinks conduce talleres de escritura científica y habilidades en los medios, en todo el mundo, bajo demanda [www.dreamwater.org/workshop])

—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO

CONTENIDO

7.1 Funciones inversas de seno, coseno y tangente

7.2 Funciones trigonométricas inversas [continuación]

7.3 Identidades trigonométricas

7.4 Fórmulas de suma y resta

7.5 Fórmulas para ángulo doble y medio ángulo

7.6 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto

7.7 Ecuaciones trigonométricas (I)

7.8 Ecuaciones trigonométricas (II)

Repaso del capítulo

Proyectos del capítulo

Repaso acumulativo



7.1 Funciones inversas de seno, coseno y tangente

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Funciones inversas (sección 5.2, pp. 399-409)
- Valores de funciones trigonométricas de ángulos agudos (sección 6.3, p. 520 y sección 6.4, pp. 526-534)
- Dominio y rango de las funciones seno, coseno y tangente (sección 6.5, pp. 541-542)
- Gráficas de las funciones seno, coseno y tangente (sección 6.6, pp. 548-552, y sección 6.7, pp. 564-567)



Trabaje ahora en los problemas de “¿Está preparado?”, en la página 601.

OBJETIVOS
1. Encontrar el valor exacto de las funciones inversas de seno, coseno y tangente
2. Encontrar el valor aproximado de las funciones inversas de seno, coseno y tangente

En la sección 5.2 se analizaron las funciones inversas y se observó que si una función es uno a uno, entonces tiene una función inversa. También se observó que si una función no es uno a uno, es posible restringir su dominio de alguna manera adecuada para que la función restringida sea uno a uno.

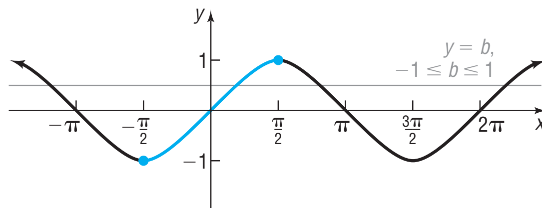
Ahora se revisarán algunas propiedades de una función f uno a uno y su función inversa f^{-1}.

1. $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f y $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}.
2. Dominio de f = rango de f^{-1}, y rango de f^{-1} = dominio de f^{-1}.
3. La gráfica de f y la gráfica de f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.
4. Si una función $y = f(x)$ tiene una función inversa, la ecuación de la función inversa es $x = f(y)$. La solución de esta ecuación es $y = f^{-1}(x)$.

Función seno inversa

En la figura 1, se reproduce la gráfica de $y = \text{sen } x$. Puesto que toda recta horizontal $y = b$, donde b está entre -1 y 1, cruza la gráfica de $y = \text{sen } x$ un número infinito de veces, la prueba de la recta horizontal indica que la función $y = \text{sen } x$ no es uno a uno.

Figura 1
$y = \text{sen } x, -\infty < x < \infty, -1 \le y \le 1$

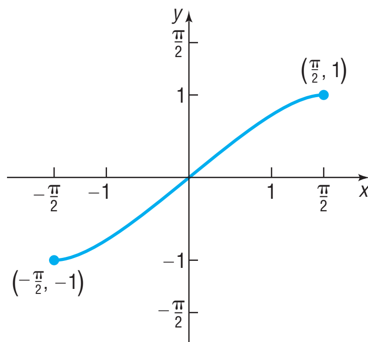


Sin embargo, si se restringe el dominio de $y = \text{sen } x$ al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la función restringida

$$y = \text{sen } x, \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

es uno a uno, y por lo tanto, tiene una función inversa.* Vea la figura 2.

Figura 2
$y = \text{sen } x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, -1 \le y \le 1$



*Aun cuando hay muchas otras maneras de restringir el dominio y obtener una función uno a uno, los matemáticos han acordado el uso congruente del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, para definir la inversa de $y = \text{sen } x$.

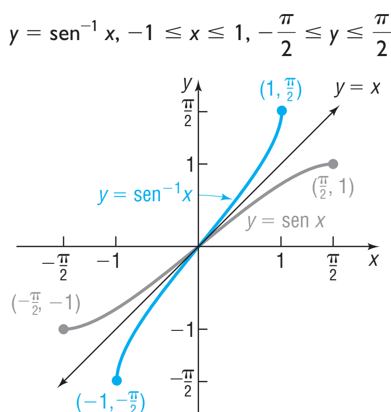
Una ecuación para la inversa de $y = f(x) = \text{sen}\, x$ se obtiene intercambiando x y y. La forma implícita de la función inversa es $x = \text{sen}\, y$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. La forma explícita se llama **seno inverso** de x y se simboliza por $y = f^{-1}(x) = \text{sen}^{-1}\, x$.

$$y = \text{sen}^{-1}\, x \quad \text{significa} \quad x = \text{sen}\, y$$

$$\text{donde} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Figura 3

$y = \text{sen}^{-1}\, x$, $-1 \leq x \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$



Como $y = \text{sen}^{-1}\, x$ quiere decir $x = \text{sen}\, y$, $y = \text{sen}^{-1}\, x$ se lee "y es el ángulo o número real cuyo seno es igual a x". De manera alternativa, se puede decir que "y es el seno inverso de x". Debe tenerse cuidado con la notación usada. El superíndice -1 que aparece en $y = \text{sen}^{-1}\, x$ no es un exponente, sino una reminiscencia del símbolo f^{-1} usado para denotar la función inversa. (Para evitar esta notación algunos libros usan la notación $y = \text{arcsen}\, x$ en lugar de $y = \text{sen}^{-1}\, x$).

La inversa de la función f recibe como entrada un elemento del rango de f y regresa como salida un elemento del dominio de f. La función seno restringida $y = f(x) = \text{sen}\, x$, recibe como entrada un ángulo o número real x en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y produce un número real en el intervalo $[-1, 1]$. Por lo tanto, la entrada de la función seno inverso $y = \text{sen}^{-1}\, x$ es un número real en el intervalo $[-1, 1]$ o $-1 \leq x \leq 1$, su dominio, y produce un ángulo o número real en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ o $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, su rango.

La gráfica de la función seno inverso se obtiene reflejando la porción restringida de la gráfica de $y = f(x) = \text{sen}\, x$ en la recta $y = x$, como se muestra en la figura 3.



COMPROBACIÓN: Grafique $Y = \text{sen}^{-1}\, x$ y compare el resultado con la figura 3.



Para algunos números x, es posible encontrar el valor exacto de $y = \text{sen}^{-1}\, x$.

EJEMPLO 1 Encontrar el valor exacto de una función seno inverso

Encuentre el valor exacto de: $\text{sen}^{-1}\, x$

Solución Sea $\theta = \text{sen}^{-1}\, 1$. Se busca el ángulo, θ, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, cuyo seno es igual a 1.

$$\theta = \text{sen}^{-1}\, 1, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

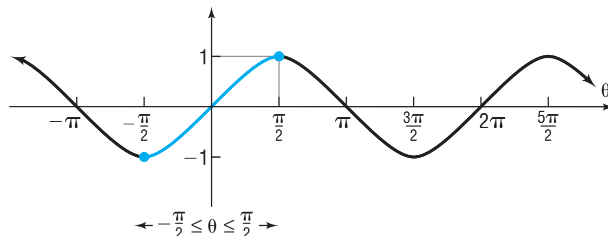
$$\text{sen}\, \theta = 1, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{Por definición de } y = \text{sen}^{-1}\, x$$

Ahora vea la tabla 1 y la figura 4.

Tabla 1

θ	sen θ
$-\frac{\pi}{2}$	-1
$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1

Figura 4



Se observa que el único ángulo θ dentro del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es 1 es $\frac{\pi}{2}$. (Note que sen $\frac{5\pi}{2}$ también es igual a 1, pero $\frac{5\pi}{2}$ está fuera de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y no es admisible). Entonces, como sen $\frac{\pi}{2} = 1$ y $\frac{\pi}{2}$ está en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, se concluye que

$$\text{sen}^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

EJEMPLO 2 Encontrar el valor exacto de una función seno inverso

Encuentre el valor exacto de: $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

Solución Sea $\theta = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$. Se busca el ángulo θ, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, cuyo seno es igual a $-\frac{1}{2}$.

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

(Vea la tabla 1 y la figura 4, si es necesario). El único ángulo dentro del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es $-\frac{1}{2}$ es $-\frac{\pi}{6}$. Entonces, como $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ y $-\frac{\pi}{6}$ está en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, se concluye que

$$\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

 2 Para la mayoría de los números x, el valor $y = \text{sen}^{-1} x$ debe aproximarse.

EJEMPLO 3 Encontrar el valor aproximado de una función seno inverso

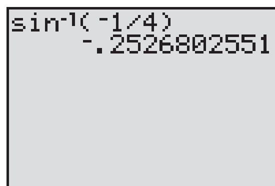
Encuentre un valor aproximado de

a) $\text{sen}^{-1} \frac{1}{3}$  b) $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

Exprese su respuesta en radianes redondeada a dos decimales.

Solución Puesto que se quiere un ángulo medido en radianes, primero se establece el modo de radianes.

Figura 5



a) $\text{sen}^{-1}\frac{1}{3} = 0.34$, redondeado a dos decimales.*

b) La figura 5 muestra la solución usando una calculadora gráfica TI-83. Entonces

$$\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) = -0.25$$

redondeado a dos decimales. ◄



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.

Cuando se analizaron las funciones y sus inversas en la sección 5.2, se encontró que $x = f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x))$. En términos de la función seno y su inversa, estas propiedades son de la forma

$$f^{-1}(f(x)) = \text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x, \quad \text{donde } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(2a)}$$

$$f(f^{-1}(x)) = \text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x, \quad \text{donde } -1 \leq x \leq 1 \qquad \textbf{(2b)}$$

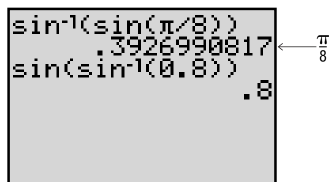
Por ejemplo, como $\frac{\pi}{8}$ está en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, el dominio restringido de la función seno, se aplica (2a) para obtener

$$\text{sen}^{-1}\left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right] = \frac{\pi}{8}$$

Además, como 0.8 está en el intervalo $[-1, 1]$, el dominio de la función seno inverso, se aplica (2b) para obtener

$$\text{sen}[\text{sen}^{-1}(0.8)] = 0.8$$

Figura 6

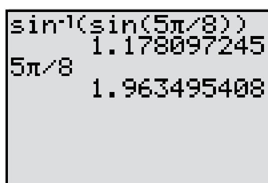


Vea estos cálculos para una calculadora de gráficas en la figura 6.

Vea la figura 7. Como $\frac{5\pi}{8}$ no está en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\text{sen}^{-1}\left[\text{sen}\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right] \neq \frac{5\pi}{8}$$

Figura 7



Para encontrar $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\frac{5\pi}{8}\right)$, se usa el hecho de que $\text{sen}\,\frac{5\pi}{8} = \text{sen}\,\frac{3\pi}{8}$. Como $\frac{3\pi}{8}$ está en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, se aplica (2a) para obtener

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\frac{5\pi}{8}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{3\pi}{8} \approx 1.178097245$$

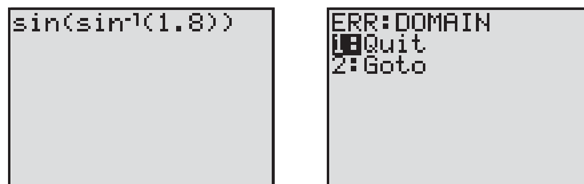
*En casi todas las calculadoras, el seno inverso se obtiene oprimiendo SHIFT o 2nd, seguido sin. En algunas calculadoras, sin^{-1} se oprime primero, luego se introduce 1/3; en otras, esta secuencia se aplica al revés. Consulte su manual del usuario para conocer la secuencia correcta.

Además, como 1.8 no está en el intervalo $[-1, 1]$,

$$\text{sen}[\text{sen}^{-1}(1.8)] \neq 1.8$$

Vea la figura 8. ¿Sabe por qué aparece el error?

Figura 8



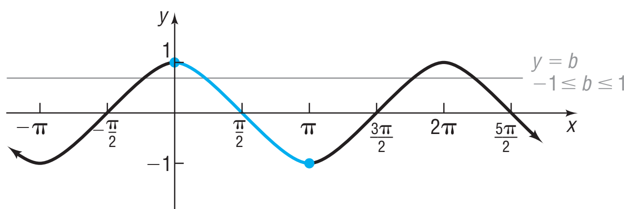


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37.

Función coseno inverso

La figura 9 muestra la gráfica de $y = \cos x$. Como toda recta horizontal $y = b$, donde b está entre -1 y 1, cruza la gráfica de $y = \cos x$ un número infinito de veces, la función coseno no es uno a uno.

Figura 9
$y = \cos x, -\infty < x < \infty, -1 \leq y \leq 1$

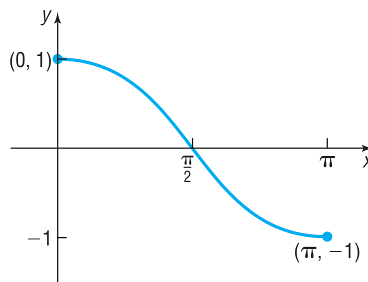


Sin embargo, si se restringe el domino de $y = \cos x$ al intervalo $[0, \pi]$, la función restringida

$$y = \cos x, \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

es uno a uno, y por lo tanto, tiene una función inversa.* Vea la figura 10.

Figura 10
$y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1$



Una ecuación para la inversa de $y = f(x) = \cos x$ se obtiene intercambiando x y y. La forma implícita de la función inversa es $x = \cos y$, $0 \leq y \leq \pi$. La forma explícita se llama **coseno inverso** de x y se simboliza por $y = f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ (o por $y = \text{arccos } x$).

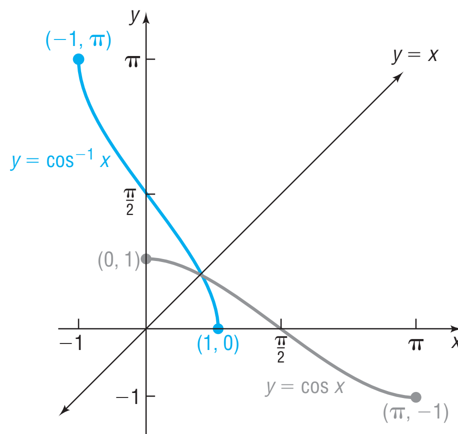
$$y = \cos^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \cos y$$
$$\text{donde} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq \pi \qquad \textbf{(3)}$$

Aquí, y es el ángulo cuyo coseno es x. El dominio de la función $y = \cos^{-1} x$ es $-1 \leq x \leq 1$, y su rango es $0 \leq y \leq \pi$. (¿Por qué?) La gráfica de

*Ésta es la restricción generalmente aceptada para definir el inverso.

$y = \cos^{-1} x$ se obtiene reflejando la porción restringida de la gráfica de $y = \cos x$ en la recta $y = x$, como se muestra en la figura 11.

Figura 11
$y = \cos^{-1} x$, $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi$





COMPROBACIÓN: Grafique $Y = \cos^{-1} x$ y compare el resultado con la figura 11.

EJEMPLO 4 Encontrar el valor exacto de una función coseno inverso

Encuentre el valor exacto de $\cos^{-1} 0$

Solución Sea $\theta = \cos^{-1} 0$. Se busca el ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$, cuyo coseno es igual a 0.

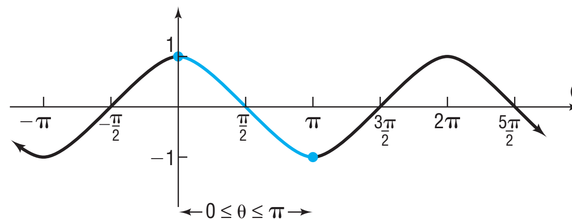
$$\theta = \cos^{-1} 0, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$
$$\cos \theta = 0, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

Vea la tabla 2 y la figura 12.

Tabla 2

θ	$\cos \theta$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
π	-1

Figura 12



Se observa que el único ángulo θ en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es 0 es $\frac{\pi}{2}$. (Note que $\cos \frac{3\pi}{2}$ también es igual a 0, pero $\frac{3\pi}{2}$ está fuera del intervalo $[0, \pi]$ y no es admisible). De manera que, como $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ y $\frac{\pi}{2}$ está en el intervalo $[0, \pi]$, se concluye que

$$\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$



EJEMPLO 5 Encontrar el valor exacto de una función coseno inverso

Encuentre el valor exacto de $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

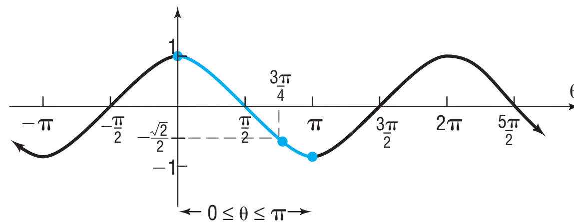
Solución Sea $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Se busca el ángulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, cuyo coseno es igual a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Vea la tabla 2 y la figura 13.

Figura 13



Se observa que el único ángulo θ dentro del intervalo $[0, \pi]$, cuyo coseno es $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ es $\frac{3\pi}{4}$. Entonces, como $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{3\pi}{4}$ está en el intervalo $[0, \pi]$, se concluye que

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 23.

Las siguientes propiedades se cumplen para la función coseno y su inversa:

$$f^{-1}(f(x)) = \cos^{-1}(\cos x) = x, \qquad \text{donde } 0 \leq x \leq \pi \qquad \textbf{(4a)}$$
$$f(f^{-1}(x)) = \cos(\cos^{-1} x) = x, \qquad \text{donde } -1 \leq x \leq 1 \qquad \textbf{(4b)}$$

EJEMPLO 6 Encontrar el valor exacto de una función compuesta

Encuentre el valor exacto de: a) $\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$ b) $\cos[\cos^{-1}(-0.4)]$

Solución a) $\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{\pi}{12}$ *Por la propiedad (4a)*

b) $\cos[\cos^{-1}(-0.4)] = -0.4$ *Por la propiedad (4b)* ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

Función tangente inversa

En la figura 14 se reproduce la gráfica de $y = \tan x$. Como toda recta horizontal cruza la gráfica un número infinito de veces, se deduce que la función tangente no es uno a uno.

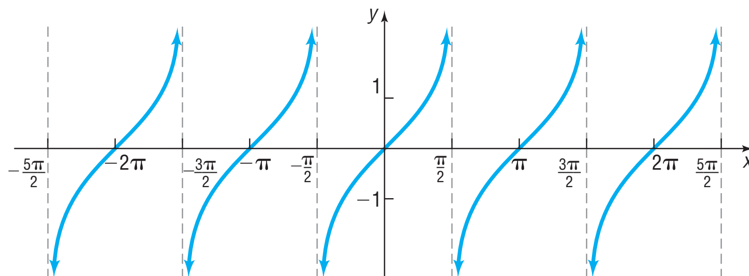


Figura 14

$y = \tan x$, $-\infty < x < \infty$, x es diferente de los múltiplos enteros de $\frac{\pi}{2}$, $-\infty < y < \infty$

Sin embargo, si se restringe el dominio de $y = \tan x$ al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,* la función restringida

$$y = \tan x, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

es uno a uno, y por lo tanto, tiene una función inversa. Vea la figura 15.

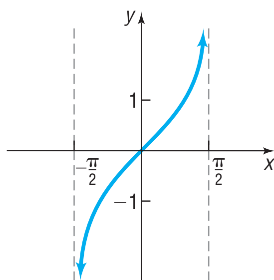


Figura 15

$y = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < y < \infty$

Una ecuación para la inversa de $y = f(x) = \tan x$ se obtiene intercambiando x y y. La forma implícita de la función inversa es $x = \tan y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. La forma explícita se llama **tangente inversa** de x y se simboliza por $y = f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ (o por $y = \arctan x$).

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \tan y$$
$$\text{donde} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(5)}$$

Aquí, y es el ángulo cuya tangente es x. El dominio de la función $y = \tan^{-1} x$ es $-\infty < x < \infty$, y su rango es $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. La gráfica de $y = \tan^{-1} x$ se obtiene reflejando la porción restringida de la gráfica de $y = \tan x$ en la recta $y = x$, como se muestra en la figura 16.

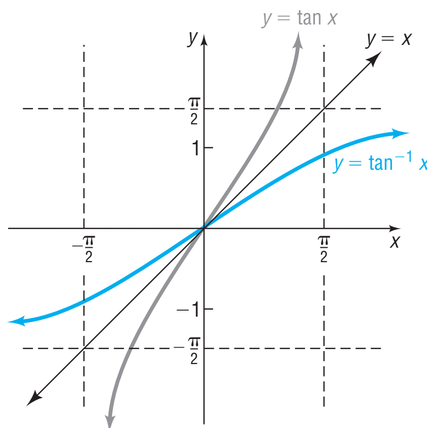


Figura 16

$y = \tan^{-1} x$, $-\infty < x < \infty$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

*Ésta es una restricción generalmente aceptada.



COMPROBACIÓN: Grafique $Y = \tan^{-1} x$ y compare el resultado con la figura 16.

EJEMPLO 7 Encontrar el valor exacto de una función tangente inversa

Encuentre el valor exacto de $\tan^{-1}$

Solución Sea $\theta = \tan^{-1} 1$. Se busca un ángulo θ, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, cuya tangente es igual 1.

$$\theta = \tan^{-1} 1, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan\theta = 1, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Vea la tabla 3. El único ángulo θ dentro del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cuya tangente es 1 es $\frac{\pi}{4}$. Como $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ y $\frac{\pi}{4}$ está en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, se concluye que

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$ ◀

Tabla 3

θ	$\tan\theta$
$-\frac{\pi}{2}$	No definida
$-\frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$-\frac{\pi}{4}$	-1
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	No definida



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 17.

EJEMPLO 8 Encontrar el valor exacto de una función tangente inversa

Encuentre el valor exacto de $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

Solución Sea $\theta = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$. Se busca un ángulo θ, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, cuya tangente es igual a $-\sqrt{3}$.

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right), \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan\theta = -\sqrt{3}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Vea la tabla 3 y la figura 15, si es necesario. El único ángulo θ dentro del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cuya tangente es $-\sqrt{3}$ es $-\frac{\pi}{3}$. Entonces, como $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ y $-\frac{\pi}{3}$ está en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, se concluye que

$$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$ ◀

Las siguientes propiedades se cumplen para la función tangente:

$$f^{-1}(f(x)) = \tan^{-1}(\tan x) = x, \qquad \text{donde } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$f(f^{-1}(x)) = \tan(\tan^{-1} x) = x, \qquad \text{donde } -\infty < x < \infty$$

7.1 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. ¿Cuáles son el dominio y el rango de $y = \text{sen } x$? (pp. 541-542)

2. Para una función f y su inversa f^{-1}, $f(f^{-1}(x))$ ________ = ________. (pp. 399-409)

3. *Falso o verdadero:* si $y = f(x)$ es una función uno a uno, entonces $x = f(y)$. (pp. 399-409)

4. *Falso o verdadero:* la gráfica de $y = \cos x$ es decreciente en el intervalo $[0, \pi]$. (pp. 548-552)

5. $\tan \frac{\pi}{4}$ = ________; $\text{sen } \frac{\pi}{3}$ = ________ (p. 520)

6. $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ = ________; $\cos \pi$ = ________ (pp. 526-534)

Conceptos y vocabulario

7. $y = \text{sen}^{-1} x$ significa ________, donde $-1 \le x \le 1$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

8. El valor de $\text{sen}^{-1}\left[\cos \frac{\pi}{2}\right]$ es ________.

9. $\cos^{-1}\left[\cos \frac{\pi}{5}\right]$ = ________.

10. *Falso o verdadero:* el dominio de $y = \text{sen}^{-1} x$ es $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

11. *Falso o verdadero:* $\cos(\text{sen}^{-1} 0) = 1$ y $\text{sen}(\cos^{-1} 0) = 1$.

12. *Falso o verdadero:* $y = \tan^{-1} x$ significa $x = \tan y$, donde $-\infty < x < \infty$ y $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Ejercicios

En los problemas 13-24, calcule el valor exacto de cada expresión.

13. $\text{sen}^{-1} 0$
14. $\cos^{-1} 1$
15. $\text{sen}^{-1}(-1)$
16. $\cos^{-1}(-1)$
17. $\tan^{-1} 0$
18. $\tan^{-1}(-1)$
19. $\text{sen}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$
20. $\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}$
21. $\tan^{-1} \sqrt{3}$
22. $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
23. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
24. $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

En los problemas 25-36, use una calculadora para calcular el valor de cada expresión redondeada a dos decimales.

25. $\text{sen}^{-1} 0.1$
26. $\cos^{-1} 0.6$
27. $\tan^{-1} 5$
28. $\tan^{-1} 0.2$
29. $\cos^{-1} \frac{7}{8}$
30. $\text{sen}^{-1} \frac{1}{8}$
31. $\tan^{-1}(-0.4)$
32. $\tan^{-1}(-3)$
33. $\text{sen}^{-1}(-0.12)$
34. $\cos^{-1}(-0.44)$
35. $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{3}$
36. $\text{sen}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{5}$

En los problemas 37-44, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

37. $\text{sen}[\text{sen}^{-1}(0.54)]$
38. $\tan[\tan^{-1}(7.4)]$
39. $\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right]$
40. $\text{sen}^{-1}\left[\text{sen}\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right]$
41. $\tan[\tan^{-1}(-3.5)]$
42. $\cos[\cos^{-1}(-0.05)]$
43. $\text{sen}^{-1}\left[\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right]$
44. $\tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$

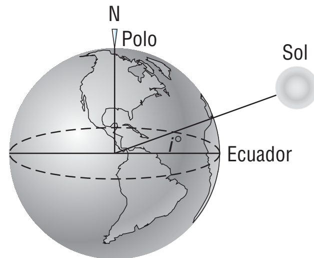
En los problemas 45-56, no use calculadora. En su respuesta, diga también por qué.

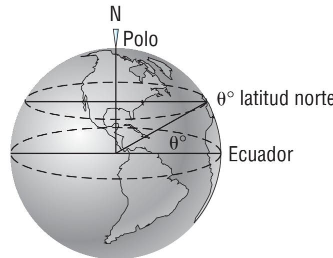
45. Es $\text{sen}^{-1}\left[\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = -\frac{\pi}{6}$?
46. Es $\text{sen}^{-1}\left[\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{2\pi}{3}$?
47. Es $\text{sen}[\text{sen}^{-1}(2)] = 2$?
48. Es $\text{sen}\left[\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2}$?
49. Es $\cos^{-1}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = -\frac{\pi}{6}$?
50. Es $\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{2\pi}{3}$?
51. Es $\cos\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2}$?
52. Es $\cos[\cos^{-1}(2)] = 2$?
53. Es $\tan^{-1}\left[\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = -\frac{\pi}{3}$?
54. Es $\tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{2\pi}{3}$?
55. Es $\tan[\tan^{-1}(2)] = 2$?
56. Es $\tan\left[\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2}$?

En los problemas 57-62, use lo siguiente: la fórmula

$$D = 24\left[1 - \frac{\cos^{-1}(\tan i \tan \theta)}{\pi}\right]$$

se utiliza para aproximar el número de horas de luz cuando la declinación del Sol es i° en un lugar θ° latitud norte para cualquier día entre el equinoccio de primavera y el equinoccio de otoño. La declinación del Sol se define como el ángulo i entre el plano ecuatorial y cualquier rayo de luz desde el Sol. La latitud de una localidad es el ángulo θ entre el ecuador y el sitio sobre la superficie de la Tierra, con el vértice del ángulo en el centro de la Tierra. Vea la figura. Para usar la fórmula, $\cos^{-1}(\tan i \tan \theta)$ *debe expresarse en radianes.*





57. Aproxime el número de horas de luz en Houston, Texas (29°45′ latitud norte), para las siguientes fechas:
a) Solsticio de verano ($i = 23.5°$)
b) Equinoccio de primavera ($i = 0°$)
c) 4 de julio ($i = 22°48'$)

58. Aproxime el número de horas de luz en Nueva York, Nueva York (40°45′ latitud norte), para las siguientes fechas:
a) Solsticio de verano ($i = 23.5°$)
b) Equinoccio de primavera ($i = 0°$)
c) 4 de julio ($i = 22°48'$)

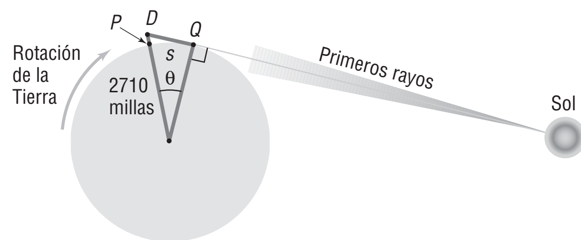
59. Aproxime el número de horas de luz en Honolulu, Hawai (21°18′ latitud norte), para las siguientes fechas:
a) Solsticio de verano ($i = 23.5°$)
b) Equinoccio de primavera ($i = 0°$)
c) 4 de julio ($i = 22°48'$)

60. Aproxime el número de horas de luz en Anchorage, Alaska (61°10′ latitud norte), para las siguientes fechas:
a) Solsticio de verano ($i = 23.5°$)
b) Equinoccio de primavera ($i = 0°$)
c) 4 de julio ($i = 22°48'$)

61. Aproxime el número de horas de luz en el Ecuador (0° latitud norte) para las siguientes fechas:
a) Solsticio de verano ($i = 23.5°$)
b) Equinoccio de primavera ($i = 0°$)
c) 4 de julio ($i = 22°48'$)
d) ¿Qué concluye acerca del número de horas de luz durante el año para un lugar en el Ecuador?

62. Aproxime el número de horas de luz en cualquier lugar con 66°30’ latitud norte para las siguientes fechas:
a) Solsticio de verano ($i = 23.5°$)
b) Equinoccio de primavera ($i = 0°$)
c) 4 de julio ($i = 22°48'$)
d) El número de horas de luz en el solsticio de invierno se determina calculando el número de horas de luz en el solsticio de verano y restando este resultado de 24 horas, debido a la simetría de la trayectoria orbital de la Tierra alrededor del Sol. Calcule el número de horas de luz para este lugar en el solsticio de invierno. ¿Qué concluye acerca de las horas de luz para el sitio en 66°30′ latitud norte?

63. El primero en ver el amanecer Cadillac Mountain, con elevación de 1530 pies, está en Acadia National Park, Maine, y es el pico más alto en la costa este de Estados Unidos. Se dice que una persona parada en la cima será la primera persona en el país en ver los rayos del Sol saliente. ¿Cuánto tiempo antes verá el amanecer una persona parada en la cima de Cadillac Mountain comparado con una persona parada a nivel del mar?
[**Sugerencia:** Consulte la figura. Cuando la persona en D ve los primeros rayos de Sol, la persona en P no los ve. La persona en P ve los primeros rayos sólo después de que la Tierra ha rotado de manera que el lugar P queda en el lugar Q. Calcule la longitud del arco subtendido por el ángulo central θ. Después use el hecho de que, en la latitud de Cadillac Mountain, en 24 horas se subtiende un ángulo de longitud 2π (2710 millas), y encuentre el tiempo que toma subtender esta longitud].



Respuestas a "¿Está preparado?"

1. dominio: $-\infty < x < \infty$; rango: $-1 \leq y \leq 1$
2. $f^{-1}(f(x)) = x$
3. Falso
4. Verdadera
5. $1; \frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $-\frac{1}{2}; -1$

7.2 Funciones trigonométricas inversas (continuación)

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase los siguientes conceptos*:

- Valores exactos dado el valor de una función trigonométrica y el cuadrante del ángulo (sección 6.4, pp. 533-534)
- Gráficas de las funciones secante, cosecante y cotangente (sección 6.7, pp. 567-569)
- Dominio y rango de las funciones secante, cosecante y cotangente (sección 6.5, p. 542)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 606.

OBJETIVOS
1 Calcular el valor exacto de expresiones que incluyen las funciones inversas de seno, coseno y tangente
2 Conocer la definición de las funciones inversas de secante, cosecante y cotangente
3 Usar una calculadora para evaluar $\sec^{-1} x$, $\csc^{-1} x$ y $\cot^{-1} x$


1 En esta sección se continúa el análisis de las funciones trigonométricas inversas

EJEMPLO 1 Encontrar el valor exacto de expresiones que incluyen funciones trigonométricas inversas

Encuentre el valor exacto de $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{4}\right)$

Solución

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$ ◀

Observe que en la solución del ejemplo 1 no se usó la propiedad (2*a*), de la página 595. Esto se debe a que el argumento de la función seno no está en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, como se requiere. Si se usa el hecho de que

$$\text{sen}\,\frac{5\pi}{4} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

↑ $y = \text{sen}\, x$ es impar

entonces se utiliza la propiedad (2*a*):

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = \text{sen}^{-1}\left[\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = -\frac{\pi}{4}$$

↑ Propiedad (2a)


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

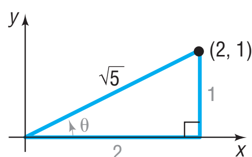
EJEMPLO 2 Encontrar el valor exacto de expresiones que incluyen funciones trigonométricas inversas

Encuentre el valor exacto de $\text{sen}\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$

Solución Sea $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$. Entonces $\tan\theta = \frac{1}{2}$, donde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Como $\tan\theta > 0$, se deduce que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, de manera que θ está en el cuadrante I. Ahora, en la figura 17 se dibujó un triángulo en el cuadrante I que describe $\tan\theta = \frac{1}{2}$. La hipotenusa de este triángulo es $\sqrt{5}$. Entonces $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, y

$$\text{sen}\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) = \text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$ ◀

Figura 17
$\tan\theta = \frac{1}{2}$



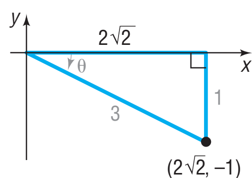
EJEMPLO 3 Encontrar el valor exacto de expresiones que incluyen funciones trigonométricas inversas

Encuentre el valor exacto de $\cos\left[\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

Solución Sea $\theta = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$. Entonces $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{3}$ y $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Como $\text{sen}\,\theta < 0$, se deduce que $-\frac{\pi}{2} \le \theta < 0$, de manera que θ está en el cuadrante IV. La figura 18 ilustra $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{3}$ para θ en el cuadrante IV. Así,

$$\cos\left[\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$ ◀

Figura 18
$\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{3}$



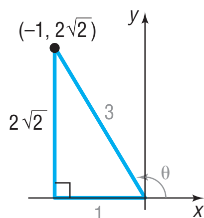
EJEMPLO 4 Encontrar los valores exactos de expresiones que incluyen funciones trigonométricas inversas

Encuentre el valor de $\tan\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

Solución Sea $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$. Entonces $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ y $0 \le \theta \le \pi$. Como $\cos\theta < 0$, se deduce que $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$, está en el cuadrante II. La figura 19 ilustra $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ para θ en el cuadrante II. Entonces

$$\tan\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \tan\theta = \frac{2\sqrt{2}}{-1} = -2\sqrt{2}$$ ◀

Figura 19
$\cos\theta = -\frac{1}{3}$





TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 9 Y 27.

Las otras funciones trigonométricas inversas

2 Las funciones secante inversa, cosecante inversa y cotangente inversa se definen como sigue:

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \sec y \qquad \textbf{(1)}$$
$$\text{donde} \quad |x| \geq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad y \neq \frac{\pi}{2}^{*}$$

$$y = \csc^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \csc y \qquad \textbf{(2)}$$
$$\text{donde} \quad |x| \geq 1 \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad y \neq 0^{\dagger}$$

$$y = \cot^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \cot y \qquad \textbf{(3)}$$
$$\text{donde} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{y} \quad 0 < y < \pi$$

Se sugiere al lector revisar las gráficas de las funciones cosecante, secante y cotangente en las figura 92, 93 y 95 de la sección 6.7 para ayudarle a ver la base de estas definiciones.

EJEMPLO 5 Encontrar el valor exacto de una función cosecante inversa

Encuentre el valor exacto de $\csc^{-1} 2$

Solución Sea $\theta = \csc^{-1} 2$. Se busca el ángulo θ, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta \neq 0$, cuya cosecante es igual a 2 $\left(\text{o, de manera equivalente, cuyo seno es igual a } \frac{1}{2}\right)$.

$$\theta = \csc^{-1} 2, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \theta \neq 0$$

$$\csc \theta = 2, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \theta \neq 0$$

El único ángulo θ en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta \neq 0$, cuya cosecante es 2 es $\frac{\pi}{6}$, entonces $\csc^{-1} 2 = \frac{\pi}{6}$. ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

3 La mayoría de las calculadoras no tienen teclas para evaluar las funciones cotangente, cosecante y secante inversas. La manera más fácil de evaluarlas es convertirlas en funciones trigonométricas inversas cuyo rango sea el mismo que el de la que se evalúa. En este respecto, observe que $y = \cot^{-1} x$ y $y = \sec^{-1} x$ (excepto donde no están definidas) cada una tiene el mismo rango que $y = \cos^{-1} x$; $y = \csc^{-1} x$ (excepto donde no está definida) tiene el mismo rango que $y = \text{sen}^{-1} x$.

*Muchos libros usan esta definición. Algunos utilizan la restricción $0 \leq y < \frac{\pi}{2}, \pi \leq y < \frac{3\pi}{2}$.

†Muchos libros usan esta definición. Algunos utilizan la restricción $-\pi < y \leq -\frac{\pi}{2}, 0 < y \leq \frac{\pi}{2}$.

EJEMPLO 6 **Valor aproximado de funciones trigonométricas inversas**

Use una calculadora para aproximar cada expresión en radianes redondeados a dos decimales.

a) $\sec^{-1} 3$ b) $\csc^{-1}(-4)$ c) $\cot^{-1}\frac{1}{2}$ d) $\cot^{-1}(-2)$

Solución Primero, establezca el modo de radianes en su calculadora.

a) Sea $\theta = \sec^{-1} 3$. Entonces $\sec\theta = 3$ y $0 \leq \theta \leq \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Como $\cos\theta = \frac{1}{3}$ y $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$, se tiene

$$\sec^{-1} 3 = \theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 1.23$$

Usar calculadora

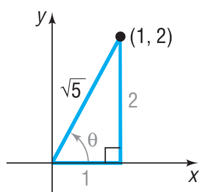
b) Sea $\theta = \csc^{-1}(-4)$. Entonces $\csc\theta = -4$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta \neq 0$. Como $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{4}$ y $\theta = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$, se tiene

$$\csc^{-1}(-4) = \theta = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) \approx -0.25$$

c) Sea $\theta = \cot^{-1}\frac{1}{2}$. Entonces $\cot\theta = \frac{1}{2}$, $0 < \theta < \pi$. De estos hechos, se sabe que θ está en el cuadrante I. Se dibuja la figura 20 como ayuda para encontrar $\cos\theta$. Entonces $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, y

$$\cot^{-1}\frac{1}{2} = \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 1.11$$

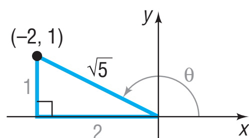
Figura 20
$\cot\theta = \frac{1}{2}$, $0 < \theta < \pi$



d) Sea $\theta = \cot^{-1}(-2)$. Entonces $\cot\theta = -2$, $0 < \theta < \pi$. De estos hechos, se sabe que θ está en el cuadrante II. Se dibuja la figura 21 como ayuda para encontrar $\cos\theta$. Entonces $\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, y

$$\cot^{-1}(-2) = \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 2.68$$

Figura 21
$\cot\theta = -2$, $0 < \theta < \pi$



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45.

7.2 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. ¿Cuáles son el dominio y el rango de $y = \sec x$? (p. 542)
2. *Falso o verdadero:* la gráfica de $y = \sec x$ es creciente en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ y en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. (pp. 567-569)
3. Si $\cot\theta = -2$ y $0 < \theta < \pi$, entonces $\cos\theta =$ ________. (pp. 533-534)

Conceptos y vocabulario

4. $y = \sec^{-1} x$ significa __________, donde $|x|$ __________ y __________ $\leq y \leq$ __________, $y \neq \frac{\pi}{2}$.

5. $\cos(\tan^{-1} 1) =$ __________.

6. *Falso o verdadero:* es imposible obtener valores exactos para la función secante inversa.

7. *Falso o verdadero:* $\csc^{-1} 0.5$ no está definida.

8. *Falso o verdadero:* el dominio de la función cotangente inversa es el conjunto de números reales.

Ejercicios

En los problemas 9-36, encuentre el valor exacto de cada expresión.

9. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
10. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1} \frac{1}{2}\right)$
11. $\tan\left[\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$
12. $\tan\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$
13. $\sec\left(\cos^{-1} \frac{1}{2}\right)$
14. $\cot\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$
15. $\csc(\tan^{-1} 1)$
16. $\sec(\tan^{-1} \sqrt{3})$
17. $\operatorname{sen}[\tan^{-1}(-1)]$
18. $\cos\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$
19. $\sec\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$
20. $\csc\left[\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$
21. $\cos^{-1}\left(\cos \frac{5\pi}{4}\right)$
22. $\tan^{-1}\left(\tan \frac{2\pi}{3}\right)$
23. $\operatorname{sen}^{-1}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right]$
24. $\cos^{-1}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$
25. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3}\right)$
26. $\tan\left(\cos^{-1} \frac{1}{3}\right)$
27. $\sec\left(\tan^{-1} \frac{1}{2}\right)$
28. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$
29. $\cot\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$
30. $\csc[\tan^{-1}(-2)]$
31. $\operatorname{sen}[\tan^{-1}(-3)]$
32. $\cot\left[\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$
33. $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
34. $\csc\left(\tan^{-1} \frac{1}{2}\right)$
35. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\cos \frac{3\pi}{4}\right)$
36. $\cos^{-1}\left(\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}\right)$

En los problemas 37-41, encuentre el valor exacto de cada expresión.

37. $\cot^{-1} \sqrt{3}$
38. $\cot^{-1} 1$
39. $\csc^{-1}(-1)$
40. $\csc^{-1} \sqrt{2}$
41. $\sec^{-1} \frac{2\sqrt{3}}{3}$
42. $\sec^{-1}(-2)$
43. $\cot^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
44. $\csc^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

En los problemas 45-56, use una calculadora para encontrar el valor de cada expresión redondeada a dos decimales.

45. $\sec^{-1} 4$
46. $\csc^{-1} 5$
47. $\cot^{-1} 2$
48. $\sec^{-1}(-3)$
49. $\csc^{-1}(-3)$
50. $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
51. $\cot^{-1}(-\sqrt{5})$
52. $\cot^{-1}(-8.1)$
53. $\csc^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)$
54. $\sec^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)$
55. $\cot^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)$
56. $\cot^{-1}(-\sqrt{10})$

57. Utilice una calculadora gráfica para representar $y = \cot^{-1} x$.
58. Utilice una calculadora gráfica para representar $y = \sec^{-1} x$.
59. Utilice una calculadora gráfica para representar $y = \csc^{-1} x$.
60. Explique con sus palabras cómo usaría su calculadora para encontrar el valor de $\cot^{-1} 10$.
61. Consulte tres libros de cálculo y escriba la definición de $y = \sec^{-1} x$ y de $y = \csc^{-1} x$. Compare éstas con la definición dada en este libro.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. Dominio: $\{x \mid x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\}$; rango: $\{y \mid |y| \geq 1\}$

2. Verdadero 3. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$

7.3 Identidades trigonométricas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Identidades fundamentales (sección 6.2, p. 510)

 Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 613.

OBJETIVOS 1 Usar álgebra para simplificar expresiones trigonométricas
2 Establecer identidades

En el capítulo anterior se vio que las funciones trigonométricas se combinan en una amplia variedad de identidades. Antes de establecer algunas identidades adicionales, se revisará la definición de identidad.

Se dice que dos funciones f y g son **idénticamente iguales** si

$$f(x) = g(x)$$

para cada valor de x para el que ambas funciones están definidas. Tal ecuación se conoce como una **identidad**. Una ecuación que no es una identidad se llama **ecuación condicional**.

Por ejemplo, las siguientes son identidades:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \qquad \text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \qquad \csc x = \frac{1}{\text{sen}\, x}$$

Las siguientes son ecuaciones condicionales:

$2x + 5 = 0$ *Verdadera sólo si* $x = -\frac{5}{2}$.

$\text{sen}\, x = 0$ *Verdadera sólo si* $x = k\pi$, *k entero.*

$\text{sen}\, x = \cos x$ *Verdadera sólo si* $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *o* $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, *k entero.*

Los siguientes recuadros resumen las identidades trigonométricas establecidas hasta ahora.

Identidades de cociente

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identidades de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

Identidades par-impar

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\csc(-\theta) = -\csc\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

Esta lista de identidades comprende a las que se llaman **identidades trigonométricas básicas**. Estas identidades no deben nada más memorizarse, pero deben *saberse* (justo como sabe su nombre; no tuvo que memorizarlo). De hecho, con frecuencia se usan variaciones menores de las identidades básicas. Por ejemplo, se podría querer usar

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta \quad \text{o} \quad \cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$$

en lugar de $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Por esta razón, entre otras, debe saber estas relaciones y sentirse cómodo con sus variaciones.



La habilidad para usar el álgebra para manipular expresiones trigonométricas es importante y debe desarrollarse para establecer identidades. Algunas técnicas usadas para determinar identidades son multiplicar por "un 1 bien elegido", escribir expresiones trigonométricas sobre un denominador común, reescribir expresiones trigonométricas nada más en términos de seno y coseno, y factorización.

EJEMPLO 1 Uso de técnicas algebraicas para simplificar expresiones trigonométricas

a) Simplifique $\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta}$ reescribiendo cada función trigonométrica en términos de seno y coseno.

b) Simplifique $\dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$ multiplicando el numerador y el denominador por $1 - \operatorname{sen}\theta$.

c) Simplifique $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{\cot\theta - \cos\theta}{\cos\theta}$ reescribiendo las expresiones sobre un denominador común.

d) Simplificar $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta - 1}{\tan\theta\operatorname{sen}\theta - \tan\theta}$ factorizando.

Solución a) $$\frac{\cot\theta}{\csc\theta} = \frac{\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{1} = \cos\theta$$

b) $\dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\cdot\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)}{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)}{\cos^2\theta} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

↑ Bien elegido 1: $\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$

c) $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{\cot\theta-\cos\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cot\theta-\cos\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cot\theta\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta + \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$

↑ $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \dfrac{2\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \dfrac{2}{\operatorname{sen}\theta}$

d) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta - 1}{\tan\theta\operatorname{sen}\theta - \tan\theta} = \dfrac{(\operatorname{sen}\theta+1)(\operatorname{sen}\theta-1)}{\tan\theta(\operatorname{sen}\theta-1)} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta+1}{\tan\theta}$ ◀

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 9, 11 Y 13.

 En los ejemplos que siguen, las instrucciones son "establecer la identidad...". Como se verá, esto se logra comenzando con un lado de la ecuación dada (usualmente la que contiene la expresión más complicada) y usando las identidades básicas adecuadas y manipulaciones algebraicas, hasta llegar a la expresión del otro lado. La selección adecuada de las identidades básicas para obtener el resultado deseado se aprende sólo con la experiencia y mucha práctica.

EJEMPLO 2 Para establecer una identidad

Establezca la identidad $\csc\theta\cdot\tan\theta = \sec\theta$

Solución Se comienza con el lado izquierdo, porque contiene la expresión más complicada, luego se aplica una identidad recíproca y una identidad de cociente.

$$\csc\theta\cdot\tan\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

Una vez que se obtiene el lado derecho, la identidad queda establecida. ◀



COMENTARIO: Se puede utilizar una calculadora gráfica para proporcionar evidencia de una identidad. Por ejemplo, si se grafica $Y_1 = \csc\theta\cdot\tan\theta$ y $Y_2 = \sec\theta$, las gráficas parecen ser las mismas. Esto proporciona evidencia de que $Y_1 = Y_2$. Sin embargo, no prueba su igualdad. Una calculadora gráfica *no se puede usar para establecer una identidad*; las identidades deben establecerse de manera algebraica. ■

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

EJEMPLO 3 Para establecer una identidad

Establezca la identidad: $\operatorname{sen}^2(-\theta) + \cos^2(-\theta) = 1$

Solución Se comienza con el lado izquierdo y se aplican identidades par-impar.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(-\theta) + \cos^2(-\theta) &= [\operatorname{sen}(-\theta)]^2 + [\cos(-\theta)]^2 \\ &= (-\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 && \text{Identidades par-impar} \\ &= (\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 \\ &= 1 && \text{Identidad de Pitágoras}\end{aligned}$$ ◀

EJEMPLO 4 **Para establecer una identidad**

Establecer la identidad $\dfrac{\operatorname{sen}^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\operatorname{sen}(-\theta) - \cos(-\theta)} = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta$

Solución Se comienza con dos observaciones: El lado izquierdo parece contener la expresión más complicada. Además, el lado izquierdo contiene la expresión con el argumento $-\theta$, mientras que el lado derecho contiene expresiones con el argumento θ. Se decide, por lo tanto, comenzar con el lado izquierdo y aplicar las identidades par-impar.

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\operatorname{sen}(-\theta) - \cos(-\theta)} &= \frac{[\operatorname{sen}(-\theta)]^2 - [\cos(-\theta)]^2}{\operatorname{sen}(-\theta) - \cos(-\theta)}\\ &= \frac{(-\operatorname{sen}\theta)^2 - (\cos\theta)^2}{-\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} && \text{Identidades par-impar}\\ &= \frac{(\operatorname{sen}\theta)^2 - (\cos\theta)^2}{-\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} && \text{Simplificar.}\\ &= \frac{(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\cancel{(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}}{-\cancel{(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}} && \text{Factorizar.}\\ &= \cos\theta - \operatorname{sen}\theta && \text{Cancelar y simplificar.}\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 **Para establecer una identidad**

Establezca la identidad: $\dfrac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta} = \tan\theta$

Solución

$$\frac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta} = \frac{1 + \tan\theta}{1 + \dfrac{1}{\tan\theta}} = \frac{1 + \tan\theta}{\dfrac{\tan\theta + 1}{\tan\theta}} = \frac{\tan\theta\cancel{(1 + \tan\theta)}}{\cancel{\tan\theta + 1}} = \tan\theta$$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

Cuando aparecen sumas o diferencias de cocientes, suele ser mejor reescribirlas como un solo cociente, en especial si el otro lado de la identidad tiene nada más un término.

EJEMPLO 6 **Para establecer una identidad**

Establezca la identidad: $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta} + \dfrac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 2\csc\theta$

Solución El lado izquierdo es más complicado, de manera que se comienza por éste, y procedemos a sumar.

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta} + \frac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} &= \frac{\operatorname{sen}^2\theta + (1 + \cos\theta)^2}{(1 + \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} && \text{Sumar los cocientes.}\\ &= \frac{\operatorname{sen}^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{(1 + \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} && \text{Eliminar paréntesis del numerador.}\\ &= \frac{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + 1 + 2\cos\theta}{(1 + \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} && \text{Reagrupar.}\\ &= \frac{2 + 2\cos\theta}{(1 + \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} && \text{Identidad de Pitágoras.}\\ &= \frac{2\cancel{(1 + \cos\theta)}}{\cancel{(1 + \cos\theta)}(\operatorname{sen}\theta)} && \text{Factorizar y cancelar.}\\ &= \frac{2}{\operatorname{sen}\theta}\\ &= 2\csc\theta && \text{Identidad recíproca.}\end{aligned}$$

Algunas veces ayuda escribir un lado en términos de senos y cosenos nada más.

EJEMPLO 7 Para establecer una identidad

Establezca la identidad $\dfrac{\tan\theta + \cot\theta}{\sec\theta\csc\theta} = 1$

Solución

$$\frac{\tan\theta + \cot\theta}{\sec\theta\csc\theta} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}$$

Cambio a senos y cosenos. Suma de cocientes en numerador.

$$= \frac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{1} = 1$$

Dividir el cociente; $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 69.

Algunas veces, al multiplicar el numerador y el denominador por un factor apropiado se obtiene una simplificación.

EJEMPLO 8 Para establecer una identidad

Establezca la identidad: $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

Solución Se comienza con el lado izquierdo, y se multiplica el numerador y el denominador por $1 + \operatorname{sen}\theta$. (Otra manera sería multiplicar el numerador y el denominador del lado derecho por $1 - \operatorname{sen}\theta$).

$$\frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} \quad \text{Multiplicar numerador y denominador por } 1 + \operatorname{sen}\theta.$$

$$= \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)} \quad 1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$$

$$= \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} \quad \text{Cancelar.}$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

EJEMPLO 9 Para establecer una identidad que incluye funciones trigonométricas inversas

Demuestre que $\operatorname{sen}(\tan^{-1} v) = \dfrac{v}{\sqrt{1 + v^2}}$.

Solución Sea $\theta = \tan^{-1} v$ por lo que $\tan\theta = v$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Como resultado, se sabe que $\sec\theta > 0$.

$$\operatorname{sen}(\tan^{-1} v) = \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\cos\theta} = \tan\theta\cos\theta = \frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

Multiplicar por 1: $\frac{\cos\theta}{\cos\theta}$; $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$; $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$; $\sec\theta > 0$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 99.

Aunque la única manera de aprender cómo establecer identidades es la práctica, la siguiente guía debe ser útil.

Guía para establecer identidades

1. Casi siempre es preferible comenzar con el lado que contiene la expresión más complicada.
2. Reescriba sumas o diferencias de cocientes como un solo cociente.
3. Algunas veces ayudará reescribir un lado en términos de senos y cosenos nada más.
4. Siempre mantenga su meta en mente. Al manipular un lado de la expresión no debe olvidar la forma de la expresión en el otro lado.

ADVERTENCIA: Tenga cuidado de no manejar las identidades que va a establecer como si fueran ecuaciones condicionales. *No puede* establecer una identidad por métodos como sumar una expresión en ambos lados y obtener una proposición verdadera, porque la proposición original es precisamente la que está intentando probar. No se sabe hasta que se establece si, de hecho, es verdadera. ■

7.3 Evalúe su comprensión

"Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. *Falso o verdadero:* $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. (p. 510)
2. La identidad de cociente establece que $\tan\theta =$ ________. (p. 510)

Conceptos y vocabulario

3. Suponga que f y g son dos funciones con el mismo dominio. Si $f(x) = g(x)$ para toda x en el dominio, la ecuación se llama ________. De otra manera se llama ecuación ________.
4. $\tan^2\theta - \sec^2\theta =$ ________.
5. $\cos(-\theta) - \cos\theta =$ ________.
6. *Falso o verdadero:* $\operatorname{sen}(-\theta) + \operatorname{sen}\theta = 0$ para cualquier valor de θ.
7. *Falso o verdadero:* al establecer una identidad, con frecuencia es más fácil multiplicar ambos lados por una expresión diferente de cero bien elegida que incluye una variable.
8. *Falso o verdadero:* $\tan\theta\cdot\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$ para cualquier valor de $\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Ejercicios

En los problemas 9-18, simplifique cada expresión trigonométrica siguiendo las instrucciones dadas.

9. Reescriba en términos de seno y coseno: $\tan\theta\cdot\csc\theta$.
10. Reescriba en términos de seno y coseno: $\cot\theta\cdot\sec\theta$.
11. Multiplique $\frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$ por $\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$.
12. Multiplique $\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$ por $\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$.

13. Reescriba sobre un denominador común:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

14. Reescriba sobre un denominador común:

$$\frac{1}{1 - \cos\theta} + \frac{1}{1 + \cos\theta}$$

15. Multiplique y simplifique:
$$\frac{(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) - 1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

16. Multiplique y simplifique:
$$\frac{(\tan\theta + 1)(\tan\theta + 1) - \sec^2\theta}{\tan\theta}$$

17. Factorice y simplifique: $\dfrac{3\operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}\theta + 1}{\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta + 1}$

18. Factorice y simplifique: $\dfrac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta - \cos\theta}$

En los problemas 19-98, establezca cada identidad.

19. $\csc\theta\cdot\cos\theta = \cot\theta$

20. $\sec\theta\cdot\operatorname{sen}\theta = \tan\theta$

21. $1 + \tan^2(-\theta) = \sec^2\theta$

22. $1 + \cot^2(-\theta) = \csc^2\theta$

23. $\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \csc\theta$

24. $\operatorname{sen}\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

25. $\tan\theta\cot\theta - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$

26. $\operatorname{sen}\theta\csc\theta - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$

27. $(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1) = \tan^2\theta$

28. $(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1) = \cot^2\theta$

29. $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

30. $(\csc\theta + \cot\theta)(\csc\theta - \cot\theta) = 1$

31. $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

32. $(1 - \cos^2\theta)(1 + \cot^2\theta) = 1$

33. $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)^2 = 2$

34. $\tan^2\theta\cos^2\theta + \cot^2\theta\operatorname{sen}^2\theta = 1$

35. $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

36. $\csc^4\theta - \csc^2\theta = \cot^4\theta + \cot^2\theta$

37. $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

38. $\csc\theta - \cot\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$

39. $3\operatorname{sen}^2\theta + 4\cos^2\theta = 3 + \cos^2\theta$

40. $9\sec^2\theta - 5\tan^2\theta = 5 + 4\sec^2\theta$

41. $1 - \dfrac{\cos^2\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \operatorname{sen}\theta$

42. $1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{1 - \cos\theta} = -\cos\theta$

43. $\dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = \dfrac{\cot\theta + 1}{\cot\theta - 1}$

44. $\dfrac{\csc\theta - 1}{\csc\theta + 1} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

45. $\dfrac{\sec\theta}{\csc\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\tan\theta$

46. $\dfrac{\csc\theta - 1}{\cot\theta} = \dfrac{\cot\theta}{\csc\theta + 1}$

47. $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\csc\theta + 1}{\csc\theta - 1}$

48. $\dfrac{\cos\theta + 1}{\cos\theta - 1} = \dfrac{1 + \sec\theta}{1 - \sec\theta}$

49. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = 2\sec\theta$

50. $\dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\sec\theta$

51. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \dfrac{1}{1 - \cot\theta}$

52. $1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{1 + \cos\theta} = \cos\theta$

53. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$

54. $\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

55. $\dfrac{\cos\theta}{1 - \tan\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cot\theta} = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

56. $\dfrac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} + \dfrac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta$

57. $\tan\theta + \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \sec\theta$

58. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

59. $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$

60. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 1}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta}$

61. $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$

62. $\dfrac{\sec\theta - \cos\theta}{\sec\theta + \cos\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{1 + \cos^2\theta}$

63. $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} + 1 = 2\operatorname{sen}^2\theta$

64. $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} + 2\cos^2\theta = 1$

65. $\dfrac{\sec\theta + \tan\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \tan\theta\sec\theta$

66. $\dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta} = \dfrac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$

67. $\dfrac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} + 1 = 2\cos^2\theta$

68. $\dfrac{1 - \cot^2\theta}{1 + \cot^2\theta} + 2\cos^2\theta = 1$

69. $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\sec\theta\csc\theta} = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

70. $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta - \tan\theta}{\cos^2\theta - \cot\theta} = \tan^2\theta$

71. $\sec\theta - \cos\theta = \operatorname{sen}\theta\tan\theta$

72. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$

73. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta} = 2\sec^2\theta$

74. $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} - \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = 4\tan\theta\sec\theta$

75. $\dfrac{\sec\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}$

76. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$

77. $\dfrac{(\sec\theta - \tan\theta)^2 + 1}{\csc\theta(\sec\theta - \tan\theta)} = 2\tan\theta$

78. $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta + \tan\theta}{\sec\theta} = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

79. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \sec\theta\csc\theta$

80. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \sec\theta\csc\theta$

81. $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = 1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta$

82. $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{1 - 2\cos^2\theta} = \dfrac{\sec\theta - \operatorname{sen}\theta}{\tan\theta - 1}$

83. $\dfrac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{1 - \tan^2\theta} = \cos^2\theta$

84. $\dfrac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta + \cos^2\theta$

85. $\dfrac{(2\cos^2\theta - 1)^2}{\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

86. $\dfrac{1 - 2\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

87. $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \dfrac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

88. $\dfrac{1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

89. $(a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta)^2 + (a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta)^2 = a^2 + b^2$

90. $(2a\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2 + a^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)^2 = a^2$

91. $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \tan\alpha\tan\beta$

92. $(\tan\alpha + \tan\beta)(1 - \cot\alpha\cot\beta) + (\cot\alpha + \cot\beta)(1 - \tan\alpha\tan\beta) = 0$

93. $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta)^2 + (\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha) = 2\cos\beta(\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta)$

94. $(\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta)^2 + (\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha) = -2\cos\beta(\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta)$

95. $\ln|\sec\theta| = -\ln|\cos\theta|$

96. $\ln|\tan\theta| = \ln|\operatorname{sen}\theta| - \ln|\cos\theta|$

97. $\ln|1 + \cos\theta| + \ln|1 - \cos\theta| = 2\ln|\operatorname{sen}\theta|$

98. $\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \ln|\sec\theta - \tan\theta| = 0$

99. Demuestre que $\sec(\tan^{-1} v) = \sqrt{1 + v^2}$.

100. Demuestre que $\tan(\operatorname{sen}^{-1} v) = \dfrac{v}{\sqrt{1 - v^2}}$.

101. Demuestre que $\tan(\cos^{-1} v) = \dfrac{\sqrt{1 - v^2}}{v}$.

102. Demuestre que $\operatorname{sen}(\cos^{-1} v) = \sqrt{1 - v^2}$.

103. Demuestre que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} v) = \sqrt{1 - v^2}$.

104. Demuestre que $\cos(\tan^{-1} v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + v^2}}$.

---

105. Escriba algunos párrafos que describan su estrategia para establecer identidades..

106. Escriba las tres identidades de Pitágoras.

107. ¿Por qué suele ser preferible comenzar con el lado con la expresión más complicada al establecer una identidad?

108. Desarrolle una identidad que no sea una identidad fundamental.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. Verdadero **2.** $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

7.4 Fórmulas de suma y resta

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Fórmula de la distancia (sección 2.1, p. 160)
- Valores de las funciones trigonométricas de los ángulos (sección 6.3, p. 520, y sección 6.4, pp. 526-534)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 623.

OBJETIVOS
1. Usar las fórmulas de suma y resta para encontrar valores exactos
2. Usar las fórmulas de suma y resta para establecer identidades
3. Usar las fórmulas de suma y resta que incluyen funciones trigonométricas inversas

En esta sección, se continúa el desarrollo de identidades trigonométricas mediante la obtención de fórmulas que involucran la suma o resta de dos ángulos, tales como $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, o $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$. Estas fórmulas reciben el nombre de **fórmulas de suma y resta**. Se comienza por las fórmulas para $\cos(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha - \beta)$.

Teorema

Fórmulas de suma y resta para cosenos

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \textbf{(1)}$$

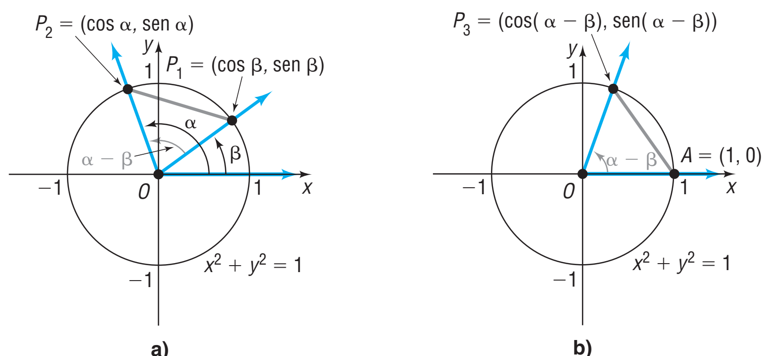
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \textbf{(2)}$$

En palabras

La fórmula (1) dice que el coseno de la suma de dos ángulos es igual al coseno del primer ángulo multiplicado por el coseno del segundo menos el seno del primer ángulo multiplicado por el seno del segundo.

Demostración Se probará la fórmula (2) primero. Aunque esta fórmula es cierta para todos los números α y β, en la demostración se supondrá que $0 < \beta < \alpha < 2\pi$. Se comienza con el círculo unitario y se colocan los ángulos α y β en posición estándar, como se muestra en la figura 22a). El punto P_1 está en el lado terminal de β, por lo que sus coordenadas son $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$; el punto P_2 está en el lado terminal de α, y sus coordenadas son $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

Figura 22



Ahora se coloca el ángulo $\alpha - \beta$ en la posición estándar, como se muestra en la figura 22*b*). El punto A tiene coordenadas $(1, 0)$ y el punto P_3 está en el lado terminal del ángulo $\alpha - \beta$, por lo que tiene coordenadas $(\cos(\alpha - \beta), \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$.

Si se observan el triángulo OP_1P_2 en la figura 22*a*) y el triángulo OAP_3 en la figura 22*b*), se verá que estos triángulos son congruentes. (¿Por qué? Dos lados y el ángulo incluido, $\alpha - \beta$, son iguales). Como resultado, el lado desconocido de cada triángulo debe ser igual, es decir,

$$d(A, P_3) = d(P_1, P_2)$$

Aplicando la fórmula de la distancia, se encuentra que

$$\sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha - \beta) - 0]^2} = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2} \qquad d(A, P_3) = d(P_1, P_2)$$

$$[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta) = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2 \qquad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

$$\cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta \qquad \text{Multiplicar los términos al cuadrado.}$$

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \text{Aplicar la identidad de Pitágoras (3 veces).}$$

$$-2\cos(\alpha - \beta) = -2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \text{Restar 2 en cada lado.}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \text{Dividir cada lado entre } -2.$$

lo cual es la fórmula (2).

La prueba de la fórmula (1) se deduce de la fórmula (2) y las identidades par-impar. Se usa el hecho de que $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$. Entonces

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha - (-\beta)] \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta) && \text{Usar la fórmula (2).} \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta && \text{Identidades par-impar.}\end{aligned}$$ ■

1 Una aplicación de las fórmulas (1) y (2) es obtener el valor exacto del coseno de un ángulo que se expresa como la suma o resta de dos ángulos cuyos seno y coseno se conocen con exactitud.

EJEMPLO 1 Uso de la fórmula de la suma para encontrar valores exactos

Encuentre el valor exacto de cos 75°.

Solución Como $75° = 45° + 30°$, se usa la fórmula (1) para obtener

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45°\cos 30° - \operatorname{sen} 45°\operatorname{sen} 30°$$

↑ Fórmula (1)

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$ ◀

EJEMPLO 2 Uso de la fórmula de la resta para encontrar valores exactos

Encuentre el valor exacto de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Solución

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} && \text{Usar fórmula (2).} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\end{aligned}$$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

2 Otro uso de las fórmulas (1) y (2) es establecer otras identidades. A continuación se estudian un par importante de identidades.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(3a)}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \textbf{(3b)}$$



Para ver el concepto

Grafique $Y_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ y $Y_2 = \operatorname{sen}\theta$ en la misma pantalla. ¿Demuestra esto el resultado (3a)? ¿Cómo demostraría el resultado (3b)?

Demostración Para probar la fórmula (3*a*) se usa la fórmula para $\cos(\alpha - \beta)$ con $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\beta = \theta$.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta \\ &= 0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \operatorname{sen}\theta \\ &= \operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$

Para probar la fórmula (3*b*), se usa la identidad (3*a*) que se acaba de establecer.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \underset{\uparrow}{=} \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] = \cos\theta$$

Usar (3a) ■

Las fórmulas (3*a*) y (3*b*) deben parecer familiares. Son la base para el teorema establecido en el capítulo 6: las cofunciones de ángulos complementarios son iguales.

Además, como

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left[-\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] \underset{\uparrow}{=} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Propiedad par del coseno

y

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \underset{\uparrow}{=} \operatorname{sen}\theta$$

3(a)

se deduce que $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta$. Las gráficas de $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ y $y = \operatorname{sen}\theta$ son idénticas, un hecho que se conjeturó antes en la sección 6.6.

Fórmulas para $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$

Habiendo establecido las identidades en las fórmulas (3*a*) y (3*b*), se derivan las fórmulas de suma y resta para $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$.

Demostración

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] && \text{Fórmula (3a)} \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}\beta && \text{Fórmula (2)} \\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta && \text{Fórmulas (3a) y (3b)} \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)] \\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta) && \text{Usar la fórmula de suma para seno que se acaba de obtener.} \\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\operatorname{sen}\beta) && \text{Identidades par-impar.} \\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

■

Teorema

En palabras
La fórmula (4) dice que el seno de la suma de dos ángulos es igual al seno del primer ángulo multiplicado por el coseno del segundo más el coseno del primer ángulo multiplicado por el seno del segundo.

Fórmulas de suma y resta para senos

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \qquad \textbf{(4)}$$
$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \qquad \textbf{(5)}$$

EJEMPLO 3 Uso de la fórmula de la suma para encontrar valores exactos

Encuentre el valor exacto de $\text{sen}\,\frac{7\pi}{12}$.

Solución

$$\text{sen}\,\frac{7\pi}{12} = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} \qquad \text{Fórmula (4)}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 17.

EJEMPLO 4 Uso de la fórmula de la resta para encontrar valores exactos

Encuentre el valor exacto de sen 80° cos 20° − cos 80° sen 20°.

Solución La forma de la expresión sen 80° cos 20° − cos 80° sen 20° corresponde al lado derecho de la fórmula (5) para $\text{sen}(\alpha - \beta)$ con $\alpha = 80°$ y $\beta = 20°$. Entonces,

$$\text{sen}\,80° \cos 20° - \cos 80°\,\text{sen}\,20° = \text{sen}(80° - 20°) = \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ ◀

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 23 Y 27.

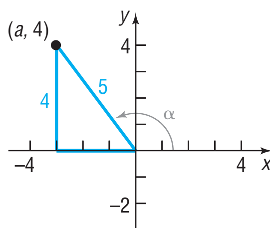
EJEMPLO 5 Para encontrar valores exactos

Se sabe que $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, y que $\text{sen}\,\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, encuentre el valor exacto de

a) $\cos\alpha$ b) $\cos\beta$ c) $\cos(\alpha + \beta)$ d) $\text{sen}(\alpha + \beta)$

Figura 23

$\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$



Solución a) Como $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5} = \frac{b}{r}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, se hace $b = 4$ y $r = 5$ y se coloca α en el cuadrante II. Vea la figura 23. Como $(a, 4)$ está en el cuadrante II, se tiene $a < 0$. La distancia de $(a, 4)$ a $(0, 0)$ es 5, de manera que

$$a^2 + 4^2 = 5^2, \quad a < 0$$
$$a^2 + 16 = 25$$
$$a^2 = 25 - 16 = 9$$
$$a = -3$$

Entonces

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} = -\frac{3}{5}$$

De otra forma, se determina $\cos\alpha$ usando identidades, como sigue:

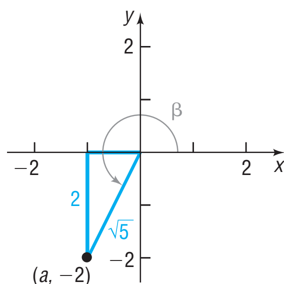
$$\cos\alpha \underset{\uparrow}{=} -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

α en el cuadrante II, $\cos\alpha < 0$

b) Como $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} = \dfrac{b}{r}$ y $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$, se hace $b = -2$ y $r = \sqrt{5}$ y se coloca β en el cuadrante III. Vea la figura 24. Como $(a, -2)$ está en el cuadrante III, se tiene $a < 0$. La distancia de $(a, -2)$ a $(0, 0)$ es $\sqrt{5}$, de modo que

Figura 24

$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}, \pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$



$$a^2 + 2^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2, \qquad a < 0$$
$$a^2 = 5 - 4 = 1$$
$$a = -1$$

Entonces

$$\cos\beta = \frac{a}{r} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

De otro modo, se encuentra $\cos\beta$ usando identidades como sigue:

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta} = -\sqrt{1-\frac{4}{5}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

c) Utilizando los resultados de los incisos *a*) y *b*) y la fórmula (1), se tiene

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$= -\frac{3}{5}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{4}{5}\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{11\sqrt{5}}{25}$$

d) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$$= \frac{4}{5}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$ ◀


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 31a), b), Y c).

EJEMPLO 6 Para establecer una identidad

Establezca la identidad: $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \cot\alpha\cot\beta + 1$

Solución

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$
$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} + \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$
$$= \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} + 1$$
$$= \cot\alpha\cot\beta + 1$$ ◀


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 39 Y 51.

Fórmulas para $\tan(\alpha + \beta)$ y $\tan(\alpha - \beta)$

Se usa la identidad $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y las fórmulas de suma para $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$ para derivar una fórmula para $\tan(\alpha + \beta)$.

Demostración $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$

Ahora se dividen numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\beta$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha}\operatorname{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\,\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha}\,\cancel{\cos\beta}} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Se usa la fórmula de la suma para $\tan(\alpha + \beta)$ y las propiedades par-impar para obtener la fórmula de la resta.

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan[\alpha + (-\beta)] = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$ ■

Se demostraron los siguientes resultados

Teorema

Fórmulas de suma y resta para tangentes

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad \textbf{(6)}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \quad \textbf{(7)}$$

En palabras

La fórmula (6) dice que la tangente de la suma de dos ángulos es igual a la tangente del primer ángulo más la tangente del segundo, todo dividido entre 1 menos su producto.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31d).

EJEMPLO 7 **Para establecer una identidad**

Pruebe la identidad: $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$

Solución $\tan(\theta + \pi) = \dfrac{\tan\theta + \tan\pi}{1 - \tan\theta\tan\pi} = \dfrac{\tan\theta + 0}{1 - \tan\theta \cdot 0} = \tan\theta$ ◀

El resultado obtenido en el ejemplo 7 verifica que la función tangente es periódica con el periodo π, un hecho que ya se había mencionado.

ADVERTENCIA: Debe tenerse cuidado al usar las fórmulas (6) y (7). Estas fórmulas se utilizan sólo para ángulos α y β para los cuales $\tan\alpha$ y $\tan\beta$ estén definidas, es decir, todos los ángulos excepto los múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$. ■

EJEMPLO 8 Para establecer una identidad

Pruebe la identidad: $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

Solución No se puede usar la fórmula (6), ya que $\tan\frac{\pi}{2}$ no está definida. En su lugar, se procede como sigue:

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}\theta)(0) + (\cos\theta)(1)}{(\cos\theta)(0) - (\operatorname{sen}\theta)(1)} = \frac{\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta} = -\cot\theta$$

◀

3

EJEMPLO 9 Valores exactos de una expresión que incluye funciones trigonométricas inversas

Encuentre el valor exacto de: $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$

Solución Se busca el seno de la suma de dos ángulos, $\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{2}$ y $\beta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}$. Entonces

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},\quad 0 \le \alpha \le \pi,\quad \text{y}\quad \operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5},\quad -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$$

Se usan las identidades de Pitágoras para obtener $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\beta$. Como $\operatorname{sen}\alpha \ge 0$ y $\cos\beta \ge 0$ (¿por qué?), se encuentra

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Como resultado,

$$\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right) = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4\sqrt{3} + 3}{10}$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 67.

EJEMPLO 10 Escribir una expresión trigonométrica como expresión algebraica

Escriba $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} u + \cos^{-1} v)$ como una expresión algebraica que contiene u y v (es decir, sin funciones trigonométricas).

Solución Sean $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} u$ y $\beta = \cos^{-1} v$. Entonces

$$\operatorname{sen}\alpha = u,\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2},\quad \text{y}\quad \cos\beta = v,\ 0 \le \beta \le \pi$$

Como $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, se sabe que $\cos\alpha \ge 0$. Como resultado,

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-u^2}$$

De manera similar, como $0 \le \beta \le \pi$, se sabe que $\operatorname{sen}\beta \ge 0$. Entonces,

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-v^2}$$

Ahora

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}u + \cos^{-1}v) = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$= uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}$$



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 77.

Resumen

Fórmulas de suma y resta

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

7.4 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. La distancia d del punto $(2, -3)$ al punto $(5, 1)$ es __________. (p. 160)
2. Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$ y θ está en el cuadrante II, entonces $\cos\theta =$ __________. (pp. 526–534)
3. a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3} =$ __________. (p. 520)
   b) $\tan\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} =$ __________. (p. 520)

Conceptos y vocabulario

4. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta$ __________ $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
5. $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ __________ $\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$.
6. *Falso o verdadero:* $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
7. *Falso o verdadero:* $\tan 75° = \tan 30° + \tan 45°$
8. *Falso o verdadero:* $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$

Ejercicios

En los problemas 9-20, encuentre el valor exacto de cada función trigonométrica.

9. $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$
10. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$
11. $\cos\frac{7\pi}{12}$
12. $\tan\frac{7\pi}{12}$
13. $\cos 165°$
14. $\operatorname{sen} 105°$
15. $\tan 15°$
16. $\tan 195°$
17. $\operatorname{sen}\frac{17\pi}{12}$
18. $\tan\frac{19\pi}{12}$
19. $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right)$
20. $\cot\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

En los problemas 21-30, encuentre el valor exacto de cada expresión.

21. $\operatorname{sen} 20°\cos 10° + \cos 20°\operatorname{sen} 10°$
22. $\operatorname{sen} 20°\cos 80° - \cos 20°\operatorname{sen} 80°$
23. $\cos 70°\cos 20° - \operatorname{sen} 70°\operatorname{sen} 20°$
24. $\cos 40°\cos 10° + \operatorname{sen} 40°\operatorname{sen} 10°$

25. $\dfrac{\tan 20° + \tan 25°}{1 - \tan 20° \tan 25°}$

26. $\dfrac{\tan 40° - \tan 10°}{1 + \tan 40° \tan 10°}$

27. $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{12} \cos \dfrac{7\pi}{12} - \cos \dfrac{\pi}{12} \operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{12}$

28. $\cos \dfrac{5\pi}{12} \cos \dfrac{7\pi}{12} - \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{12} \operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{12}$

29. $\cos \dfrac{\pi}{12} \cos \dfrac{5\pi}{12} + \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{12} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{12}$

30. $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{18} \cos \dfrac{5\pi}{18} + \cos \dfrac{\pi}{18} \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{18}$

En los problemas 31-36, encuentre el valor exacto de lo siguiente con las condiciones dadas.

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$ c) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ d) $\tan(\alpha - \beta)$

31. $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{3}{5}, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; $\cos \beta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$

32. $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; $\operatorname{sen} \beta = -\dfrac{4}{5}, -\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$

33. $\tan \alpha = -\dfrac{4}{3}, \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\cos \beta = \dfrac{1}{2}, 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

34. $\tan \alpha = \dfrac{5}{12}, \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$; $\operatorname{sen} \beta = -\dfrac{1}{2}, \pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$

35. $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{5}{13}, -\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$; $\tan \beta = -\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$

36. $\cos \alpha = \dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$; $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{1}{3}, 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

37. Si $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{1}{3}$, θ en el cuadrante II, encuentre el valor exacto de:

a) $\cos \theta$ b) $\operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$ c) $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ d) $\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

38. Si $\cos \theta = \dfrac{1}{4}$, θ en el cuadrante VI, encuentre el valor exacto de:

a) $\operatorname{sen} \theta$ b) $\operatorname{sen}\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)$ c) $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ d) $\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

En los problemas 39-64, establezca cada identidad.

39. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$

40. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{sen} \theta$

41. $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen} \theta$

42. $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$

43. $\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen} \theta$

44. $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$

45. $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$

46. $\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$

47. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta$

48. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \theta\right) = \operatorname{sen} \theta$

49. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$

50. $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

51. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta} = 1 + \cot \alpha \tan \beta$

52. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \tan \alpha + \tan \beta$

53. $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 1 - \tan \alpha \tan \beta$

54. $\dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta} = \cot \alpha + \tan \beta$

55. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \dfrac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$

56. $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \dfrac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

57. $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$

58. $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$

59. $\sec(\alpha + \beta) = \dfrac{\csc \alpha \csc \beta}{\cot \alpha \cot \beta - 1}$

60. $\sec(\alpha - \beta) = \dfrac{\sec \alpha \sec \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

61. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta$

62. $\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta$

63. $\operatorname{sen}(\theta + k\pi) = (-1)^k \operatorname{sen} \theta$, k cualquier entero

64. $\cos(\theta + k\pi) = (-1)^k \cos \theta$, k cualquier entero

En los problemas 65-76, encuentre el valor exacto de cada expresión.

65. $\text{sen}\left(\text{sen}^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1} 0\right)$ **66.** $\text{sen}\left(\text{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos^{-1} 1\right)$ **67.** $\text{sen}\left[\text{sen}^{-1}\frac{3}{5} - \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$ **68.** $\text{sen}\left[\text{sen}^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) - \tan^{-1}\frac{3}{4}\right]$

69. $\cos\left(\tan^{-1}\frac{4}{3} + \cos^{-1}\frac{5}{13}\right)$ **70.** $\cos\left[\tan^{-1}\frac{5}{12} - \text{sen}^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$ **71.** $\cos\left(\text{sen}^{-1}\frac{5}{13} - \tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$ **72.** $\cos\left(\tan^{-1}\frac{4}{3} + \cos^{-1}\frac{12}{13}\right)$

73. $\tan\left(\text{sen}^{-1}\frac{3}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$ **74.** $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$ **75.** $\tan\left(\text{sen}^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1} 1\right)$ **76.** $\tan\left(\cos^{-1}\frac{4}{5} + \text{sen}^{-1} 1\right)$

En los problemas 77-82, escriba cada expresión trigonométrica como una expresión algebraica que contiene u y v.

77. $\cos(\cos^{-1} u + \text{sen}^{-1} v)$ **78.** $\text{sen}(\text{sen}^{-1} u - \cos^{-1} v)$ **79.** $\text{sen}(\tan^{-1} u - \text{sen}^{-1} v)$

80. $\cos(\tan^{-1} u + \tan^{-1} v)$ **81.** $\tan(\text{sen}^{-1} u - \cos^{-1} v)$ **82.** $\sec(\tan^{-1} u + \cos^{-1} v)$

83. Demuestre que $\text{sen}^{-1} v + \cos^{-1} v = \frac{\pi}{2}$.

84. Demuestre que $\tan^{-1} v + \cot^{-1} v = \frac{\pi}{2}$.

85. Demuestre que $\tan^{-1}\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} v$, si $v > 0$.

86. Demuestre que $\cot^{-1} e^{v} = \tan^{-1} e^{-v}$.

87. Demuestre que $\text{sen}(\text{sen}^{-1} v + \cos^{-1} v) = 1$.

88. Demuestre que $\cos(\text{sen}^{-1} v + \cos^{-1} v) = 0$.

---

89. Cálculo Demuestre que el cociente de diferencias para $f(x) = \text{sen}\, x$ está dado por

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\, x}{h}$$
$$= \cos x \cdot \frac{\text{sen}\, h}{h} - \text{sen}\, x \cdot \frac{1 - \cos h}{h}$$

90. Cálculo Demuestre que el cociente de diferencias para $f(x) = \cos x$ está dado por

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$
$$= -\text{sen}\, x \cdot \frac{\text{sen}\, h}{h} - \cos x \cdot \frac{1 - \cos h}{h}$$

91. Explique por qué la fórmula (7) no se puede usar para demostrar que

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

Establezca esta identidad usando las fórmulas (3*a*) y (3*b*).

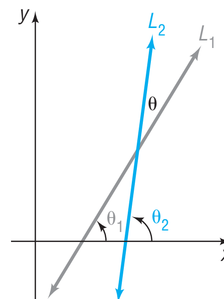
92. Si $\tan\alpha = x + 1$ y $\tan\beta = x - 1$, demuestre que $2\cot(\alpha - \beta) = x^2$.

93. Geometría: ángulo entre dos rectas Sean L_1 y L_2 dos rectas no verticales que se cruzan, y sea θ el ángulo entre ellas (vea la figura). Demuestre que

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

donde m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente.

[**Sugerencia:** use los hechos de que $\tan\theta_1 = m_1$ y $\tan\theta_2 = m_2$].



94. Si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ y

$$\cot\theta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma, \quad 0 < \theta < 90°$$

demuestre que

$$\text{sen}^3\theta = \text{sen}(\alpha - \theta)\,\text{sen}(\beta - \theta)\,\text{sen}(\gamma - \theta)$$

95. Analice la siguiente derivación:

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tan\theta + \tan\frac{\pi}{2}}{1 - \tan\theta\tan\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\frac{\tan\theta}{\tan\frac{\pi}{2}} + 1}{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}} - \tan\theta} = \frac{0 + 1}{0 - \tan\theta}$$
$$= \frac{1}{-\tan\theta} = -\cot\theta$$

¿Podría justificar cada paso?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. 5 **2.** $-\frac{3}{5}$ **3.** a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{1}{2}$

7.5 Fórmulas para ángulo doble y medio ángulo

OBJETIVOS
1. Usar las fórmulas de ángulo doble para encontrar valores exactos
2. Usar las fórmulas de ángulo doble y medio ángulo para establecer identidades
3. Usar las fórmulas de medio ángulo para encontrar valores exactos

En esta sección se derivan las fórmulas para $\operatorname{sen}(2\theta)$, $\cos(2\theta)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)$, y $\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$. Es sencillo derivarlas usando las fórmulas de suma.

Fórmulas para el ángulo doble

En las fórmulas de la suma para $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$, sea $\alpha = \beta = \theta$. Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\theta + \theta) &= \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}(2\theta) &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\theta + \theta) &= \cos\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta \\ \cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \end{aligned}$$

Una aplicación de la identidad de Pitágoras $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ da como resultado otras dos maneras de expresar $\cos(2\theta)$.

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = (1 - \operatorname{sen}^2\theta) - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

y

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

Se han establecido las siguientes **fórmulas para ángulo doble:**

Teorema

Fórmulas para el ángulo doble

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \quad \textbf{(1)}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \quad \textbf{(2)}$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta \quad \textbf{(3)}$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \quad \textbf{(4)}$$

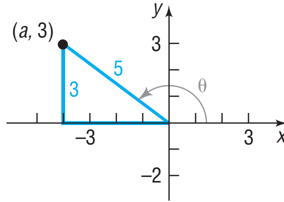

1 **EJEMPLO 1** **Valores exactos usando la fórmula para ángulo doble**

Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, encuentre el valor exacto de:

a) $\operatorname{sen}(2\theta)$ b) $\cos(2\theta)$

Solución a) Como $\text{sen}(2\theta) = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta$ y se sabe que $\text{sen } \theta = \frac{3}{5}$, sólo se necesita encontrar $\cos \theta$. Como $\text{sen } \theta = \frac{3}{5} = \frac{b}{r}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, se hace $b = 3$ y $r = 5$, y se coloca θ en el cuadrante II. Vea la figura 25. El punto $(a, 3)$ está en el cuadrante II, de manera que $a < 0$. La distancia de $(a, 3)$ a $(0, 0)$ es 5, por lo que

Figura 25



$$a^2 + 3^2 = 5^2, \qquad a < 0$$
$$a^2 + 9 = 25$$
$$a^2 = 25 - 9 = 16$$
$$a = -4$$

Se encuentra $\cos \theta = \frac{a}{r} = -\frac{4}{5}$. Ahora se usa la fórmula (1) para obtener

$$\text{sen}(2\theta) = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

b) Como $\text{sen } \theta = \frac{3}{5}$, está dado, es más fácil usar la fórmula (3) para obtener $\cos(2\theta)$.

$$\cos(2\theta) = 1 - 2 \text{ sen}^2 \theta = 1 - 2\left(\frac{9}{25}\right) = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$ ◀

ADVERTENCIA: Para encontrar $\cos(2\theta)$ en el ejemplo 1*b*), se eligió usar la versión de la fórmula para el ángulo doble, fórmula (3). Observe que no es posible utilizar la identidad de Pitágoras $\cos(2\theta) = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 (2\theta)}$, con $\text{sen}(2\theta) = -\frac{24}{25}$, porque no hay manera de saber qué signo elegir. ■

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 7a) Y b).

2 **EJEMPLO 2** **Para establecer identidades**

a) Desarrolle una fórmula para $\tan(2\theta)$ en términos de $\tan \theta$.
b) Desarrolle la fórmula para $\text{sen}(3\theta)$ en términos de $\text{sen } \theta$ y $\cos \theta$.

Solución a) En la fórmula de la suma para $\tan(\alpha + \beta)$, sea $\alpha = \beta = \theta$. Entonces

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\theta + \theta) = \frac{\tan \theta + \tan \theta}{1 - \tan \theta \tan \theta}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \qquad \textbf{(5)}$$

b) Para obtener la fórmula para $\text{sen}(3\theta)$, se usa la fórmula de la suma escribiendo 3θ como $2\theta + \theta$.

$$\text{sen}(3\theta) = \text{sen}(2\theta + \theta) = \text{sen}(2\theta) \cos \theta + \cos(2\theta) \text{ sen } \theta$$

Ahora se usan las fórmulas de ángulo doble para obtener

$$\text{sen}(3\theta) = (2 \text{ sen } \theta \cos \theta)(\cos \theta) + (\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta)(\text{sen } \theta)$$
$$= 2 \text{ sen } \theta \cos^2 \theta + \text{sen } \theta \cos^2 \theta - \text{sen}^3 \theta$$
$$= 3 \text{ sen } \theta \cos^2 \theta - \text{sen}^3 \theta$$ ◀

La fórmula obtenida en el ejemplo 2*b*) también se escribe como

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3\theta) &= 3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta = 3\operatorname{sen}\theta\,(1 - \operatorname{sen}^2\theta) - \operatorname{sen}^3\theta \\ &= 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta\end{aligned}$$

Esto es, $\operatorname{sen}(3\theta)$ es un polinomio de tercer grado en la variable sen θ. De hecho, $\operatorname{sen}(n\theta)$, n un entero positivo, siempre se escribe como un polinomio de grado n en la variable sen θ.*



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

Otra variación de las fórmulas para ángulo doble

Al reescribir las fórmulas para ángulo doble (3) y (4), se obtienen otras fórmulas que se usarán más adelante en esta sección.

Se comienza con la fórmula (3) y se procede a despejar $\operatorname{sen}^2\theta$.

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$2\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos(2\theta)$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \qquad \textbf{(6)}$$

De manera similar, se usa la fórmula (4) para despejar $\cos^2\theta$.

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

$$2\cos^2\theta = 1 + \cos(2\theta)$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \qquad \textbf{(7)}$$

Las fórmulas (6) y (7) se utilizan para desarrollar una fórmula para $\tan^2\theta$.

$$\tan^2\theta = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}}{\dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2}}$$

$$\tan^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{1 + \cos(2\theta)} \qquad \textbf{(8)}$$

Las fórmulas (6) a (8) no tienen que memorizarse, ya que sus derivaciones son directas.



Las fórmulas (6) y (7) son importantes en cálculo. El siguiente ejemplo ilustra un problema surgido en cálculo que requiere el uso de la fórmula (7).

*Debido al trabajo realizado por P.L. Chebyshëv, en ocasiones estos polinomios reciben el nombre de *polinomios de Chebyshëv*.

EJEMPLO 3 Para establecer una identidad

Escriba una expresión equivalente para $\cos^4\theta$ que no incluya potencias mayores que 1 del seno o el coseno.

Solución La idea en este caso es aplicar la fórmula (7) dos veces.

$$\cos^4\theta = (\cos^2\theta)^2 = \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^2 \qquad \text{Fórmula (7)}$$
$$= \frac{1}{4}[1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)]$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{4}\cos^2(2\theta)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{4}\left\{\frac{1+\cos[2(2\theta)]}{2}\right\} \qquad \text{Fórmula (7)}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}[1+\cos(4\theta)]$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(4\theta)$$

◄

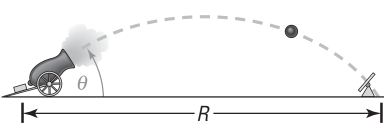

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

Las identidades como las fórmulas para ángulo doble, algunas veces se utilizan para reescribir expresiones en una forma más adecuada. Se verá un ejemplo.

EJEMPLO 4 Movimiento de un proyectil

Un objeto se dispara hacia arriba con un ángulo θ respecto de la horizontal, con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Vea la figura 26. Si se ignora la resistencia del aire, el **alcance** $\boldsymbol{R}$, la distancia horizontal que recorre un objeto, está dado por

Figura 26



$$R = \frac{1}{16}v_0^2 \text{ sen } \theta \cos\theta$$

a) Demuestre que $R = \dfrac{1}{32}v_0^2 \text{ sen}(2\theta)$.

b) Encuentre el ángulo θ para el que R es un máximo.

Solución a) Se reescribe la expresión dada para el alcance usando la fórmula para ángulo doble $\text{sen}(2\theta) = 2 \text{ sen } \theta \cos\theta$. Por lo que

$$R = \frac{1}{16}v_0^2 \text{ sen } \theta\cos\theta = \frac{1}{16}v_0^2\frac{2 \text{ sen } \theta\cos\theta}{2} = \frac{1}{32}v_0^2 \text{ sen}(2\theta)$$

b) En esta forma se encuentra el valor mayor para el alcance R. Para una velocidad inicial fija v_0, el ángulo θ de inclinación con la horizontal determina el valor inicial de R. Como el valor mayor de una función seno es 1, ocurre cuando el argumento 2θ es 90°, se deduce que para R máximo se debe tener

$$2\theta = 90°$$
$$\theta = 45°$$

Una inclinación de 45° con la horizontal da como resultado el alcance máximo. ◄

Fórmula para medio ángulo

Otro uso importante de las fórmulas (6) a (8) es probar las **fórmulas para medio ángulo**. En las fórmulas (6) a (8), sea $\theta = \frac{\alpha}{2}$. Entonces

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \qquad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \qquad \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \qquad \textbf{(9)}$$


Las identidades en el recuadro (9) serán útiles en cálculo integral.

Si se despejan las funciones trigonométricas en los lados derecho de las ecuaciones (9), se obtienen las fórmulas de medio ángulo.

Teorema

Fórmulas para medio ángulo

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \qquad \textbf{(10a)}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \qquad \textbf{(10b)}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \qquad \textbf{(10c)}$$

donde el signo + o − está determinado por el cuadrante del ángulo $\frac{\alpha}{2}$.

En el siguiente ejemplo se usan las fórmulas para medio ángulo.

3 **EJEMPLO 5** **Valores exactos usando las fórmulas para medio ángulo**

Utilice las fórmulas para medio ángulo para calcular el valor exacto de:

a) $\cos 15°$ b) $\operatorname{sen}(-15°)$

Solución a) Como $15° = \frac{30°}{2}$, se utiliza la fórmula de medio ángulo para $\cos \frac{\alpha}{2}$ con $\alpha = 30°$. Además, como $15°$ está en el cuadrante I, $\cos 15° > 0$, se elige el signo + al usar la fórmula (10*b*).

$$\cos 15° = \cos \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30°}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

b) Se usa el hecho de que $\operatorname{sen}(-15°) = -\operatorname{sen} 15°$ y luego se aplica la fórmula (10*a*).

$$\operatorname{sen}(-15°) = -\operatorname{sen} \frac{30°}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{2}}$$
$$= -\sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$



Es interesante comparar la respuesta del ejemplo 5*a*) con la respuesta del ejemplo 2 de la sección 7.4. Ahí se calculó

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos 15° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

Con base en esto y el resultado del ejemplo 5*a*), se concluye que

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

son iguales. (Dado que cada expresión es positiva, se verifica esta igualdad elevando al cuadrado cada una). Dos respuestas muy diferentes, pero correctas, se pueden obtener dependiendo del enfoque adoptado para resolver el problema.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

EJEMPLO 6 Valores exactos usando las fórmulas para medio ángulo

Si $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, encuentre el valor exacto de:

a) $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$ b) $\cos\frac{\alpha}{2}$ c) $\tan\frac{\alpha}{2}$

Solución Primero se observa que si $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ entonces $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$. Como resultado, $\frac{\alpha}{2}$ está en el cuadrante II.

a) Como $\frac{\alpha}{2}$ está en el cuadrante II, $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} > 0$, de manera que se usa el signo + en la fórmula 10*a*) para obtener

$$\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) Debido a que $\frac{\alpha}{2}$ está en el cuadrante II, $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, de manera que se usa el signo − en la fórmula 10*b*) para obtener

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

c) Como $\frac{\alpha}{2}$ está en el cuadrante II, $\tan\frac{\alpha}{2} < 0$, de modo que se usa el signo $-$ en la fórmula 10*c*) para obtener

$$\tan\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}} = -\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}} = -2$$

Otra manera de resolver el ejemplo 6*c*) es usar las soluciones encontradas en los incisos *a*) y *b*).

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = -2$$

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 7c) Y d).

Existe una fórmula para $\tan\frac{\alpha}{2}$ que no contiene los signos $+$ y $-$, que la hace más útil que la fórmula 10*c*). Para derivarla, se usan las fórmulas:

$$1 - \cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \qquad \text{Fórmula (9)}$$

y

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left[2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \text{Fórmula para ángulo doble}$$

Entonces

$$\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

Dado que también es posible demostrar que

$$\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$$

se tienen las siguientes dos fórmulas para medio ángulo:

Fórmulas de medio ángulo para $\tan\frac{\alpha}{2}$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \textbf{(11)}$$

Con esta fórmula, la solución del ejemplo 6c) se puede dar como

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

Entonces, por la ecuación (11),

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{-\frac{4}{5}} = -2$$

7.5 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. $\cos(2\theta) = \cos^2\theta -$ ______ $=$ ______ $- 1 = 1 -$ ______.

2. $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{___}{2}$.

3. $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{___}$

4. *Falso o verdadero:* $\cos(2\theta)$ tiene tres formas equivalentes:

$$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta,\ 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta,\ \text{y}\ 2\cos^2\theta - 1$$

5. *Falso o verdadero:* $\operatorname{sen}(2\theta)$ tiene dos formas equivalentes:

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\ \text{y}\ \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$$

6. *Falso o verdadero:* $\tan(2\theta) + \tan(2\theta) = \tan(4\theta)$

Ejercicios

En los problemas 7-18, use la información dada acerca del ángulo θ, $0 \le \theta \le 2\pi$, para encontrar el valor exacto de

(a) $\operatorname{sen}(2\theta)$ (b) $\cos(2\theta)$ (c) $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ (d) $\cos\frac{\theta}{2}$

7. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

8. $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

9. $\tan\theta = \frac{4}{3}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

10. $\tan\theta = \frac{1}{2}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

11. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

12. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

13. $\sec\theta = 3$, $\operatorname{sen}\theta > 0$

14. $\csc\theta = -\sqrt{5}$, $\cos\theta < 0$

15. $\cot\theta = -2$, $\sec\theta < 0$

16. $\sec\theta = 2$, $\csc\theta < 0$

17. $\tan\theta = -3$, $\operatorname{sen}\theta < 0$

18. $\cot\theta = 3$, $\cos\theta < 0$

En los problemas 19-28, use las fórmulas de medio ángulo para encontrar el valor exacto de cada función trigonométrica.

19. $\operatorname{sen} 22.5°$

20. $\cos 22.5°$

21. $\tan\frac{7\pi}{8}$

22. $\tan\frac{9\pi}{8}$

23. $\cos 165°$

24. $\operatorname{sen} 195°$

25. $\sec\frac{15\pi}{8}$

26. $\csc\frac{7\pi}{8}$

27. $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

28. $\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$

29. Demuestre que $\operatorname{sen}^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(4\theta)$.

30. Desarrolle una fórmula para $\cos(3\theta)$ como polinomio de tercer grado en la variable $\cos\theta$.

31. Demuestre que $\operatorname{sen}(4\theta) = (\cos\theta)(4\operatorname{sen}\theta - 8\operatorname{sen}^3\theta)$.

32. Desarrolle una fórmula para $\cos(4\theta)$ como polinomio de cuarto grado en la variable $\cos\theta$.

33. Encuentre una expresión para $\operatorname{sen}(5\theta)$ como polinomio de quinto grado en la variable $\operatorname{sen}\theta$.

34. Encuentre una expresión para $\cos(5\theta)$ como polinomio de quinto grado en la variable $\cos\theta$.

En los problemas 35-56, establezca cada identidad.

35. $\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta = \cos(2\theta)$

36. $\frac{\cot\theta - \tan\theta}{\cot\theta + \tan\theta} = \cos(2\theta)$

37. $\cot(2\theta) = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$

38. $\cot(2\theta) = \frac{1}{2}(\cot\theta - \tan\theta)$

39. $\sec(2\theta) = \frac{\sec^2\theta}{2 - \sec^2\theta}$

40. $\csc(2\theta) = \frac{1}{2}\sec\theta\csc\theta$

41. $\cos^2(2\theta) - \operatorname{sen}^2(2\theta) = \cos(4\theta)$

42. $(4 \operatorname{sen}\theta \cos\theta)(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta) = \operatorname{sen}(4\theta)$

43. $\dfrac{\cos(2\theta)}{1 + \operatorname{sen}(2\theta)} = \dfrac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$

44. $\operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta = \frac{1}{8}[1 - \cos(4\theta)]$

45. $\sec^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$

46. $\csc^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

47. $\cot^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}$

48. $\tan\frac{\theta}{2} = \csc\theta - \cot\theta$

49. $\cos\theta = \dfrac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}$

50. $1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$

51. $\dfrac{\operatorname{sen}(3\theta)}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos(3\theta)}{\cos\theta} = 2$

52. $\dfrac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} = 2\tan(2\theta)$

53. $\tan(3\theta) = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

54. $\tan\theta + \tan(\theta + 120°) + \tan(\theta + 240°) = 3\tan(3\theta)$

55. $\ln|\operatorname{sen}\theta| = \frac{1}{2}(\ln|1 - \cos(2\theta)| - \ln 2)$

56. $\ln|\cos\theta| = \frac{1}{2}(\ln|1 + \cos(2\theta)| - \ln 2)$

En los problemas 57-68, calcule el valor exacto de cada expresión.

57. $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right)$

58. $\operatorname{sen}\left[2\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

59. $\cos\left(2\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$

60. $\cos\left(2\cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$

61. $\tan\left[2\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

62. $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$

63. $\operatorname{sen}\left(2\cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$

64. $\cos\left[2\tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)\right]$

65. $\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$

66. $\cos^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$

67. $\sec\left(2\tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$

68. $\csc\left[2\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

69. Si $x = 2\tan\theta$, exprese $\operatorname{sen}(2\theta)$ como función de x.

70. Si $x = 2\tan\theta$, exprese $\cos(2\theta)$ como función de x.

71. Encuentre el valor del número C:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C = -\frac{1}{4}\cos(2x)$$

72. Encuentre el valor del número C:

$$\frac{1}{2}\cos^2 x + C = \frac{1}{4}\cos(2x)$$

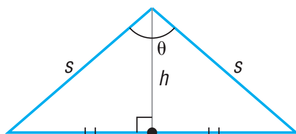
73. Si $z = \tan\frac{\alpha}{2}$, demuestre que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2z}{1 + z^2}$.

74. Si $z = \tan\frac{\alpha}{2}$, demuestre que $\cos\alpha = \dfrac{1 - z^2}{1 + z^2}$.

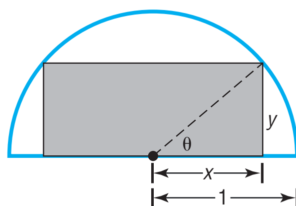
75. Área de un triángulo isósceles Demuestre que el área de un triángulo isósceles, cuyos lados iguales tienen longitud s y θ es el ángulo entre ellos, es

$$\frac{1}{2}s^2 \operatorname{sen}\theta$$

[**Sugerencia:** Vea la ilustración. La altura h bisecta el ángulo θ y es la bisectriz perpendicular de la base].



76. Geometría Un rectángulo inscrito en un semicírculo de radio 1. Vea la ilustración.



a) Exprese el área A del rectángulo como función del ángulo θ mostrado en la ilustración.
b) Demuestre que $A = \operatorname{sen}(2\theta)$.
c) Encuentre el ángulo θ que da la mayor área A.
d) Encuentre las dimensiones de este rectángulo mayor.

77. Grafique $f(x) = \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$ para $0 \le x \le 2\pi$ usando transformaciones.

78. Repita el problema 77 para $g(x) = \cos^2 x$.

79. Use el hecho de que

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

para encontrar $\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}$ y $\cos\frac{\pi}{24}$.

80. Demuestre que

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

y utilice esto para encontrar $\operatorname{sen}\frac{\pi}{16}$ y $\cos\frac{\pi}{16}$.

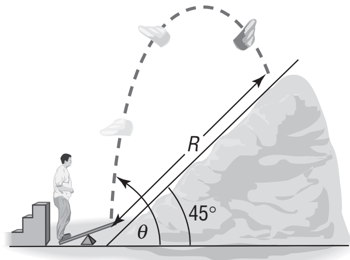
81. Demuestre que

$$\text{sen}^3\,\theta + \text{sen}^3(\theta + 120°) + \text{sen}^3(\theta + 240°) = -\frac{3}{4}\,\text{sen}(3\theta)$$

82. Si $\tan\theta = a\tan\dfrac{\theta}{3}$, exprese $\tan\dfrac{\theta}{3}$ en términos de a.

83. Movimiento de un proyectil Un objeto se dispara hacia arriba a un ángulo θ, $45° < \theta < 90°$, respecto a la horizontal con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo desde la base de un plano que forma un ángulo de 45° con la horizontal. Vea la ilustración. Si se ignora la resistencia del aire, la distancia R que recorre hacia arriba del plano inclinado está dada por

$$R = \frac{v_0^2\sqrt{2}}{16}\cos\theta(\text{sen}\,\theta - \cos\theta)$$



a) Demuestre que

$$R = \frac{v_0^2\sqrt{2}}{32}[\text{sen}(2\theta) - \cos(2\theta) - 1]$$

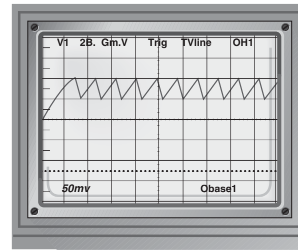
b) Grafique $R = R(\theta)$. (Use $v_0 = 32$ pies por segundo).

c) ¿Qué valor de θ da la mayor R? (Use $v_0 = 32$ pies por segundo).

84. Curva de dientes de sierra Con frecuencia un osciloscopio despliega una curva de dientes de sierra. Esta curva se aproxima por curvas senoidales de periodos y amplitudes variables. Una primera aproximación a esta curva de dientes de sierra está dada por

$$y = \frac{1}{2}\text{sen}(2\pi x) + \frac{1}{4}\text{sen}(4\pi x)$$

Demuestre que $y = \text{sen}(2\pi x)\cos^2(\pi x)$.



85. Vaya a la biblioteca e investigue los polinomios de Chebyshëv. Escriba un reporte de los que encontró.

7.6 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto

OBJETIVOS 1 Expresar productos como sumas
2 Expresar sumas como productos

1 Las fórmulas de suma y resta sirven para derivar fórmulas para escribir productos de senos y/o cosenos como sumas o restas. Estas identidades suelen llamarse **fórmulas de producto a suma**.

Teorema

Fórmulas de producto a suma

$$\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \qquad \textbf{(1)}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \qquad \textbf{(2)}$$

$$\text{sen}\,\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)] \qquad \textbf{(3)}$$

Estas fórmulas no tienen que memorizarse. Más bien, debe recordar cómo se derivan. Entonces, cuando quiera usarlas, las consulta, o bien, las deriva según las necesite.

Para derivar las fórmulas (1) y (2), se escriben las fórmulas de suma y resta para el coseno:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \quad \textbf{(4)}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \quad \textbf{(5)}$$

Se resta la ecuación (4) menos la ecuación (5) para obtener

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

de donde

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Ahora se suman las ecuaciones (4) y (5) para obtener

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

de donde

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

Para derivar la fórmula de producto a suma (3), se usan las fórmulas de suma y resta para el seno en una forma similar. (Se le pide hacer esto en el problema 41).

EJEMPLO 1 Expresar productos como sumas

Exprese cada uno de los siguientes productos como una suma de sólo senos o cosenos.

a) $\operatorname{sen}(6\theta)\operatorname{sen}(4\theta)$ b) $\cos(3\theta)\cos\theta$ c) $\operatorname{sen}(3\theta)\cos(5\theta)$

Solución a) Se usa la fórmula (1) para obtener

$$\operatorname{sen}(6\theta)\operatorname{sen}(4\theta) = \frac{1}{2}[\cos(6\theta - 4\theta) - \cos(6\theta + 4\theta)] = \frac{1}{2}[\cos(2\theta) - \cos(10\theta)]$$

b) Se usa la fórmula (2) para llegar a

$$\cos(3\theta)\cos\theta = \frac{1}{2}[\cos(3\theta - \theta) + \cos(3\theta + \theta)] = \frac{1}{2}[\cos(2\theta) + \cos(4\theta)]$$

c) Se usa la fórmula (3) para obtener

$$\operatorname{sen}(3\theta)\cos(5\theta) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(3\theta + 5\theta) + \operatorname{sen}(3\theta - 5\theta)] = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(8\theta) + \operatorname{sen}(-2\theta)] = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(8\theta) - \operatorname{sen}(2\theta)]$$ ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 1.

2 Las **fórmulas de suma a producto** se dan enseguida.

Teorema

Fórmulas de suma a producto

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (6)$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \quad (7)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (8)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (9)$$

Se derivará la fórmula (6) y se dejan las derivaciones de las fórmulas (7) a (9) como ejercicios (vea los problemas 42 a 44).

Demostración

$$2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cdot\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$

↑ Fórmula de producto a suma (3)

$$= \operatorname{sen}\frac{2\alpha}{2} + \operatorname{sen}\frac{2\beta}{2} = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$$

■

EJEMPLO 2 Expresar sumas (o restas) como un producto

Exprese cada suma o resta como un producto de senos y/o cosenos.

a) $\operatorname{sen}(5\theta) - \operatorname{sen}(3\theta)$ b) $\cos(3\theta) + \cos(2\theta)$

Solución a) Se usa la fórmula (7) para obtener

$$\operatorname{sen}(5\theta) - \operatorname{sen}(3\theta) = 2\operatorname{sen}\frac{5\theta-3\theta}{2}\cos\frac{5\theta+3\theta}{2}$$

$$= 2\operatorname{sen}\theta\cos(4\theta)$$

b) $$\cos(3\theta) + \cos(2\theta) = 2\cos\frac{3\theta+2\theta}{2}\cos\frac{3\theta-2\theta}{2} \quad \text{Fórmula (8)}$$

$$= 2\cos\frac{5\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

7.6 Evalúe su comprensión

Ejercicios

En los problemas 1-10, exprese cada producto como una suma de sólo senos o cosenos.

1. $\operatorname{sen}(4\theta)\operatorname{sen}(2\theta)$ **2.** $\cos(4\theta)\cos(2\theta)$ **3.** $\operatorname{sen}(4\theta)\cos(2\theta)$ **4.** $\operatorname{sen}(3\theta)\operatorname{sen}(5\theta)$ **5.** $\cos(3\theta)\cos(5\theta)$

6. $\operatorname{sen}(4\theta)\cos(6\theta)$ **7.** $\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(2\theta)$ **8.** $\cos(3\theta)\cos(4\theta)$ **9.** $\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ **10.** $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2}$

En los problemas 11-18, exprese cada suma o resta como un producto de seno y/o cosenos.

11. $\text{sen}(4\theta) - \text{sen}(2\theta)$ **12.** $\text{sen}(4\theta) + \text{sen}(2\theta)$ **13.** $\cos(2\theta) + \cos(4\theta)$ **14.** $\cos(5\theta) - \cos(3\theta)$

15. $\text{sen}\,\theta + \text{sen}(3\theta)$ **16.** $\cos\theta + \cos(3\theta)$ **17.** $\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}$ **18.** $\text{sen}\frac{\theta}{2} - \text{sen}\frac{3\theta}{2}$

En los problemas 19-36, establezca cada identidad.

19. $\frac{\text{sen}\,\theta + \text{sen}(3\theta)}{2\,\text{sen}(2\theta)} = \cos\theta$ **20.** $\frac{\cos\theta + \cos(3\theta)}{2\cos(2\theta)} = \cos\theta$ **21.** $\frac{\text{sen}(4\theta) + \text{sen}(2\theta)}{\cos(4\theta) + \cos(2\theta)} = \tan(3\theta)$

22. $\frac{\cos\theta - \cos(3\theta)}{\text{sen}(3\theta) - \text{sen}\,\theta} = \tan(2\theta)$ **23.** $\frac{\cos\theta - \cos(3\theta)}{\text{sen}\,\theta + \text{sen}(3\theta)} = \tan\theta$ **24.** $\frac{\cos\theta - \cos(5\theta)}{\text{sen}\,\theta + \text{sen}(5\theta)} = \tan(2\theta)$

25. $\text{sen}\,\theta[\text{sen}\,\theta + \text{sen}(3\theta)] = \cos\theta[\cos\theta - \cos(3\theta)]$ **26.** $\text{sen}\,\theta[\text{sen}(3\theta) + \text{sen}(5\theta)] = \cos\theta[\cos(3\theta) - \cos(5\theta)]$

27. $\frac{\text{sen}(4\theta) + \text{sen}(8\theta)}{\cos(4\theta) + \cos(8\theta)} = \tan(6\theta)$ **28.** $\frac{\text{sen}(4\theta) - \text{sen}(8\theta)}{\cos(4\theta) - \cos(8\theta)} = -\cot(6\theta)$

29. $\frac{\text{sen}(4\theta) + \text{sen}(8\theta)}{\text{sen}(4\theta) - \text{sen}(8\theta)} = -\frac{\tan(6\theta)}{\tan(2\theta)}$ **30.** $\frac{\cos(4\theta) - \cos(8\theta)}{\cos(4\theta) + \cos(8\theta)} = \tan(2\theta)\tan(6\theta)$

31. $\frac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$ **32.** $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$

33. $\frac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ **34.** $\frac{\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$

35. $1 + \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(6\theta) = 4\cos\theta\cos(2\theta)\cos(3\theta)$

36. $1 - \cos(2\theta) + \cos(4\theta) - \cos(6\theta) = 4\,\text{sen}\,\theta\cos(2\theta)\,\text{sen}(3\theta)$

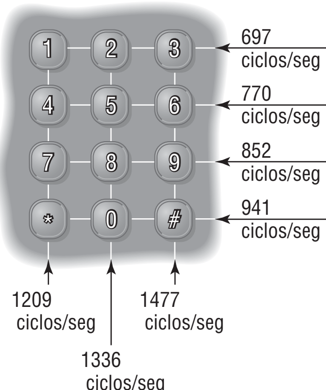
---

37. Teléfonos de tonos En el teléfono de tonos, cada botón produce un sonido único. El sonido producido es la suma de dos tonos dados por

$$y = \text{sen}(2\pi lt) \quad \text{y} \quad y = \text{sen}(2\pi ht)$$

donde l y h son las frecuencias (ciclos por segundo) baja y alta mostradas en la ilustración. Por ejemplo, si oprime 7, la frecuencia baja es $l = 852$ ciclos por segundo y la frecuencia alta es $h = 1209$ ciclos por segundo. El sonido emitido al oprimir 7 es

$$y = \text{sen}[2\pi(852)t] + \text{sen}[2\pi(1209)t]$$



a) Escriba este sonido como un producto de senos y/o cosenos.
b) Determine el valor máximo de y.
c) Grafique el sonido emitido al oprimir 7.

38. Teléfonos de tonos
a) Escriba el sonido emitido al oprimir la tecla # como un producto de senos y/o cosenos.
b) Determine el valor máximo de y.
c) Grafique el sonido emitido al oprimir la tecla #.

39. Si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, demuestre que

$$\text{sen}(2\alpha) + \text{sen}(2\beta) + \text{sen}(2\gamma) = 4\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\gamma$$

40. Si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, demuestre que

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

41. Derive la fórmula (3).

42. Derive la fórmula (7).

43. Derive la fórmula (8).

44. Derive la fórmula (9).

7.7 Ecuaciones trigonométricas (I)

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Solución de ecuaciones (sección 1.1, p. 84-87)
- Valores de funciones trigonométricas de ángulos (sección 6.3, p. 520 y sección 6.4, pp. 526-534)



Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 643.

OBJETIVO 1 Resolver ecuaciones que incluyen una sola función trigonométrica.

1 Las cuatro secciones anteriores de este capítulo se dedicaron a identidades trigonométricas, es decir, ecuaciones que incluyen funciones trigonométricas que se satisfacen para todo valor en el dominio de la variable. En las dos secciones restantes, se estudian las **ecuaciones trigonométricas**, esto es, ecuaciones que involucran funciones trigonométricas que se satisfacen sólo para algunos valores de la variable (o, tal vez, que no se satisfacen para los valores de la variable). Los valores que satisfacen la ecuación se llaman **soluciones** de la ecuación.

EJEMPLO 1 Verificación de si un número dado es una solución de una ecuación trigonométrica

Determine si $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ es una solución de la ecuación sen $\theta = \dfrac{1}{2}$. ¿Es $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ una solución?

Solución Se sustituye θ por $\dfrac{\pi}{4}$ en la ecuación dada. El resultado es

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{1}{2}$$

Se concluye que $\dfrac{\pi}{4}$ no es una solución.

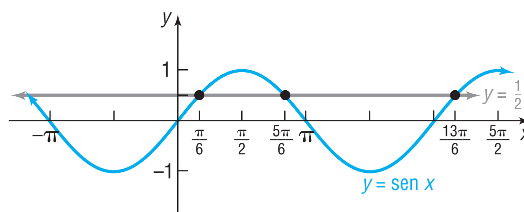
Ahora se sustituye θ por $\dfrac{\pi}{6}$ en la ecuación. El resultado es

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Se concluye que $\dfrac{\pi}{6}$ es una solución de la ecuación dada. ◀

La ecuación dada en el ejemplo 1 tiene otras soluciones además de $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Por ejemplo, $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ también es una solución, al igual que $\theta = \dfrac{13\pi}{6}$. (El lector debe verificar esto). De hecho, la ecuación tiene un número infinito de soluciones debido a la periodicidad de la función seno, como se observa en la figura 27.

Figura 27



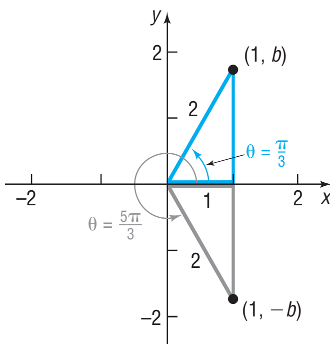
A menos que el dominio de la variable se restrinja, es necesario encontrar *todas* las soluciones de una ecuación trigonométrica. Como lo ilustra el siguiente ejemplo, encontrar todas las soluciones se logra encontrando primero las soluciones en un intervalo cuya longitud sea igual al periodo de la función y luego agregando múltiplos de ese periodo a las soluciones encontradas. Se verán algunos ejemplos.

EJEMPLO 2 Soluciones de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación: $\cos\theta = \frac{1}{2}$

Encuentre una fórmula general para todas las soluciones, Enumere seis soluciones.

Figura 28



Solución El periodo de la función coseno es 2π. En el intervalo $[0, 2\pi)$, hay dos ángulos θ para los cuales $\cos\theta = \frac{1}{2}$: $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Vea la figura 28. Debido a que la función coseno tiene periodo 2π, todas las soluciones de $\cos\theta = \frac{1}{2}$ pueden estar dadas por la fórmula general

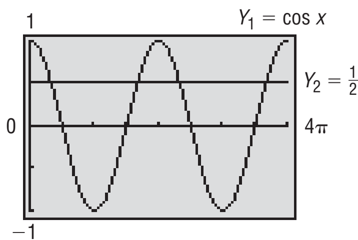
$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \text{ cualquier entero}$$

Algunas soluciones son

$$\underbrace{-\frac{5\pi}{3}, \; -\frac{\pi}{3}}_{k=-1}, \; \underbrace{\frac{\pi}{3}, \; \frac{5\pi}{3}}_{k=0}, \; \underbrace{\frac{7\pi}{3}, \; \frac{11\pi}{3}}_{k=1}, \; \underbrace{\frac{13\pi}{3}, \; \frac{17\pi}{3}}_{k=2}, \; \text{y así sucesivamente}$$

◀

Figura 29



COMPROBACIÓN: Las soluciones se verifican mediante una gráfica $Y_1 = \cos x$ y $Y_2 = \frac{1}{2}$ para determinar dónde se cruzan las gráficas. (Asegúrese de graficar en el modo de radianes). Vea la figura 29. La gráfica de Y_1 intersecta la gráfica de Y_2 en $x = 1.05\left(\approx\frac{\pi}{3}\right)$, $5.24\left(\approx\frac{5\pi}{3}\right)$, $7.33\left(\approx\frac{7\pi}{3}\right)$, y $11.52\left(\approx\frac{11\pi}{3}\right)$, redondeados a dos decimales.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

En la mayor parte de nuestro trabajo, el interés se centra sólo en encontrar soluciones de ecuaciones trigonométricas para $0 \le \theta < 2\pi$.

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación trigonométrica lineal

Resuelva la ecuación: $2 \operatorname{sen}\theta + \sqrt{3} = 0, \quad 0 \le \theta < 2\pi$

Solución Se despeja $\operatorname{sen}\theta$ de la ecuación.

$$2 \operatorname{sen}\theta + \sqrt{3} = 0$$
$$2 \operatorname{sen}\theta = -\sqrt{3} \qquad \text{Restar } \sqrt{3} \text{ en ambos lados.}$$
$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{Dividir ambos lados entre 2.}$$

El periodo de la función seno es 2π. En el intervalo $[0, 2\pi)$, hay dos ángulos θ para los cuales $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$: $\theta = \frac{4\pi}{3}$ y $\theta = \frac{5\pi}{3}$. ◀

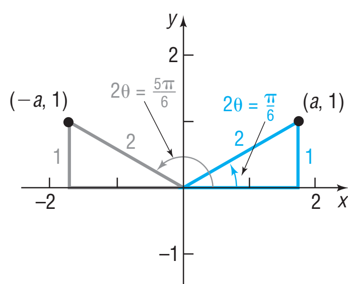
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación: $\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

Solución El periodo de la función seno es 2π. En el intervalo $[0, 2\pi)$, la función seno tiene valor de $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$. Vea la figura 30. En consecuencia, como el argumento es 2θ en la ecuación $\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{1}{2}$, se tiene

Figura 30



$$2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad 2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \text{ cualquier entero}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} + k\pi \qquad \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi \qquad \text{Dividir entre 2.}$$

Entonces

$$\theta = \frac{\pi}{12} + (-1)\pi = \frac{-11\pi}{12} \qquad k = -1 \qquad \theta = \frac{5\pi}{12} + (-1)\pi = \frac{-7\pi}{12}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} + (0)\pi = \frac{\pi}{12} \qquad k = 0 \qquad \theta = \frac{5\pi}{12} + (0)\pi = \frac{5\pi}{12}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} + (1)\pi = \frac{13\pi}{12} \qquad k = 1 \qquad \theta = \frac{5\pi}{12} + (1)\pi = \frac{17\pi}{12}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} + (2)\pi = \frac{25\pi}{12} \qquad k = 2 \qquad \theta = \frac{5\pi}{12} + (2)\pi = \frac{29\pi}{12}$$

En el intervalo $[0, 2\pi)$, las soluciones de $\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{1}{2}$ son $\theta = \frac{\pi}{12}$, $\theta = \frac{5\pi}{12}$, $\theta = \frac{13\pi}{12}$, y $\theta = \frac{17\pi}{12}$. ◀

COMPROBACIÓN: Verifique estas soluciones graficando $Y_1 = \operatorname{sen}(2x)$ y $Y_2 = \frac{1}{2}$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.



ADVERTENCIA: Al despejar θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, de una ecuación trigonométrica en la que el argumento no es θ (como en el ejemplo 4), primero debe escribir todas las soluciones y luego enumerar aquellas que están en el intervalo $[0, 2\pi)$. De otra manera, se podrían perder soluciones. Por ejemplo, al resolver $\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{1}{2}$, si meramente se escriben las soluciones $2\theta = \frac{\pi}{6}$ y $2\theta = \frac{5\pi}{6}$, encontrará sólo $\theta = \frac{\pi}{12}$ y $\theta = \frac{5\pi}{12}$ y perderá las otras soluciones. ■

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

EJEMPLO 5 Solución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación: $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

Solución El periodo de la función tangente es π. En el intervalo $[0, \pi)$, la función tangente tiene valor 1 cuando el argumento es $\frac{\pi}{4}$. Como el argumento es $\theta - \frac{\pi}{2}$ en la ecuación dada, se tiene

$$\theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad \text{k cualquier entero}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

El intervalo $[0, 2\pi)$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ y $\theta = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}$ son las únicas soluciones. ◀



COMPROBACIÓN: Verifique estas soluciones usando una calculadora gráfica.

El siguiente ejemplo ilustra cómo resolver ecuaciones trigonométricas usando una calculadora. Recuerde que las teclas de funciones en una calculadora sólo darán valores congruentes con la definición de la función.

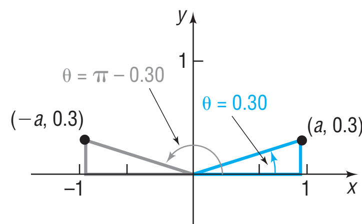
EJEMPLO 6 Solución de una ecuación trigonométrica con una calculadora

Utilice una calculadora para resolver la ecuación $\text{sen}\,\theta = 0.3, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$
Exprese cualesquiera soluciones en radianes, redondeados a dos decimales.

Solución Para resolver $\text{sen}\,\theta = 0.3$ en una calculadora, primero se establece el modo de radianes. Luego se usa la tecla $\boxed{\sin^{-1}}$ para obtener

$$\theta = \text{sen}^{-1}(0.3) \approx 0.3046927$$

Figura 31



Redondeado a dos decimales, $\theta = \text{sen}^{-1}(0.3) = 0.30$ radianes. Debido a la definición de $y = \text{sen}^{-1}\,x$, el ángulo θ que se obtuvo es el ángulo $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ para el cual $\text{sen}\,\theta = 0.3$. Otro ángulo para el que $\text{sen}\,\theta = 0.3$ $\pi - 0.30$. Vea la figura 31. El ángulo $\pi - 0.30$ es el ángulo en el cuadrante II, para el que $\text{sen}\,\theta = 0.3$. Las soluciones para $\text{sen}\,\theta = 0.3$, $0 \leq \theta < 2\pi$, son

$$\theta = 0.30 \text{ radianes} \quad \text{y} \quad \theta = \pi - 0.30 \approx 2.84 \text{ radianes}$$ ◀

ADVERTENCIA: El ejemplo 6 ilustra que debe tenerse cuidado al resolver ecuaciones trigonométricas con una calculadora. Recuerde que la calculadora proporciona sólo un ángulo dentro de las restricciones de la definición de la función trigonométrica inversa. Para encontrar el resto de las soluciones, debe identificar otros cuadrantes, si los hay, donde se pueda localizar una solución. ■

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 41.

7.7 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. Resuelva: $3x - 5 = -x + 1$. (pp. 84–87)

2. $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ __________; $\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) =$ __________. (pp. 520 y 526–534)

Conceptos y vocabulario

3. Dos soluciones de la ecuación $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ son __________ y __________.

4. Todas las soluciones de la ecuación $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ son _______.

5. *Falso o verdadero:* la mayoría de las ecuaciones trigonométricas tienen soluciones únicas.

6. *Falso o verdadero:* la ecuación $\text{sen}\,\theta = 2$ tiene soluciones reales que se encuentran usando una calculadora de gráficas.

Ejercicios

En los problemas 7-30, resuelva cada ecuación en el intervalo $0 \le \theta < 2\pi$.

7. $2\,\text{sen}\,\theta + 3 = 2$
8. $1 - \cos\theta = \frac{1}{2}$
9. $4\cos^2\theta = 1$
10. $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$
11. $2\,\text{sen}^2\theta - 1 = 0$
12. $4\cos^2\theta - 3 = 0$
13. $\text{sen}(3\theta) = -1$
14. $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{3}$
15. $\cos(2\theta) = -\frac{1}{2}$
16. $\tan(2\theta) = -1$
17. $\sec\frac{3\theta}{2} = -2$
18. $\cot\frac{2\theta}{3} = -\sqrt{3}$
19. $2\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0$
20. $\cos\theta + 1 = 0$
21. $\tan\theta + 1 = 0$
22. $\sqrt{3}\cot\theta + 1 = 0$
23. $4\sec\theta + 6 = -2$
24. $5\csc\theta - 3 = 2$
25. $3\sqrt{2}\cos\theta + 2 = -1$
26. $4\,\text{sen}\,\theta + 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$
27. $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -1$
28. $\text{sen}\left(3\theta + \frac{\pi}{18}\right) = 1$
29. $\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$
30. $\cos\left(\frac{\theta}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

En los problemas 31-40, resuelva cada ecuación. Dé una fórmula general para todas las soluciones. Enumere seis soluciones.

31. $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$
32. $\tan\theta = 1$
33. $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
34. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
35. $\cos\theta = 0$
36. $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
37. $\cos(2\theta) = -\frac{1}{2}$
38. $\text{sen}(2\theta) = -1$
39. $\text{sen}\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
40. $\tan\frac{\theta}{2} = -1$

En los problemas 41-52, use una calculadora para resolver cada ecuación en el intervalo $0 \le \theta < 2\pi$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. $\text{sen}\,\theta = 0.4$
42. $\cos\theta = 0.6$
43. $\tan\theta = 5$
44. $\cot\theta = 2$
45. $\cos\theta = -0.9$
46. $\text{sen}\,\theta = -0.2$
47. $\sec\theta = -4$
48. $\csc\theta = -3$
49. $5\tan\theta + 9 = 0$
50. $4\cot\theta = -5$
51. $3\,\text{sen}\,\theta - 2 = 0$
52. $4\cos\theta + 3 = 0$

---

53. Suponga que $f(x) = 3\,\text{sen}\,x$.
a) Resuelva $f(x) = \frac{3}{2}$.
b) Para qué valores de x, $f(x) > \frac{3}{2}$ está en el intervalo $[0, 2\pi)$?

54. Suponga que $f(x) = 2\cos x$.
a) Resuelva $f(x) = -\sqrt{3}$.
b) Para qué valores de x, $f(x) < -\sqrt{3}$ está en el intervalo $[0, 2\pi)$?

55. Suponga que $f(x) = 4\tan x$.
a) Resuelva $f(x) = -4$.
b) Para qué valores de x, $f(x) < -4$ está en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$?

56. Suponga que $f(x) = \cot x$.
a) Resuelva $f(x) = -\sqrt{3}$.
b) Para qué valores de x, $f(x) > -\sqrt{3}$ está en el intervalo $(0, \pi)$?

57. Rueda de la fortuna En 1893, George Ferris diseñó la rueda de la fortuna (o rueda de Ferris). Tenía 250 pies de diámetro. Si la rueda completa una vuelta cada 10 segundos, entonces

$$h(t) = 125\,\text{sen}\left(0.157t - \frac{\pi}{2}\right) + 125$$

representa la altura h, en pies, de un asiento en la rueda, como función del tiempo t, donde t se mide en segundos. El paseo comienza cuando $t = 0$.
a) Durante los primeros 40 segundo del paseo, ¿en qué momento t un individuo que pasea en la rueda de la fortuna está justo a 125 pies del suelo?

b) Durante los primeros 80 segundos del paseo, ¿en qué momento t un individuo que pasea en la rueda de la fortuna está justo a 250 pies del suelo?
c) Durante los primeros 40 segundos del paseo, ¿en qué intervalo de t un individuo que pasea en la rueda de la fortuna está a más de 125 pies del suelo?

58. Rotación de una llanta La llanta Cobra Radial P215/65R15 tiene un diámetro exacto de 26 pulgadas. Suponga que la llanta de un auto da 2 revoluciones por segundo (el auto va a poco menos de 5 millas por hora). Entonces $h(t) = 13 \operatorname{sen}\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 13$ representa la altura h (en pulgadas) de un punto en la llanta como función del tiempo t (en segundos). El auto comienza a moverse cuando $t = 0$.

a) Durante el primer segundo de movimiento del auto, ¿en qué tiempo t está el punto sobre la llanta justo a 13 pulgadas del suelo?
b) Durante el primer segundo de movimiento del auto, ¿en qué tiempo t está el punto sobre la llanta justo a 6.5 pulgadas del suelo?
c) Durante el primer segundo de movimiento del auto, ¿en qué tiempo t está el punto sobre la llanta a más de 13 pulgadas del suelo?

FUENTE: Cobra Tire

59. Patrón de espera Suponga que se pide a un avión que vuele en un patrón de espera cerca del aeropuerto internacional O'Hare de Chicago. La función $d(x) = 10 \operatorname{sen}(0.65x) + 150$ representa la distancia d, en millas, a la que el avión está del aeropuerto en el tiempo x, en minutos.

a) Cuando el avión entre al patrón de espera, $x = 0$, ¿qué tan lejos está de O'Hare?
b) Durante los primeros 20 minutos después que el avión entra en el patrón de espera, ¿en qué tiempo x está el avión justo a 100 millas del aeropuerto?
c) Durante los primeros 20 minutos después que el avión entra en el patrón de espera, ¿en qué tiempo x está el avión a más de 100 millas del aeropuerto?
d) Mientras el avión está en el patrón de espera, ¿llega a estar a menos de 70 millas del aeropuerto? ¿Por qué?

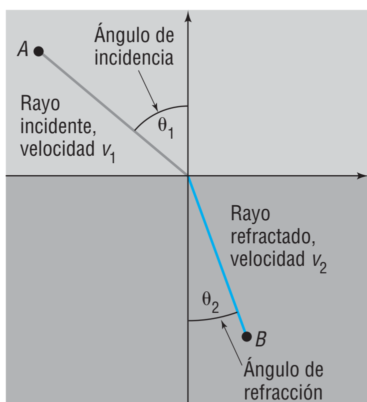
60. Movimiento de un proyectil Un golfista le pega a una pelota de golf con una velocidad inicial de 100 millas por hora. El alcance R de la pelota como función del ángulo θ con la horizontal está dado por $R(\theta) = 672 \operatorname{sen}(2\theta)$, donde R se mide en pies.

a) ¿A qué ángulo θ debe pegarle a la pelota si el golfista quiere que recorra 450 pies (150 yardas)?
b) ¿A qué ángulo θ debe pegarle a la pelota si el golfista quiere que recorra 540 pies (180 yardas)?
c) ¿A qué ángulo θ debe pegarle a la pelota si el golfista quiere que recorra 480 pies (160 yardas)?
d) ¿Puede el golfista dar un golpe de 720 pies (240 yardas)?

El siguiente análisis de la ley de refracción de Snell (nombrada en honor de Willebrord Snell, 1580-1626) es necesario para los problemas 61-67. La luz, el sonido y otras ondas viajan a velocidades diferentes, dependiendo del medio (aire, agua, madera, etcétera) a través del cual pasan. Suponga que la luz viaja de un punto A en un medio donde su velocidad es v_1, a un punto B en otro medio donde su velocidad es v_2. Consulte la figura, donde el ángulo θ_1 se llama **ángulo de incidencia** *y el ángulo θ_2 es el* **ángulo de refracción**. *La ley de Snell,* que se demuestra usando cálculo, establece que*

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

La razón $\frac{v_1}{v_2}$ se llama **índice de refracción**. *Se dan algunos valores en la siguiente tabla.*



Algunos índices de refracción

Medio	Índice de refracción**
Agua	1.33
Alcohol etílico	1.36
Disulfuro de carbono	1.63
Aire (1 atm y 20°C)	1.0003
Yoduro de metileno	1.74
Cuarzo fundido	1.46
Vidrio crown	1.52
Vidrio flint denso	1.66
Cloruro de sodio	1.54

**Las ondas de luz de longitud 589 nanómetros, medidas en el vacío. El índice respecto del aire es diferente, pero despreciable en la mayoría de los casos.

*Dado que René Descartes, en Francia, también dedujo esta ley, se conoce como ley de Descartes.

61. El índice de refracción de la luz al pasar del vacío al agua es 1.33. Si el ángulo de incidencia es 40°, determine el ángulo de refracción.

62. El índice de refracción de la luz al pasar del vacío a un vidrio denso es 1.66. Si el ángulo de incidencia se 50°, determine el ángulo de ángulo de refracción.

63. Ptolomeo, quien vivió en la ciudad de Alejandría, en Egipto, durante el segundo siglo d.C., proporcionó los valores medidos en la tabla que sigue para el ángulo de incidencia θ_1 y el ángulo de refracción θ_2 para una rayo de luz al pasar de aire a agua. ¿Están de acuerdo estos valores con la ley de Snell? Si es así, ¿qué índice de refracción se obtiene? (Estos datos son interesantes como los más antiguos registrados en las mediciones físicas).*

θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
10°	7°45′	50°	35°0′
20°	15°30′	60°	40°30′
30°	22°30′	70°	45°30′
40°	29°0′	80°	50°0′

64. La velocidad de la luz amarilla del sodio (longitud de onda de 589 nanómetros) en cierto líquido se mide como 1.92×10^8 metros por segundo. ¿Cuál es el índice de refracción de este líquido, respecto del aire, para la luz de sodio?**

[**Sugerencia:** La velocidad de la luz en el aire es aproximadamente de 2.997×10^8 metros por segundo].

65. Un rayo de luz con longitud de onda de 589 nanómetros que viaja por el aire tiene un ángulo de incidencia de 40° sobre una placa de material transparente, y el rayo es refractado con un ángulo de refracción de 26°. Encuentre el índice de refracción del material.*

66. Un rayo de luz con longitud de onda de 589 nanómetros (producido por una lámpara de sodio) que viaja por el aire tiene un ángulo de incidencia de 30° en una placa plana de vidrio *crown*. Encuentre el ángulo de refracción.*

67. Un rayo de luz que pasa por una placa gruesa de material cuyo índice de refracción es n_2. Demuestre que el rayo emergente es paralelo al rayo de incidencia.**

68. Explique en sus palabras cómo usaría su calculadora para resolver la ecuación $\text{sen}\, x = 0.3$ $0 \le x < 2\pi$. ¿Cómo modificaría su enfoque para poder resolver la ecuación $\cot x = 5, 0 < x < 2\pi$?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}$

*Adaptado de Halliday y Resnick, *Physics*, partes 1 y 2, 3a. ed., Nueva York: Wiley.

***Physics for Scientists & Engineers* 3/E por Serway. ©1990. Reimpreso con autorización de Brooks/Cole, una división de Thomson Learning: www.thomsonrights.com. Fax: 800-730-2215.

7.8 Ecuaciones trigonométricas (II)

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Solución de ecuaciones cuadráticas factorizando (sección 1.2, pp. 97-98)
- Fórmula cuadrática (sección 1.2, p. 102)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 651.

OBJETIVOS
1. Resolver ecuaciones trigonométricas de forma cuadrática
2. Resolver ecuaciones trigonométricas usando identidades
3. Resolver ecuaciones trigonométricas lineales de seno y coseno
4. Resolver ecuaciones trigonométricas usando una calculadora gráfica

1 En esta sección se continúa el estudio de las ecuaciones trigonométricas. Muchas de ellas se resuelven aplicando técnicas que ya se conocen, como la fórmula cuadrática (si la ecuación es un polinomio de segundo grado) o factorizando.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación trigonométrica de forma cuadrática

Resuelva la ecuación: $2\,\text{sen}^2\,\theta - 3\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0, \quad 0 \le \theta < 2\pi$

Solución La ecuación que se quiere resolver es una ecuación cuadrática (en sen θ) que se factoriza.

$$2\,\text{sen}^2\,\theta - 3\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \qquad 2x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x = \text{sen}\,\theta$$
$$(2\,\text{sen}\,\theta - 1)(\text{sen}\,\theta - 1) = 0 \qquad (2x - 1)(x - 1) = 0$$
$$2\,\text{sen}\,\theta - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \text{sen}\,\theta - 1 = 0$$
$$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \qquad \text{sen}\,\theta = 1$$

Al resolver cada ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$, se obtiene

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \qquad \theta = \frac{5\pi}{6}, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 5.

2 Cuando una ecuación trigonométrica contiene más de una función trigonométrica, algunas veces se pueden usar identidades para obtener una ecuación equivalente que contiene sólo una función trigonométrica.

EJEMPLO 2 Solución de ecuaciones trigonométricas usando identidades

Resuelva la ecuación: $3\cos\theta + 3 = 2\,\text{sen}^2\,\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

Solución La ecuación en su forma actual contiene senos y cosenos. Sin embargo, se utiliza una forma de la identidad de Pitágoras para transformar la ecuación en una expresión equivalente con sólo cosenos.

$$3\cos\theta + 3 = 2\,\text{sen}^2\,\theta$$
$$3\cos\theta + 3 = 2(1 - \cos^2\theta) \qquad \text{sen}^2\,\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$3\cos\theta + 3 = 2 - 2\cos^2\theta$$
$$2\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = 0 \qquad \text{Cuadrática en } \cos\theta$$
$$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta + 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$
$$2\cos\theta + 1 = 0 \quad \text{o} \quad \cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \qquad \cos\theta = -1$$

Al resolver cada ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$, se obtiene

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \qquad \theta = \frac{4\pi}{3}, \qquad \theta = \pi$$



COMPROBACIÓN: Grafique $Y_1 = 3\cos x + 3$ y $Y_2 = 2\,\text{sen}^2\,x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, y encuentre los puntos de intersección. ¿Qué tan cercanas son sus soluciones aproximadas a las soluciones exactas encontradas en este ejemplo?

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación trigonométrica usando identidades

Resuelva la ecuación: $\cos(2\theta) + 3 = 5\cos\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

Solución Primero, se observa que la ecuación dada contiene dos funciones coseno, pero con diferentes argumentos, θ y 2θ. Se usa la fórmula de ángulo doble.

$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ para obtener una ecuación equivalente que contiene sólo $\cos\theta$.

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) + 3 &= 5\cos\theta \\ (2\cos^2\theta - 1) + 3 &= 5\cos\theta \quad && \text{cos}(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \\ 2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 &= 0 && \text{Poner en forma estándar.} \\ (\cos\theta - 2)(2\cos\theta - 1) &= 0 && \text{Factorizar.} \\ \cos\theta = 2 \quad \text{o} \quad \cos\theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para cualquier ángulo θ, $-1 \le \cos\theta \le 1$; por lo tanto, la ecuación $\cos\theta = 2$ no tiene solución. Las soluciones de $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $0 \le \theta < 2\pi$, son

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \qquad \theta = \frac{5\pi}{3}$$ ◀



Comprobación: Grafique $Y_1 = \cos(2x) + 3$ y $Y_2 = 5\cos x$, $0 \le x \le 2\pi$, y encuentre los puntos de intersección. Compare sus resultados con los del ejemplo 3.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

EJEMPLO 4 Solución de ecuaciones trigonométricas usando identidades

Resuelva la ecuación: $\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta = 2$, $0 \le \theta < 2\pi$

Solución Esta ecuación incluye dos funciones trigonométricas, seno y coseno. Como es más sencillo trabajar con una sola, se usa una forma de la identidad de Pitágoras, $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para reescribir la ecuación.

$$\begin{aligned} \cos^2\theta + \text{sen}\,\theta &= 2 \\ (1 - \text{sen}^2\theta) + \text{sen}\,\theta &= 2 \quad && \cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta \\ \text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Ésta es una ecuación cuadrática en $\text{sen}\,\theta$. El discriminante es $b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$. Por lo tanto, la ecuación no tiene soluciones reales. ◀



Comprobación: Grafique $Y_1 = \cos^2 x + \text{sen}\,x$ y $Y_2 = 2$ para ver que las dos gráficas no tienen intersección.

EJEMPLO 5 Solución de ecuaciones trigonométricas usando identidades

Resuelva la ecuación: $\text{sen}\,\theta\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $0 \le \theta < 2\pi$

Solución El lado izquierdo de la ecuación dada está en la forma de ángulo doble $2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \text{sen}(2\theta)$, excepto por un factor de 2. Se multiplica cada lado por 2.

$$\begin{aligned} \text{sen}\,\theta\cos\theta &= -\frac{1}{2} \\ 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta &= -1 \quad && \text{Multiplicar cada lado por 2.} \\ \text{sen}(2\theta) &= -1 && \text{Fórmula de ángulo doble.} \end{aligned}$$

El argumento aquí es 2θ. Entonces es necesario escribir todas las soluciones de esta ecuación y enumerar las que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

$$2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \text{ cualquier entero}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$\underset{k=-1}{\theta} = \frac{3\pi}{4} + (-1)\pi = -\frac{\pi}{4}, \quad \underset{k=0}{\theta} = \frac{3\pi}{4} + (0)\pi = \frac{3\pi}{4}, \quad \underset{k=1}{\theta} = \frac{3\pi}{4} + (1)\pi = \frac{7\pi}{4}, \quad \underset{k=2}{\theta} = \frac{3\pi}{4} + (2)\pi = \frac{11\pi}{4}$$

Las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son

$$\theta = \frac{3\pi}{4}, \qquad \theta = \frac{7\pi}{4}$$

◀

3 En ocasiones es necesario elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación con el fin de obtener la expresión que permite usar las identidades. Recuerde, sin embargo, que elevar al cuadrado ambos lados puede introducir soluciones extrañas. Como resultado, deben verificarse las soluciones aparentes.

EJEMPLO 6 Otros métodos para resolver una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación: $\quad \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1, \quad 0 \le \theta < 2\pi$

Solución A Los intentos de usar identidades no llevan a ecuaciones de solución sencilla. (Inténtelo). Dada la forma de esta ecuación, se decide elevar al cuadrado cada lado.

$$\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$$

$$(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = 1 \qquad \text{Elevar al cuadrado cada lado.}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{Eliminar paréntesis.}$$

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \qquad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

Igualando a cero cada factor, se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{o} \quad \cos\theta = 0$$

Las soluciones aparentes son

$$\theta = 0, \qquad \theta = \pi, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Como se elevaron al cuadrado ambos lados de la ecuación original, deben verificarse estas soluciones aparentes para ver si alguna es extraña.

$$\theta = 0: \quad \operatorname{sen} 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1 \qquad \text{Una solución}$$

$$\theta = \pi: \quad \operatorname{sen}\pi + \cos\pi = 0 + (-1) = -1 \qquad \text{No es solución}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}: \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1 \qquad \text{Una solución}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2}: \quad \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} = -1 + 0 = -1 \qquad \text{No es solución}$$

Por lo tanto, $\theta = \pi$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$ son extrañas. Las únicas soluciones son $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Solución B Se comienza con la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$$

y se divide cada lado entre $\sqrt{2}$. (La razón de esta elección será evidente en breve). Entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

El lado izquierdo ahora se parece a la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos, uno de los cuales es θ. El otro ángulo se desconoce (llámese ϕ). Entonces

$$\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

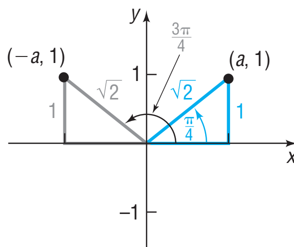
donde

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad 0 \le \phi < 2\pi$$

El ángulo ϕ es por lo tanto $\frac{\pi}{4}$. Como resultado, la ecuación (1) se convierte en

$$\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Figura 32



Existen dos ángulos cuyo seno es $\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$. Vea la figura 32. En consecuencia

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{o} \quad \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta = 0 \qquad\qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Estas soluciones son las mismas que se encontraron antes. ◀

Este segundo método de solución se utiliza para resolver cualquier ecuación lineal en las variables $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

EJEMPLO 7 Solución de una ecuación trigonométrica lineal en sen θ y cos θ

Resuelva:

$$a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta = c, \qquad 0 \le \theta < 2\pi \qquad \textbf{(2)}$$

donde a, b y c son constantes, y ya sea $a \neq 0$ o $b \neq 0$.

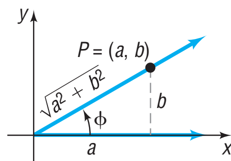
Solución Se divide cada lado de la ecuación (2) entre $\sqrt{a^2 + b^2}$. Entonces

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \textbf{(3)}$$

Existe un ángulo único ϕ, $0 \le \phi < 2\pi$, para el cual

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \textbf{(4)}$$

Figura 33



(vea la figura 33). La ecuación (3) se escribe como

$$\text{sen}\,\theta\cos\phi + \cos\theta\,\text{sen}\,\phi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

o, de manera equivalente,

$$\text{sen}(\theta + \phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

donde ϕ satisface la ecuación (4).

Si $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces $\text{sen}(\theta + \phi) > 1$ o $\text{sen}(\theta + \phi) < -1$, y la ecuación (5) no tiene solución.

Si $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces las soluciones de la ecuación (5) son

$$\theta + \phi = \text{sen}^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{o} \quad \theta + \phi = \pi - \text{sen}^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Como el ángulo ϕ está determinado por las ecuaciones (4), éstas son las soluciones de la ecuación (2). ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.



4 Soluciones con una calculadora gráfica

Las técnicas introducidas en esta sección se aplican sólo a cierto tipo de ecuaciones trigonométricas. Las soluciones para otros tipos se estudian en cálculo, usando métodos numéricos. En el siguiente ejemplo, se muestra cómo se utiliza una calculadora gráfica para obtener soluciones.



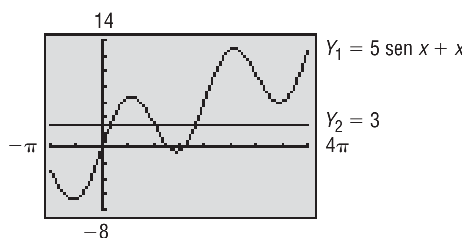
EJEMPLO 8 **Solución de ecuaciones trigonométricas usando una calculadora gráfica**

Resuelva: $5\,\text{sen}\,x + x = 3$

Exprese la o las soluciones redondeadas a dos decimales.

Solución Este tipo de ecuación trigonométrica no se puede resolver por los métodos anteriores. Sin embargo, es posible usar una calculadora gráfica. Las soluciones de esta ecuación son los puntos de intersección de la gráfica de $Y_1 = 5\,\text{sen}\,x + x$ y $Y_2 = 3$. Vea la figura 34.

Figura 34



Existen tres puntos de intersección; las coordenadas x son las soluciones que se buscan. Usando INTERSECT, se encuentra

$$x = 0.52, \qquad x = 3.18, \qquad x = 5.71$$ ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 51.

7.8 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. Encuentre las soluciones reales de $4x^2 - x - 5 = 0$. (pp. 97–98)

2. Encuentre las soluciones reales de $x^2 - x - 1 = 0$. (p. 102)

Ejercicios

En los problemas 3-44, resuelva cada ecuación en el intervalo $0 \le \theta < 2\pi$.

3. $2\cos^2\theta + \cos\theta = 0$

4. $\text{sen}^2\theta - 1 = 0$

5. $2\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$

6. $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

7. $(\tan\theta - 1)(\sec\theta - 1) = 0$

8. $(\cot\theta + 1)\left(\csc\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$

9. $\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta = 1 + \cos\theta$

10. $\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta + \text{sen}\,\theta = 0$

11. $\text{sen}^2\theta = 6(\cos\theta + 1)$

12. $2\,\text{sen}^2\theta = 3(1 - \cos\theta)$

13. $\cos(2\theta) + 6\,\text{sen}^2\theta = 4$

14. $\cos(2\theta) = 2 - 2\,\text{sen}^2\theta$

15. $\cos\theta = \text{sen}\,\theta$

16. $\cos\theta + \text{sen}\,\theta = 0$

17. $\tan\theta = 2\,\text{sen}\,\theta$

18. $\text{sen}(2\theta) = \cos\theta$

19. $\text{sen}\,\theta = \csc\theta$

20. $\tan\theta = \cot\theta$

21. $\cos(2\theta) = \cos\theta$

22. $\text{sen}(2\theta)\,\text{sen}\,\theta = \cos\theta$

23. $\text{sen}(2\theta) + \text{sen}(4\theta) = 0$

24. $\cos(2\theta) + \cos(4\theta) = 0$

25. $\cos(4\theta) - \cos(6\theta) = 0$

26. $\text{sen}(4\theta) - \text{sen}(6\theta) = 0$

27. $1 + \text{sen}\,\theta = 2\cos^2\theta$

28. $\text{sen}^2\theta = 2\cos\theta + 2$

29. $2\,\text{sen}^2\theta - 5\,\text{sen}\,\theta + 3 = 0$

30. $2\cos^2\theta - 7\cos\theta - 4 = 0$

31. $3(1 - \cos\theta) = \text{sen}^2\theta$

32. $4(1 + \text{sen}\,\theta) = \cos^2\theta$

33. $\tan^2\theta = \frac{3}{2}\sec\theta$

34. $\csc^2\theta = \cot\theta + 1$

35. $3 - \text{sen}\,\theta = \cos(2\theta)$

36. $\cos(2\theta) + 5\cos\theta + 3 = 0$

37. $\sec^2\theta + \tan\theta = 0$

38. $\sec\theta = \tan\theta + \cot\theta$

39. $\text{sen}\,\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$

40. $\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta = 1$

41. $\tan(2\theta) + 2\,\text{sen}\,\theta = 0$

42. $\tan(2\theta) + 2\cos\theta = 0$

43. $\text{sen}\,\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

44. $\text{sen}\,\theta + \cos\theta = -\sqrt{2}$

En los problemas 45-50, despeje x, $-\pi \le x \le \pi$. *Exprese las soluciones redondeadas a dos decimales.*

45. Resuelva la ecuación $\cos x = e^x$ graficando $Y_1 = \cos x$ y $Y_2 = e^x$ y encuentre sus puntos de intersección.

46. Resuelva la ecuación $\cos x = e^x$ graficando $Y_1 = \cos x - e^x$ y encuentre sus intercepciones en x.

47. Resuelva la ecuación $2\,\text{sen}\,x = 0.7x$ graficando $Y_1 = 2\,\text{sen}\,x$ y $Y_2 = 0.7x$ y encuentre sus puntos de intersección.

48. Resuelva la ecuación $2\,\text{sen}\,x = 0.7x$ graficando $Y_1 = 2\,\text{sen}\,x - 0.7x$ y encuentre sus intercepciones en x.

49. Resuelva la ecuación $\cos x = x^2$ graficando $Y_1 = \cos x$ y $Y_2 = x^2$ y encuentre sus puntos de intersección.

50. Resuelva la ecuación $\cos x = x^2$ graficando $Y_1 = \cos x - x^2$ y encuentre sus intercepciones en x.

En los problemas 51-62, use una calculadora gráfica para resolver cada ecuación. Exprese las soluciones redondeadas a dos decimales

51. $x + 5\cos x = 0$

52. $x - 4\,\text{sen}\,x = 0$

53. $22x - 17\,\text{sen}\,x = 3$

54. $19x + 8\cos x = 2$

55. $\text{sen}\,x + \cos x = x$

56. $\text{sen}\,x - \cos x = x$

57. $x^2 - 2\cos x = 0$

58. $x^2 + 3\,\text{sen}\,x = 0$

59. $x^2 - 2\,\text{sen}(2x) = 3x$

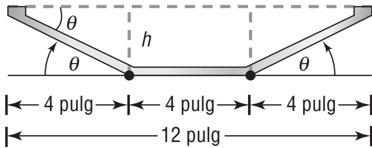
60. $x^2 = x + 3\cos(2x)$

61. $6\,\text{sen}\,x - e^x = 2, \quad x > 0$

62. $4\cos(3x) - e^x = 1, \quad x > 0$

63. Construcción de una canaleta de lluvia Debe construirse una canaleta de lluvia a partir de hojas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar longitudes de 4 pulgadas de cada orilla, se doblan hacia arriba a un ángulo θ. Vea la ilustración. El área A del hueco como función de θ está dada por

$$A(\theta) = 16 \operatorname{sen} \theta(\cos \theta + 1), \quad 0° < \theta < 90°$$



a) En cálculo, se le pedirá que encuentre un ángulo θ que maximice A resolviendo la ecuación

$$\cos(2\theta) + \cos \theta = 0, \quad 0° < \theta < 90°$$

Resuelva esta ecuación para θ usando la fórmula de doble ángulo.

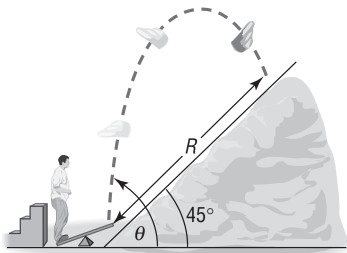
b) Obtenga θ de esta ecuación escribiendo la suma de dos cosenos como un producto.

c) ¿Cuál es el área máxima A del hueco?

d) Gráfica A, $0° \leq \theta \leq 90°$, y encuentre el ángulo θ que maximice el área A. Además calcule el área máxima. Compare los resultados con las respuestas anteriores.

64. Movimiento de un proyectil Se lanza un objeto hacia arriba con un ángulo θ, $45° < \theta < 90°$, respecto de la horizontal con una velocidad inicial de v_0 pies desde la base de un plano que tiene un ángulo de 45° con la horizontal. Vea la ilustración. Si se ignora la resistencia del aire, la distancia R que recorre hacia arriba del plano está dada por

$$R = \frac{v_0^2\sqrt{2}}{32}[\operatorname{sen}(2\theta) - \cos(2\theta) - 1]$$



a) En cálculo se le pedirá que encuentre el ángulo θ que maximiza R resolviendo la ecuación

$$\operatorname{sen}(2\theta) + \cos(2\theta) = 0$$

Despeje θ de esta ecuación usando el método del ejemplo 7.

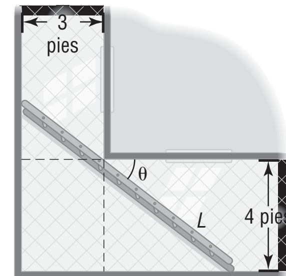
b) Despeje θ de esta ecuación dividiendo cada lado entre $\cos(2\theta)$.

c) ¿Cuál es la distancia máxima R si $v_0 = 32$ pies por segundo?

d) Grafique R, $45° \leq \theta \leq 90°$, y encuentre el ángulo θ que maximiza la distancia R. Además, calcule la distancia máxima. Use $v_0 = 32$ pies por segundo. Compare los resultados con las respuestas anteriores.

65. Transferencia de calor En el estudio de transferencia de calor, ocurre la ecuación $x + \tan x = 0$. Grafique $Y_1 = -x$ y $Y_2 = \tan x$ para $x \geq 0$. Concluya que existe un número infinito de puntos de intersección de estas dos gráficas. Ahora encuentre las dos primeras soluciones positivas de $x + \tan x = 0$ redondeadas a dos decimales.

66. Cargar una escalera a la vuelta de una esquina Dos corredores, uno de 3 pies de ancho y el otro de 4 pies, se unen en un ángulo recto. Vea la ilustración.



a) Exprese la longitud L del segmento de recta mostrado como función de θ.

b) En cálculo se le pedirá que encuentre la longitud de la escalera más larga que puede dar la vuelta a la esquina resolviendo la ecuación

$$3 \sec \theta \tan \theta - 4 \csc \theta \cot \theta = 0, \quad 0° < \theta < 90°$$

Resuelva esta ecuación para obtener θ.

c) ¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que podría dar la vuelta a la esquina?

d) Grafique L, $0° \leq \theta \leq 90°$, y encuentre el ángulo θ que minimiza la longitud L.

e) Compare el resultado con el encontrado en el inciso *b*). Explique por qué las dos respuestas son iguales.

67. Movimiento de un proyectil La distancia horizontal que recorre un proyectil en el aire está dada por la ecuación

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g}$$

donde v_0 es la velocidad inicial del proyectil, θ es el ángulo de elevación y g es la aceleración debida a la gravedad (9.8 metros por segundo al cuadrado).

a) Si puede lanzar una pelota de béisbol con una velocidad inicial de 34.8 metros por segundo, ¿a qué ángulo de elevación θ debe dirigir su lanzamiento para que la pelota recorra una distancia de 107 metros antes de llegar al suelo?

b) Determine la distancia máxima a la que podría lanzar la pelota.

c) Grafique R, con $v_0 = 34.8$ metros por segundo.

d) Verifique los resultados de los incisos *a*) y *b*) usando ZERO o ROOT.

68. Movimiento de un proyectil Se refiere al problema 67.

a) Si puede lanzar una pelota de béisbol con una velocidad inicial de 40 metros por segundo, ¿a qué ángulo de elevación θ debe dirigir el lanzamiento para que la pelota recorra 110 metros antes de llegar al suelo?

b) Determine la distancia máxima que podría lanzar la pelota.

c) Grafique R, con $v_0 = 40$ metros por segundo.

d) Verifique los resultados de los incisos *a*) y *b*) usando ZERO o ROOT.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $\left\{-1, \dfrac{5}{4}\right\}$ **2.** $\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Repaso del capítulo

Conocimiento

Definiciones de las seis funciones trigonométricas inversas

$y = \text{sen}^{-1}\, x$	significa	$x = \text{sen}\, y$	donde	$-1 \le x \le 1, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$	(p. 593)
$y = \cos^{-1} x$	significa	$x = \cos y$	donde	$-1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \pi$	(p. 596)
$y = \tan^{-1} x$	significa	$x = \tan y$	donde	$-\infty < x < \infty, \quad -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$	(p. 599)
$y = \sec^{-1} x$	significa	$x = \sec y$	donde	$\lvert x\rvert \ge 1, \quad 0 \le y \le \pi, \quad y \ne \dfrac{\pi}{2}$	(p. 605)
$y = \csc^{-1} x$	significa	$x = \csc y$	donde	$\lvert x\rvert \ge 1, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}, \quad y \ne 0$	(p. 605)
$y = \cot^{-1} x$	significa	$x = \cot y$	donde	$-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \pi$	(p. 605)

Fórmulas de suma y resta (pp. 616, 619 y 621)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Fórmulas de ángulo doble (pp. 626 y 627)

$$\text{sen}(2\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \qquad \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \qquad \cos(2\theta) = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \qquad \tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

Fórmulas de medio ángulo (pp. 628, 630 y 632)

$$\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \qquad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{1 - \cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

donde el signo $+$ o $-$ se determina por el cuadrante del ángulo $\dfrac{\alpha}{2}$

Fórmulas de producto a suma (p. 635)

$$\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\text{sen}\,\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)]$$

Fórmulas de suma a producto (p. 637)

$$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\,\text{sen}\,\frac{\alpha + \beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Objetivos

Sección		Debe ser capaz de...	Ejercicios de repaso
7.1	1	Encontrar el valor exacto de las funciones inversas de seno, coseno y tangente (p. 593)	1–6
	2	Encontrar el valor aproximado de las funciones inversas de seno, coseno y tangente (p. 594)	101–104
7.2	1	Calcular el valor exacto de expresiones que incluyen las funciones inversas seno, coseno y tangente (p. 603)	9–20
	2	Encontrar el valor exacto de las funciones inversas de secante, cosecante y cotangente (p. 605)	7–8
	3	Usar una calculadora para evaluar $\sec^{-1} x$, $\csc^{-1} x$, y $\cot^{-1} x$ (p. 605)	105–106
7.3	1	Usar álgebra para simplificar expresiones trigonométricas (p. 609)	21–52
	2	Establecer identidades (p. 610)	21–38
7.4	1	Usar las fórmulas de suma y resta para encontrar valores exactos (p. 617)	53–60, 61–70(a)–(d)
	2	Usar las fórmulas de suma y resta para establecer identidades (p. 617)	39–42
	3	Usar las fórmulas de suma y resta que incluyen funciones trigonométricas inversas (p. 622)	71–74
7.5	1	Usar las fórmulas de ángulo doble para encontrar valores exactos (p. 626)	61–70(e)–(f), 75, 76
	2	Usar las fórmulas de ángulo doble y medio ángulo para establecer identidades (p. 627)	43–47
	3	Usar las fórmulas de medio ángulo para encontrar valores exactos (p. 630)	61–70(g)–(h)
7.6	1	Expresar productos como sumas (p. 635)	48
	2	Expresar sumas como productos (p. 637)	49–52
7.7	1	Resolver ecuaciones que incluyen una sola función trigonométrica (p. 639)	77–86
7.8	1	Resolver ecuaciones trigonométricas de forma cuadrática (p. 645)	93–94
	2	Resolver ecuaciones trigonométricas usando identidades (p. 646)	87–92, 95–98
	3	Resolver ecuaciones trigonométricas lineales en seno y coseno (p. 648)	99–100
	4	Resolver ecuaciones trigonométricas usando una calculadora gráfica (p. 650)	107–112

Ejercicios de repaso

Un asterisco en un problema indica que el autor lo sugiere para usarlo en un examen de práctica.

En los problemas 1-20, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

1. $\text{sen}^{-1} 1$

2. $\cos^{-1} 0$

3. $\tan^{-1} 1$

4. $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

***5.** $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

7. $\sec^{-1}\sqrt{2}$

8. $\cot^{-1}(-1)$

9. $\tan\left[\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

10. $\tan\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

***11.** $\sec\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

12. $\csc\left(\text{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

***13.** $\text{sen}\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$

14. $\cos\left(\text{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$

15. $\tan\left[\text{sen}^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$

16. $\tan\left[\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

***17.** $\text{sen}^{-1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$

18. $\cos^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

19. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{4}\right)$

20. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$

En los problemas 21-52, establezca cada identidad.

***21.** $\tan\theta\cot\theta - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

22. $\text{sen}\,\theta\csc\theta - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

23. $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

24. $(1 - \cos^2\theta)(1 + \cot^2\theta) = 1$

25. $4\cos^2\theta + 3\,\text{sen}^2\theta = 3 + \cos^2\theta$

26. $4\,\text{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta = 4 - 2\cos^2\theta$

27. $\frac{1 - \cos\theta}{\text{sen}\,\theta} + \frac{\text{sen}\,\theta}{1 - \cos\theta} = 2\csc\theta$

28. $\frac{\text{sen}\,\theta}{1 + \cos\theta} + \frac{1 + \cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = 2\csc\theta$

29. $\frac{\cos\theta}{\cos\theta - \text{sen}\,\theta} = \frac{1}{1 - \tan\theta}$

30. $1 - \frac{\cos^2\theta}{1 + \text{sen}\,\theta} = \text{sen}\,\theta$

31. $\frac{\csc\theta}{1 + \csc\theta} = \frac{1 - \text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}$

32. $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\text{sen}^2\theta}{1 - \cos\theta}$

33. $\csc\theta - \text{sen}\,\theta = \cos\theta\cot\theta$

34. $\frac{\csc\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{1 + \cos\theta}{\text{sen}^3\theta}$

***35.** $\frac{1 - \text{sen}\,\theta}{\sec\theta} = \frac{\cos^3\theta}{1 + \text{sen}\,\theta}$

36. $\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

37. $\frac{1 - 2\,\text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta\cos\theta} = \cot\theta - \tan\theta$

38. $\frac{(2\,\text{sen}^2\theta - 1)^2}{\text{sen}^4\theta - \cos^4\theta} = 1 - 2\cos^2\theta$

***39.** $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta} = \cot\beta - \tan\alpha$

40. $\frac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\text{sen}\,\alpha\cos\beta} = 1 - \cot\alpha\tan\beta$

41. $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 + \tan\alpha\tan\beta$

42. $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\text{sen}\,\alpha\cos\beta} = \cot\alpha - \tan\beta$

43. $(1 + \cos\theta)\tan\frac{\theta}{2} = \text{sen}\,\theta$

44. $\text{sen}\,\theta\tan\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$

45. $2\cot\theta\cot(2\theta) = \cot^2\theta - 1$

46. $2\,\text{sen}(2\theta)(1 - 2\,\text{sen}^2\theta) = \text{sen}(4\theta)$

47. $1 - 8\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta = \cos(4\theta)$

48. $\frac{\text{sen}(3\theta)\cos\theta - \text{sen}\,\theta\cos(3\theta)}{\text{sen}(2\theta)} = 1$

49. $\frac{\text{sen}(2\theta) + \text{sen}(4\theta)}{\cos(2\theta) + \cos(4\theta)} = \tan(3\theta)$

50. $\frac{\text{sen}(2\theta) + \text{sen}(4\theta)}{\text{sen}(2\theta) - \text{sen}(4\theta)} + \frac{\tan(3\theta)}{\tan\theta} = 0$

51. $\frac{\cos(2\theta) - \cos(4\theta)}{\cos(2\theta) + \cos(4\theta)} - \tan\theta\tan(3\theta) = 0$

52. $\cos(2\theta) - \cos(10\theta) = \tan(4\theta)[\text{sen}(2\theta) + \text{sen}(10\theta)]$

En los problemas 53-60, encuentre el valor exacto de cada expresión.

***53.** sen 165°

54. tan 105°

55. $\cos\frac{5\pi}{12}$

56. $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

57. cos 80° cos 20° + sen 80° sen 20°

58. sen 70° cos 40° − cos 70° sen 40°

59. $\tan\frac{\pi}{8}$

60. $\text{sen}\frac{5\pi}{8}$

En los problemas 61-70, use la información dada acerca de los ángulos α y β para encontrar el valor exacto de:

a) $\text{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$ c) $\text{sen}(\alpha - \beta)$ d) $\tan(\alpha + \beta)$

e) $\text{sen}(2\alpha)$ f) $\cos(2\beta)$ g) $\text{sen}\,\frac{\beta}{2}$ h) $\cos\frac{\alpha}{2}$

*61. $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \text{sen}\,\beta = \frac{5}{13}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

62. $\cos\alpha = \frac{4}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \cos\beta = \frac{5}{13}, -\frac{\pi}{2} < \beta < 0$

63. $\text{sen}\,\alpha = -\frac{3}{5}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \cos\beta = \frac{12}{13}, \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$

64. $\text{sen}\,\alpha = -\frac{4}{5}, -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0; \cos\beta = -\frac{5}{13}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

65. $\tan\alpha = \frac{3}{4}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \tan\beta = \frac{12}{5}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

66. $\tan\alpha = -\frac{4}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \cot\beta = \frac{12}{5}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

67. $\sec\alpha = 2, -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0; \sec\beta = 3, \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$

68. $\csc\alpha = 2, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \sec\beta = -3, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

*69. $\text{sen}\,\alpha = -\frac{2}{3}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \cos\beta = -\frac{2}{3}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

70. $\tan\alpha = -2, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \cot\beta = -2, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

En los problemas 71-76, encuentre el valor exacto de cada expresión.

*71. $\cos\left(\text{sen}^{-1}\frac{3}{5} - \cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$

72. $\text{sen}\left(\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$

73. $\tan\left[\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - \tan^{-1}\frac{3}{4}\right]$

74. $\cos\left[\tan^{-1}(-1) + \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$

75. $\text{sen}\left[2\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

76. $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$

En los problemas 77-100, resuelva cada ecuación en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

77. $\cos\theta = \frac{1}{2}$

78. $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

79. $2\cos\theta + \sqrt{2} = 0$

80. $\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

*81. $\text{sen}(2\theta) + 1 = 0$

82. $\cos(2\theta) = 0$

83. $\tan(2\theta) = 0$

84. $\text{sen}(3\theta) = 1$

85. $\sec^2\theta = 4$

86. $\csc^2\theta = 1$

87. $\text{sen}\,\theta = \tan\theta$

88. $\cos\theta = \sec\theta$

89. $\text{sen}\,\theta + \text{sen}(2\theta) = 0$

90. $\cos(2\theta) = \text{sen}\,\theta$

*91. $\text{sen}(2\theta) - \cos\theta - 2\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0$

92. $\text{sen}(2\theta) - \text{sen}\,\theta - 2\cos\theta + 1 = 0$

*93. $2\,\text{sen}^2\theta - 3\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0$

94. $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

95. $4\,\text{sen}^2\theta = 1 + 4\cos\theta$

96. $8 - 12\,\text{sen}^2\theta = 4\cos^2\theta$

97. $\text{sen}(2\theta) = \sqrt{2}\cos\theta$

98. $1 + \sqrt{3}\cos\theta + \cos(2\theta) = 0$

99. $\text{sen}\,\theta - \cos\theta = 1$

100. $\text{sen}\,\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 2$

En los problemas 101-106, use una calculadora para encontrar un valor aproximado para cada expresión, redondeado a dos decimales.

101. $\text{sen}^{-1} 0.7$

102. $\cos^{-1}\frac{4}{5}$

103. $\tan^{-1}(-2)$

104. $\cos^{-1}(-0.2)$

105. $\sec^{-1} 3$

106. $\cot^{-1}(-4)$



En los problemas 107-112, use una calculadora gráfica para resolver cada ecuación en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$. Aproxime las soluciones redondeando a dos decimales.

*107. $2x = 5\cos x$

108. $2x = 5\,\text{sen}\,x$

109. $2\,\text{sen}\,x + 3\cos x = 4x$

110. $3\cos x + x = \text{sen}\,x$

111. $\text{sen}\,x = \ln x$

112. $\text{sen}\,x = e^{-x}$

113. Utilice la fórmula de medio ángulo para encontrar el valor exacto de sen 15°. Después use la fórmula de la resta para calcular el valor exacto de 15°. Demuestre que las respuestas encontradas son las mismas.



114. Si se da el valor de $\cos\theta$ y se quiere el valor exacto de $\cos(2\theta)$, ¿qué forma de la fórmula de ángulo doble para $\cos(2\theta)$ es la más eficiente?

Proyectos del capítulo



1. Ondas Un cordón estirado que se fija en ambos extremos; se jala en dirección perpendicular al cordón y se suelta; tiene un movimiento que se describe como movimiento de onda. Si suponemos que no hay fricción y que se tiene una longitud tal que no hay "ecos" (es decir, la onda no rebota), el movimiento transversal (perpendicular al cordón) se puede describir con la ecuación

$$y = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

donde y_m es la amplitud medida en metros y k y ω son constantes. La altura de la onda de sonido depende de la distancia x de un extremo a otro del cordón y del tiempo t. Entonces, una onda típica tiene un movimiento horizontal y vertical en el tiempo.

a) ¿Cuál es la amplitud de la onda $y = 0.00421 \operatorname{sen}(68.3x - 2.68t)$?

b) El valor de ω es la frecuencia angular medida en radianes por segundo. ¿Cuál es la frecuencia angular de la onda dada en el inciso *a*)?

c) La frecuencia f es el número de vibraciones por segundo (hertz) que realiza la onda cuando pasa cierto punto. Su valor se encuentra usando la fórmula $f = \frac{\omega}{2\pi}$. ¿Cuál es la frecuencia de la onda dada en el inciso *a*)?

d) La longitud de onda, λ, de una onda es la distancia más corta a la que se repite el patrón de la onda para un tiempo t constante. Así, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. ¿Cuál es la longitud de onda de la onda dada en el inciso *a*)?

e) Grafique la altura del cordón una distancia $x = 1$ metro desde el extremo.

f) Si dos ondas viajan simultáneamente a lo largo del mismo cordón, el desplazamiento vertical del cordón cuando actúan ambas ondas es $y = y_1 + y_2$, donde y_1 es el desplazamiento vertical de la primera onda y y_2 es el desplazamiento vertical de la segunda onda. Este resultado se llama principio de superposición y fue analizado por el francés Jean Baptiste Fourier (1768-1830). Cuando dos ondas viajan por el mismo cordón, una onda difiere de la otra por una fase constante ϕ.

$$y_1 = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$
$$y_2 = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$$

suponiendo que cada onda tiene la misma amplitud. Escriba $y_1 + y_2$ como un producto usando las fórmulas de suma a producto.

g) Suponga que dos ondas se mueven en la misma dirección por cordón estirado. La amplitud de cada onda es de 0.0045 metros y la diferencia de fase entre ellas es de 2.5 radianes. La longitud de onda, λ, de cada onda es de 0.09 metros y la frecuencia, f, es de 2.3 hertz. Encuentre y_1, y_2 y $y_1 + y_2$.

h) Usando una calculadora gráfica, represente y_1, y_2 y $y_1 + y_2$ en la misma pantalla.

i) Repita los incisos *g*) y *h*) cuando la diferencia de fase entre las ondas es de 0.4 radianes.

j) ¿Qué efecto tiene la diferencia de fase sobre la amplitud de $y_1 + y_2$?

Los siguientes proyectos se encuentran en www.prenhall.com/sullivan.

2. Project Motorola ***Sending Pictures Wirelessly***

3. Jacob's Field

4. Calculus of Differences

Repaso acumulativo

1. Encuentre las soluciones reales, si las hay, de la ecuación $3x^2 + x - 1 = 0$.

2. Encuentre la ecuación para la recta que contiene los puntos $(-2, 5)$ y $(4, -1)$. ¿Cuál es la distancia entre estos puntos? ¿Cuál es su punto medio?

3. Pruebe la simetría de la ecuación $3x + y^2 = 9$ respecto del eje x, el eje y y el origen. Enumere las intercepciones.

4. Use transformaciones para graficar la ecuación $y = |x - 3| + 2$.

5. Use transformaciones para graficar la ecuación $y = 3e^x - 2$.

6. Use transformaciones para graficar la ecuación

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1.$

7. Bosqueje una gráfica de cada una de las siguientes funciones. Etiquete al menos tres puntos en cada gráfica. Nombre la inversa de cada función y muestre su gráfica.

a) $y = x^3$
b) $y = e^x$
c) $y = \operatorname{sen} x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
d) $y = \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

8. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{3}$ y $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, encuentre el valor exacto de:

a) $\cos\theta$ b) $\tan\theta$ c) $\operatorname{sen}(2\theta)$
d) $\cos(2\theta)$ e) $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ f) $\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$

9. Encuentre el valor exacto de $\cos(\tan^{-1} 2)$.

10. Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, y $\cos\beta = -\frac{1}{3}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, encuentre el valor exacto de:

a) $\cos\alpha$ b) $\operatorname{sen}\beta$ c) $\cos(2\alpha)$
d) $\cos(\alpha + \beta)$ e) $\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}$

11. Para la función

$$f(x) = 2x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x - 1:$$

a) Encuentre los ceros reales y su multiplicidad.
b) Encuentre las intercepciones.
c) Encuentre la función de potencia a la que la gráfica de f se parece para valores grandes de $|x|$.
d) Grafique f usando una calculadora gráfica.
e) Aproxime los puntos de inflexión, si existen.
f) Use la información obtenida en los incisos *a*) a *e*) para bosquejar una gráfica de f a mano.
g) Identifique los intervalos en los que f es creciente, decreciente o constante.

12. Si $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = x^2 + 3x + 2$, resuelva:

a) $f(x) = 0$
b) $f(x) = g(x)$
c) $f(x) > 0$
d) $f(x) \ge g(x)$

8 Aplicaciones de las funciones trigonométricas

CONTENIDO

8.1 Aplicaciones que involucran triángulos rectángulos

8.2 Ley de los senos

8.3 Ley de los cosenos

8.4 Área de un triángulo

8.5 Movimiento armónico simple; movimiento amortiguado; combinación de ondas

Repaso del capítulo

Proyectos del capítulo

Repaso acumulativo

Nuevos mapas identifican el viaje de Lewis y Clark por el Missouri

KANSAS, Mo.- Hace casi dos siglos, el Congreso de Estados Unidos comisionó a Meriwether Lewis y William Clark para explorar rutas comerciales hacia el oeste.

Su largo viaje documentado les llevó a través del río Missouri, pero la ruta exacta ha sido motivo de discusión.

Ahora, la tecnología de las computadoras modernas combinada, con las investigaciones del terreno del siglo XIX, puede proporcionar una imagen precisa. Los últimos mapas generados en computadora de la expedición de Lewis y Clark los dio a conocer esta semana el secretario de Estado de Missouri, Matt Blunt.

Los mapas combinan los rasgos del terreno de principios del siglo XIX con las indicaciones geográficas contemporáneas. Son los más precisos hasta la fecha de los viajes de Lewis y Clark por el Missouri en 1804 y 1806, asegura el investigador encargado del proyecto, Jim Harlan.

"Sabíamos lo que habían hecho, pero no con esta certidumbre —dice Harlan, director del proyecto de recursos geográficos en la Universidad de Missouri-Columbia—. Creo que necesitamos más información y menos especulación, de eso se trata todo esto".

FUENTE: Sophia Maines, "New Maps Pinpoint Lewis and Clark's Journey through Missouri", The Kansas City Star, 1 de agosto de 2001. Distribuido por Knight Ridder/Tribune Information Services.

—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO.

8.1 Aplicaciones que involucran triángulos rectángulos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Teorema de Pitágoras (repaso, sección R.3, p. 30)
- Ecuaciones trigonométricas (I) (sección 7.7, pp. 639-642)
- Teorema de ángulos complementarios (sección 6.2, pp. 512-513)

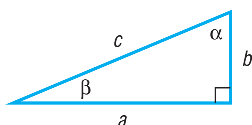

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 665.

OBJETIVOS 1 Resolver triángulos rectángulos
2 Resolver problemas aplicados

Resolver triángulos rectángulos


1 En el análisis que sigue, siempre se etiquetará un triángulo rectángulo de manera que el lado a esté opuesto al ángulo α, el lado b es opuesto al ángulo esté β, y el lado c sea la hipotenusa, como se muestra en la figura 1. **Resolver un triángulo rectángulo** significa encontrar las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos que faltan. Se seguirá la práctica de expresar las longitudes de los lados redondeadas a dos decimales y los ángulos en grados redondeados a un decimal. (Su calculadora debe estar en el modo de grados).

Figura 1



Para resolver un triángulo rectángulo, se necesita conocer uno de los ángulos agudos α o β y un lado o, de otra manera, dos lados. Con éstos se usa el teorema de Pitágoras y el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180°. La suma de los ángulos α y β en un triángulo rectángulo es, entonces, de 90°.

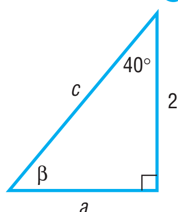
Para el triángulo rectángulo mostrado en la figura 1, se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad \alpha + \beta = 90°$$

EJEMPLO 1 Solución de un triángulo rectángulo

Utilice la figura 2. Si $b = 2$ y $\alpha = 40°$, encuentre a, c y β.

Figura 2



Solución Como $\alpha = 40°$ y $\alpha + \beta = 90°$, se encuentra que $\beta = 50°$. Para encontrar los lados a y c, se usa que

$$\tan 40° = \frac{a}{2} \quad \text{y} \quad \cos 40° = \frac{2}{c}$$

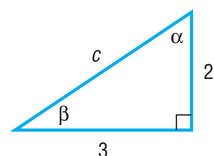
Ahora se resuelve para a y c.

$$a = 2 \tan 40° \approx 1.68 \quad \text{y} \quad c = \frac{2}{\cos 40°} \approx 2.61$$ ◄


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

EJEMPLO 2 Solución de un triángulo rectángulo

Figura 3



Utilice la figura 3. Si $a = 3$ y $b = 2$, encuentre c, α, y β.

Solución Como $a = 3$ y $b = 2$, entonces, por el teorema de Pitágoras, se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$$
$$c = \sqrt{13} \approx 3.61$$

Para encontrar el ángulo α, se usa que

$$\tan \alpha = \frac{3}{2} \quad \text{así,} \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{3}{2}$$

Ponga su calculadora en el modo de grados. Redondeado a un decimal, se encuentra que $\alpha = 56.3°$. Como $\alpha + \beta = 90°$, se encuentra que $\beta = 33.7°$. ◀

Nota: Para evitar errores de redondeo al usar una calculadora, se almacenarán valores no redondeados en la memoria para utilizarlos en los cálculos subsecuentes.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

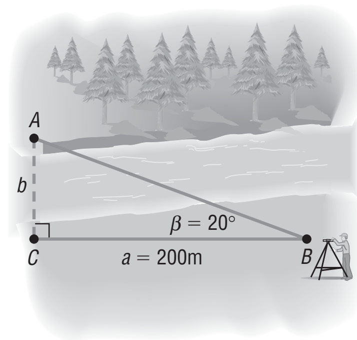
Aplicaciones

 Un uso común de la trigonometría es medir alturas y distancias cuyas mediciones por medios normales son incómodas o imposibles.

EJEMPLO 3 Para encontrar el ancho de un río

Un topógrafo puede medir el ancho de un río colocando un teodolito* en un punto C en un lado del río y apuntándolo a un punto A en el otro lado. Vea la figura 4. Después de voltear un ángulo de 90° en C, el topógrafo camina una distancia de 200 metros al punto B. Usando el teodolito en B, mide el ángulo β y encuentra que es de 20°. ¿Cuál es el ancho del río redondeado al metro más cercano?

Figura 4



Solución Se busca la longitud del lado b. Se conocen a y β, por lo que se usa el hecho de que

$$\tan \beta = \frac{b}{a}$$

para obtener

$$\tan 20° = \frac{b}{200}$$

$$b = 200 \tan 20° \approx 72.79 \text{ metros}$$

El ancho del río es de 73 metros, redondeado al metro más cercano. ◀

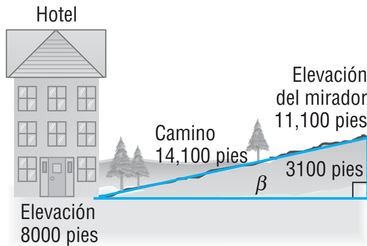
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

*Instrumento usado en topografía para medir ángulos.

EJEMPLO 4 Inclinación de un camino en la montaña

Un camino recto lleva del Hotel Alpine con elevación de 8000 pies, a un mirador panorámico con elevación de 11,100 pies. La longitud del camino es de 14,100 pies. ¿Cuál es la inclinación (pendiente) del camino? Esto es, ¿cuál es el ángulo β en la figura 5?

Figura 5



Solución Como ilustra la figura 5, el ángulo β obedece a la ecuación

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{3100}{14{,}100}$$

Utilizando una calculadora,

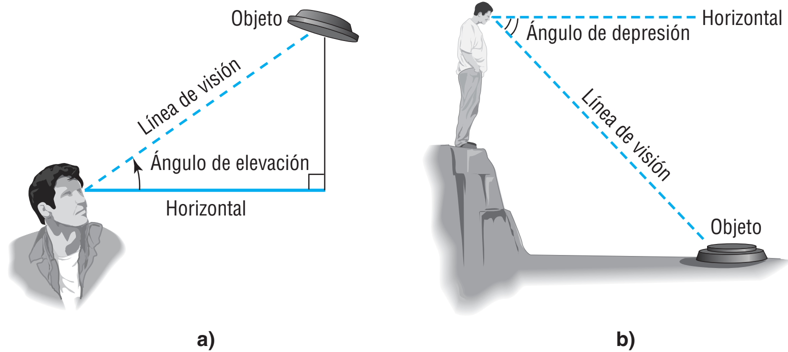
$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3100}{14{,}100} \approx 12.7^\circ$$

La inclinación aproximada (pendiente) del camino es de 12.7°. ◀

En ocasiones es posible medir las alturas verticales, usando ya sea el *ángulo de elevación* o el *ángulo de depresión*. Si una persona mira un objeto hacia arriba, el ángulo agudo medido desde la horizontal a la línea de visión del objeto observado se llama **ángulo de elevación**. Vea la figura 6*a*).

Si una persona está de pie en un acantilado mirando un objeto hacia abajo, el ángulo agudo que forma la línea de visión al observar el objeto con la horizontal se llama **ángulo de depresión**. Vea la figura 6*b*).

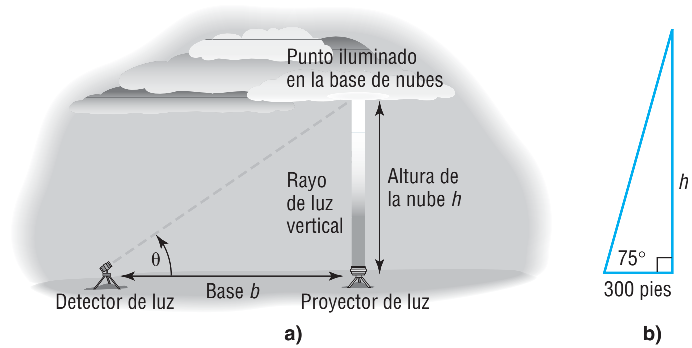
Figura 6



EJEMPLO 5 Altura de una nube

Los meteorólogos encuentran la altura de una nube usando un instrumento llamado **cielómetro**. Un cielómetro consiste en un **proyector de luz** que dirige un rayo vertical hacia la base de la nube y un **detector de luz** que recorre la nube para detectar el rayo de luz. Vea la figura 7*a*). El 1 de diciembre de 2003, en el aeropuerto Midway de Chicago, se usó un cielómetro con una base de 300 pies para encontrar la altura del techo de nubes. Si el ángulo de elevación del detector de luz es de 75°, ¿cuál es la altura del techo de nubes?

Figura 7



Solución La figura 7b) ilustra la situación. Para encontrar la altura h, se usa que $\tan 75° = \frac{h}{300}$, entonces

$$h = 300 \tan 75° \approx 1120 \text{ pies}$$

El techo (altura a la base de la cubierta de nubes) aproximado es de 1120 pies. ◀

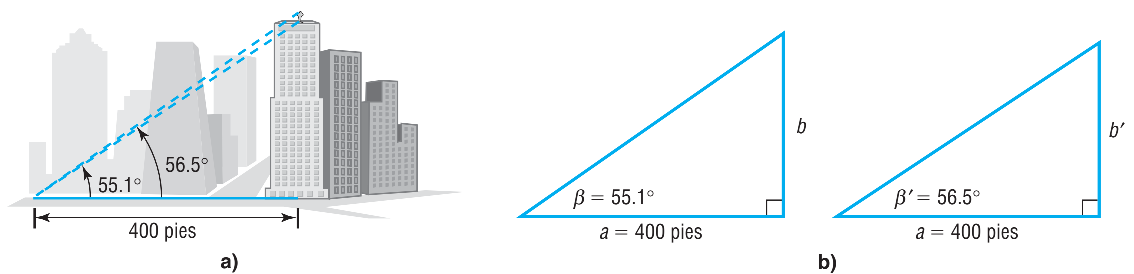
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

La idea que fundamenta el ejemplo 5 también se utiliza para encontrar la altura de un objeto con una base que no se alcanza desde la horizontal.

EJEMPLO 6 Altura de una estatua sobre un edificio

Como adorno en el techo del edificio de Board of Trade en Chicago hay una estatua de Ceres, la diosa romana del trigo. Desde el nivel de la calle se hacen dos observaciones a 400 pies del centro del edificio. El ángulo de elevación a la base de la estatua es de 55.1°; el ángulo de elevación a la cabeza de la estatua es de 56.5°. Vea la figura 8a). ¿Cuál es la altura de la estatua?

Figura 8



Solución La figura 8b) muestra dos triángulos que son una réplica de la figura 8a). La altura de la estatua de Ceres será $b' - b$. Para encontrar b y b', consulte la figura 8b).

$$\tan 55.1° = \frac{b}{400} \qquad \tan 56.5° = \frac{b'}{400}$$

$$b = 400 \tan 55.1° \approx 573 \qquad b' = 400 \tan 56.5° \approx 604$$

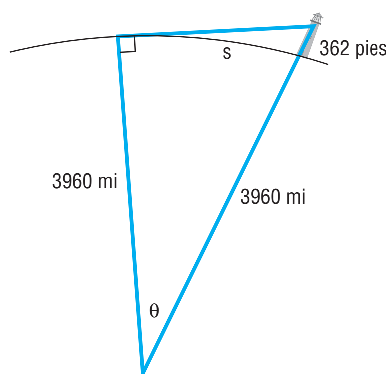
La altura aproximada de la estatua es de $604 - 573 = 31$ pies. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

EJEMPLO 7 Faro de Gibb's Hill, en Southampton, Bermudas

En operación desde 1846, el faro de Gibb's Hill tiene 117 pies de altura y se encuentra sobre una colina de 245 pies de altura, de manera que su rayo de luz está 362 pies arriba del nivel del mar. Un folleto turístico establece que la luz se observa en el horizonte desde 26 millas de distancia. Verifique la exactitud de esta proposición.

Figura 9



Solución La figura 9 ilustra la situación. El ángulo central θ, con vértice en el centro de la Tierra, cuyo radio es 3960 millas, obedece a la ecuación

$$\cos\theta = \frac{3960}{3960 + \frac{362}{5280}} \approx 0.999982687 \qquad \text{1 milla = 5280 pies}$$

Al despejar θ, se obtiene

$$\theta \approx 0.33715° \approx 20.23'$$

El folleto no indica si la distancia se mide en millas náuticas o terrestres. Por ello, se calcularán ambas distancias.

La distancia s en millas náuticas (vea el problema 114. p. 506) es la medida del ángulo θ en minutos, entonces $s = 20.23$ millas náuticas.

La distancia s en millas terrestres está dada por la fórmula $s = r\theta$, donde θ se mide en radianes. Entonces, como

$$\theta = 20.23' \approx 0.33715° \approx 0.00588 \text{ radianes}$$

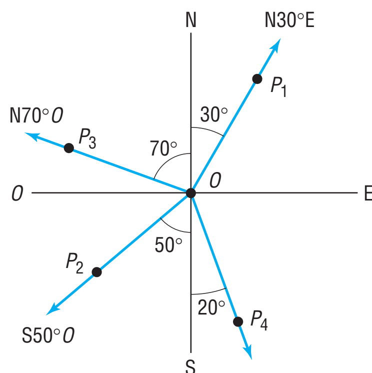
$$\uparrow\; 1' = \frac{1}{60}^{\circ} \qquad \uparrow\; 1° = \frac{\pi}{180}\text{ radianes}$$

se encuentra que

$$s = r\theta = (3960)(0.00588) = 23.3 \text{ millas}$$

En cualquier caso, parece que el folleto exageró algo la distancia. ◀

Figura 10



En la navegación y la topografía, la **dirección** o el **rumbo** de un punto O a un punto P es igual al ángulo agudo θ entre el rayo OP y la recta vertical que pasa por O, la línea norte-sur.

La figura 10 ilustra algunas direcciones. Observe que la dirección de O a P se denota por el símbolo N30°E, que indica que la dirección es 30° al este del norte. Al escribir la dirección de O a P, la dirección norte o sur siempre aparecen primero, seguida de un ángulo agudo, seguida por este u oeste. En la figura 10, la dirección de O a P_2 es S50°O, y de O a P_3 es N70°O.

EJEMPLO 8 Dirección de un objeto

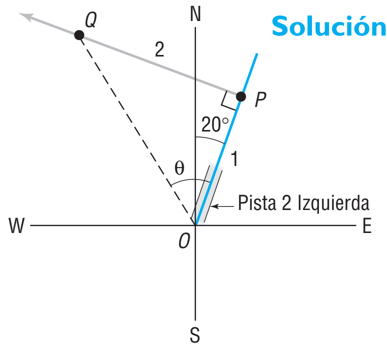
En la figura 10, ¿cuál es la dirección de O a P_4?

Solución El ángulo agudo entre el rayo OP_4 y la recta norte-sur que pasa por O está dado como 20°. La dirección de O a P_4 es S20°E. ◀

EJEMPLO 9 **Dirección de un avión**

Un avión Boeing 777 despega del aeropuerto O'Hare de la pista 2 IZQUIERDA (I), que tiene dirección N20°E.* Después de volar 1 milla, el piloto pide permiso de dar una vuelta de 90° para dirigirse al noroeste. El permiso se concede. Después de que el avión recorre 2 millas con ese rumbo, ¿qué dirección debe usar la torre de control para localizar el avión?

Figura 11



Solución La figura 11 ilustra la situación. Después de volar 1 milla desde el aeropuerto O (la torre de control), el avión está en P. Después de girar 90° al noroeste y volar 2 millas, el avión está en el punto Q. En el triángulo OPQ, el ángulo θ obedece la ecuación

$$\tan\theta = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{así} \quad \theta = \tan^{-1} 2 \approx 63.4°$$

El ángulo agudo entre el norte y la recta OQ es $63.4° - 20° = 43.4°$. La dirección al avión de O a Q es N43.4°O. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

*En la navegación aérea, el término **azimut** se emplea para denotar el ángulo positivo medido en el sentido de las manecillas del reloj del norte (N) al rayo OP. En la figura 10, el azimut de O a P_1 es de 30°; el azimut de O a P_2 es de 230°; el azimut de O a P_3 es de 290°. Al dar nombre a las pistas, el dígito de las unidades se pone a la izquierda del azimut. Pista 2 IZQUIERDA se refiere a la pista izquierda con una dirección de azimut de 20° (dirección N20°E). La pista 23 es la pista con azimut 230° y dirección S50°O.

8.1 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. En un triángulo rectángulo, si la longitud de la hipotenusa es 5 y la longitud de uno de los otros lados es 3, ¿cuál es la longitud del tercer lado? (p. 30)

2. *Falso o verdadero:* los ángulos 52° y 48° son complementarios. (pp. 512–513)

3. Si θ es un ángulo agudo, resuelva la ecuación $\tan\theta = \frac{1}{2}$. (pp. 639–642)

4. *Falso o verdadero:* en un triángulo rectángulo, uno de los ángulos mide 90° y la suma de los otros dos ángulos es 90°. (pp. 512–513)

Conceptos y vocabulario

5. Cuando ve un objeto hacia arriba, el ángulo agudo medido desde la horizontal a la línea de visión de observación del objeto se llama __________ __________ __________.

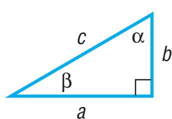
6. Cuando ve un objeto hacia abajo, el ángulo agudo descrito en el problema 5 se llama __________ __________ - __________.

7. *Falso o verdadero:* en un triángulo rectángulo, si se conocen dos lados, se puede resolver el triángulo

8. *Falso o verdadero:* en un triángulo rectángulo, si se conocen los dos ángulos agudos, se puede resolver el triángulo.

Ejercicios

En los problemas 9-22, use el triángulo rectángulo mostrado al margen. Resuelva el triángulo con la información dada.



9. $b = 5$, $\beta = 20°$; encuentre a, c, y α **10.** $b = 4$, $\beta = 10°$; encuentre a, c, y α
11. $a = 6$, $\beta = 40°$; encuentre b, c, y α **12.** $a = 7$, $\beta = 50°$; encuentre b, c, y α
13. $b = 4$, $\alpha = 10°$; encuentre a, c, y β **14.** $b = 6$, $\alpha = 20°$; encuentre a, c, y β
15. $a = 5$, $\alpha = 25°$; encuentre b, c, y β **16.** $a = 6$, $\alpha = 40°$; encuentre b, c, y β

17. $c = 9, \quad \beta = 20°;$ encuentre $b, a,$ y α

18. $c = 10, \quad \alpha = 40°;$ encuentre $b, a,$ y β

19. $a = 5, \quad b = 3;$ encuentre $c, \alpha,$ y β

20. $a = 2, \quad b = 8;$ encuentre $c, \alpha,$ y β

21. $a = 2, \quad c = 5;$ encuentre $b, \alpha,$ y β

22. $b = 4, \quad c = 6;$ encuentre $a, \alpha,$ y β

23. Geometría Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 8 pulgadas de largo. Si un ángulo mide 35°, encuentre la longitud de cada cateto.

24. Geometría Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 10 centímetros de largo. Si uno de los ángulos tiene 40°, encuentre la longitud de cada cateto.

25. Geometría Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 25°. Si un cateto mide 5 pulgadas, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa?

[**Sugerencia:** Es posible obtener dos respuestas].

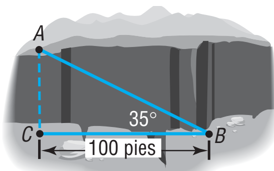
26. Geometría Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de $\frac{\pi}{8}$ radianes. Si un cateto mide 3 metros, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa?

[**Sugerencia:** Es posible obtener dos repuestas].

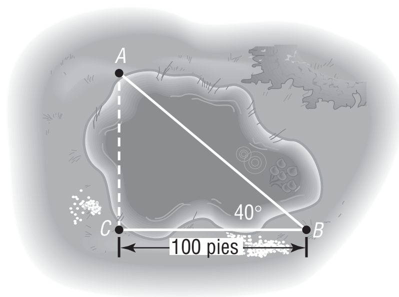
27. Geometría La hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 5 pulgadas. Si un cateto es de 2 pulgadas, encuentre la medida en grados de cada ángulo.

28. Geometría La hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 3 pies. Si un cateto es de 1 pie, encuentre la medida en grados de cada ángulo.

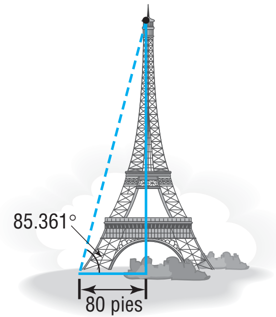
29. Ancho de un barranco Encuentre la distancia de A a C en el barranco ilustrado en la figura.



30. Distancia al otro lado de un estanque Encuentre la distancia de A a C al otro lado del estanque ilustrado en la figura.



31. La Torre Eiffel La torre más alta construida antes de la era de las antenas de televisión, la Torre Eiffel, fue terminada el 31 de marzo de 1889. Encuentre su altura (antes de agregarle la antena de televisión) usando la información dada en la ilustración.



32. Distancia de la costa a un barco Desde un barco mar adentro frente a un acantilado vertical, que se sabe que tiene 100 pies de altura, se ve la cima del acantilado. Si el ángulo de elevación es 25°, ¿qué tan lejos de la costa está el barco?

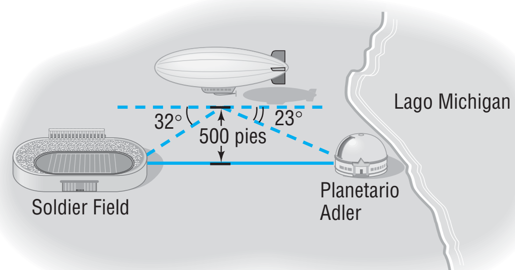
33. Distancia a un altiplano Suponga que se dirige a un altiplano que está a 50 metros de altura. Si el ángulo de elevación a la cima del altiplano es 20°, ¿qué tan lejos está de la base del altiplano?

34. Estatua de la Libertad Un barco está frente a la costa de la ciudad de Nueva York. Mira la Estatua de la Libertad, que tiene cerca de 305 pies de alto. Si el ángulo de elevación a la punta de la estatua es 20°, ¿qué tan lejos está el barco de la base de la estatua?

35. Alcance de una escalera Una escalera de extensión de 22 pies recargada contra un edificio forma un ángulo de 70° con el suelo. ¿A qué altura del edificio llega la escalera?

36. Altura de un edificio Para medir la altura de un edificio, se toman dos observaciones a 50 pies una de la otra. Si el primer ángulo de elevación es de 40° y el segundo es de 32°, ¿cuál es la altura del edificio?

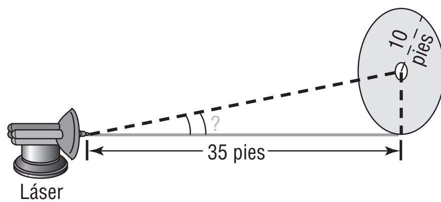
37. Distancia entre dos objetos Un dirigible suspendido en el aire a una altura de 500 pies, está directamente sobre la línea que une el estadio Soldier Field con el Planetario Adler en el lago Michigan (vea la figura). Si el ángulo de depresión desde el dirigible al estadio es de 32° y del dirigible al planetario es de 23°, encuentre la distancia entre el Soldier Field y el Planetario Adler.



38. Ángulo de elevación del Sol A las 10 AM el 26 de abril de 2004, un edificio de 300 pies de alto forma una sombra de 50 pies de largo. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol?

39. Monte Rushmore Para medir la altura de la cara de Lincoln en el Monte Rushmore, se realizan dos observaciones a 800 pies de la base de la montaña. Si el ángulo de elevación hasta la base de la cara de Lincoln es de 32° y el ángulo de elevación a la punta es de 35°, ¿cuál es la altura de la cara de Lincoln?

40. Dirección de un rayo láser Un rayo láser debe dirigirse a través de un pequeño agujero en el centro de un círculo de radio de 10 pies. El origen del rayo está a 35 pies del círculo (vea la figura). ¿A qué ángulo de elevación debe dirigirse el rayo para asegurar que pasará por el agujero?



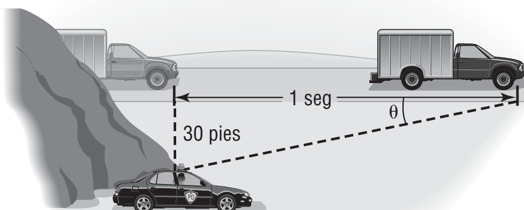
41. Longitud de un tensor Una torre de transmisión de radio tiene 200 pies de altura. ¿Cuál debe ser la longitud del cable tensor si tiene que sujetarse a la torre a 10 pies de la punta y debe tener un ángulo de 21° con el suelo?

42. Altura de una torre Un cable tensor de 80 pies de longitud unido a la parte superior de una torre de radio transmisión forma un ángulo de 25° con el piso. ¿Qué tan alta es la torre?

43. Monumento a Washington El ángulo de elevación del Sol es de 35.1° en el instante en que el monumento a Washington forma una sombra de 789 pies de largo. Use esta información para calcular la altura del monumento.

44. Longitud de un camino de montaña Un camino recto con una inclinación de 17° lleva de un hotel con elevación de 9000 pies a un lago con una elevación de 11,200 pies. ¿Cuál es la longitud del camino?

45. Velocidad de un camión Una patrulla está escondida a 30 pies de la carretera. Un segundo después que pasa un camión, se mide el ángulo θ entre la carretera y la línea de observación de la patrulla al camión. Vea la ilustración.



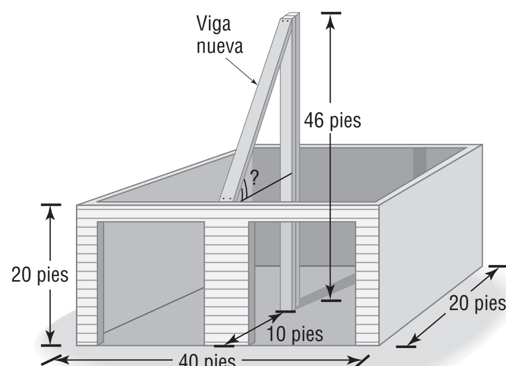
a) Si el ángulo medido es de 15°, ¿qué tan rápido va el camión? Exprese la respuesta en pies por segundo y en millas por hora.
b) Si el ángulo medido es de 20°, ¿qué tan rápido va el camión? Exprese la respuesta en pies por segundo y en millas por hora.
c) Si el límite de velocidad es 55 millas por hora y se emiten multas por velocidades de 5 millas por hora o más arriba del límite, ¿para qué ángulos debe el patrullero poner una multa?

46. Seguridad Una cámara de seguridad de un banco está montada en una pared 9 pies arriba del suelo. ¿Qué ángulo de depresión se debe usar si la cámara ha de dirigirse a un punto 6 pies arriba del suelo y separado a 12 pies de la pared?

47. Dirección de un avión Un avión DC-9 sale del Midway Airport por la pista 4 DERECHA, cuya dirección es N40°E. Después de volar $\frac{1}{2}$ milla, el piloto pide permiso de virar 90° y dirigirse al sureste. El permiso se concede. Luego, el avión va 1 milla con este rumbo, ¿qué dirección debe usar la torre de control para localizar el avión?

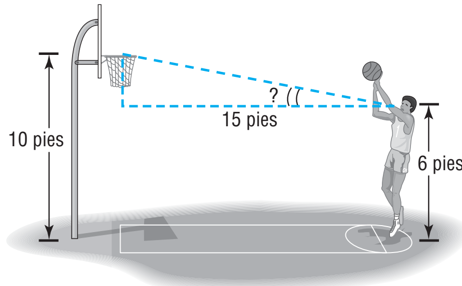
48. Dirección de un barco Un barco sale del puerto de Miami con dirección S80°E y velocidad de 15 nudos. Después de 1 hora, el barco da vuelta 90° hacia el sur. Después de 2 horas, manteniendo la misma velocidad, ¿cuál es la dirección del barco desde el puerto?

49. Pendiente de un techo Un carpintero se prepara para poner el techo de un *garaje* de 20 pies por 40 pies por 20 pies. Coloca como soporte una viga de acero de 46 pies de largo en el centro del *garaje*. Fijará otra viga al extremo superior de la viga central para apoyar el techo (vea la figura). ¿Qué ángulo de elevación tiene la nueva viga? En otras palabras, ¿cuál es la pendiente del techo?

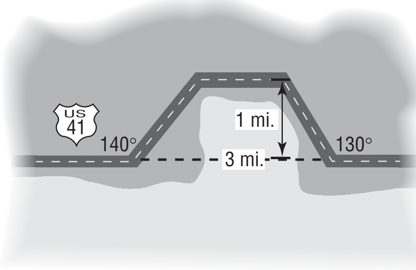


50. Tiros libres en básquetbol Los ojos de un jugador de básquetbol están a 6 pies del suelo. El jugador está en la línea de tiro libre, que está a 15 pies del centro del aro de

la canasta (vea la figura). ¿Cuál es el ángulo de elevación desde los ojos del jugador al centro del aro? [**Sugerencia:** El aro está a 10 pies del suelo].

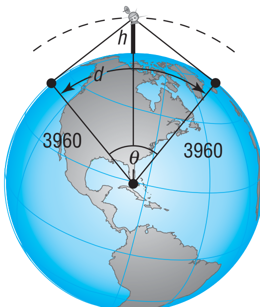


51. Construcción de una carretera Una carretera cuya dirección principal es norte-sur, se construye a lo largo de la costa oeste de Florida. Cerca de Naples, una bahía obstruye la trayectoria recta. Como el costo de un puente es prohibitivo, los ingenieros deciden darle la vuelta. La ilustración muestra la trayectoria que decidieron seguir y las medidas tomadas. ¿Cuál es la longitud de carretera necesaria para dar esta vuelta?

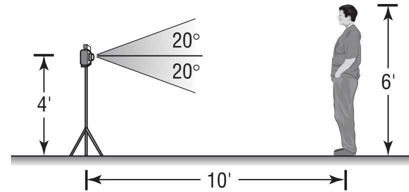


52. Satélites de vigilancia Un satélite de vigilancia da vueltas alrededor de la Tierra a una altura de h millas sobre la superficie. Suponga que d es la distancia, en millas, sobre la superficie de la Tierra que se puede observar desde el satélite. Vea la ilustración.

a) Encuentre la ecuación que relaciona el ángulo central θ y la altura h.
b) Encuentre la ecuación que relaciona la distancia observable d y θ.
c) Encuentre la ecuación que relaciona d y h.
d) Si d debe ser 2500 millas, ¿qué tan alta debe ser la órbita del satélite arriba de la Tierra?
e) Si el satélite gira a una altura de 300 millas, ¿cuál es la distancia d que se podría observar en la superficie?

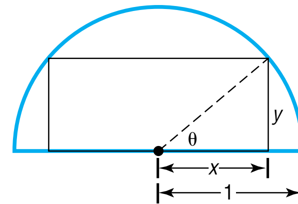


53. Fotografía Se monta una cámara en un tripié de 4 pies de alto a una distancia de 10 pies de George, que mide 6 pies. Vea la ilustración. Si la lente de la cámara tiene ángulos de depresión y elevación de 20°, ¿verá la lente los pies y la cabeza de George? Si no, ¿cuánto debe moverse para atrás la cámara para incluir los pies y la cabeza de George?



54. Construcción Se debe construir una rampa de acceso para discapacitados con un ángulo de elevación de 15° y una altura final de 5 pies. ¿Cuál es la longitud de la rampa?

55. Geometría Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 1. Vea la ilustración.

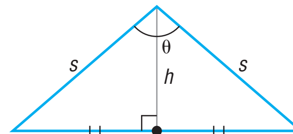


a) Exprese el área A del rectángulo como función del ángulo θ mostrado en la ilustración.
b) Demuestre que $A = \text{sen}(2\theta)$.
c) Encuentre el ángulo θ que da el área A más grande.
d) Encuentre las dimensiones de este rectángulo más grande.

56. Área de un triángulo isósceles Demuestre que el área A de un triángulo isósceles, cuyos lados iguales tienen longitud s y el ángulo entre ellos es θ, es

$$A = \frac{1}{2}s^2 \text{ sen } \theta$$

[**Sugerencia:** Vea la ilustración. La altura h bisecta al ángulo θ y es el bisector perpendicular de la base].



57. Faro de Gibb's Hill en Southampton, Bermudas En operación desde 1846, el faro de Gibb's Hill tiene 117 pies de altura sobre una colina de 245 pies de altura, de modo que su haz de luz está a 362 pies arriba del nivel del mar. Un folleto establece que los barcos pueden ver la luz desde una distancia de 40 millas y los aviones que vuelan a 10,000 pies pueden verla desde 120 millas de lejanía. Verifique la exactitud de estas proposiciones. ¿Qué suposición hace el folleto acerca de la altura del barco?



58. Explique cómo mediría el ancho del Gran Cañón desde un punto en su orilla.

59. Explique cómo mediría la altura de una torre de TV que está en el techo de un edificio alto.

Respuestas a "Está preparado"

1. 4 **2.** Falso **3.** 26.6° **4.** Verdadero

8.2 Ley de los senos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

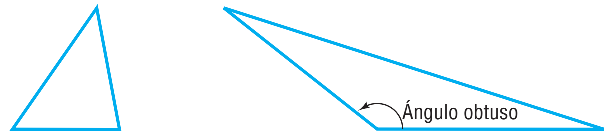
- Ecuaciones trigonométricas (I) (sección 7.7, pp. 639-642)
- Fórmula de la resta para senos (sección 7.4, p. 619)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 676.

OBJETIVOS
1 Resolver triángulos LAA o ALA
2 Resolver triángulos LLA
3 Resolver problemas de aplicación

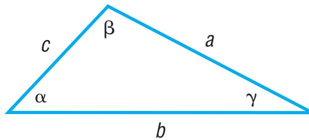
Si ninguno de los ángulos de un triángulo es un ángulo recto, el triángulo se llama **oblicuo**. Un triángulo oblicuo tendrá ya sea tres ángulos agudos o dos agudos y uno obtuso (en ángulo de entre 90° y 180°). Vea la figura 12.

Figura 12



a) Todos los ángulos son agudos **b)** Dos ángulos agudos y un ángulo obtuso

Figura 13



En el análisis que sigue, siempre se etiquetará un triángulo oblicuo de manera que el lado a es opuesto al ángulo α, el lado b es opuesto al ángulo β, y el lado c es opuesto al ángulo γ, como se muestra en la figura 13.

Resolver un triángulo oblicuo significa encontrar las longitudes de sus lados y las medidas de sus ángulos. Para hacerlo, es necesario conocer la longitud de un lado* junto con: *i*) dos ángulos, *ii*) un ángulo y otro lado o *iii*) los otros dos lados. Existen cuatro posibilidades a considerar:

CASO 1: Se conocen un lado y dos ángulos (ALA o LAA).

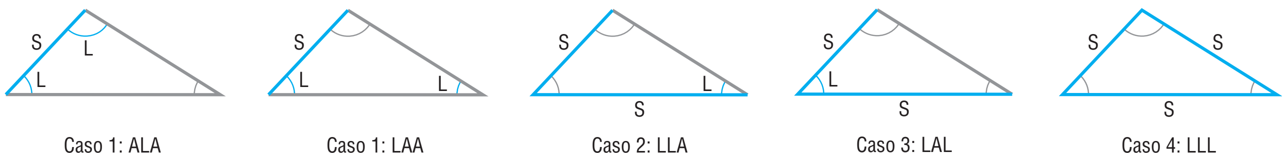
CASO 2: Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA).

CASO 3: Se conocen dos lados y el ángulo incluido (LAL).

CASO 4: Se conocen tres lados (LLL).

La figura 14 ilustra los cuatro casos.

Figura 14



*La razón por la que se necesita conocer la longitud de un lado es que si sólo se conocen los ángulos se obtendrá una familia de *triángulos similares*.

La **ley de los senos** se usa para resolver triángulos para los que se cumplen el caso 1 o el 2. Los casos 3 y 4 se considerarán cuando se estudie la ley de los cosenos en la siguiente sección.

Teorema

Ley de los senos

Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos α, β, γ, respectivamente,

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c} \qquad (1)$$

Una prueba de la ley de los senos se da al final de esta sección.

Al aplicar la ley de los senos para resolver triángulos, se usa el hecho de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a 180°; esto es,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \qquad (2)$$



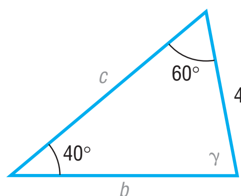
Los primeros dos ejemplos muestran cómo resolver el triángulo cuando se conocen un lado y dos ángulos (caso 1: LAA o ALA).

EJEMPLO 1 **Uso de la ley de los senos para resolver un triángulo (LAA)**

Resuelva el triángulo: $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $a = 4$

Solución La figura 15 muestra el triángulo que se quiere resolver. El tercer ángulo γ se encuentra usando la ecuación (2).

Figura 15



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$40° + 60° + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 80°$$

Ahora se usa la ley de los senos (dos veces) para encontrar los lados desconocidos b y c.

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} \qquad \frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

Como $a = 4$, $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, y $\gamma = 80°$, se tiene

$$\frac{\text{sen } 40°}{4} = \frac{\text{sen } 60°}{b} \qquad \frac{\text{sen } 40°}{4} = \frac{\text{sen } 80°}{c}$$

Al despejar b y c, se encuentra que

$$b = \frac{4 \text{ sen } 60°}{\text{sen } 40°} \approx 5.39 \qquad c = \frac{4 \text{ sen } 80°}{\text{sen } 40°} \approx 6.13$$

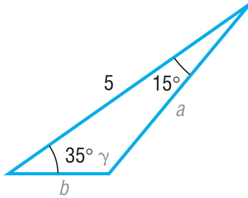
Observe que en el ejemplo 1 se encontraron b y c trabajando con el lado dado a. Esto es mejor que encontrar b primero y trabajar con un valor redondeado de b para calcular c.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

EJEMPLO 2 **Uso de la ley de los senos para resolver un triángulo ALA**

Resuelva el triángulo: $\alpha = 35°, \beta = 15°, c = 5$

Figura 16



Solución La figura 16 ilustra el triángulo que se quiere resolver. Como se conocen dos ángulos ($\alpha = 35°$ y $\beta = 15°$), se calcula el tercer ángulo usando la ecuación (2).

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$35° + 15° + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 130°$$

Ahora se conocen los tres ángulos y un lado ($c = 5$) del triángulo. Para encontrar los dos lados restantes a y b se usa la ley de los senos (dos veces).

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \gamma}{c} \qquad \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$
$$\frac{\text{sen } 35°}{a} = \frac{\text{sen } 130°}{5} \qquad \frac{\text{sen } 15°}{b} = \frac{\text{sen } 130°}{5}$$
$$a = \frac{5 \text{ sen } 35°}{\text{sen } 130°} \approx 3.74 \qquad b = \frac{5 \text{ sen } 15°}{\text{sen } 130°} \approx 1.69$$

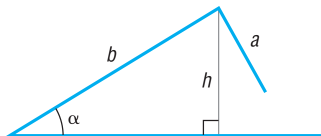
◄

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 23.

El caso ambiguo

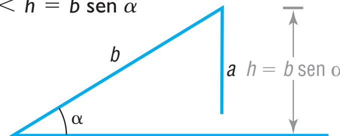
2 El caso 2 (LLA), que se aplica a los triángulos para los que se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, recibe el nombre de **caso ambiguo**, debido a que la información conocida podría dar como resultado un triángulo, dos triángulos o ninguno del todo. Suponga que se dan los lados a y b y el ángulo α, como se ilustra en la figura 17. La clave para determinar los triángulos posibles que se forman, si los hay, con la información dada estriba principalmente en la altura h y el hecho de que $h = b \text{ sen } \alpha$.

Figura 17



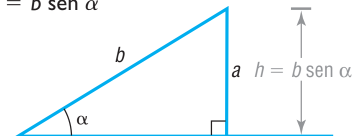
No hay triángulo Si $a < h = b \text{ sen } \alpha$, entonces el lado a no es suficientemente largo para formar un triángulo. Vea la figura 18.

Figura 18
$a < h = b \text{ sen } \alpha$



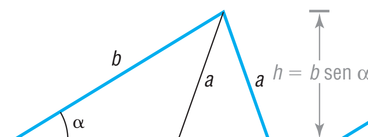
Un triángulo rectángulo Si $a = h = b \text{ sen } \alpha$, entonces el lado a tiene justo el largo suficiente para formar un triángulo rectángulo. Vea la figura 19.

Figura 19
$a = b \text{ sen } \alpha$



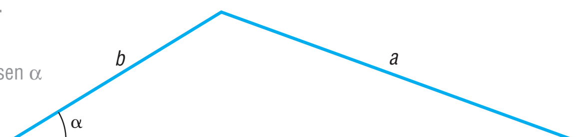
Dos triángulos Si $a < b$ y $h = b \text{ sen } \alpha < a$, entonces se pueden formar dos triángulos diferentes a partir de la información dada. Vea la figura 20.

Figura 20
$b \text{ sen } \alpha < a$ y $a < b$



Un triángulo Si $a \geq b$, entonces sólo se forma un triángulo. Vea la figura 21.

Figura 21
$a \geq b$

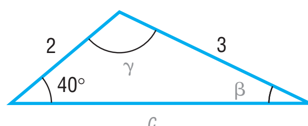


Por fortuna, no es necesario confiar en una ilustración para obtener la conclusión correcta en el caso ambiguo. La ley de los senos conduce a la determinación correcta. Se verá cómo.

EJEMPLO 3 Uso de la ley de los senos para resolver un triángulo LLA (una solución)

Resuelva el triángulo: $a = 3, b = 2, \alpha = 40°$

Figura 22a)



Solución Vea la figura 22*a*). Dado que $a = 3, b = 2$ y $\alpha = 40°$ se conocen, se usa la ley de los senos para encontrar el ángulo β.

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b}$$

Entonces

$$\frac{\text{sen } 40°}{3} = \frac{\text{sen } \beta}{2}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{2 \text{ sen } 40°}{3} \approx 0.43$$

Existen dos ángulos β, $0° < \beta < 180°$, para los cuales sen $\beta \approx 0.43$.

$$\beta_1 \approx 25.4° \quad \text{y} \quad \beta_2 \approx 154.6°$$

Nota: Se calculó β usando el valor almacenado de sen β. Si usa el valor redondeado, sen $\beta \approx 0.43$, obtendrá un resultado un poco diferente.

La segunda posibilidad, $\beta_2 \approx 154.6°$, se elimina porque $\alpha = 40°$, lo que hace que $\alpha + \beta_2 \approx 194.6° > 180°$. Ahora usando $\beta_1 \approx 25.4°$, se encuentra que

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta_1 \approx 180° - 40° - 25.4° = 114.6°$$

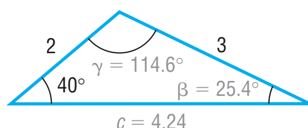
El tercer lado c se determina ahora usando la ley de los senos.

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

$$\frac{\text{sen } 40°}{3} = \frac{\text{sen } 114.6°}{c}$$

$$c = \frac{3 \text{ sen } 114.6°}{\text{sen } 40°} \approx 4.24$$

Figura 22b)

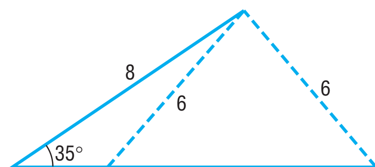


La figura 22*b*) ilustra el triángulo resuelto. ◀

EJEMPLO 4 Uso de la ley de los senos para resolver un triángulo LLA (dos soluciones)

Resuelva el triángulo: $a = 6, b = 8, \alpha = 35°$

Figura 23a)



Solución Vea la figura 23*a*). Dado que se conocen $a = 6$, $b = 8$ y $\alpha = 35°$ se usa la ley de los senos para encontrar el ángulo β.

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b}$$

Entonces

$$\frac{\text{sen } 35°}{6} = \frac{\text{sen } \beta}{8}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{8 \text{ sen } 35°}{6} \approx 0.76$$

$$\beta_1 \approx 49.9° \quad \text{o} \quad \beta_2 \approx 130.1°$$

Para ambas opciones de β, se tiene $\alpha + \beta < 180°$. Hay dos triángulos; uno contiene el ángulo $\beta_1 \approx 49.9°$ y el otro contiene el ángulo $\beta_2 \approx 130.1°$. El tercer ángulo γ es uno de los siguientes:

$$\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 \approx 95.1° \quad \text{o} \quad \gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2 \approx 14.9°$$

$\alpha = 35°$, $\beta_1 = 49.9°$ $\qquad$ $\alpha = 35°$, $\beta_2 = 130.1°$

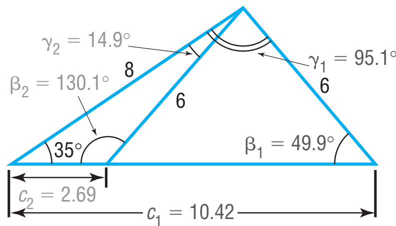
El tercer lado c obedece la ley de los senos, por lo que se tiene

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \gamma_1}{c_1} \qquad \frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \gamma_2}{c_2}$$

$$\frac{\text{sen } 35°}{6} = \frac{\text{sen } 95.1°}{c_1} \qquad \frac{\text{sen } 35°}{6} = \frac{\text{sen } 14.9°}{c_2}$$

$$c_1 = \frac{6 \text{ sen } 95.1°}{\text{sen } 35°} \approx 10.42 \qquad c_2 = \frac{6 \text{ sen } 14.9°}{\text{sen } 35°} \approx 2.69$$

Figura 23b)



Los dos triángulos resueltos se ilustran en la figura 23*b*). ◀

EJEMPLO 5 Uso de la ley de los senos para resolver un triángulo LLA (sin solución)

Resuelva el triángulo: $a = 2, c = 1, \gamma = 50°$

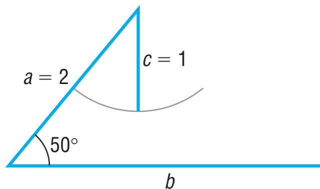
Solución Como $a = 2$, $c = 1$, y $\gamma = 50°$ se conocen, se usa la ley de los senos para encontrar el ángulo α.

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

$$\frac{\text{sen } \alpha}{2} = \frac{\text{sen } 50°}{1}$$

$$\text{sen } \alpha = 2 \text{ sen } 50° \approx 1.53$$

Figura 24



Como no hay un ángulo α para el que sen $\alpha > 1$, no existe un triángulo con las medidas dadas. La figura 24 ilustra esto. Observe que, no importa en qué posición se coloque el lado c, nunca tocará el lado b para formar un triángulo ◀

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 25 Y 31.

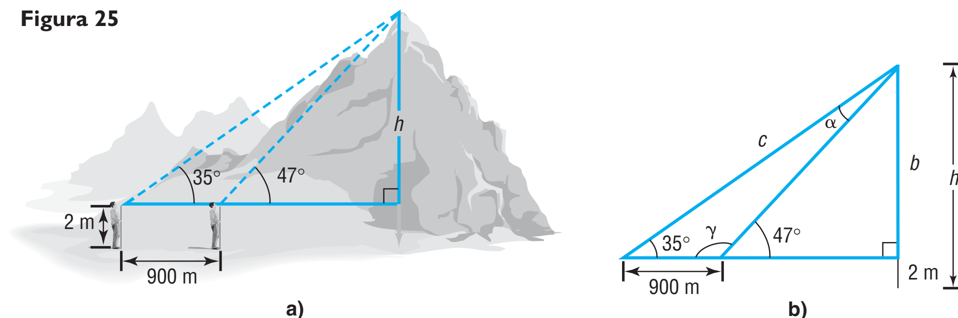
Aplicaciones

 La ley de los senos es particularmente útil para resolver ciertos problemas aplicados.

EJEMPLO 6 Altura de una montaña

Para medir la altura de una montaña, un topógrafo realiza dos observaciones de la cima con una distancia de 900 metros entre ellas, en línea recta con la montaña.* Vea la figura 25*a*). El resultado de la primera observación es un ángulo de elevación de 47°, mientras que la segunda da un ángulo de elevación de 35°. Si el teodolito está a 2 metros de altura, ¿cuál es la altura h de la montaña?

Figura 25



Solución La figura 25*b*) muestra los triángulos que replican la ilustración de la figura 25*a*). Como $\gamma + 47° = 180°$, se encuentra que $\gamma = 133°$. Además, como $\alpha + \gamma + 35° = 180°$, se encuentra que $\alpha = 180° - 35° - \gamma = 145° - 133° = 12°$. Se usa la ley de los senos para encontrar c.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad \alpha = 12°, \gamma = 133°, a = 900$$

$$c = \frac{900 \operatorname{sen} 133°}{\operatorname{sen} 12°} \approx 3165.86$$

Usando el triángulo rectángulo más grande, se tiene

$$\operatorname{sen} 35° = \frac{b}{c} \qquad c = 3165.86$$

$$b = 3165.86 \operatorname{sen} 35° \approx 1815.86 \approx 1816 \text{ metros}$$

La altura aproximada de la cima de la montaña desde el nivel del suelo es $1816 + 2 = 1818$ metros. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

EJEMPLO 7 Rescate en el mar

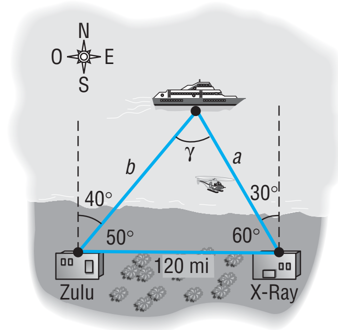
La estación de guardacostas Zulu está a 120 millas al oeste de la estación X-ray. Un barco en el mar envía una llamada de auxilio que reciben las dos estaciones. La llamada a la estación Zulu indica que la dirección al barco desde Zulu es N40°E (40° al este del norte). La llamada a la estación X-ray indica que la dirección al barco desde X-ray es N30°*O* (30° al oeste del norte).

a) ¿A qué distancia esta cada estación del barco?

b) Si un helicóptero capaz de volar a 200 millas por hora se despacha desde la estación más cercana al barco, ¿cuánto tardará en llegar?

*Por sencillez, se supone que estas observaciones se hacen en el mismo nivel.

Figura 26



Solución a) La figura 26 ilustra la situación. El ángulo γ es

$$\gamma = 180° - 50° - 60° = 70°$$

Ahora se utiliza la ley de los senos para encontrar las dos distancias a y b que se buscan.

$$\frac{\text{sen } 50°}{a} = \frac{\text{sen } 70°}{120}$$

$$a = \frac{120 \text{ sen } 50°}{\text{sen } 70°} \approx 97.82 \text{ millas}$$

$$\frac{\text{sen } 60°}{b} = \frac{\text{sen } 70°}{120}$$

$$b = \frac{120 \text{ sen } 60°}{\text{sen } 70°} \approx 110.59 \text{ millas}$$

La estación Zulu está a cerca de 111 millas del barco, la estación X-ray está a casi 98 millas del barco.

b) El tiempo t necesario para que el helicóptero llegue al barco desde la estación X-ray se calcula con la fórmula

$$(\text{Velocidad}, v)(\text{Tiempo}, t) = \text{Distancia}, a$$

Entonces

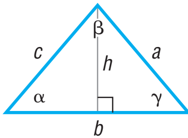
$$t = \frac{a}{v} = \frac{97.82}{200} \approx 0.49 \text{ horas} \approx 29 \text{ minutos}$$

El helicóptero tardará cerca de 29 minutos en llegar al barco. ◀

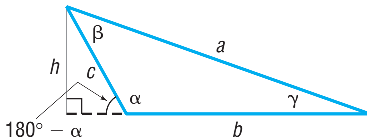
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37.

Demostración de la ley de los senos Para probar la ley de los senos, se dibuja la altura de longitud h desde uno de los vértices de un triángulo. La figura 27*a*) muestra h para un triángulo con tres ángulos agudos y la figura 27*b*) muestra h para un triángulo con un ángulo obtuso. En cada caso, la altura se dibuja desde el vértice β. Usando cualquiera de las ilustraciones, se tiene

Figura 27



a)



b)

$$\text{sen } \gamma = \frac{h}{a}$$

de donde

$$h = a \text{ sen } \gamma \qquad \textbf{(3)}$$

De la figura 27*a*), también se deduce que

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{c}$$

de donde

$$h = c \text{ sen } \alpha \qquad \textbf{(4)}$$

De la figura 27*b*), se deduce que

$$\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen } \alpha = \frac{h}{c}$$

↑ Fórmula de la resta

que de nuevo da

$$h = c \text{ sen } \alpha$$

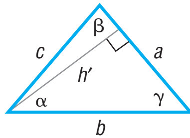
Entonces, ya sea que el triángulo tenga tres ángulos agudos o dos agudos y uno obtuso, las ecuaciones (3) y (4) se cumplen. En consecuencia, se igualan las expresiones para h en estas ecuaciones para obtener

$$a \text{ sen } \gamma = c \text{ sen } \alpha$$

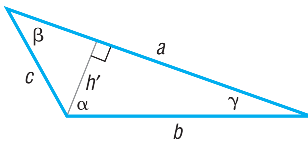
de donde

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \gamma}{c} \tag{5}$$

Figura 28



a)



b)

De manera similar, si se dibuja la altura h' desde el vértice del ángulo α como se muestra en la figura 28, se demuestra que

$$\text{sen } \beta = \frac{h'}{c} \quad \text{y} \quad \text{sen } \gamma = \frac{h'}{b}$$

Al igualar las expresiones para h', se encuentra que

$$h' = c \text{ sen } \beta = b \text{ sen } \gamma$$

de donde

$$\frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c} \tag{6}$$

Cuando se combinan las ecuaciones (5) y (6), se tiene la ecuación (1), es decir, la ley de los senos. ■

8.2 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. La fórmula de la resta para el seno es $\text{sen}(\alpha - \beta) =$ __________. (p. 619)

2. Si θ es un ángulo agudo, resuelva la ecuación $\text{sen } \theta = \frac{1}{2}$. (pp. 639–642)

3. Si θ es un ángulo agudo, resuelva la ecuación $\text{sen } \theta = 2$. (pp. 639–642)

Conceptos y vocabulario

4. Si ninguno de los ángulos de un triángulo es un ángulo recto, el triángulo se llama __________.

5. Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos α, β, γ, la ley de los senos establece que __________.

6. *Falso o verdadero:* un triángulo oblicuo en el que se dan dos lados y un ángulo siempre tiene como resultado al menos un triángulo.

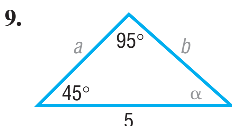
7. *Falso o verdadero:* la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a 180°.

8. *Falso o verdadero:* el caso ambiguo se refiere al hecho de que, cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a ellos, algunas veces no se puede usar la ley de los senos.

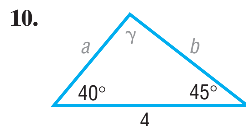
Ejercicios

En los problemas 9-16, resuelva cada triángulo.

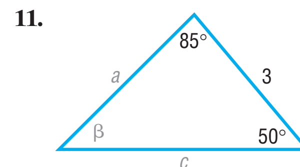
9.



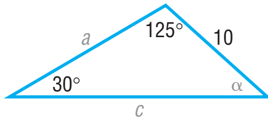
10.



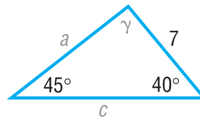
11.



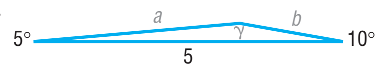
12.



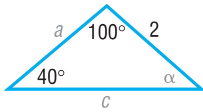
13.



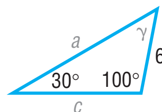
14.



15.



16.



En los problemas 17-24, resuelva cada triángulo.

17. $\alpha = 40°, \quad \beta = 20°, \quad a = 2$

18. $\alpha = 50°, \quad \gamma = 20°, \quad a = 3$

19. $\beta = 70°, \quad \gamma = 10°, \quad b = 5$

20. $\alpha = 70°, \quad \beta = 60°, \quad c = 4$

21. $\alpha = 110°, \quad \gamma = 30°, \quad c = 3$

22. $\beta = 10°, \quad \gamma = 100°, \quad b = 2$

23. $\alpha = 40°, \quad \beta = 40°, \quad c = 2$

24. $\beta = 20°, \quad \gamma = 70°, \quad a = 1$

En los problemas 25-36 se dan dos lados y un ángulo. Determine si la información dada tiene como resultado un triángulo, dos triángulos o ninguno. Resuelva los triángulos que se obtengan.

25. $a = 3, \quad b = 2, \quad \alpha = 50°$

26. $b = 4, \quad c = 3, \quad \beta = 40°$

27. $b = 5, \quad c = 3, \quad \beta = 100°$

28. $a = 2, \quad c = 1, \quad \alpha = 120°$

29. $a = 4, \quad b = 5, \quad \alpha = 60°$

30. $b = 2, \quad c = 3, \quad \beta = 40°$

31. $b = 4, \quad c = 6, \quad \beta = 20°$

32. $a = 3, \quad b = 7, \quad \alpha = 70°$

33. $a = 2, \quad c = 1, \quad \gamma = 100°$

34. $b = 4, \quad c = 5, \quad \beta = 95°$

35. $a = 2, \quad c = 1, \quad \gamma = 25°$

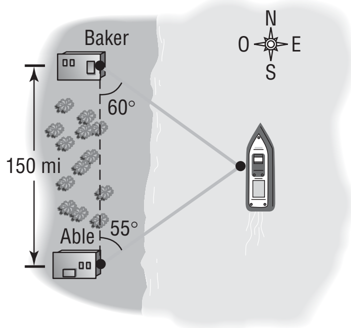
36. $b = 4, \quad c = 5, \quad \beta = 40°$

---

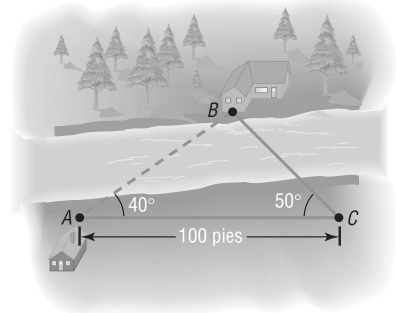
37. Rescate en el mar La estación de guardacostas Able se encuentra 150 millas al sur de la estación Baker. Un barco envía una llamada de auxilio que reciben las estaciones. La llamada a Able indica que el barco se localiza en N55°E; la llamada a Baker indica que el barco está en S60°E.

a) ¿A qué distancia está cada estación del barco?

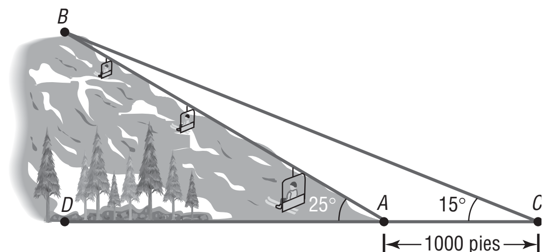
b) Si un helicóptero capaz de volar a 200 millas por hora se despacha de la estación más cercana, ¿cuánto tardará en llegar al barco?



38. Topografía Consulte la figura. Para encontrar la distancia de la casa A a la casa B, un topógrafo ve que el ángulo BAC mide 40° y luego camina una distancia de 100 pies a C y ve que el ángulo ACB mide 50°. ¿Cuál es la distancia entre A y B?

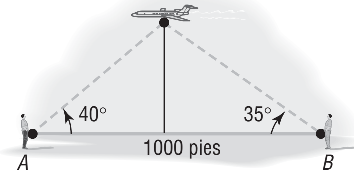


39. Longitud de un teleférico Consulte la figura. Para encontrar la longitud del cable para un teleférico para esquiadores propuesto de A *a* B, un topógrafo mide 25° para el ángulo DAB y luego camina una distancia de 1000 pies a C y mide 15° para el ángulo ACB. ¿Cuál es la distancia entre A y B?



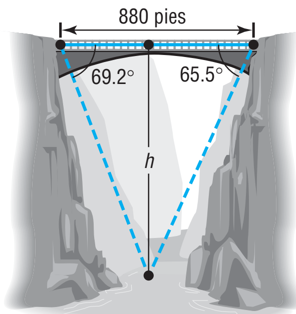
40. Altura de una montaña Utilice la ilustración del problema 39 para encontrar la altura BD de la montaña en B.

41. Altura de un avión Dos observadores que están separados por 1000 pies detectan un avión. Cuando el avión pasa sobre la línea que los une, cada uno hace una observación del ángulo de elevación al avión, como se indica en la figura. ¿A qué altura va el avión?

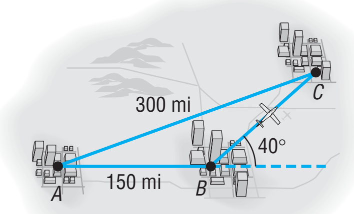


42. Altura de un puente sobre la barranca Royal Gorge El puente más alto del mundo es el puente que cruza la barranca Royal Gorge del río Arkansas en el estado de Colorado. Se toman observaciones del mismo punto a nivel del agua desde cada lado del puente de 880 pies de largo, como se indica en la figura. ¿Cuál es la altura del puente?

FUENTE: *Guinness Book of World Records*.



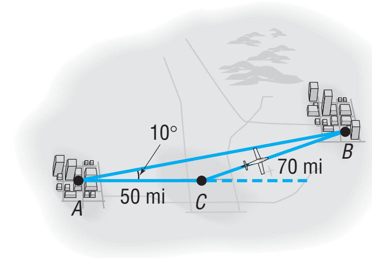
43. Navegación Un avión vuela de la ciudad A a la ciudad B, una distancia de 150 millas, y luego vira un ángulo de 40° para ir hacia C, como se muestra en la figura.



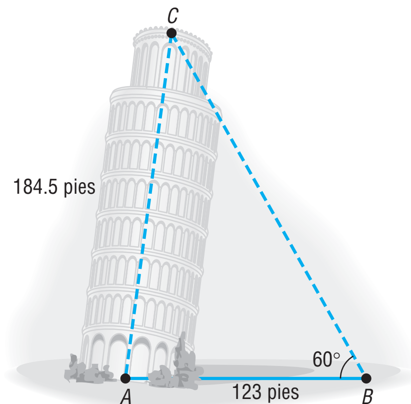
a) Si la distancia entre las ciudades A y C es de 300 millas, ¿cuál es la distancia entre las ciudades B y C?

b) ¿Qué ángulo debe dar el piloto para regresar de la ciudad C a la ciudad A?

44. Tiempo perdido por un error de navegación Al volar de la ciudad A a la ciudad B, un avión toma una dirección con un error de 10°, como se ve en la figura. Después de recorrer 50 millas, el piloto corrige la dirección en el punto C y vuela otras 70 millas. Si la velocidad constante del avión era 250 millas por hora, ¿cuanto tiempo se perdió debido al error?



45. Inclinación de la torre inclinada de Pisa La famosa torre inclinada de Pisa tenía originalmente 184.5 pies de altura.* A un distancia de 123 pies de la base de la torre, el ángulo de elevación a la punta de la torre es de 60°. Encuentre el ángulo CAB indicado en la figura. Además, encuentre la distancia perpendicular de C a AB.



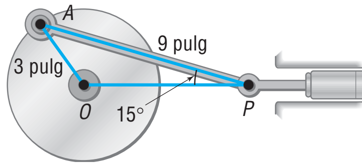
46. Cigüeñal de un auto En cierto automóvil, el cigüeñal tiene 3 pulgadas de largo y el eje que lo conecta tiene 9 pulgadas de largo (vea la figura). En el momento en que

*En su informe de 1986 sobre la fragilidad de la torre de siete siglos, los científicos en Pisa, Italia, dicen que la torre inclinada de Pisa aumentó 1 milímetro, o 0.04 pulgadas, su inclinación. Esto se acerca al promedio anual, aunque el aumento había disminuido a cerca de la mitad en los últimos 2 años. (**FUENTE***:* United Press International, 29 de junio de 1986).

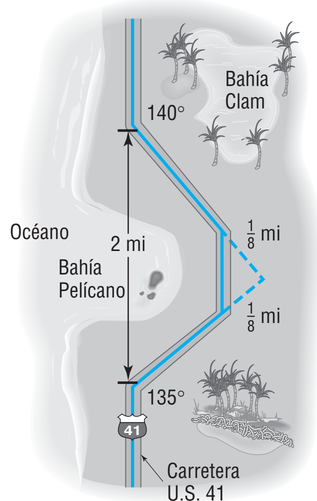
PISA, ITALIA. Septiembre de 1995. La torre inclinada de Pisa se ha desplazado, poniendo en peligro años de trabajo de preservación para estabilizarla, dijeron el domingo los periódicos. La torre construida en subsuelo movedizo, entre 1174 y 1350 como campanario de la catedral cercana, recientemente se movió 0.07 pulgadas en una noche.

Actualización La torre, que había estado cerrada al turismo desde 1990, se reabrió en diciembre de 2001, después de reforzar su base.

el ángulo OPA tiene 15°, ¿a qué distancia está el pistón (P) del centro (O) del cigüeñal?

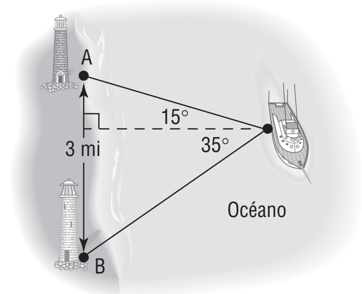


47. Construcción de una carretera Se está construyendo una carretera cuya dirección principal es norte-sur a lo largo de la costa oeste de Florida. Cerca de Naples, una bahía obstruye la trayectoria recta. Como el costo de un puente es prohibitivo, los ingenieros deciden darle la vuelta. La ilustración muestra la trayectoria que decidieron seguir y las medidas tomadas. ¿Cuál es la longitud de la carretera necesaria para dar la vuelta a la bahía?

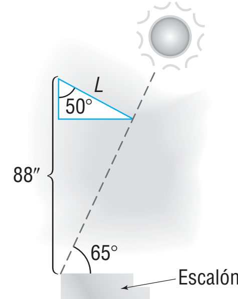


48. Distancia en el mar El navegante de un barco en el mar detecta dos faros en una costa recta, sabiendo que hay 3 millas entre ellos. Determine que los ángulos formados entre las dos líneas de observación de los faros y la línea del barco directamente a la costa son de 15° y 35°, respectivamente. Vea la ilustración.

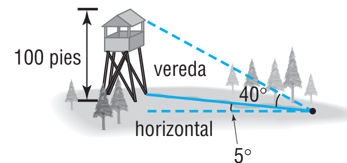
a) ¿Cuál es la distancia del barco al faro A?
b) ¿Cuál es la distancia del barco al faro B?
c) ¿Cuál es la distancia del barco a la costa?



49. Diseño de un toldo Un toldo que cubre una puerta corrediza que tiene 88 pulgadas de altura forma un ángulo de 50° con la pared. El propósito del toldo es evitar que entre el sol a la casa cuando el ángulo de elevación del sol es mayor que 65°. Vea la figura. Encuentre la longitud L del toldo.

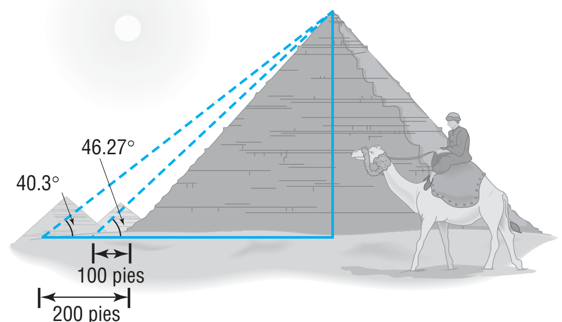


50. Cálculo de distancias Un guardabosques camina por una vereda inclinada 5° respecto de la horizontal directamente hacia una torre de observación de incendios de 100 pies de altura. El ángulo de elevación de la vereda a la punta de la torre es de 40°. ¿A qué distancia está en este momento el guardabosques de la torre?



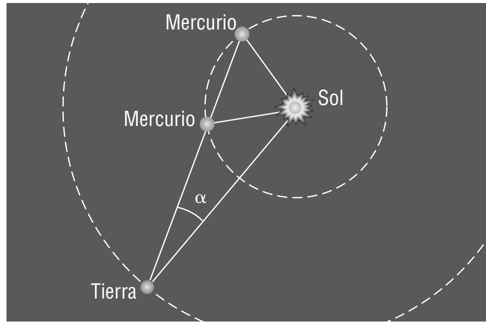
51. La gran pirámide de Keops Una de las siete maravillas del mundo originales, la gran pirámide de Keops, fue construida alrededor de 2580 aC. Su altura original era de 480 pies 11 pulgadas, pero debido a la pérdida de las piedras más altas, ahora es más baja. Encuentre la altura actual de la gran pirámide usando la información dada en la ilustración.

FUENTE: *Guinness Book of World Records*.



52. Altura de un avión Dos sensores se colocan a 700 pies uno de otro a lo largo de la trayectoria a un pequeño aeropuerto. Cuando un avión se acerca al aeropuerto, el ángulo de elevación del primer sensor al avión es de 20°, y del segundo sensor al avión es de 15°. Determine la altura del avión en este momento.

53. Mercurio La distancia aproximada del Sol a la Tierra es de 149,600,000 kilómetros (km). La distancia aproximada del Sol a Mercurio es de 57,910,000 km. El **ángulo de elongación** α es al ángulo formado entre la línea de visión de la Tierra al Sol y la línea de visión de la Tierra a Mercurio. Vea la figura. Suponga que el ángulo de elongación de Mercurio es de 15°. Use esta información para encontrar las distancias posibles entre la Tierra y Mercurio.

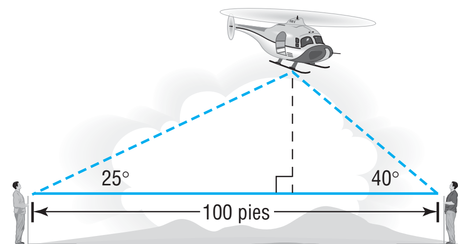


54. Venus La distancia aproximada del Sol a la Tierra es de 149,600,000 km. La distancia aproximada del Sol a Venus es de 108,200,000 km. El ángulo de elongación es el ángulo formado entre la línea de visión de la Tierra al Sol y la línea de visión de la Tierra a Venus. Suponga que el ángulo de elongación para Venus es de 10°. Use esta información para encontrar las distancias posibles entre la Tierra y Venus.

55. Arquitectura del paisaje Pat necesita determinar la altura de un árbol antes de cortarlo para estar segura de que no caerá sobre una cerca. El ángulo de elevación del árbol desde una posición en un camino plano alejada del árbol es de 30°, y desde una segunda posición 40 pies más lejos en el mismo camino es de 20°. ¿Cuál es la altura del árbol?

56. Construcción Una rampa de carga de 10 pies de longitud, que forma un ángulo de 18° con la horizontal, va a ser reemplazada por una que forme un ángulo de 12° con la horizontal. ¿Qué tan larga debe ser la nueva rampa?

57. Altura de un helicóptero Dos observadores miden simultáneamente el ángulo de elevación de un helicóptero. Un ángulo mide 25°, el otro 40° (vea la figura). Si los observadores están separados 100 pies y el helicóptero está sobre la línea que los une, ¿a qué altura está el helicóptero?



58. Fórmula de Mollweide Para cualquier triángulo, la fórmula de Mollweide (en honor de Karl Mollweide, 1774-1825) establece que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\gamma\right)}$$

Derive esta fórmula.

[**Sugerencia:** Use la ley de los senos y después la fórmula de suma a producto. Observe que esta fórmula incluye las seis partes de un triángulo. Como resultado, algunas veces se usa para verificar la solución de un triángulo].

59. Fórmula de Mollweide Otra forma de la fórmula de Mollweide es

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right]}{\cos\left(\frac{1}{2}\gamma\right)}$$

Derive esta fórmula.

60. Para cualquier triángulo, derive la fórmula

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$

[**Sugerencia:** Utilice el hecho de que sen $\alpha = \operatorname{sen}(180° - \beta - \gamma)$]

61. Ley de las tangentes Para cualquier triángulo, derive la ley de las tangentes.

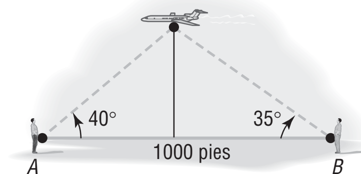
$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right]}{\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right]}$$

[**Sugerencia:** Use la fórmula de Mollweide].

62. Triángulo circunscrito Demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{1}{2r}$$

donde r es el radio del círculo que circunscribe al triángulo ABC cuyos lados son a, b y c, como se muestra en la figura. [**Sugerencia:** Dibuje el diámetro AB'. Entonces β = ángulo ABC = ángulo $AB'C$, y ángulo $ACB' = 90°$].



63. Establezca tres problemas que incluyan triángulos oblicuos. Uno debe dar como resultado un triángulo, el segundo dos triángulos y el tercero ninguno.

64. ¿Qué hace primero si le piden que resuelva un triángulo y los datos son un lado y dos ángulos?

65. ¿Qué hacer primero si le piden que resuelva un triángulo y los datos son un lado y dos ángulos?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. sen α cos β − cos α sen β **2.** $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$ **3.** Sin solución

8.3 Ley de los cosenos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Ecuaciones trigonométricas (I) (sección 7.7, pp. 639-642)
- Fórmula de la distancia (sección 2.1, p. 160)



Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 684.

OBJETIVOS
1 Resolver triángulos LAL
2 Resolver triángulos LLL
3 Resolver problemas aplicados

En la sección anterior se usó la ley de los senos para resolver el caso 1 (LAA o ALA) y el caso 2 (LLA) de un triángulo oblicuo. En esta sección se deriva la ley de los cosenos, y se usa para resolver los casos 3 y 4.

CASO 3: Se conocen dos lados y el ángulo incluido (LAL).

CASO 4: Se conocen tres lados (LLL).

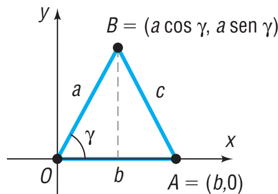
Teorema

Ley de los cosenos

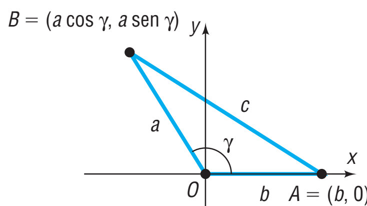
Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos α, β, γ, respectivamente,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad (1)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad (2)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad (3)$$

Figura 29



a) El ángulo γ es agudo



b) El ángulo γ es obtuso

Demostración Se probará sólo la fórmula (1). Las fórmulas (2) y (3) se demuestran usando el mismo argumento.

Se comienza colocando un triángulo de manera estratégica en un sistema de coordenadas rectangulares, de manera que el vértice del ángulo γ esté en el origen y el lado b esté sobre el lado positivo del eje x. Sin importar si γ es agudo, como en la figura 29*a*), u obtuso, como en la figura 29*b*), el vértice B tiene coordenadas $(a\cos\gamma, a\,\text{sen}\,\gamma)$. El vértice A tiene coordenadas $(b, 0)$

Ahora se utiliza la fórmula de la distancia para calcular c^2.

$$\begin{aligned} c^2 &= (b - a\cos\gamma)^2 + (0 - a\,\text{sen}\,\gamma)^2 \\ &= b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma + a^2\,\text{sen}^2\,\gamma \\ &= b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2(\cos^2\gamma + \text{sen}^2\,\gamma) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$
■

Las fórmulas (1), (2) y (3) se establecen en palabras como sigue:

Teorema

Ley de los cosenos

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble de su producto multiplicado por el coseno del ángulo incluido.

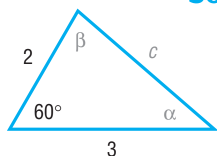
Observe que si se trata de un triángulo rectángulo (de manera que, digamos, $\gamma = 90°$) entonces la fórmula (1) se convierte en el familiar teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$. Así, el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

1 Se verá cómo usar la ley de los cosenos para resolver el caso 3 (LAL), que se aplica a triángulos para los que se conocen dos lados y el ángulo incluido.

EJEMPLO 1 Uso de la ley de los cosenos para resolver un triángulo LAL

Resuelva el triángulo: $a = 2, b = 3, \gamma = 60°$

Figura 30



Solución Vea la figura 30. La ley de los cosenos facilita encontrar el tercer lado, c.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= 4 + 9 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos 60° \\ &= 13 - \left(12\cdot\frac{1}{2}\right) = 7 \\ c &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

El lado c tiene longitud $\sqrt{7}$. Para encontrar los ángulos α y β, se utilizan ya sea la ley de los senos o la de los cosenos. Es preferible usar la ley de los cosenos, puesto que llevará a una ecuación con una solución. Usando la ley de los senos se llega a una ecuación con dos soluciones que necesitarán verificarse para determinar cuál se ajusta a los datos dados. Se elige utilizar las fórmulas (2) y (3) de la ley de los cosenos para encontrar α y β.

Para α:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ 2bc\cos\alpha &= b^2 + c^2 - a^2 \\ \cos\alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 7 - 4}{2\cdot 3\sqrt{7}} = \frac{12}{6\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \\ \alpha &\approx 40.9° \end{aligned}$$

Para β:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ \cos\beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4 + 7 - 9}{4\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14} \\ \beta &\approx 79.1° \end{aligned}$$

Observe que $\alpha + \beta + \gamma = 40.9° + 79.1° + 60° = 180°$, como se requería ◄



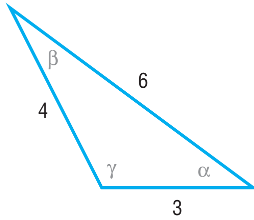
TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

2 El siguiente ejemplo ilustra cómo se usa la ley de los cosenos cuando se conocen los tres lados de un triángulo, caso 4 (LLL).

EJEMPLO 2 Uso de la ley de los cosenos para resolver un triángulo LLL

Resuelva el triángulo: $a = 4, b = 3, c = 6$

Figura 31



Solución Vea la figura 31. Para encontrar los ángulos α, β, y γ, se procede como se hizo en la última parte de la solución del ejemplo 1.

Para α:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 36 - 16}{2\cdot 3\cdot 6} = \frac{29}{36}$$
$$\alpha \approx 36.3°$$

Para β:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16 + 36 - 9}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{43}{48}$$
$$\beta \approx 26.4°$$

Como se conocen α y β,

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 36.3° - 26.4° = 117.3°$$ ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 15.

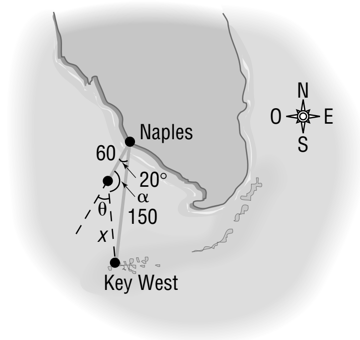
3 **EJEMPLO 3** **Corrección de un error de navegación**

Un velero con motor sale de Naples, Florida, hacia Key West, a 150 millas. Mantiene una velocidad constante de 15 millas por hora, pero dado que hay vientos cruzados y corrientes fuertes, la tripulación encuentra, después de 4 horas, que está 20° fuera de curso.

a) ¿A qué distancia está el velero de Key West en este momento?
b) ¿Qué ángulo debe girar el velero para corregir su curso?
c) ¿Cuánto tiempo se agregó al viaje? (Suponga que la velocidad se conserva en 15 millas por hora).

Solución Vea la figura 32. Con una velocidad de 15 millas por hora, el velero ha recorrido 60 millas después de 4 horas. Se busca la distancia x del velero a Key West. También se busca el ángulo θ que corregirá su rumbo.

Figura 32



a) Para encontrar x, se usa la ley de los cosenos, ya que se conocen dos lados y el ángulo incluido.

$$x^2 = 150^2 + 60^2 - 2(150)(60)\cos 20° \approx 9186$$
$$x \approx 95.8$$

El velero está a 96 millas aproximadamente de Key West.

b) Se conocen tres lados del triángulo, de manera que de nuevo se utiliza la ley de los cosenos para encontrar el ángulo α opuesto al lado de 150 millas de largo.

$$150^2 = 96^2 + 60^2 - 2(96)(60)\cos\alpha$$
$$9684 = -11{,}520\cos\alpha$$
$$\cos\alpha \approx -0.8406$$
$$\alpha \approx 147.2°$$

El velero debe dar un giro de

$$\theta = 180° - \alpha \approx 180° - 147.2° = 32.8°$$

El velero debe girar un ángulo aproximado de 33° para corregir su curso.

(c) La longitud total del viaje es ahora 60 + 96 = 156 millas. Las 6 millas adicionales, sólo requerirán cerca de 0.4 horas o 24 minutos más si se conserva la velocidad de 15 millas por hora. ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 35.

Aspecto histórico

La ley de los senos se conocía vagamente mucho antes de que Nasir Eddin (alrededor de 1250 dC) la estableciera en forma explícita. Ptolomeo (alrededor de 150 dC) estaba consciente de ella al usar una función de cuerda en lugar de la función seno. Pero fue establecida con claridad por primera vez en Europa por Regiomontanus, en su escrito en 1464.

La ley de los cosenos aparece primero en el libro *Elementos* (Libro II) de Euclides, pero en una forma disfrazada en la que los cuadrados de los lados de los triángulos se suman y un rectángulo que representa el término del coseno se resta. Así que todos los matemáticos la conocían debido a su familiaridad con el trabajo de Euclides. Una de las primeras formas modernas de la ley de los cosenos, la que encuentra el ángulo cuando se conocen los lados, fue establecida por François Viète (en 1593).

La ley de las tangentes (vea el problema 61 de los ejercicios 8.2) se ha convertido en obsoleta. En el pasado se usó en lugar de la ley de los cosenos, porque ésta era muy inconveniente para los cálculos con logaritmos o reglas de cálculo. Sin embargo, la combinación de suma y multiplicación es ahora muy sencilla en una calculadora y la ley de las tangentes quedó archivada junto con la regla de cálculo.

8.3 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. Escriba la fórmula para la distancia d de $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$. (p. 160)

2. Si θ es un ángulo agudo, resuelva la ecuación $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (pp. 639–642)

Conceptos y vocabulario

3. Si se dan tres lados de un triángulo, se usa la ley de __________ para resolver el triángulo.

4. Si se da uno de los lados y dos ángulos de un triángulo, se usa la ley de __________ para resolver el triángulo.

5. Si se dan dos lados y el ángulo incluido de un triángulo, se usa la ley de __________ para resolver el triángulo.

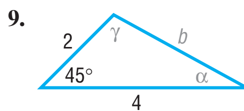
6. *Falso o verdadero:* dados sólo los tres lados de un triángulo se tiene información insuficiente para resolverlo.

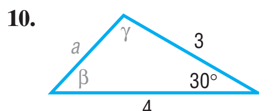
7. *Falso o verdadero:* dados dos lados y el ángulo incluido, los primero que se hace para resolver el triángulo es usar la ley de los senos.

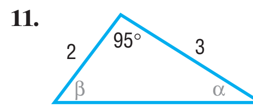
8. *Falso o verdadero:* un caso especial de la ley de los cosenos es el teorema de Pitágoras.

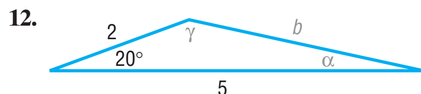
Ejercicios

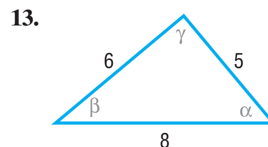
En los problemas 9-16, resuelva cada triángulo.

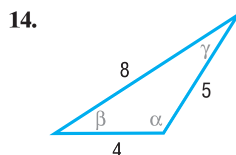
9.


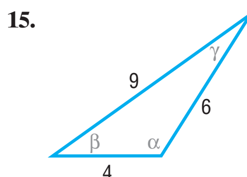
10.


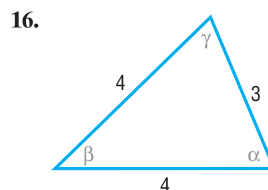
11.


12.


13.


14.


15.


16.


En los problemas 17-32, resuelva cada triángulo.

17. $a = 3, \quad b = 4, \quad \gamma = 40°$

18. $a = 2, \quad c = 1, \quad \beta = 10°$

19. $b = 1, \quad c = 3, \quad \alpha = 80°$

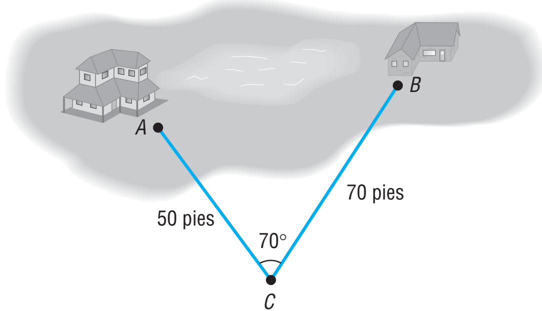
20. $a = 6, \quad b = 4, \quad \gamma = 60°$

21. $a = 3, \quad c = 2, \quad \beta = 110°$

22. $b = 4, \quad c = 1, \quad \alpha = 120°$

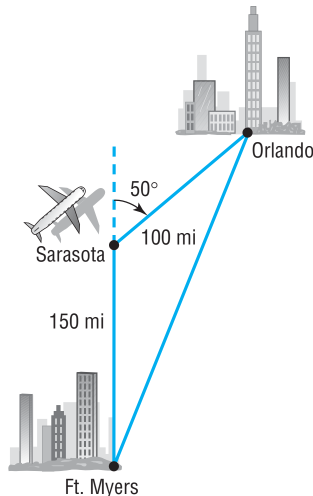
23. $a = 2, \quad b = 2, \quad \gamma = 50°$
24. $a = 3, \quad c = 2, \quad \beta = 90°$
25. $a = 12, \quad b = 13, \quad c = 5$
26. $a = 4, \quad b = 5, \quad c = 3$
27. $a = 2, \quad b = 2, \quad c = 2$
28. $a = 3, \quad b = 3, \quad c = 2$
29. $a = 5, \quad b = 8, \quad c = 9$
30. $a = 4, \quad b = 3, \quad c = 6$
31. $a = 10, \quad b = 8, \quad c = 5$
32. $a = 9, \quad b = 7, \quad c = 10$

33. Topografía Consulte la figura. Para encontrar la distancia de la casa en A a la casa en B, un topógrafo mide el ángulo ACB, cuya medida es de 70°, y luego camina la distancia a cada casa, 50 y 70 pies, respectivamente. ¿A qué distancia están las casas?



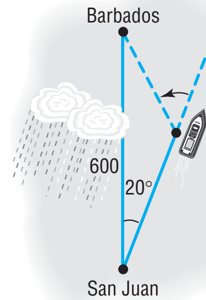
34. Navegación Un avión vuela de Fort Myers a Sarasota, una distancia de 150 millas, y luego da vuelta un ángulo de 50° y vuela a Orlando, una distancia de 100 millas (vea la figura).

a) ¿Qué distancia hay entre Fort Myers y Orlando?
b) ¿Qué ángulo debe virar el piloto en Orlando para regresar a Fort Myers?



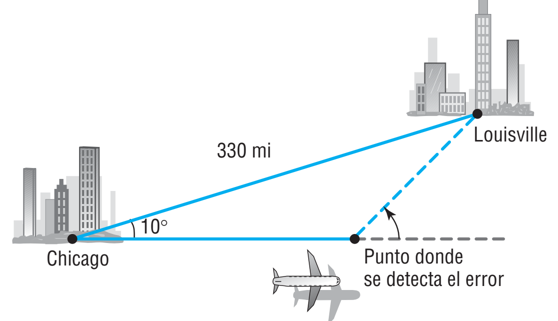
35. Para evitar una tormenta tropical Un crucero mantiene una velocidad promedio de 15 nudos por hora al ir de San Juan, Puerto Rico, a Barbados, Indias Occidentales, una distancia de 600 millas náuticas. Para evitar una tormenta tropical, el capitán sale de San Juan en una dirección 20° fuera del curso directo a Barbados. Conserva la velocidad de 15 nudos durante 10 horas, después de este tiempo la trayectoria a Barbados está libre de tormentas.

a) ¿Qué ángulo debe virar el capitán para ir directamente a Barbados?
b) Una vez que da la vuelta, ¿cuánto tiempo tarda en llegar a Barbados si conserva la misma velocidad de 15 nudos?



36. Corrección del plan de vuelo Al intentar volar de Chicago a Louisville, una distancia de 330 millas, un piloto sin darse cuenta toma un curso equivocado con 10° de error, como se indica en la figura.

a) Si el avión mantiene una velocidad promedio de 220 millas por hora y si el error en dirección se descubre 15 minutos después, ¿cuál es el ángulo que debe girar para dirigirse a Louisville.
b) ¿Qué nueva velocidad debe mantener el piloto para que el tiempo total de viaje sea de 90 minutos?



37. Campo para ligas mayores de béisbol Un diamante de ligas mayores de béisbol en realidad es un cuadrado de 90 pies por lado. El montículo del *pitcher* está a 60.5 pies de la base del bateador (*home*) sobre la línea que une *home* con la segunda base.

a) ¿A qué distancia está la primera base del montículo del *pitcher*?
b) ¿A qué distancia está la segunda base del montículo del *pitcher*?
c) Si un *pitcher* ve al *home*, ¿qué ángulo debe voltear para mirar la primera base?

38. Campo de béisbol de liga pequeña Según las reglas oficiales de la liga pequeña de béisbol, el diamante es un cuadrado de 60 pies por lado. El montículo de pitcher se localiza a 46 pies de la base del bateador (*home*) sobre la línea que la une con la segunda base.

a) ¿A qué distancia está la primera base del montículo del *pitcher*?

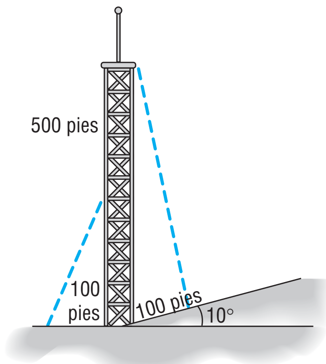
b) ¿A qué distancia está la segunda base del montículo del *pitcher*?

c) Si un *pitcher* ve al *home*, ¿qué ángulo debe voltear para mirar la primera base?

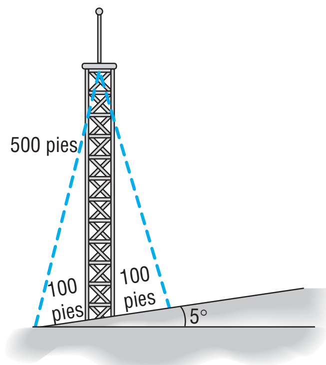
39. Longitud de un tensor La altura de una torre de radio es de 500 pies y el terreno a un lado de la torre tiene una pendiente hacia arriba a un ángulo de 10° (vea la figura).

a) ¿Qué longitud debe tener el cable tensor si debe unir la punta de la torre y un punto en el lado con pendiente a 100 metros de la base de la torre?

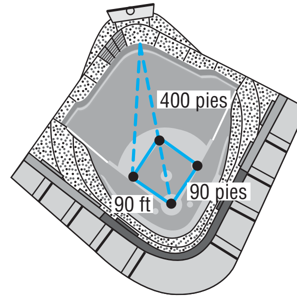
b) ¿Qué longitud debe tener un segundo cable tensor si debe conectar un punto en la mitad de la torre con otro a 100 pies en el lado plano?



40. Longitud de un tensor Una torre de radio de 500 pies de alto se localiza en una colina con una inclinación de 5° con la horizontal (vea la figura). ¿Cuáles deben ser las longitudes de dos cables tensores si tiene que fijarse a la punta de la torre y asegurarse en dos puntos a 100 pies directamente colina arriba y colina abajo de la base de la torre?



41. Estadio Wrigley, casa de los Cachorros de Chicago La distancia de la base de bateo a la barda, de frente por el centro del campo Wrigley es de 400 pies (vea la figura). ¿A qué distancia está ese punto de la barda de la tercera base?

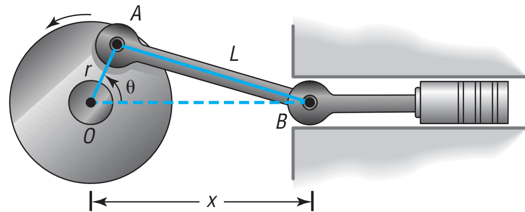


42. Liga pequeña de béisbol La distancia de la base de bateo a la barda, de frente por el centro en el campo de ligas pequeñas de Oak Lawn, es de 280 pies. ¿Cuál es la distancia de ese punto de la barda a la tercera base? [**Sugerencia:** La distancia entre las bases en la liga pequeña es de 60 pies].

43. Ejes y pistones El eje OA (vea la figura) gira alrededor de un punto fijo O de manera que A se mueve en un círculo de radio r. Conectado al punto A está otro eje AB de longitud $L > 2r$ y el punto B está conectado a un pistón. Demuestre que la distancia x entre el punto O y el punto B está dada por

$$x = r\cos\theta + \sqrt{r^2\cos^2\theta + L^2 - r^2}$$

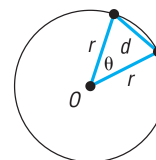
donde θ es el ángulo de rotación del eje OA.



44. Geometría Demuestre que la longitud d de una cuerda en un círculo de radio r está dada por la fórmula

$$d = 2r\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

donde θ es el ángulo central formado por los radios a los extremos de la cuerda (vea la figura). Use este resultado para derivar el hecho de que $\operatorname{sen}\theta < \theta$, donde $\theta > 0$ se mide en radianes.



45. Para cualquier triángulo, demuestre que

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

[**Sugerencia:** Use la fórmula de medio ángulo y la ley de los cosenos].

46. Demuestre que para cualquier triángulo

$$\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

47. Use la ley de los cosenos para probar la identidad

$$\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

48. ¿Qué hacer primero si le piden que resuelva un triángulo y los datos son dos lados y el ángulo incluido?

49. ¿Qué hacer primero si le piden que resuelva un triángulo y se dan los tres lados?

50. Invente un problema aplicado que requiera usar la ley de los cosenos.

51. Escriba su estrategia para resolver un triángulo oblicuo.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ **2.** $\theta = 45°$

8.4 Área de un triángulo

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Repaso de geometría (Repaso, sección R.3, pp. 29-33)



Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 690.

OBJETIVOS
1 Encontrar el área de triángulos LAL
2 Encontrar el área de triángulos LLL

En esta sección se derivarán varias fórmulas para calcular el área A de un triángulo. La más familiar de ellas es la siguiente:

Teorema

El área A de un triángulo es

$$A = \frac{1}{2}bh \qquad (1)$$

donde b es la base y h es una altura dibujada hasta la base.

Figura 33

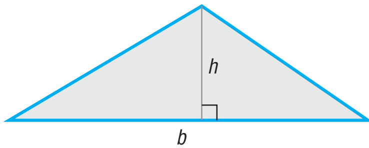


Figura 34

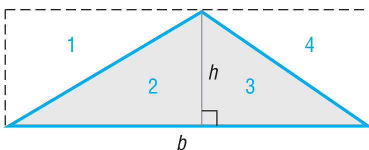
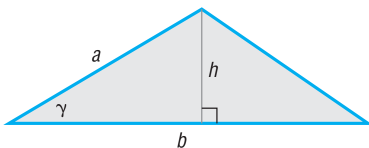


Figura 35



Demostración La derivación de esta fórmula es bastante sencilla una vez que se construye un rectángulo de base b y altura h alrededor del triángulo. Vea las figuras 33 y 34.

Los triángulos 1 y 2 en la figura 34 son iguales en área, lo mismo que los triángulos 3 y 4. En consecuencia, el área del triángulo con base b y altura h es exactamente la mitad del área del rectángulo, que es bh. ■

Si la base b y la altura h a esa base se conocen, entonces se determina el área de ese triángulo usando la fórmula (1). Sin embargo, la información requerida para usar la fórmula (1) suele no estar dada. Suponga, por ejemplo, que se conocen dos lados a y b, y el ángulo incluido γ (vea la figura 35). Entonces la altura h se encuentra observando que

$$\frac{h}{a} = \operatorname{sen}\gamma$$

de manera que

$$h = a \operatorname{sen}\gamma$$

Si se usa este hecho en la fórmula (1) se obtiene

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b(a \text{ sen } \gamma) = \frac{1}{2}ab \text{ sen } \gamma$$

Ahora se tiene la fórmula

$$A = \frac{1}{2}ab \text{ sen } \gamma \qquad \textbf{(2)}$$

Al bajar las alturas de los otros dos vértices del triángulo, se obtienen las siguientes fórmulas correspondientes:

$$A = \frac{1}{2}bc \text{ sen } \alpha \qquad \textbf{(3)}$$

$$A = \frac{1}{2}ac \text{ sen } \beta \qquad \textbf{(4)}$$

Lo más sencillo para recordar estas fórmulas es usando las siguientes palabras:

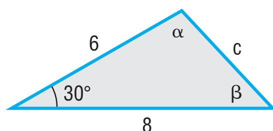
Teorema El área A de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo incluido.



EJEMPLO 1 Área de triángulos LAL

Encuentre el área A del triángulo para el que $a = 8, b = 6$ y $\gamma = 30°$.

Figura 36



Solución Vea la figura 36. Se usa la fórmula (2) para obtener

$$A = \frac{1}{2}ab \text{ sen } \gamma = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \text{ sen } 30° = 12$$

◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 5.



Si se conocen tres lados, se utiliza otra fórmula, llamada **fórmula de Herón** (en honor de Herón de Alejandría), para encontrar el área de un triángulo.

Teorema

Fórmula de Herón

El área A de un triángulo con lados a, b y c es

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \qquad \textbf{(5)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Al final de esta sección se da una demostración de la fórmula de Herón.

EJEMPLO 2 Área de un triángulo LLL

Encuentre el área de un triángulo cuyos lados son 4, 5 y 7.

Solución Sea $a = 4, b = 5$ y $c = 7$. Entonces

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(4 + 5 + 7) = 8$$

La fórmula de Herón da el área A como

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

Demostración de la fórmula de Herón La prueba que se dará usa la ley de los cosenos y es muy distinta a la dada por Herón.

De la ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

y la fórmula de medio ángulo

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \cos\gamma}{2}$$

se encuentra que

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \cos\gamma}{2} = \frac{1 + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}{2}$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{4ab} = \frac{(a + b)^2 - c^2}{4ab}$$

$$= \frac{(a + b - c)(a + b + c)}{4ab} = \frac{2(s - c) \cdot 2s}{4ab} = \frac{s(s - c)}{ab} \qquad (6)$$

$a + b - c = a + b + c - 2c$
$= 2s - 2c = 2(s - c)$

De manera similar,

$$\text{sen}^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(s - a)(s - b)}{ab} \qquad (7)$$

Ahora se usa la fórmula (2) para el área.

$$A = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\gamma$$

$$= \frac{1}{2}ab \cdot 2\,\text{sen}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \qquad \text{sen}\,\gamma = \text{sen}\left[2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right] = 2\,\text{sen}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$= ab\sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}}\sqrt{\frac{s(s - c)}{ab}} \qquad \text{Usar las ecuaciones (6) y (7)}$$

$$= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$



ASPECTO HISTÓRICO

La fórmula de Herón se debe a Herón de Alejandría (primer siglo d.C.), quien, además de sus talentos matemáticos, tenía muchas habilidades de ingeniería. En varios templos sus dispositivos mecánicos produjeron efectos que parecían sobrenaturales y se presume que influía en la generosidad de los visitantes. El libro de Herón, *Métrica*, acerca de la realización de esos dispositivos, ha sobrevivido y fue descubierto en 1896 en la ciudad de Constantinopla.

Las fórmulas de Herón para el área de un triángulo causaron cierta incomodidad en los matemáticos griegos, porque un producto con dos factores era un área, mien-tras que con tres factores se obtenía un volumen, pero con cuatro factores parecía contradictorio en la época de Herón.

8.4 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. El área A de un triángulo cuya base es b y cuya altura es h es __________. (pp. 29–33)

Conceptos y vocabulario

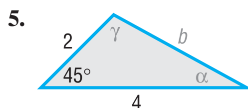
2. Si se dan tres lados de un triángulo, se usa la fórmula de __________ para encontrar el área del triángulo.

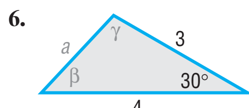
3. *Falso o verdadero:* no existe una fórmula para encontrar el área de un triángulo cuando sólo se dan tres lados.

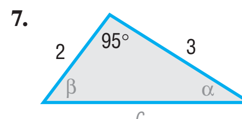
4. *Falso o verdadero:* dados dos lados y el ángulo incluido, se cuenta con una fórmula que se utiliza para encontrar el área del triángulo.

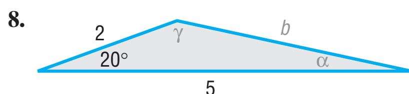
Ejercicios

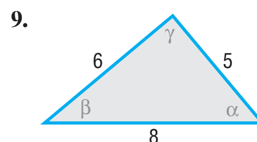
En los problemas 5-12, encuentre el área de cada triángulo. Redondee sus respuestas a dos decimales.

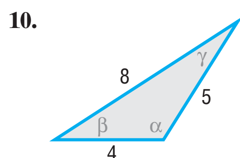
5.


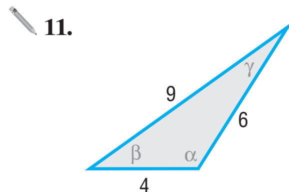
6.


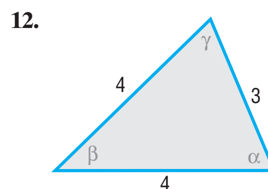
7.


8.


9.


10.


11.


12.


En los problemas 13-24, encuentre el área de cada triángulo. Redondee sus respuestas a dos decimales.

13. $a = 3, \quad b = 4, \quad \gamma = 40°$

14. $a = 2, \quad c = 1, \quad \beta = 10°$

15. $b = 1, \quad c = 3, \quad \alpha = 80°$

16. $a = 6, \quad b = 4, \quad \gamma = 60°$

17. $a = 3, \quad c = 2, \quad \beta = 110°$

18. $b = 4, \quad c = 1, \quad \alpha = 120°$

19. $a = 12, \quad b = 13, \quad c = 5$

20. $a = 4, \quad b = 5, \quad c = 3$

21. $a = 2, \quad b = 2, \quad c = 2$

22. $a = 3, \quad b = 3, \quad c = 2$

23. $a = 5, \quad b = 8, \quad c = 9$

24. $a = 4, \quad b = 3, \quad c = 6$

25. Área de un triángulo Demuestre que el área A de un triángulo está dada por la fórmula

$$A = \frac{a^2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{2 \operatorname{sen} \alpha}$$

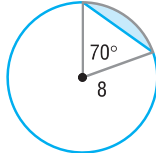
26. Área de un triángulo Demuestre las otras dos formas de la fórmula dada en el problema 25.

$$A = \frac{b^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma}{2 \operatorname{sen} \beta} \quad \text{y} \quad A = \frac{c^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{2 \operatorname{sen} \gamma}$$

En los problemas 27-32, utilice los resultados del problema 25 o del 26 para encontrar el área de cada triángulo. Redondee sus repuestas a dos decimales.

27. $\alpha = 40°$, $\beta = 20°$, $a = 2$
28. $\alpha = 50°$, $\gamma = 20°$, $a = 3$
29. $\beta = 70°$, $\gamma = 10°$, $b = 5$
30. $\alpha = 70°$, $\beta = 60°$, $c = 4$
31. $\alpha = 110°$, $\gamma = 30°$, $c = 3$
32. $\beta = 10°$, $\gamma = 100°$, $b = 2$

33. Área de un segmento Encuentre el área del segmento (área sombreada de la figura) de un círculo cuyo radio es de 8 pies, formado por un ángulo central de 70°. [**Sugerencia:** Reste el área del sector menos el área del triángulo para obtener el área del segmento].

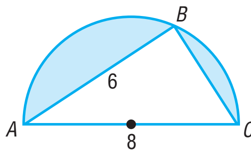


34. Área de un segmento Encuentre el área del segmento de un círculo cuyo radio es de 5 pulgadas, formado por un ángulo central de 40°.

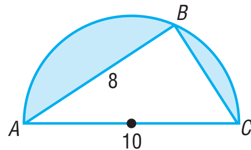
35. Costo de un lote triangular Las dimensiones de un lote triangular son 100 pies por 50 pies por 75 pies. Si el precio de este terreno es de $3 por pie cuadrado, ¿cuánto cuesta el lote?

36. Cantidad de materiales para hacer una tienda de campaña Una tienda de campaña en forma de cono se hará de una pieza circular de lona de 24 pies de diámetro, removiendo un sector con ángulo central de 100° y uniendo los extremos. ¿Cuál es la superficie del área de la tienda?

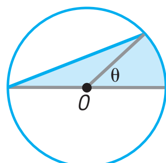
37. Cálculo de áreas Encuentre el área de la región sombreada dentro de un semicírculo de diámetro de 8 centímetros. La longitud de la cuerda AB es de 6 centímetros. [**Sugerencia:** El triángulo ABC es un triángulo rectángulo].



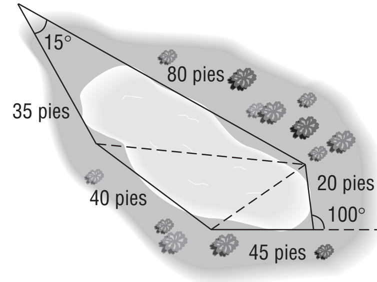
38. Cálculo de áreas Encuentre el área de la región sombreada dentro de un semicírculo de diámetro de 10 pulgadas. La longitud de la cuerda AB es de 8 pulgadas. [**Sugerencia:** El triángulo ABC es un triángulo rectángulo].



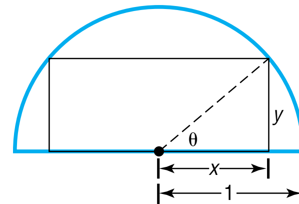
39. Geometría Consulte la figura, la cual muestra un círculo de radio r con centro en O. Encuentre el área A de la región sombreada como función del ángulo central θ.



40. Área aproximada de un lago Para aproximar el área de un lago un topógrafo camina alrededor del perímetro y toma las medidas mostradas en la ilustración. Usando esta técnica, ¿cuál es el área aproximada del lago? [**Sugerencia:** Use la ley de los cosenos en los tres triángulos mostrados y luego encuentre la suma de sus áreas].



41. Geometría Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 1. Vea la ilustración.

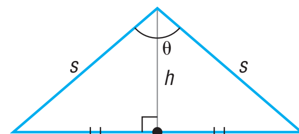


a) Exprese el área A del rectángulo como función del ángulo θ mostrado en la ilustración.
b) Demuestre que $A = \text{sen}(2\theta)$.
c) Encuentre el ángulo θ que da como resultado el área A más grande.
d) Encuentre las dimensiones de este rectángulo mayor.

42. Área de un triángulo isósceles Demuestre que al área A de un triángulo isósceles, cuyos lados iguales tiene longitud s y el ángulo entre ellos es θ es

$$A = \frac{1}{2}s^2 \text{ sen } \theta$$

[**Sugerencia:** Vea la ilustración. La altura h bisecta el ángulo θ y es la perpendicular bisectriz de la base].



43. Consulte la figura de la página 692. Si $|OA| = 1$, demuestre que:

a) Área $\Delta OAC = \frac{1}{2} \text{sen } \alpha \cos \alpha$

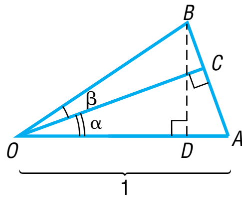
b) Área $\Delta OCB = \frac{1}{2}|OB|^2 \text{ sen } \beta \cos \beta$

c) Área $\Delta OAB = \frac{1}{2}|OB| \text{ sen}(\alpha + \beta)$

d) $|OB| = \dfrac{\cos \alpha}{\cos \beta}$

e) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$

[**Sugerencia:** área ΔOAB = área ΔOAC + área ΔOCB].



44. Consulte la figura; en ella se dibujó un círculo unitario. La recta DB es tangente al círculo.

a) Exprese el área de ΔOBC en términos de $\text{sen } \theta$ y $\cos \theta$.

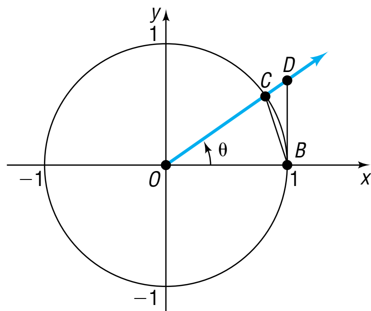
b) Exprese el área de ΔOBD en términos de $\text{sen } \theta$ y $\cos \theta$.

c) El área del sector $\widehat{OBC}$ del círculo es $\frac{1}{2}\theta$, donde θ se mide en radianes. Utilice los resultados de los incisos *a*) y *b*), y el hecho de que

$$\text{Área } \Delta OBC < \text{área } \widehat{OBC} < \text{área } \Delta OBD$$

para demostrar que

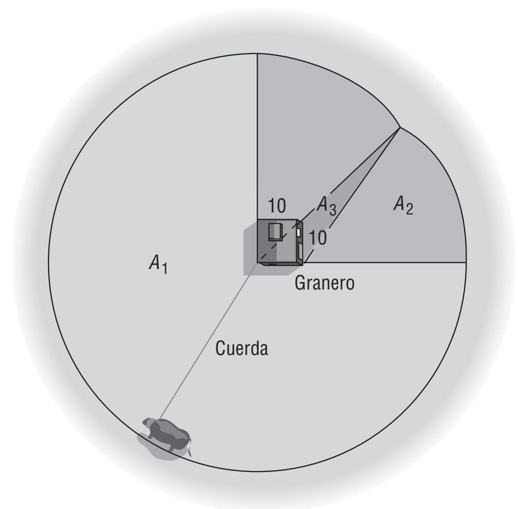
$$1 < \frac{\theta}{\text{sen } \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$



45. Problema de la vaca* Una vaca está atada en una esquina de un granero cuadrado, de 10 pies por lado, con una cuerda de 100 pies de largo. ¿Cuál es el área máxima donde la vaca podría pastar?

[**Sugerencia:** Vea la ilustración].

*Sugerido por el profesor Teddy Koukounas, de Suffolk Community College, quien lo aprendió de un viejo granjero en Virginia. La solución fue proporcionada por la profesora Kathleen Miranda, de SUNY en Old Westbury.



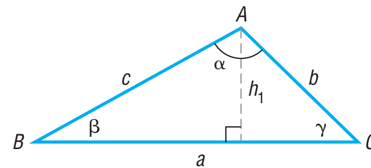
46. Otro problema de vacas Si el granero del problema 45 es rectangular, y mide 10 pies por 20 pies, ¿cuál es el área máxima en que la vaca podría pastar?

47. Si h_1, h_2 y h_3 son las alturas bajadas desde A, B y C, respectivamente, en un triángulo (vea la figura), demuestre que

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{s}{K}$$

donde K es el área del triángulo y $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

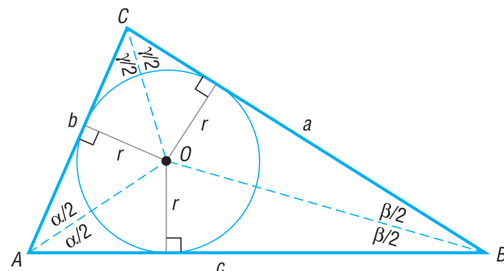
[**Sugerencia:** $h_1 = \dfrac{2K}{a}$].



48. Demuestre que una fórmula para la altura h de un vértice al lado opuesto a de un triángulo es

$$h = \frac{a \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \alpha}$$

Círculo inscrito *Para los problemas 49-52, las líneas que bisectan cada ángulo de un triángulo se cruzan en un solo punto O, y la distancia perpendicular r de O a cada lado del triángulo es la misma. El círculo con centro en O y radio r se llama* **círculo inscrito** *en el triángulo (vea la figura).*



49. Aplique el problema 48 al triángulo OAB para demostrar que

$$r = \frac{c \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

50. Use los resultados de los problemas 49 y 46 de la sección 8.3 para demostrar que

$$\cot \frac{\gamma}{2} = \frac{s - c}{r}$$

51. Demuestre que

$$\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} = \frac{s}{r}$$

52. Demuestre que el área K del triángulo ABC es $K = rs$. Luego demuestre que

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.



53. ¿Qué hace primero si le piden que encuentre el área de un triángulo, y le dan dos lados y el ángulo incluido?

54. ¿Qué hace primero si le piden que calcule el área de un triángulo y los datos son los tres lados?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $A = \frac{1}{2}bh$

8.5 Movimiento armónico simple; movimiento amortiguado; combinación de ondas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Gráficas senoidales (sección 6.6, pp. 62-69)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 700.

OBJETIVOS
1. Encontrar una ecuación para un objeto en movimiento armónico simple
2. Analizar el movimiento armónico simple
3. Analizar un objeto en movimiento amortiguado
4. Graficar la suma de dos funciones



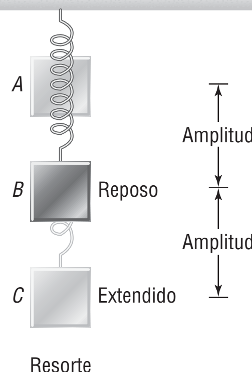
Diapasón

Movimiento armónico simple

Muchos fenómenos físicos se describen como movimiento armónico simple. Las ondas de radio y televisión, las ondas de luz, las ondas de sonido y las ondas en el agua muestran un movimiento que es armónico simple.

El péndulo que oscila, las vibraciones de un diapasón y la oscilación de arriba abajo de un peso que cuelga de un resorte son ejemplos de movimiento vibratorio. En este tipo de movimiento, un objeto se mece de un lado a otro en la misma trayectoria. En la figura 37, el punto B es la **posición de equilibrio (reposo)** del objeto que vibra. La **amplitud** es la distancia del

Figura 37

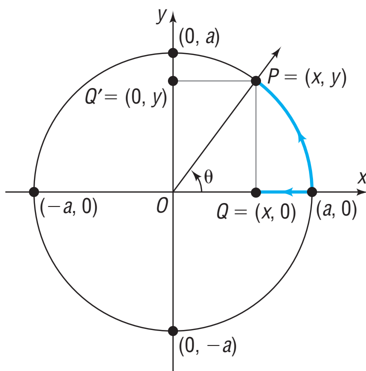


objeto en la posición de reposo a su punto de mayor desplazamiento (puntos A o el C en la figura 37). El **periodo** es el tiempo requerido para completar una vibración, es decir, el tiempo que toma para ir, digamos, del punto A al B y al C, y de regreso al A.

El **movimiento armónico simple** es un tipo especial de movimiento vibratorio en el que la aceleración a del objeto es directamente proporcional al negativo de su desplazamiento d desde su posición de reposo. Esto es, $a = -kd$, $k > 0$.

Por ejemplo, cuando la masa que cuelga del resorte en la figura 37 se jala hacia abajo desde su posición de reposo B al punto C, la fuerza del resorte intenta restaurar la masa a su posición de reposo. Suponiendo que no hay fricción* para retrasar el movimiento, la amplitud permanecerá constante. La fuerza aumenta en proporción directa a la distancia que se jala la masa desde su posición de reposo. Como la fuerza aumenta directamente, la aceleración de la masa del objeto debe aumentar también, porque (según la segunda ley del movimiento de Newton) la fuerza es directamente proporcional a la aceleración. Entonces, la aceleración del objeto varía directamente con su desplazamiento, y el movimiento es un ejemplo de movimiento armónico simple.

Figura 38



El movimiento armónico simple está relacionado con el movimiento circular. Para ver esta relación, considere un círculo de radio a, con centro en $(0, 0)$. Vea la figura 38. Suponga que un objeto colocado inicialmente en $(a, 0)$ se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj a una velocidad angular constante ω. Suponga además que en el tiempo t el objeto está en el punto $P = (x, y)$ del círculo. El ángulo θ, en radianes, barrido por el rayo $\overrightarrow{OP}$ en este tiempo t es

$$\theta = \omega t$$

Las coordenadas del punto P en el tiempo t son

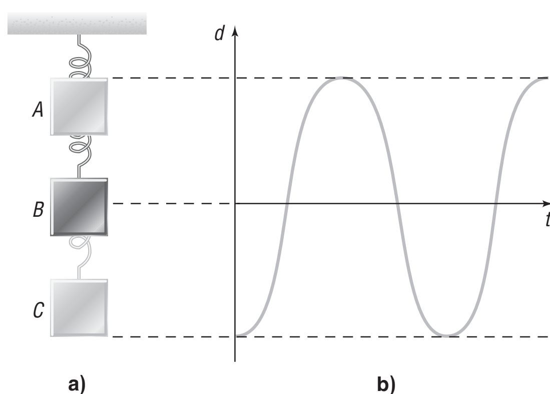
$$x = a \cos \theta = a \cos(\omega t)$$
$$y = a \operatorname{sen} \theta = a \operatorname{sen}(\omega t)$$

Correspondiente a cada posición $P = (x, y)$ del objeto que se mueve alrededor del círculo, existe el punto $Q = (x, 0)$, llamado **proyección de P en el eje x**. Como P se mueve alrededor del círculo a una velocidad constante, el punto Q se mueve de ida y regreso entre los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ sobre el eje x con un movimiento que es armónico simple. De manera similar, para cada punto P existe un punto $Q' = (0, y)$, llamado **proyección de P en el eje y**. Cuando P se mueve alrededor del círculo, el punto Q' se mueve de ida y de regreso entre los puntos $(0, a)$ y $(0, -a)$ en el eje y con un movimiento que es armónico simple. El movimiento armónico simple se describe como la proyección de un movimiento circular constante en un eje coordenado.

Dicho de otra manera, de nuevo considere una masa que cuelga de un resorte cuando se jala hacia abajo desde su posición de reposo al punto C y después se suelta. Vea la figura 39*a*). La gráfica mostrada en la figura 39*b*) describe el desplazamiento d del objeto desde su posición de reposo como función del tiempo t, suponiendo que no hay fuerza de fricción presente.

*Si hay fricción, la amplitud decrece con el tiempo hasta 0. Este tipo de movimiento es un ejemplo de **movimiento amortiguado**, que se estudiará más adelante en esta sección.

Figura 39



Teorema

Movimiento armónico simple

Un objeto que está en un eje coordenado, de manera que su distancia d a la posición de reposo en el tiempo t está dada por una de las dos fórmulas siguientes

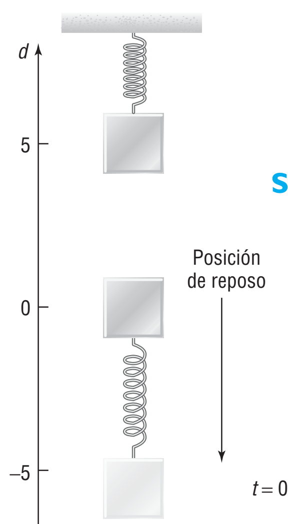
$$d = a\cos(\omega t) \quad \text{o} \quad d = a\,\text{sen}(\omega t)$$

donde a y $\omega > 0$ son constantes, se mueve con un movimiento armónico simple. El movimiento tiene amplitud $|a|$ y periodo $\frac{2\pi}{\omega}$.

La **frecuencia** f de un objeto en movimiento armónico simple es el número de oscilaciones por unidad de tiempo. Como el periodo es el tiempo requerido para una oscilación, se deduce que la frecuencia es el recíproco del periodo, es decir,

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \qquad \omega > 0$$

Figura 40



EJEMPLO 1 Ecuación para un objeto en movimiento armónico simple

1 Suponga que un objeto que cuelga de un resorte se jala hacia abajo una distancia de 5 pulgadas desde su posición de reposo y luego se suelta. Si el tiempo para una oscilación es de 3 segundos, escriba una ecuación que relacione el desplazamiento d del objeto desde su posición de reposo después de un tiempo t (en segundos). Suponga que no hay fricción.

Solución El movimiento del objeto es armónico simple. Vea la figura 40. Cuando se suelta el objeto ($t = 0$), su desplazamiento respecto de la posición de reposo es de -5 unidades (ya que el objeto se jaló hacia abajo). Como $d = -5$ cuando $t = 0$, es más sencillo usar la función coseno*

$$d = a\cos(\omega t)$$

para describir el movimiento. Ahora la amplitud es $|-5| = 5$ y el periodo es 2, entonces

$$a = -5 \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{\omega} = \text{periodo} = 3, \quad \omega = \frac{2\pi}{3}$$

*No se requiere corrimiento de fase si se usa la función coseno.

Una ecuación del movimiento del objeto es

$$d = -5\cos\left[\frac{2\pi}{3}t\right]$$ ◀

Nota: En la solución del ejemplo 1, se hizo $a = -5$, ya que el movimiento inicial es hacia abajo. Si la dirección inicial fuera hacia arriba, se haría $a = 5$.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 5.

2 **EJEMPLO 2** **Análisis de movimiento de un objeto**

Suponga que el desplazamiento d (en metros) de un objeto en el tiempo t (en segundos) satisface la ecuación.

$$d = 10\,\text{sen}(5t)$$

a) Describa el movimiento del objeto.
b) ¿Cuál es el desplazamiento máximo desde la posición de reposo?
c) ¿Cuál es el tiempo requerido para una oscilación?
d) ¿Cuál es la frecuencia?

Solución Se observa que la ecuación dada es de la forma

$$d = a\,\text{sen}(\omega t) \qquad d = 10\,\text{sen}(5t)$$

donde $a = 10$ y $\omega = 5$.

a) El movimiento es armónico simple.
b) El desplazamiento máximo del objeto desde su posición de reposo es la amplitud: $|a| = 10$ metros.
c) El tiempo requerido para una oscilación es el periodo:

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} \text{ segundos}$$

d) La frecuencia es el recíproco del periodo. Entonces,

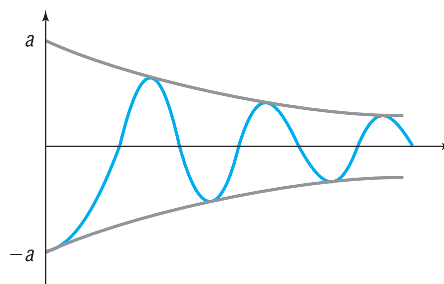
$$\text{Frecuencia} = f = \frac{5}{2\pi} \text{ oscilaciones por segundo}$$ ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

Movimiento amortiguado

3 La mayoría de los fenómenos físicos están afectados por la fricción o alguna otra fuerza resistiva. Estas fuerzas quitan energía de un sistema en movimiento y, por lo tanto, amortiguan su movimiento. Por ejemplo, cuando una masa que cuelga de un resorte se jala hacia abajo una distancia a y se suelta, la fricción en el resorte ocasiona que la distancia que se mueve la masa desde el reposo disminuya con el tiempo. Entonces la amplitud de cualquier resorte real que oscila o péndulo que se mece disminuye con el tiempo debido a la resistencia del aire, la fricción, etcétera. Vea la figura 41.

Figura 41



Una función que describe este fenómeno mantiene una componente senoidal, pero la amplitud de esta componente disminuye con el tiempo para tomar en cuenta el efecto de amortiguador. Además, el periodo de la componente oscilatoria se ve afectado por el amortiguamiento. El siguiente resultado, de física describe el movimiento amortiguado.

Teorema

Movimiento amortiguado

El desplazamiento d de un objeto que oscila desde su posición de reposo en el tiempo t está dado por

$$d(t) = ae^{-bt/2m}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}}\,t\right)$$

donde b es un **factor de amortiguamiento** (muchos libros de física lo llaman **coeficiente de amortiguamiento**) y m es la masa del objeto que oscila.

Observe que para $b = 0$ (cero amortiguamiento) se tiene la fórmula del movimiento armónico simple con amplitud $|a|$ y periodo $\frac{2\pi}{\omega}$.

EJEMPLO 3 Análisis de una curva de vibración amortiguada

Analice la curva de vibración amortiguada

$$d(t) = e^{-t/\pi}\cos t, \quad t \geq 0$$

Solución El desplazamiento d es el producto de $y = e^{-t/\pi}$ y $y = \cos t$. Usando las propiedades del valor absoluto y el hecho de que $|\cos t| \leq 1$, se encuentra que

$$|d(t)| = |e^{-t/\pi}\cos t| = |e^{-t/\pi}||\cos t| \leq |e^{-t/\pi}| \underset{\substack{\uparrow \\ e^{-t/\pi} > 0}}{=} e^{-t/\pi}$$

Como resultado,

$$-e^{-t/\pi} \leq d(t) \leq e^{-t/\pi}$$

Esto significa que la gráfica de d estará entre las gráficas de $y = e^{-t/\pi}$ y $y = -e^{-t/\pi}$, las **curvas frontera** de d.

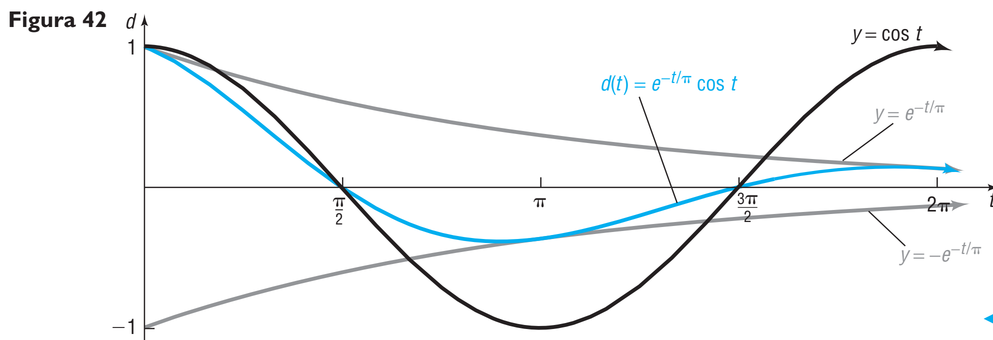
Además, la gráfica de d toca estas gráficas cuando $|\cos t| = 1$, es decir, cuando $t = 0, \pi, 2\pi$, etcétera. Las intercepciones x de la gráfica de d ocurren cuando $\cos t = 0$, esto es, en $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, etcétera. Vea la tabla 1.

Tabla 1

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$e^{-t/\pi}$	1	$e^{-1/2}$	e^{-1}	$e^{-3/2}$	e^{-2}
$\cos t$	1	0	-1	0	1
$d(t) = e^{-t/\pi}\cos t$	1	0	$-e^{-1}$	0	e^{-2}
Punto en la gráfica de d	(0, 1)	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, -e^{-1})$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, e^{-2})$

Se grafica $y = \cos t$, $y = e^{-t/\pi}$, $y = -e^{-t/\pi}$, y $d(t) = e^{-t/\pi}\cos t$ en la figura 42.

Figura 42



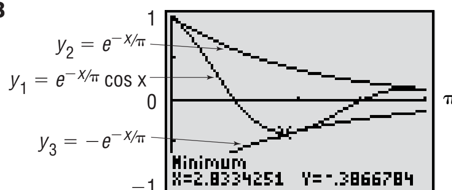


Exploración

Grafique $Y_1 = e^{-x/\pi}\cos x$, junto con $Y_2 = e^{-x/\pi}$, y $Y_3 = -e^{-x/\pi}$, para $0 \leq x \leq \pi$. Determine dónde tiene Y_1 su primer punto de retorno (mínimo local). Compare esto con el punto de intersección de Y_1 y Y_3.

SOLUCIÓN La figura 43 muestra las gráficas de $Y_1 = e^{-x/\pi}\cos x$, $Y_2 = e^{-x/\pi}$, y $Y_3 = -e^{-x/\pi}$. Usando MINIMUM, el primer punto de retorno ocurre en $x \approx 2.83$; Y_1 se cruza (INTERSECTS) con Y_3 en $x = \pi \approx 3.14$.

Figura 43





TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

Combinación de ondas



Muchas aplicaciones físicas y biológicas requieren graficar la suma de dos funciones, como

$$f(x) = x + \text{sen}\, x \quad \text{o} \quad g(x) = \text{sen}\, x + \cos 2x$$

Por ejemplo, en el teléfono de tonos, se emiten dos tonos y el sonido producido es la suma de las ondas producidas por los dos tonos. Vea una explicación de los teléfonos de tonos en el problema 35.

Para graficar la suma de dos funciones (o más) se utiliza el método de sumar las coordenadas y, que se describe a continuación.

EJEMPLO 4 Gráfica de la suma de dos funciones

Utilice el método de sumar las coordenadas y para graficar $f(x) = x + \text{sen } x$.

Solución Primero, se grafican las funciones componentes,

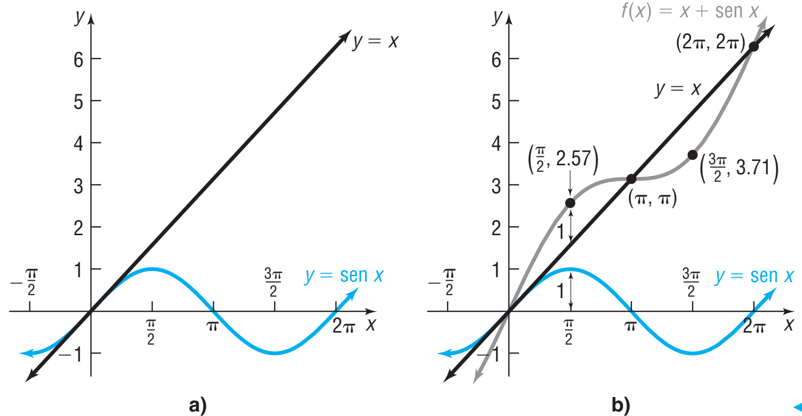
$$y = f_1(x) = x \qquad y = f_2(x) = \text{sen } x$$

usando el mismo sistema de coordenadas. Vea la figura 44*a*). Ahora se seleccionan valores de x, digamos, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$, y $x = 2\pi$, y en ellos se calcula $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. La tabla 2 muestra los cálculos. Se grafican estos puntos y se conectan para obtener la gráfica, como se muestra en la figura 44*b*).

Tabla 2

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = f_1(x) = x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = f_2(x) = \text{sen } x$	0	1	0	-1	0
$f(x) = x + \text{sen } x$	0	$\frac{\pi}{2} + 1 \approx 2.57$	π	$\frac{3\pi}{2} - 1 \approx 3.71$	2π
Punto en la gráfica de f	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 2.57\right)$	(π, π)	$\left(\frac{3\pi}{2}, 3.71\right)$	$(2\pi, 2\pi)$

Figura 44



En el ejemplo 4, observe que la gráfica de $f(x) = x - \text{sen } x$ cruza la recta $y = x$ siempre que $x = 0$. También note que la gráfica de f no es periódica.



COMPROBACIÓN: Grafique $y = x + \text{sen } x$ y compare el resultado con la figura 44b). Use INTERSECT para verificar que la intersección de las gráficas cuando $\text{sen } x = 0$.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.

El siguiente ejemplo muestra una gráfica periódica de la suma de dos funciones.

EJEMPLO 5 Gráfica de la suma de dos funciones senoidales

Use el método de sumar las coordenadas y para graficar

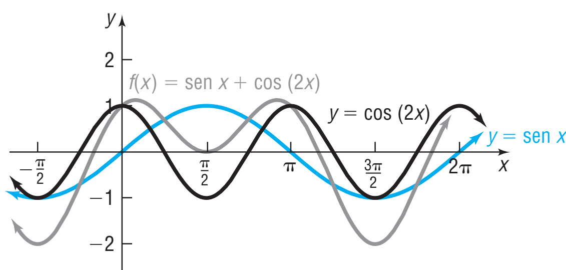
$$f(x) = \text{sen } x + \cos(2x)$$

Solución La tabla 3 muestra los pasos para calcular varios puntos en la gráfica de f. La figura 45 ilustra las gráficas de las funciones correspondientes, $y = f_1(x) = \text{sen } x$ y $y = f_2(x) = \cos(2x)$, y la gráfica de $f(x) = \text{sen } x + \cos(2x)$, que se muestra con la línea punteada.

Tabla 3

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = f_1(x) = \text{sen } x$	-1	0	1	0	-1	0
$y = f_2(x) = \cos(2x)$	-1	1	-1	1	-1	1
$f(x) = \text{sen } x + \cos(2x)$	-2	1	0	1	-2	1
Punto en la gráfica de f	$\left(-\frac{\pi}{2}, -2\right)$	$(0, 1)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, 1)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$,	$(2\pi, 1)$

Figura 45
$f(x) = \text{sen } x + \cos(2x)$





COMPROBACIÓN: Grafique $y = \text{sen } x + \cos(2x)$ y compare el resultado con la figura 45.

8.5 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. La amplitud A y el periodo T de $f(x) = 5 \text{ sen}(4x)$ son _________ y _________. (pp.62–69)

Conceptos y vocabulario

2. El movimiento de un objeto obedece la ecuación $d = 4 \cos(6t)$. Este movimiento se describe como _________ _________. El número 4 se llama _________.

3. Cuando una masa que cuelga de un resorte se jala hacia abajo y luego se suelta, el movimiento se llama _________ _________ _________ si no hay fuerzas de fricción que retrasen el movimiento, y se llama _________ _________ si hay fricción.

4. *Falso o verdadero:* si la distancia d de un objeto respecto de su posición de reposo en el tiempo t está dada por una gráfica senoidal, el movimiento del objeto es armónico simple.

Ejercicios

En los problemas 5-8, un objeto que cuelga de un resorte se jala una distancia a desde su posición de reposo y luego se suelta. Suponiendo que el movimiento es armónico simple con periodo T, escriba una ecuación que relacione el desplazamiento d del objeto desde su posición de reposo después de t segundos. Además, suponga que la dirección positiva del movimiento es hacia arriba

5. $a = 5$; $T = 2$ segundos

6. $a = 10$; $T = 3$ segundos

7. $a = 6$; $T = \pi$ segundos

8. $a = 4$; $T = \frac{\pi}{2}$ segundos

9. Trabaje de nuevo el problema 5 con las mismas condiciones, excepto que en el tiempo $t = 0$ el objeto está en su posición de reposo y moviéndose hacia abajo.

10. Trabaje de nuevo el problema 6 con las mismas condiciones, excepto que en el tiempo $t = 0$ el objeto está en su posición de reposo y moviéndose hacia abajo.

11. Trabaje de nuevo el problema 7 con las mismas condiciones, excepto que en el tiempo $t = 0$ el objeto está en su posición de reposo y moviéndose hacia abajo.

12. Trabaje de nuevo el problema 8 con las mismas condiciones, excepto que en el tiempo $t = 0$ el objeto está en su posición de reposo y moviéndose hacia abajo.

En los problemas 13-20, se da el desplazamiento d (en metros) de un objeto en el tiempo t (en segundos).

a) *Determine el movimiento del objeto.*
b) *¿Cuál es el desplazamiento máximo desde su posición de reposo?*
c) *¿Cuál es el tiempo que requiere una oscilación?*
d) *¿Cuál es la frecuencia?*

13. $d = 5 \operatorname{sen}(3t)$ **14.** $d = 4 \operatorname{sen}(2t)$ **15.** $d = 6 \cos(\pi t)$ **16.** $d = 5 \cos \dfrac{\pi}{2} t$

17. $d = -3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}t\right)$ **18.** $d = -2 \cos(2t)$ **19.** $d = 6 + 2 \cos(2\pi t)$ **20.** $d = 4 + 3 \operatorname{sen}(\pi t)$

En los problemas 21-24, grafique cada curva de vibración amortiguada para $0 \le t \le 2\pi$.

21. $d(t) = e^{-t/\pi} \cos(2t)$ **22.** $d(t) = e^{-t/2\pi} \cos(2t)$ **23.** $d(t) = e^{-t/2\pi} \cos t$ **24.** $d(t) = e^{-t/4\pi} \cos t$

En los problemas 25-32, use el método de sumar las coordenadas y para graficar cada función.

25. $f(x) = x + \cos x$ **26.** $f(x) = x + \cos(2x)$ **27.** $f(x) = x - \operatorname{sen} x$

28. $f(x) = x - \cos x$ **29.** $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ **30.** $f(x) = \operatorname{sen}(2x) + \cos x$

31. $g(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)$ **32.** $g(x) = \cos(2x) + \cos x$

---

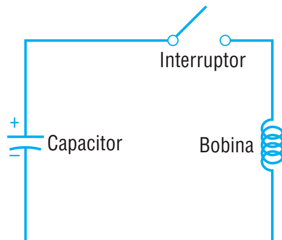
33. Carga de un capacitor Si un capacitor cargado se conecta a un alambre enrollado (bobina) cerrando un interruptor (vea la figura), la energía se transfiere a la bobina y luego regresa al capacitor con un movimiento oscilatorio. El voltaje V (en volts) que pasa por el capacitor diminuye gradualmente a 0 con el tiempo t (en segundos).

a) Grafique la ecuación que relaciona V con t:

$$V(t) = e^{-t/3} \cos(\pi t), \qquad 0 \le t \le 3$$

b) ¿En qué tiempos t la gráfica de V toca la gráfica de $y = e^{-t/3}$? ¿Cuándo toca V a la gráfica de $y = -e^{-t/3}$?

c) Cuándo estará el voltaje V entre -0.4 y 0.4 volts?



34. Curva con dientes de sierra Es frecuente que un osciloscopio muestre una curva con dientes de sierra. Esta curva se aproxima por curvas senoidales de diferentes periodos y amplitudes.

a) Grafique la siguiente función, que se utiliza para aproximar la curva con dientes de sierra.

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4\pi x), \qquad 0 \le x \le 2$$

b) Una mejor aproximación para la curva con dientes de sierra está dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4\pi x) + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(8\pi x)$$

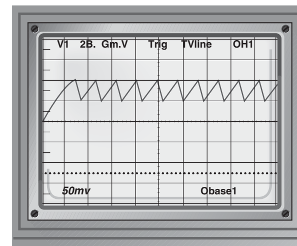
Grafique esta función para $0 \le x \le 4$ y compare el resultado con la gráfica obtenida en el inciso *a*).

c) Una tercera aproximación aún mejor para la curva con dientes de sierra es

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4\pi x) + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(8\pi x) + \frac{1}{16}\operatorname{sen}(16\pi x)$$

Grafique esta función para $0 \le x \le 4$ y compare el resultado con las gráficas de los incisos *a*) y *b*).

d) ¿Cuál cree que será la siguiente aproximación para la curva con dientes de sierra?



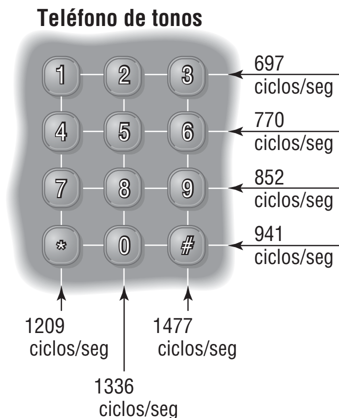
35. Teléfonos de tonos En un teléfono de tonos, cada botón produce un sonido único. El sonido producido es la suma de dos tonos, dados por

$$y = \text{sen}(2\pi l t) \quad \text{y} \quad y = \text{sen}(2\pi h t)$$

donde l y h son las frecuencias baja y alta (ciclos por segundo) mostradas en la ilustración. Por ejemplo, si se oprime 7 la frecuencia baja es de $l = 852$ ciclos por segundo y la frecuencia alta es de $h = 1209$ ciclos por segundo. El sonido emitido al oprimir 7 es

$$y = \text{sen}[2\pi(852)t] + \text{sen}[2\pi(1209)t]$$

Grafique el sonido emitido al oprimir 7.



36. Grafique el sonido emitido por la tecla * en un teléfono de tonos. Vea el problema 35.

37. Grafique la función $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$, $x > 0$. Con base en la gráfica, ¿qué concluye acerca del valor de $\dfrac{\text{sen}\, x}{x}$ para x cercana a 0?

38. Grafique $y = x\, \text{sen}\, x$, $y = x^2\, \text{sen}\, x$ y $y = x^3\, \text{sen}\, x$ para $x > 0$. ¿Qué patrones observa?

39. Grafique $y = \dfrac{1}{x}\, \text{sen}\, x$, $y = \dfrac{1}{x^2}\, \text{sen}\, x$, y $y = \dfrac{1}{x^3}\, \text{sen}\, x$ para $x > 0$. ¿Qué patrones observa?

40. Experimento CBL Se analiza un péndulo en movimiento para estimar el movimiento armónico simple. Se genera una gráfica con la posición del péndulo en el tiempo. La gráfica se usa para encontrar una curva senoidal de la forma $y = A\cos[B(x - C)] + D$. Determine la amplitud, el periodo y la frecuencia. (Actividad 16, Matemáticas del mundo real con el sistema CBL).

41. Experimento CBL Se recolecta el sonido de un diapasón en el tiempo. Se determinan la amplitud, la frecuencia y el periodo. Se ajusta a los datos un modelo de la forma $y = A\cos B(x - C)$ (Actividad 23, Matemáticas del mundo real con el sistema CBL).

42. ¿Cómo explicaría a un compañero qué es el movimiento armónico simple? ¿Cómo explicaría el movimiento amortiguado?

Respuesta a "¿Está preparado?"

1. $A = 5$; $T = \dfrac{\pi}{2}$

Repaso del capítulo

Conocimiento

Fórmulas

Ley de los senos (p. 670)
$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$$

Ley de los cosenos (p. 681)
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

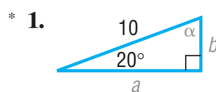
Área de un triángulo (pp. 687-688)
$$A = \frac{1}{2}bh$$
$$A = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\gamma$$
$$A = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\alpha$$
$$A = \frac{1}{2}ac\,\text{sen}\,\beta$$
$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{donde} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

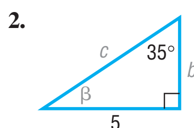
Objetivos

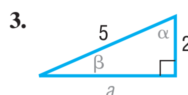
Sección		Debe ser capaz de...	Ejercicios de repaso
8.1	1	Resolver triángulos rectángulos (p. 660)	1–4
	2	Resolver problemas aplicados usando trigonometría de triángulos rectángulos (p. 661)	35–40, 50
8.2	1	Resolver triángulos LAA o ALA (p. 670)	5–6, 22
	2	Resolver triángulos LLA (p. 671)	7–10, 12, 17–18, 21
	3	Resolver problemas aplicados usando la ley de los senos (p. 673)	41, 43, 44
8.3	1	Resolver triángulos LAL (p. 682)	11, 15–16, 23–24
	2	Resolver triángulos LLL (p. 682)	13–14, 19–20
	3	Resolver problemas aplicados usando la ley de los cosenos (p. 683)	42, 45, 46, 47
8.4	1	Encontrar el área de triángulos LAL (p. 688)	25–28, 47–49
	2	Encontrar el área de triángulos LLL (p. 688)	29–32
8.5	1	Encontrar una ecuación para un objeto en movimiento armónico simple (p. 695)	53–54
	2	Analizar el movimiento armónico simple (p. 696)	55–58
	3	Analizar un objeto en movimiento amortiguado (p. 696)	59–62
	4	Graficar la suma de dos funciones (p. 698)	63, 64

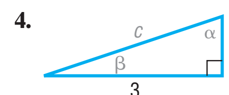
Ejercicios de repaso *(Un asterisco en un problema indica que el autor lo sugiere para un examen de práctica).*

En los problemas 1-4, resuelva cada triángulo.

* **1.** 

2. 

3. 

4. 

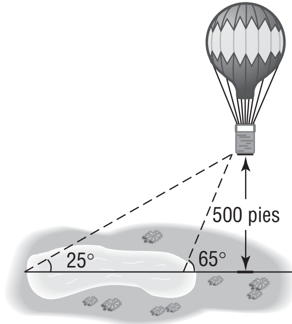
En los problemas 5-24, encuentre los ángulos y los lados restantes de cada triángulo, si existen. Si no existe un triángulo, diga "No hay triángulo".

* **5.** $\alpha = 50°, \quad \beta = 30°, \quad a = 1$
6. $\alpha = 10°, \quad \gamma = 40°, \quad c = 2$
7. $\alpha = 100°, \quad a = 5, \quad c = 2$
8. $a = 2, \quad c = 5, \quad \alpha = 60°$
9. $a = 3, \quad c = 1, \quad \gamma = 110°$
10. $a = 3, \quad c = 1, \quad \gamma = 20°$
***11.** $a = 3, \quad c = 1, \quad \beta = 100°$
12. $a = 3, \quad b = 5, \quad \beta = 80°$
***13.** $a = 2, \quad b = 3, \quad c = 1$
14. $a = 10, \quad b = 7, \quad c = 8$
15. $a = 1, \quad b = 3, \quad \gamma = 40°$
16. $a = 4, \quad b = 1, \quad \gamma = 100°$
17. $a = 5, \quad b = 3, \quad \alpha = 80°$
18. $a = 2, \quad b = 3, \quad \alpha = 20°$
19. $a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{4}{3}$
20. $a = 3, \quad b = 2, \quad c = 2$
***21.** $a = 3, \quad \alpha = 10°, \quad b = 4$
22. $a = 4, \quad \alpha = 20°, \quad \beta = 100°$
23. $c = 5, \quad b = 4, \quad \alpha = 70°$
24. $a = 1, \quad b = 2, \quad \gamma = 60°$

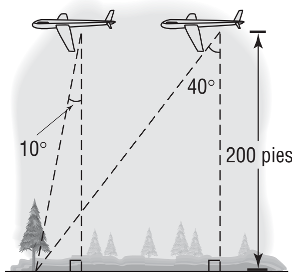
En los problemas 25-34, encuentre el área de cada triángulo.

***25.** $a = 2, \quad b = 3, \quad \gamma = 40°$
26. $b = 5, \quad c = 5, \quad \alpha = 20°$
27. $b = 4, \quad c = 10, \quad \alpha = 70°$
28. $a = 2, \quad b = 1, \quad \gamma = 100°$
29. $a = 4, \quad b = 3, \quad c = 5$
30. $a = 10, \quad b = 7, \quad c = 8$
***31.** $a = 4, \quad b = 2, \quad c = 5$
32. $a = 3, \quad b = 2, \quad c = 2$
33. $\alpha = 50°, \quad \beta = 30°, \quad a = 1$
34. $\alpha = 10°, \quad \gamma = 40°, \quad c = 3$

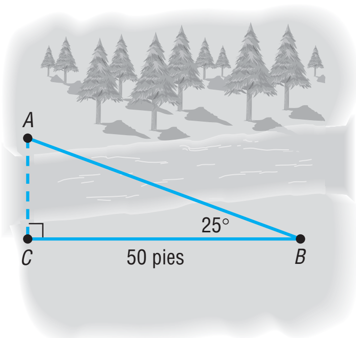
35. Medida de la longitud de un lago Desde un globo estacionario a 500 pies sobre el suelo, se hacen dos observaciones del lago (vea la figura). ¿Qué longitud tiene el lago?



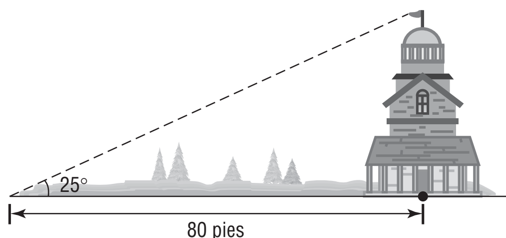
36. Velocidad de un planeador Desde un planeador que va a 200 pies sobre el suelo, se realizan dos observaciones de un objeto estacionario directamente enfrente, con diferencia de 1 minuto (vea la figura). ¿Cuál es la velocidad del planeador?



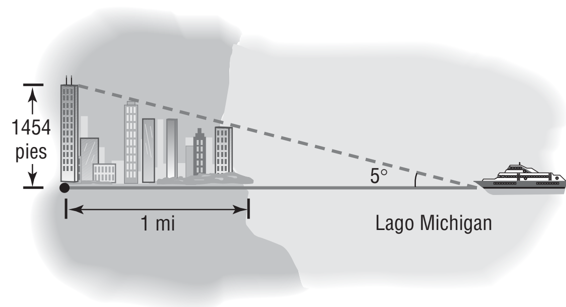
37. Ancho de un río Encuentre la distancia de A a C cruzando el río ilustrado en la figura.



38. Altura de un edificio Encuentre la altura del edificio mostrado en la figura.

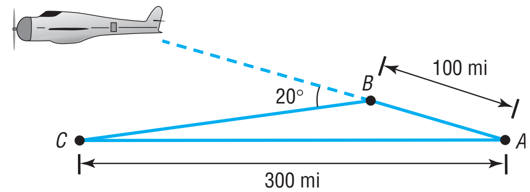


39. Distancia a la orilla La Torre de Sears en Chicago tiene 1454 pies de altura y está situada más o menos a 1 milla tierra adentro de la orilla del lago Michigan, como se indica en la figura. Un observador en una lancha mira la punta de la Torre de Sears y mide un ángulo de elevación de 5°. ¿Qué tan lejos está la lancha de la orilla?

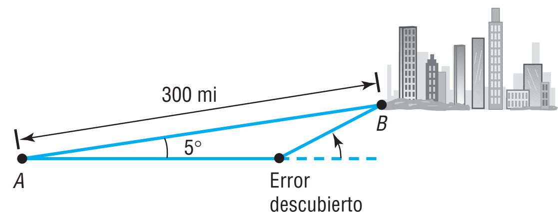


40. Pendiente de un camino en la montaña Un camino recto con inclinación uniforme va de un hotel, con elevación de 5000 pies, a un lago en el valle, con elevación de 4100 pies. La longitud del camino es de 4100 pies. ¿Cuál es la inclinación (pendiente) del camino?

41. Navegación Un avión vuela de la ciudad A a la ciudad B, una distancia de 100 millas, y después da vuelta un ángulo de 20° y se dirige a la ciudad C, como se indica en la figura. Si la distancia de A a C es de 300 millas, ¿qué tan lejos está la ciudad B de la ciudad C?



42. Corrección de un error de navegación Dos ciudades A y B están a 300 millas. Al volar de A a B, un piloto, sin darse cuenta, tomó un curso con 5° de error.

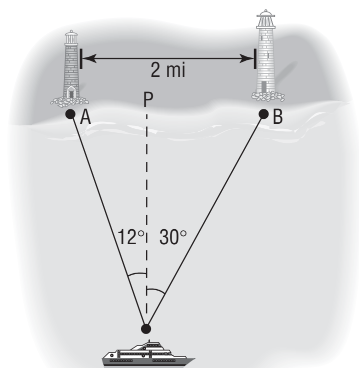


a) Si el error se descubrió después de volar 10 minutos a una velocidad constante de 420 millas por hora, ¿a qué ángulo debe dar vuelta el piloto para corregir el curso? (Consulte la figura).

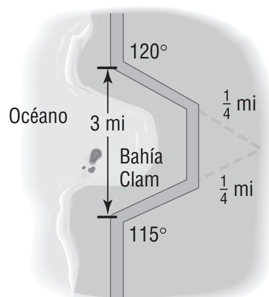
b) ¿Qué nueva velocidad constante debe mantener para recuperar el tiempo adicional por el error? (Suponga que la velocidad habría sido de 420 millas por hora si no hubiera ocurrido el error).

*43. **Distancias en el mar** Rebecca, la navegante de un barco en el mar, detecta dos faros que sabe que están a 2 millas uno de otro en una costa recta. Determine que los ángulos que forman las dos líneas de visión a los faros y la recta que va del barco directamente a la costa son de 12° y 30°. Vea la ilustración.

a) ¿Qué tan lejos está el barco del faro *A*?
b) ¿Qué tan lejos está el barco del faro *B*?
c) ¿Qué tan lejos está el barco de la costa?

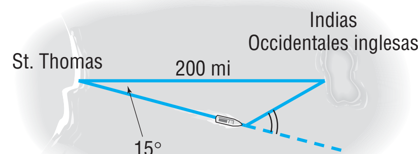


44. **Construcción de una carretera** Se construye una carretera cuya dirección principal es norte-sur a lo largo de la costa oeste de Florida. Cerca de Naples, una bahía obstruye la trayectoria recta. Como el costo de un puente es prohibitivo, los ingenieros deciden darle la vuelta. La ilustración muestra la trayectoria que decidieron seguir y las medidas tomadas. ¿Cuál es la longitud de la carretera necesaria para dar la vuelta a la bahía?

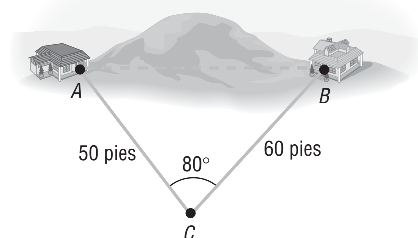


45. **Corrección de un error de navegación** Un velero sale de St. Thomas hacia las Indias Occidentales inglesas, a 200 millas. Mantiene una velocidad constante de 18 millas por hora, pero dado que hay vientos cruzados y corrientes fuertes, la tripulación encuentra, después de 4 horas, que está 15° fuera de curso.

a) ¿A qué distancia está el velero de la isla en este momento?
b) ¿A qué ángulo debe girar el velero para corregir su curso?
c) ¿Cuánto tiempo se agregó al viaje? (Suponga que la velocidad se conserva en 18 millas por hora).

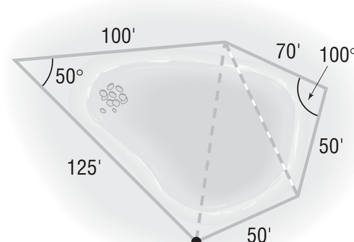


46. **Topografía** Dos casas se localizan en lados opuestos de una pequeña colina. Para medir la distancia entre ellas, un topógrafo camina una distancia de 50 pies desde la casa *A* al punto *C*, usa su teodolito para medir el ángulo *ACB* que es de 80° y luego camina a la casa *B*, una distancia de 60 pies. ¿Qué distancia hay entre las casas?

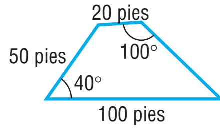


47. **Área aproximada de un lago** Para aproximar el área de un lago, Cindy camina alrededor de su perímetro y toma las medidas mostradas en la ilustración. Usando esta técnica, ¿cuál es el área aproximada del lago?

[**Sugerencia:** Use la ley de los cosenos en los tres triángulos mostrados, después sume sus áreas].



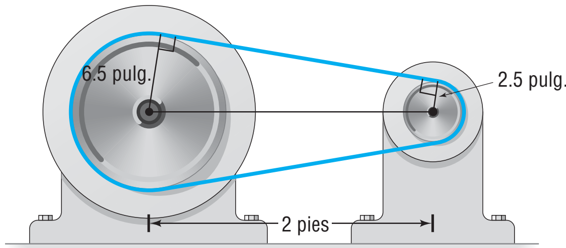
48. Cálculo del costo del terreno El lote irregular mostrado en la figura se vende por $100 el pie cuadrado. ¿Cuál es el costo de este lote?



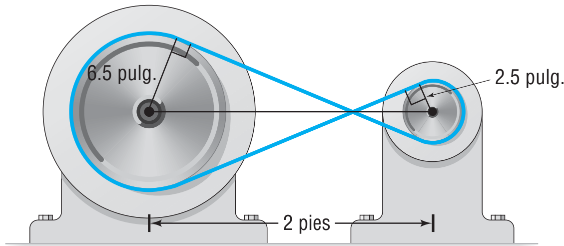
49.* **Área de un segmento Encuentre el área del segmento de un círculo cuyo radio es de 6 pulgadas formado por un ángulo central de 50°.

50. Rumbo de un barco El *Majesty* sale del puerto de Boston hacia Bermuda con rumbo S80°E a una velocidad promedio de 10 nudos. Después de 1 hora, el barco vira 90° al suroeste. Después de 2 horas a una velocidad promedio de 20 nudos, ¿cuál es el rumbo del barco respecto de Boston?

51. La rueda de impulso de un motor tiene 13 pulgadas de diámetro y la polea de la bomba rotatoria tiene 5 pulgadas de diámetro. Si los ejes de la rueda de impulso y la polea están a 2 pies de distancia, ¿qué longitud debe tener la banda que se requiere para unirlas como se muestra en la figura?



52. Trabaje de nuevo el problema 51 para el caso en que se cruza la banda como se muestra en la figura.



En los problemas 53-54, un objeto que cuelga de un resorte se jala hacia abajo una distancia a desde su posición de reposo y luego se suelta. Suponga que el movimiento es armónico simple con periodo T, y escriba una ecuación que relacione el desplazamiento d *del objeto desde su posición de reposo después de t segundos. Además, suponga que la dirección positiva del movimiento es hacia arriba.*

53. $a = 3; T = 4$ segundos

54. $a = 5; T = 6$ segundos

En los problemas 55-58 se da la distancia d (en pies) que recorre un objeto en el tiempo t (en segundos).

a) *Describa el movimiento del objeto.*
b) *¿Cuál es el desplazamiento máximo desde la posición de reposo?*
c) *¿Cuál es el tiempo requerido por una oscilación?*
d) *¿Cuál es la frecuencia?*

**55.* $d = 6 \operatorname{sen}(2t)$

56. $d = 2 \cos(4t)$

57. $d = -2 \cos(\pi t)$

58. $d = -3 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}t\right]$

En los problemas 59-64, grafique cada función

59. $y = e^{-x/2\pi} \operatorname{sen}(2x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

60. $y = e^{-x/3\pi} \cos(4x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

61. $y = x \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

62. $y = x \operatorname{sen}(2x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

63. $y = 2 \operatorname{sen} x + \cos(2x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

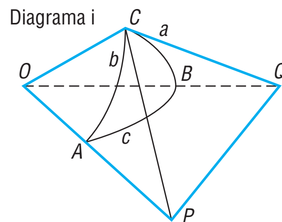
64. $y = 2 \cos(2x) + \operatorname{sen} \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

Proyectos del capítulo



1. **A. Trigonometría esférica** Cuando la distancia entre dos lugares en la superficie de la Tierra es pequeña, se puede calcular la distancia en millas estándar. Usando esta suposición, se utilizan la ley de los senos y la de los cosenos para aproximar distancias y ángulos. Sin embargo, si observa un globo terráqueo, se ve que la Tierra es una esfera; así, cuando aumenta la distancia entre dos puntos en su superficie, la distancia lineal es menos exacta debido a la curvatura. En esta circunstancia, es necesario tomar en cuenta la curvatura de la Tierra usando la ley de los senos y la ley de los cosenos.

   a) Dibuje un triángulo esférico y etiquete los vértices A, B y C. Después conecte cada vértice con un radio al centro O de la esfera. Ahora, dibuje las rectas tangentes a los lados a y b del triángulo que pasan por C. Extienda las líneas OA y OB de modo que crucen las rectas tangentes en P y Q, respectivamente. Vea el diagrama. Enumere los triángulos rectángulos en el plano. Determine las medidas de los ángulos centrales.



   b) Aplique la ley de los cosenos a los triángulos OPQ y CPQ para encontrar dos expresiones para la longitud de PQ.

   c) Reste las expresiones del inciso *b*) una de la otra, despeje el término que contiene cos C.

   d) Use el teorema de Pitágoras para encontrar otro valor para $OQ^2 - CQ^2$ y $OP^2 - CP^2$. Ahora despeje cos C.

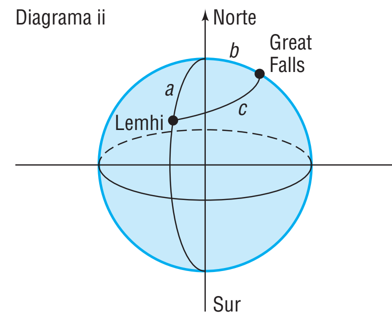
   e) Sustituya las razones del inciso *d*) por los cosenos de los lados del triángulo esférico, ahora debe tener la ley de los cosenos para triángulos esféricos:

$$\cos C = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos C$$

FUENTE: Información de la ley de cosenos esféricos se encuentra en *Mathematics from Birth of Numbers*, de Jan Gullberg. W.W. Norton & Co., Publishers, 1996, pp. 491-494.

B. Expedición de Lewis y Clark Lewis y Clark siguieron varios ríos en su difícil viaje desde lo que ahora es Great Falls, Montana, hasta la costa del Pacífico. Primero, fueron río abajo del Missouri y el Jefferson de Great Falls a Lemhi, Idaho. Como las dos ciudades tienen diferente longitud y latitud, se debe tomar en cuenta la curvatura de la Tierra al calcular la distancia que viajaron. Suponga que el radio de la Tierra es de 3960 millas.

   a) Great Falls está aproximadamente en 47.5°N y 111.3°O. Lemhi está aproximadamente en 45.0°N y 113.5°O. (Se supondrá que los ríos fluyen de Great Falls a Lemhi en la superficie de la Tierra). Esta línea se llama línea geodésica. Aplique la ley de los cosenos para un triángulo esférico, para encontrar el ángulo entre Great Falls y Lehmi. (Los ángulos centrales se encuentran usando las diferencias en latitud y longitud de las ciudades). Luego encuentre la longitud del arco que une las dos ciudades. (Recuerde que $s = r\theta$).



   b) Desde Lemhi, fueron río arriba por los ríos Bitteroot y Snake a lo que ahora es Lewiston y Clarkston en la frontera con Idaho y Washington. Aunque esto en realidad no es un lado de un triángulo, se marcará un lado que va de Lemhi a Lewiston y Clarkston. Si Lewiston y Clarkston están en 46.5°N 117.0°O, encuentre la distancia desde Lemhi usando la ley de los cosenos para un triángulo esférico y la longitud del arco.

   c) ¿Qué tan lejos viajaron los exploradores para llegar ahí?

   d) Dibuje un triángulo plano que conecte las tres ciudades. Si la distancia de Lewiston a Great Falls es 282 millas, al ángulo en Great Falls es de 42° y el ángulo en Lewiston es 48.5°, encuentre la distancia de Great Falls a Lemhi y de Lemhi a Lewiston. ¿Qué tan diferentes son estas distancias de las calculadas en los incisos *a*) y *b*)?

FUENTE: Más información de la expedición de Lewis y Clark se encuentra en *American Journey: The Quest for Liberty to 1877, Texas Edition*. Prentice Hall, 1992, p. 345.

FUENTE: Las coordenadas de los mapas se pueden consultar en *National Geographic Atlas of the World*, publicado por National Geographic Society, 1981, pp. 74-75.

Los siguientes proyectos se encuentran en www.prenhall.com/sullivan.

2. **Project Motorola** ***How Can You Build or Analize a Vibration Profile?***
3. **Leaning Tower of Pisa**
4. **Locating Lost Treasure**

Repaso acumulativo

1. Encuentre las soluciones reales, si las hay, de la ecuación $3x^2 + 1 = 4x$.

2. Encuentre una ecuación para el círculo con centro en el punto $(-5, 1)$ y radio 3. Grafique este círculo.

3. Establezca el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}\ ?$$

4. Grafique la función $y = 3\,\text{sen}(\pi x)$.

5. Grafique la función $y = -2\cos(2x - \pi)$.

6. Si $\tan\theta = -2$ y $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, encuentre el valor exacto de:

a) $\text{sen}\,\theta$ b) $\cos\theta$ c) $\text{sen}(2\theta)$

d) $\cos(2\theta)$ e) $\text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ f) $\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$

7. Grafique cada una de las siguientes funciones en el intervalo $[0, 4]$:

a) $y = e^x$ b) $y = \text{sen}\,x$

c) $y = e^x\,\text{sen}\,x$ d) $y = 2x + \text{sen}\,x$

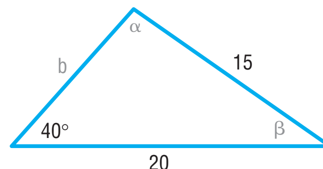
8. Haga la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = x$ b) $y = x^2$ c) $y = \sqrt{x}$

d) $y = x^3$ e) $y = e^x$ f) $y = \ln x$

g) $y = \text{sen}\,x$ h) $y = \cos x$ i) $y = \tan x$

9. Resuelva el triángulo:



10. En el sistema de números complejos, resuelva la ecuación

$$3x^5 - 10x^4 + 21x^3 - 42x^2 + 36x - 8 = 0$$

11. Analice la gráfica de la función racional

$$R(x) = \frac{2x^2 - 7x - 4}{x^2 + 2x - 15}$$

12. Resuelva $3^x = 12$. Redondee su respuesta a dos decimales.

13. Resuelva $\log_3(x + 8) + \log_3 x = 2$.

14. Suponga que $f(x) = 4x + 5$ y $g(x) = x^2 + 5x - 24$.

a) Resuelva $f(x) = 0$. b) Resuelva $f(x) = 13$.

c) Resuelva $f(x) = g(x)$. d) Resuelva $f(x) > 0$.

e) Resuelva $g(x) \leq 0$. f) Grafique $y = f(x)$.

g) Grafique $y = g(x)$.

9 Coordenadas polares y vectores

C O N T E N I D O

9.1 Coordenadas polares

9.2 Ecuaciones polares y gráficas

9.3 El plano complejo; teorema de De Moivre

9.4 Vectores

9.5 Producto punto

Repaso del capítulo

Proyectos del capítulo

Repaso acumulativo

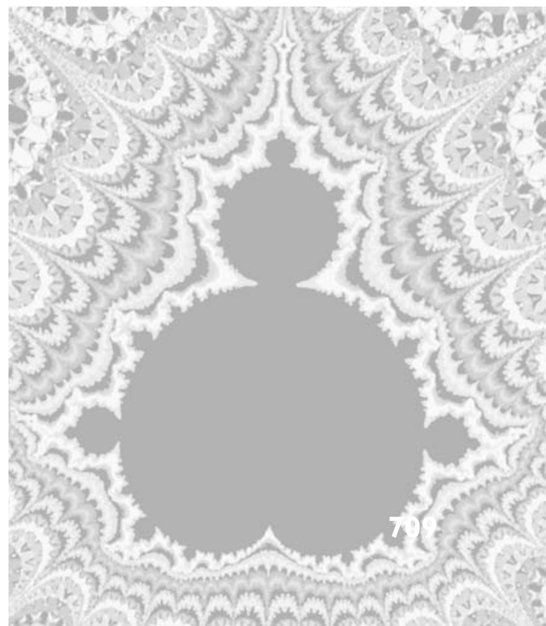
Los multifractales y el mercado

En la actualidad, existe una amplia base matemática para los fractales y los multifractales. Los patrones fractales no sólo aparecen en los cambios de precio en el mercado de valores, también se les encuentra en la distribución de las galaxias en el Cosmos, en las formas de las costas y en los diseños decorativos generados por numerosos programas de computadora.

Un fractal es una forma geométrica que se puede dividir en partes que son una versión a escala reducida de todo el conjunto. En las finanzas, este concepto no es una abstracción sin fundamento, sino una reformulación teórica de una parte subyacente del folclor del mercado, es decir, que todos los movimientos de acciones o moneda tienen el mismo aspecto al amplificar o reducir una gráfica del mercado de manera que se ajuste al mismo periodo y escala de precios. Un observador no podría entonces decir cuáles de los datos se refieren a los precios que cambian semana tras semana, día con día u hora a hora. Esta cualidad define a las gráficas como curvas fractales y permite el uso de muchas herramientas de análisis matemático y computarizado.

FUENTE: Benoit Mandelbrot, *Scientific American*, febrero de 1999.

—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO.



9.1 Coordenadas polares

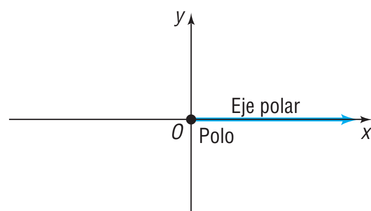
PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Coordenadas rectangulares (sección 2.1, pp. 158-159)
- Definición de las funciones seno y coseno (sección 6.4, p. 526)
- Función arco tangente (sección 7.1, pp. 599-600)
- Completar cuadrados (sección 1.2, p. 99)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 717.

OBJETIVOS
1. Graficar puntos usando coordenadas polares
2. Convertir coordenadas polares en coordenadas rectangulares
3. Convertir coordenadas rectangulares en coordenadas polares

Figura 1



Hasta ahora, para graficar puntos en el plano siempre se ha utilizado un sistema de coordenadas rectangulares. Ahora se está listo para describir otro sistema llamado coordenadas polares. En muchos casos, como pronto se verá, las coordenadas polares tienen ciertas ventajas sobre las rectangulares.

Como recordará, en un sistema de coordenadas rectangulares un punto en el plano se representa mediante un par ordenado (x, y), donde x y y son iguales a la distancia con signo del punto desde el eje y y el eje x, respectivamente. En un sistema de coordenadas polares, se selecciona un punto, llamado **polo**, y luego un rayo con vértice en el polo, llamado **eje polar**. Al comparar los sistemas de coordenadas rectangular y polar, se ve (en la figura 1) que el origen y el eje x positivo de las coordenadas rectangulares coinciden con el polo y el eje polar de las coordenadas polares, respectivamente.

1 En un sistema de coordenadas polares, un punto P se representa por medio de un par ordenado de números (r, θ). Si $r > 0$, entonces r es la distancia entre el punto y el polo; θ es un ángulo (en grados o radianes) formado por el eje polar y un rayo que parte del polo y pasa por tal punto. Al par ordenado (r, θ) lo llamamos las **coordenadas polares** del punto. Vea la figura 2.

Como ejemplo, suponga que las coordenadas polares de un punto P son $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$. Se localiza P trazando primero un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes, colocando su vértice en el polo y su lado inicial a lo largo del eje polar. Después se avanza una distancia de dos unidades a lo largo del lado terminal del ángulo hasta llegar al punto P. Vea la figura 3.

Figura 2

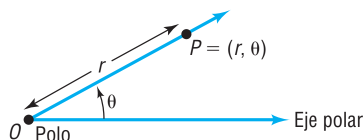
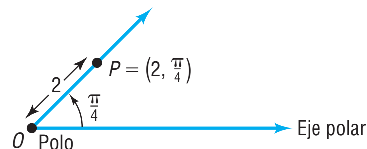


Figura 3





TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

Al utilizar coordenadas polares (r, θ), es posible que el primer elemento r sea negativo. Cuando esto ocurre, en lugar de que el punto esté sobre el lado terminal de θ, está sobre el rayo que parte del polo y se extiende en dirección *opuesta* al lado terminal de θ una distancia de $|r|$ unidades. Vea la ilustración de la figura 4.

Por ejemplo, para graficar el punto $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$, usamos el rayo que va en dirección opuesta a $\frac{2\pi}{3}$ y se extiende por $|-3| = 3$ unidades. Vea la figura 5.

Figura 4

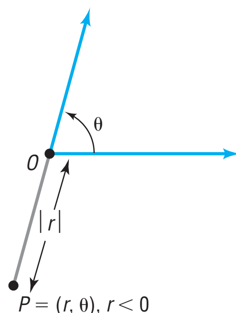
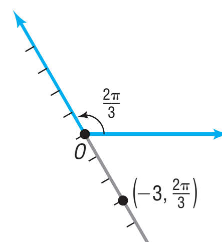


Figura 5



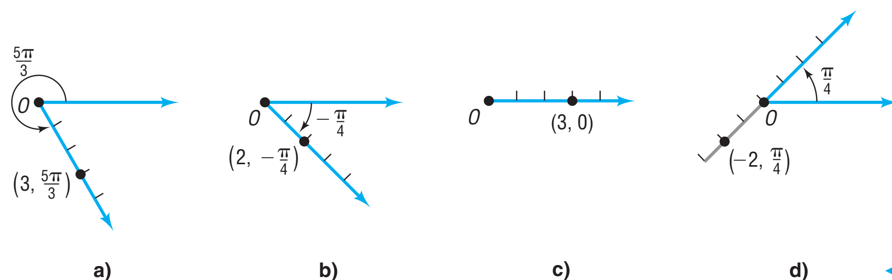
EJEMPLO 1 Graficar puntos usando coordenadas polares

Grafique los puntos con las siguientes coordenadas polares:

a) $\left(3, \frac{5\pi}{3}\right)$ b) $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$ c) $(3, 0)$ d) $\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$

Solución En la figura 6 se muestran los puntos.

Figura 6





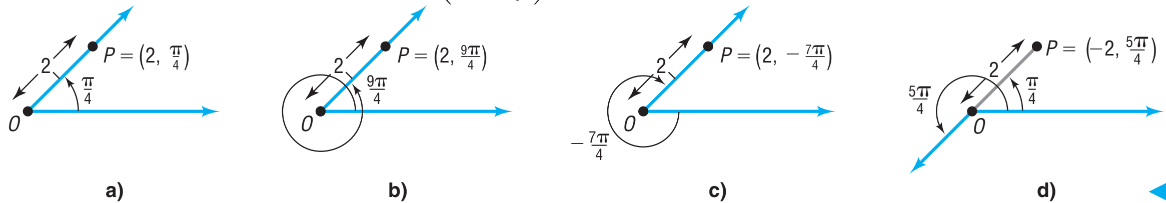
TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 11 Y 27.

Cabe recordar que un ángulo medido en sentido opuesto de las manecillas del reloj es positivo, en tanto que un ángulo medido en el sentido de las manecillas del reloj es negativo. Esta convención tiene algunas consecuencias interesantes relativas a las coordenadas polares. Véanse cuáles son.

EJEMPLO 2 Encontrar varias coordenadas polares de un solo punto

Considérese de nuevo el punto P con coordenadas polares $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, como se muestran en la figura 7*a*). Puesto que $\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$, y $-\frac{7\pi}{4}$ tienen el mismo lado terminal, también se podría haber localizado este punto P utilizando las coordenadas polares $\left(2, \frac{9\pi}{4}\right)$ o $\left(2, -\frac{7\pi}{4}\right)$, como se muestran en las figuras 7*b*) y *c*). El punto $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ también se representa mediante las coordenadas polares $\left(-2, \frac{5\pi}{4}\right)$. Vea la figura 7*d*).

Figura 7



EJEMPLO 3 Encontrar otras coordenadas polares de un punto dado

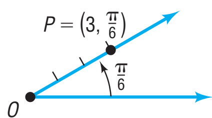
Grafique el punto P con coordenadas polares $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$, y encuentre otras coordenadas polares (r, θ) del mismo punto para las que:

a) $r > 0, \quad 2\pi \leq \theta < 4\pi$ b) $r < 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

c) $r > 0, \quad -2\pi \leq \theta < 0$

Solución En la figura 8 se encuentra graficado el punto $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$.

Figura 8



a) Se añade 1 revolución (2π radianes) al ángulo $\frac{\pi}{6}$ para obtener $P = \left(3, \frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \left(3, \frac{13\pi}{6}\right)$. Vea la figura 9.

b) Se añade $\frac{1}{2}$ revolución (π radianes) al ángulo $\frac{\pi}{6}$ y se reemplaza 3 por -3, para obtener $P = \left(-3, \frac{\pi}{6} + \pi\right) = \left(-3, \frac{7\pi}{6}\right)$. Vea la figura 10.

c) Se resta 2π al ángulo $\frac{\pi}{6}$ para obtener $P = \left(3, \frac{\pi}{6} - 2\pi\right) = \left(3, -\frac{11\pi}{6}\right)$. Vea la figura 11.

Figura 9

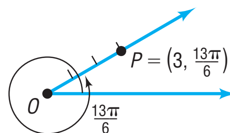


Figura 10

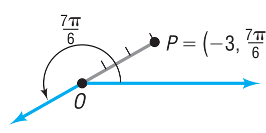
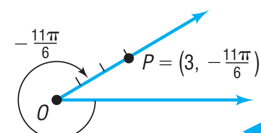


Figura 11





TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

Esos ejemplos muestran una importante diferencia entre las coordenadas rectangulares y las polares. En las primeras, cada punto tiene exactamente un par de coordenadas rectangulares; en las últimas, un punto tendría infinidad de coordenadas polares.

Resumen

Un punto con coordenadas polares (r, θ) también se representa por medio de cualquiera de las siguientes opciones:

$$(r, \theta + 2k\pi) \quad \text{o} \quad (-r, \theta + \pi + 2k\pi), \qquad \text{donde } k \text{ es cualquier entero}$$

Las coordenadas polares del polo son $(0, \theta)$, donde θ puede ser cualquier ángulo.

Conversión de coordenadas polares a rectangulares, y viceversa

2 A veces resulta conveniente, e incluso necesario, poder convertir coordenadas o ecuaciones de forma rectangular a forma polar, y viceversa. Para ello, hay que recordar que el origen de las coordenadas rectangulares es el polo de las coordenadas polares, y que el eje x positivo de las coordenadas rectangulares es el eje polar de las coordenadas polares.

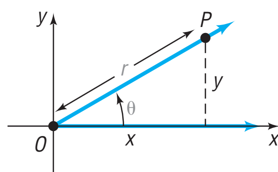
Teorema

Conversión de coordenadas polares a coordenadas rectangulares

Si P es un punto con coordenadas polares (r, θ), las coordenadas rectangulares (x, y) de P están dadas por

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{1}$$

Figura 12



Demostración Suponga que P tienen las coordenadas polares (r, θ). Se buscan las coordenadas rectangulares (x, y) de P. Consulte la figura 12.

Si $r = 0$, entonces, independientemente de θ, el punto P corresponde al polo, para el que las coordenadas rectangulares son $(0, 0)$. La fórmula (1) es válida para $r = 0$.

Si $r > 0$, el punto P está sobre el lado terminal de θ, y $r = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Puesto que

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}$$

se tiene:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Si $r < 0$, entonces el punto $P = (r, \theta)$ se representa como $(-r, \pi + \theta)$, donde $-r > 0$. Como

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta = \frac{x}{-r} \qquad \text{sen}(\pi + \theta) = -\text{sen}\,\theta = \frac{y}{-r}$$

se tiene:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

■

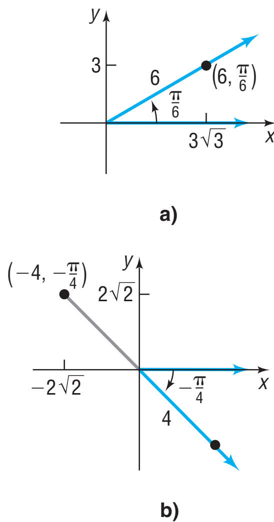
EJEMPLO 4 Convertir coordenadas polares a coordenadas rectangulares

Encuentre las coordenadas rectangulares de los puntos con las siguientes coordenadas polares:

a) $\left(6, \dfrac{\pi}{6}\right)$ b) $\left(-4, -\dfrac{\pi}{4}\right)$

Solución Se utiliza la fórmula (1): $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

Figura 13



a) En la figura 13*a*) se muestra la gráfica de $\left(6, \dfrac{\pi}{6}\right)$. Con $r = 6$ y $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, se tiene

$$x = r\cos\theta = 6\cos\frac{\pi}{6} = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 6\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$$

Las coordenadas rectangulares del punto $\left(6, \dfrac{\pi}{6}\right)$ son $\left(3\sqrt{3}, 3\right)$.

b) En la figura 13*b*) se muestra la gráfica de $\left(-4, -\dfrac{\pi}{4}\right)$. Con $r = -4$ y $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$, se tiene:

$$x = r\cos\theta = -4\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = -4\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Las coordenadas rectangulares del punto $\left(-4, -\dfrac{\pi}{4}\right)$ son $\left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

◀

Nota: La mayoría de las calculadoras pueden convertir coordenadas polares a coordenadas rectangulares. Consulte el procedimiento en el manual del propietario. Puesto que en la mayoría de los casos este proceso es tedioso, encontrará que es más rápido emplear la fórmula (1).

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **39** Y **51**.

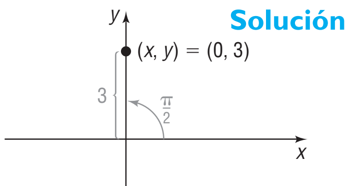


La conversión de coordenadas rectangulares (x, y) a coordenadas polares (r, θ) es un poco más complicada. Observe que se comienza cada ejemplo graficando las coordenadas rectangulares dadas.

EJEMPLO 5 Convertir coordenadas rectangulares a coordenadas polares

Encuentre las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas rectangulares son $(0, 3)$.

Figura 14

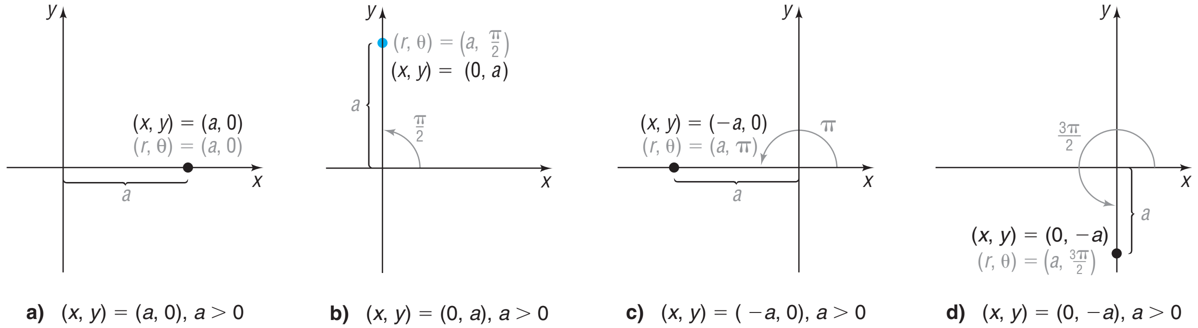


Solución Vea la figura 14. El punto $(0, 3)$ queda sobre el eje y, a una distancia de 3 unidades del origen (polo), entonces $r = 3$. Una línea con vértice en el polo y que pasa por $(0, 3)$ forma un ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ con el eje polar. Las coordenadas polares de este punto se podrían dar como $\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

◀

En la figura 15 se muestran las coordenadas polares de los puntos que quedan sobre alguno de los ejes rectangulares, x o y. En cada una de las ilustraciones, $a > 0$.

Figura 15



a) $(x, y) = (a, 0), a > 0$ b) $(x, y) = (0, a), a > 0$ c) $(x, y) = (-a, 0), a > 0$ d) $(x, y) = (0, -a), a > 0$

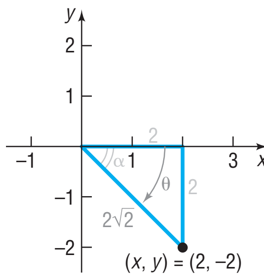
TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 55.

EJEMPLO 6 Convertir coordenadas rectangulares a coordenadas polares

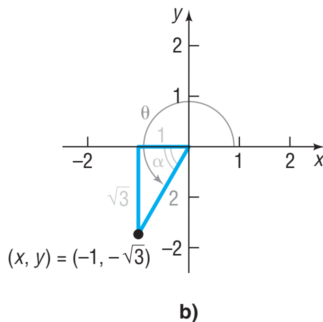
Encuentre las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas rectangulares son:

a) $(2, -2)$ b) $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$

Figura 16



a)



b)

Solución a) Vea la figura 16*a*). La distancia r desde el origen hasta el punto $(2, -2)$ es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Para encontrar θ, se utiliza el ángulo de referencia α. Entonces:

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-2}{2}\right| = \tan^{-1}\frac{2}{2} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Usando la figura 16*a*), $\theta = -\frac{\pi}{4}$, y las coordenadas polares de este punto son $\left(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$. Otras posibles representaciones incluyen a $\left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$ y $\left(-2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Vea la figura 16*b*). La distancia r desde el origen hasta el punto $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$ es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Para encontrar θ, se utiliza el ángulo de referencia α. Entonces:

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

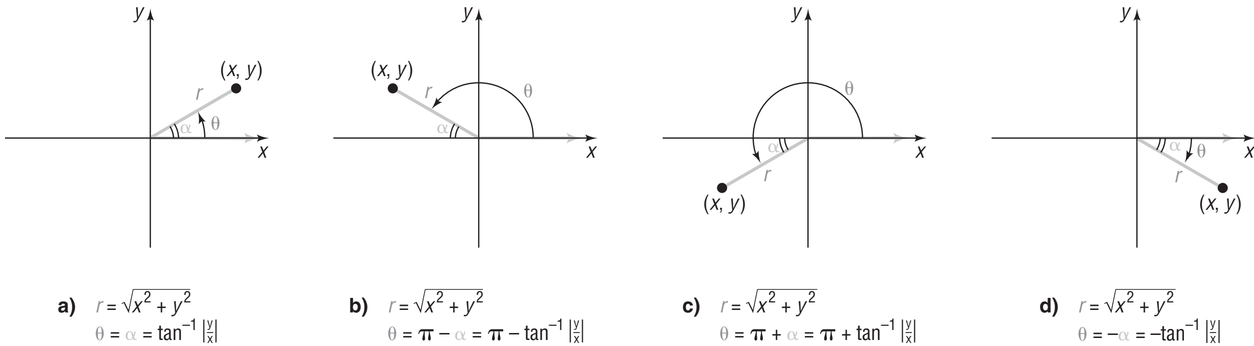
Se utiliza la figura 16*b*),

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

y las coordenadas polares son $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$. Entre otras posibles representaciones, se incluyen $\left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$ y $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$. ◀

En la figura 17 se muestra cómo encontrar las coordenadas polares de un punto que queda en un cuadrante cuando se tienen sus coordenadas rectangulares (x, y).

Figura 17



Con base en el análisis anterior, se tienen las fórmulas

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \text{si } x \neq 0 \tag{2}$$

Para utilizar la fórmula (2) de manera eficaz, siga los pasos que se muestran a continuación:

Pasos para convertir coordenadas rectangulares a polares

Paso 1: Siempre grafique primero el punto (x, y), como se hizo en los ejemplos 5 y 6.

Paso 2: Para encontrar r, calcule la distancia de (x, y) al origen.

Paso 3: Para encontrar θ, es mejor calcular el ángulo de referencia α de θ, $\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$, se $x \neq 0$, y luego utilizar su ilustración para encontrar θ.

Véase de nuevo la figura 17 y el ejemplo 6.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 59.

Las fórmulas (1) y (2) también se utilizan para transformar ecuaciones.

EJEMPLO 7 Transformar una ecuación de forma polar a rectangular

Transforme la ecuación $r = 4 \text{ sen } \theta$ de coordenadas polares a coordenadas rectangulares, e identifique la gráfica.

Solución Si se multiplican ambos lados por r, resulta más sencillo aplicar las fórmulas (1) y (2).

$$r = 4 \text{ sen } \theta$$

$$r^2 = 4r \text{ sen } \theta \qquad \text{Se multiplican ambos lados por } r.$$

$$x^2 + y^2 = 4y \qquad r^2 = x^2 + y^2;\ y = r \text{ sen } \theta$$

Ésta es la ecuación de un círculo; se procede a completar el cuadrado, para obtener la forma estándar de la ecuación.

$$x^2 + y^2 = 4y$$
$$x^2 + (y^2 - 4y) = 0 \quad \text{Forma general}$$
$$x^2 + (y^2 - 4y + 4) = 4 \quad \text{Se completa el cuadrado en } y.$$
$$x^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad \text{Forma estándar}$$

El centro del círculo está en $(0, 2)$, y su radio es 2. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 75.

EJEMPLO 8 **Transformar una ecuación de forma rectangular a polar**

Transforme la ecuación $4xy = 9$ de coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

Solución Se utiliza la fórmula (1).

$$4xy = 9$$
$$4(r\cos\theta)(r\,\text{sen}\,\theta) = 9 \quad x = r\cos\theta,\ y = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$4r^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = 9$$
$$2r^2(2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) = 9 \quad \text{Se factoriza } 2r^2.$$
$$2r^2\,\text{sen}(2\theta) = 9 \quad \text{Fórmulas del ángulo doble}$$ ◀

9.1 Evalúe su comprensión

"Está preparado" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Las coordenadas rectangulares de un punto son $(3, -1)$. Grafíquelo. (pp. 158–159)

2. Para completar el cuadrado de $x^2 + 6x$, se suma __________. (p. 99)

3. Si $P = (a, b)$ es un punto sobre el lado terminal del ángulo θ, entonces $\text{sen}\,\theta =$ __________. (p. 526)

4. $\tan^{-1}(-1) =$ __________ (pp. 599–600)

Conceptos y vocabulario

5. En coordenadas polares, el origen se llama __________ y el eje x positivo se denomina como el __________ __________.

6. Otra representación en coordenadas polares del punto $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ es $\left(__________, \frac{4\pi}{3}\right)$.

7. Las coordenadas polares $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$ se representan en coordenadas rectangulares por medio de (__________, __________).

8. *Falso o verdadero:* las coordenadas polares de un punto son únicas.

9. *Falso o verdadero:* las coordenadas rectangulares de un punto son únicas.

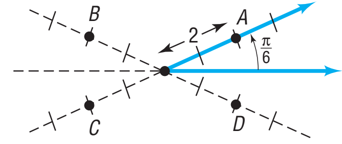
10. *Falso o verdadero:* en (r, θ), el número r puede ser negativo.

Ejercicios

En los problemas 11-18, relacione cada uno de los puntos en coordenadas polares con A, B, C o D sobre la gráfica.

11. $\left(2, -\frac{11\pi}{6}\right)$ **12.** $\left(-2, -\frac{\pi}{6}\right)$ **13.** $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$ **14.** $\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$

15. $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$ **16.** $\left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$ **17.** $\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$ **18.** $\left(2, \frac{11\pi}{6}\right)$



En los problemas 19-30, grafique cada uno de los puntos dados en coordenadas polares.

19. $(3, 90°)$ **20.** $(4, 270°)$ **21.** $(-2, 0)$ **22.** $(-3, \pi)$

23. $\left(6, \frac{\pi}{6}\right)$ **24.** $\left(5, \frac{5\pi}{3}\right)$ **25.** $(-2, 135°)$ **26.** $(-3, 120°)$

27. $\left(-1, -\frac{\pi}{3}\right)$ **28.** $\left(-3, -\frac{3\pi}{4}\right)$ **29.** $(-2, -\pi)$ **30.** $\left(-3, -\frac{\pi}{2}\right)$

En los problemas 31-38, grafique cada uno de los puntos dados en coordenadas polares, y encuentre otras coordenadas polares (r, θ) del mismo punto para las que:

(a) $r > 0, \quad -2\pi \le \theta < 0$ (b) $r < 0, \quad 0 \le \theta < 2\pi$ (c) $r > 0, \quad 2\pi \le \theta < 4\pi$

31. $\left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$ **32.** $\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$ **33.** $(-2, 3\pi)$ **34.** $(-3, 4\pi)$

35. $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ **36.** $(2, \pi)$ **37.** $\left(-3, -\frac{\pi}{4}\right)$ **38.** $\left(-2, -\frac{2\pi}{3}\right)$

En los problemas 39-54, se dan las coordenadas polares de un punto. Encuentre las coordenadas rectangulares de cada uno de ellos.

39. $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ **40.** $\left(4, \frac{3\pi}{2}\right)$ **41.** $(-2, 0)$ **42.** $(-3, \pi)$

43. $(6, 150°)$ **44.** $(5, 300°)$ **45.** $\left(-2, \frac{3\pi}{4}\right)$ **46.** $\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$

47. $\left(-1, -\frac{\pi}{3}\right)$ **48.** $\left(-3, -\frac{3\pi}{4}\right)$ **49.** $(-2, -180°)$ **50.** $(-3, -90°)$

51. $(7.5, 110°)$ **52.** $(-3.1, 182°)$ **53.** $(6.3, 3.8)$ **54.** $(8.1, 5.2)$

En los problemas 55-66, se dan las coordenadas rectangulares de un punto. Encuentre coordenadas polares para cada uno de ellos.

55. $(3, 0)$ **56.** $(0, 2)$ **57.** $(-1, 0)$ **58.** $(0, -2)$

59. $(1, -1)$ **60.** $(-3, 3)$ **61.** $(\sqrt{3}, 1)$ **62.** $(-2, -2\sqrt{3})$

63. $(1.3, -2.1)$ **64.** $(-0.8, -2.1)$ **65.** $(8.3, 4.2)$ **66.** $(-2.3, 0.2)$

En los problemas 67-74, las letras x y y representan coordenadas rectangulares. Escriba cada ecuación utilizando coordenadas polares (r, θ).

67. $2x^2 + 2y^2 = 3$ **68.** $x^2 + y^2 = x$ **69.** $x^2 = 4y$ **70.** $y^2 = 2x$

71. $2xy = 1$ **72.** $4x^2y = 1$ **73.** $x = 4$ **74.** $y = -3$

En los problemas 75-82, las letras r y θ representan coordenadas polares. Escriba cada ecuación utilizando coordenadas rectangulares (x, y).

75. $r = \cos\theta$ **76.** $r = \operatorname{sen}\theta + 1$ **77.** $r^2 = \cos\theta$ **78.** $r = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

79. $r = 2$ **80.** $r = 4$ **81.** $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$ **82.** $r = \dfrac{3}{3 - \cos\theta}$

83. Demuestre que la fórmula para la distancia d entre dos puntos $P_1 = (r_1, \theta_1)$ y $P_2 = (r_2, \theta_2)$ es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

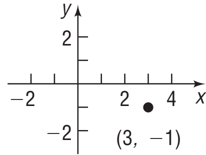
84. ¿Qué fórmulas utilizará para convertir coordenadas polares a coordenadas rectangulares?

85. Explique el proceso que utiliza para convertir coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

86. El sistema de calles del lugar donde vive, ¿se basa en un sistema de coordenadas rectangulares, polares o en alguno otro? Explíquelo.

Respuestas a "Está preparado"

1.



2. 9 **3.** $\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ **4.** $-\dfrac{\pi}{4}$

9.2 Ecuaciones polares y gráficas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Gráficas de ecuaciones (sección 2.2, pp. 165-173)
- Propiedades pares-impares de las funciones trigonométricas (sección 6.5, pp. 544-545)
- Circunferencias (sección 2.3, pp. 175-179)
- Fórmulas de diferencia (sección 7.4, pp. 616 y 619)
- Valor de las funciones seno y coseno para ciertos ángulos (sección 6.3, p.520, y sección 6.4, pp. 526-534)

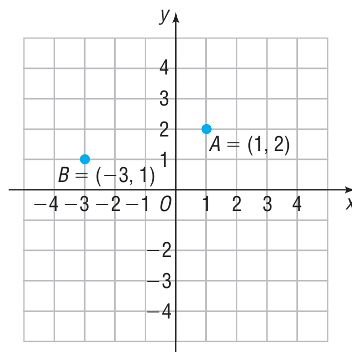


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 733.

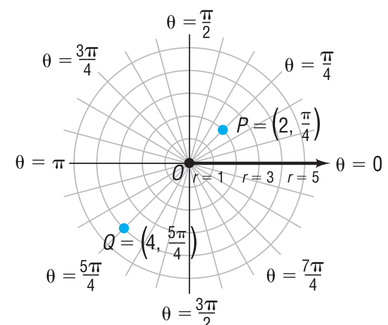
OBJETIVOS
1 Graficar e identificar ecuaciones polares mediante la conversión a ecuaciones rectangulares
2 Probar la simetría de ecuaciones polares
3 Graficar ecuaciones polares mediante el trazo de puntos

Así como es posible utilizar una retícula rectangular para trazar los puntos dados por las coordenadas rectangulares, como se aprecia en la figura 18*a*), se utiliza una retícula compuesta por círculos concéntricos (con centro en el polo) y líneas (con vértices en el polo) para trazar los puntos dados por las coordenadas polares, como se muestra en la figura 18*b*). Se utilizarán dichas **retículas polares** para graficar *ecuaciones polares*.

Figura 18



a) Retícula rectangular



b) Retícula polar

Una ecuación cuyas variables están en coordenadas polares se denomina **ecuación polar.** La **gráfica de una ecuación polar** se compone de todos los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen la ecuación.



Un método que se utiliza para graficar una ecuación polar consiste en convertir la ecuación a coordenadas rectangulares. En el siguiente análisis, (x, y) representan las coordenadas rectangulares de un punto P y (r, θ) las coordenadas polares del mismo punto P.

EJEMPLO 1 Identificar y graficar una ecuación polar (círculo)

Identifique y grafique la ecuación: $r = 3$

Solución Se convierte la ecuación polar en una ecuación rectangular.

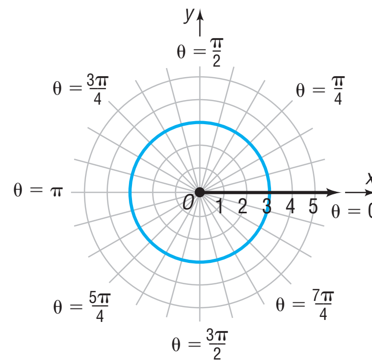
$$r = 3$$

$$r^2 = 9 \qquad \text{Se elevan ambos lados al cuadrado.}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

La gráfica de $r = 3$ es un círculo, con centro en el polo y un radio de 3. Vea la figura 19.

Figura 19
$r = 3$ o $x^2 + y^2 = 9$



◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

EJEMPLO 2 Identificar y graficar una ecuación polar (recta)

Identifique y grafique la ecuación: $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

Solución Se convierte la ecuación polar en una ecuación rectangular.

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

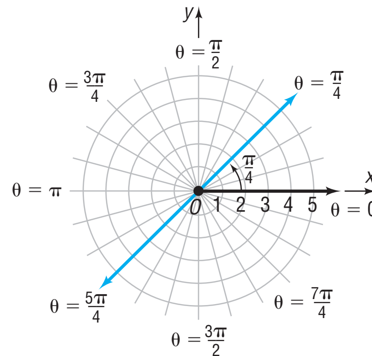
$$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\frac{y}{x} = 1 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$y = x$$

La gráfica de $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ es una recta que pasa por el polo formando un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ con el eje polar. Vea la figura 20.

Figura 20
$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ o $y = x$




TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 15.

EJEMPLO 3 Identificar y graficar una ecuación polar (recta horizontal)

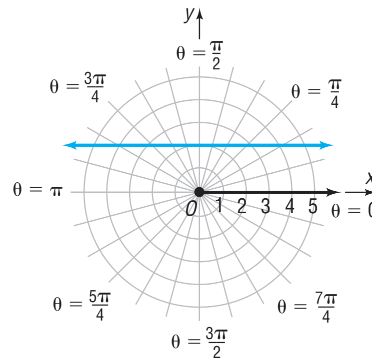
Identifique y grafique la ecuación: $r \text{ sen } \theta = 2$

Solución Puesto que $y = r \text{ sen } \theta$, se escribe la ecuación como:

$$y = 2$$

Se concluye que la gráfica de $r \text{ sen } \theta = 2$ es una recta horizontal que se encuentra 2 unidades arriba del polo. Vea la figura 21.

Figura 21
$r \text{ sen } \theta = 2$ o $y = 2$




COMENTARIO: Se puede utilizar una calculadora gráfica para representar ecuaciones polares. Examine *Uso de una calculadora gráfica para representar ecuaciones polares*, sección 8 del apéndice. ■

EJEMPLO 4 Identificar y graficar una ecuación polar (recta vertical)

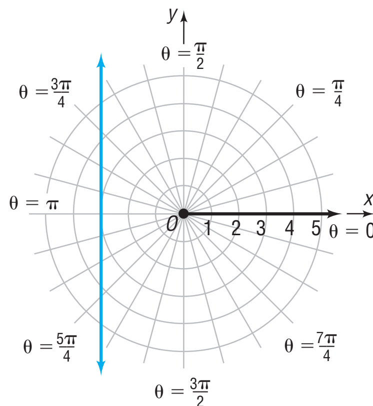
Identifique y grafique la ecuación: $r \cos \theta = -3$

Solución Puesto que $x = r \cos \theta$, la ecuación se escribe como:

$$x = -3$$

Se concluye que la gráfica de $r \cos \theta = -3$ es una recta vertical que se encuentra 3 unidades a la izquierda del polo. La gráfica aparece en la figura 22.

Figura 22
$r \cos \theta = -3$ o $x = -3$





Comprobación: Grafique $r = -\dfrac{3}{\cos \theta}$ utilizando θ mín $= 0$, θ máx $= 2\pi$, y θ step $= \dfrac{\pi}{24}$. Compare el resultado con la figura 22.

Con base en los ejemplos 3 y 4, se concluye lo siguiente (las demostraciones se dejan como ejercicio).

Teorema

Sea a un número real distinto de cero. Entonces, la gráfica de la ecuación

$$r \text{ sen } \theta = a$$

es una recta horizontal que se encuentra a unidades arriba del polo si $a > 0$ y $|a|$ unidades abajo del polo si $a < 0$.

La gráfica de la ecuación

$$r \cos \theta = a$$

es una recta vertical que se encuentra a unidades a la derecha del polo si $a > 0$ y $|a|$ unidades a la izquierda del polo si $a < 0$.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

EJEMPLO 5 Identificar y graficar una ecuación polar (círculo)

Identifique y grafique la ecuación: $r = 4 \text{ sen } \theta$

Solución Para transformar la ecuación a coordenadas rectangulares, se multiplica por r ambos lados.

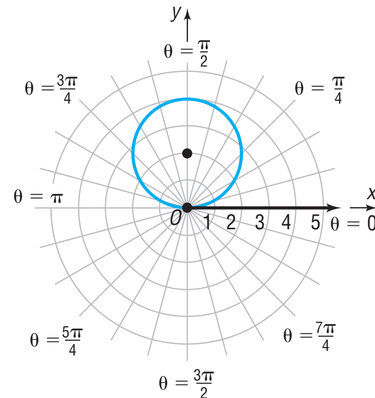
$$r^2 = 4r \text{ sen } \theta$$

Ahora se parte del hecho de que $r^2 = x^2 + y^2$ y $y = r \text{ sen } \theta$. Entonces:

$$x^2 + y^2 = 4y$$
$$x^2 + (y^2 - 4y) = 0$$
$$x^2 + (y^2 - 4y + 4) = 4 \quad \text{Se completa el cuadrado en } y.$$
$$x^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad \text{Ecuación normal de un círculo}$$

Ésta es la ecuación de un círculo con centro en (0, 2) en coordenadas rectangulares y radio 2. La gráfica se muestra en la figura 23.

Figura 23
$r = 4 \text{ sen } \theta$ o $x^2 + (y - 2)^2 = 4$



EJEMPLO 6 Identificar y graficar una ecuación polar (círculo)

Identifique y grafique la ecuación: $r = -2 \cos \theta$

Solución Se procederá como en el ejemplo 5.

$$r^2 = -2r \cos \theta \qquad \text{Se multiplican ambos lados por } r.$$

$$x^2 + y^2 = -2x \qquad r^2 = x^2 + y^2;\ x = r \cos \theta$$

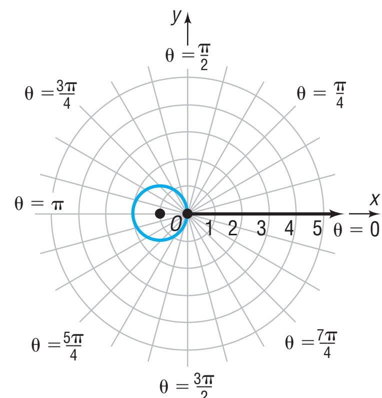
$$x^2 + 2x + y^2 = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 1 \qquad \text{Se completa el cuadrado en } x.$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1 \qquad \text{Ecuación normal de un círculo}$$

Ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(-1, 0)$ en coordenadas rectangulares y radio 1. La gráfica se muestra en la figura 24.

Figura 24
$r = -2 \cos \theta$ o $(x + 1)^2 + y^2 = 1$





COMPROBACIÓN: Grafique $r = 4 \text{ sen } \theta$ y compare el resultado con la figura 23. Borre la pantalla y haga lo mismo con $r = -2 \cos \theta$ y compárelo con la figura 24. Cerciórese de utilizar una pantalla cuadrada.



Exploración

Utilizando la pantalla cuadrada, grafique $r_1 = \text{sen}\,\theta$, $r_2 = 2\,\text{sen}\,\theta$, y $r_3 = 3\,\text{sen}\,\theta$. ¿Observa el patrón? Borre la pantalla y grafique $r_1 = -\,\text{sen}\,\theta$, $r_2 = -2\,\text{sen}\,\theta$, y $r_3 = -3\,\text{sen}\,\theta$. ¿Observa el patrón? Borre la pantalla y grafique $r_1 = \cos\theta$, $r_2 = 2\cos\theta$, y $r_3 = 3\cos\theta$. ¿Observa el patrón? Borre la pantalla y grafique $r_1 = -\cos\theta$, $r_2 = -2\cos\theta$, y $r_3 = -3\cos\theta$. ¿Observa el patrón?

Con base en los ejemplos 5 y 6, y la exploración anterior, se concluye lo siguiente (las demostraciones se dejan como ejercicio).

Teorema

Sea a un número real positivo. Entonces

Ecuación	**Descripción**
a) $r = 2a\,\text{sen}\,\theta$	Círculo: radio a; centro en $(0, a)$ en coordenadas rectangulares
b) $r = -2a\,\text{sen}\,\theta$	Círculo: radio a; centro en $(0, -a)$ en coordenadas rectangulares
c) $r = 2a\cos\theta$	Círculo: radio a; centro en $(a, 0)$ en coordenadas rectangulares
d) $r = -2a\cos\theta$	Círculo: radio a; centro en $(-a, 0)$ en coordenadas rectangulares

Cada uno de estos círculos pasa por el polo.

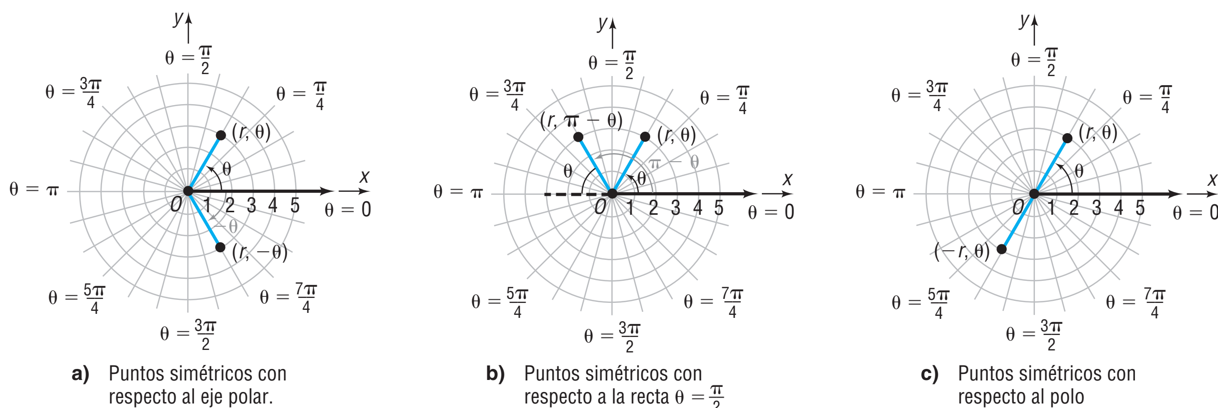
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

El método para convertir una ecuación polar en una ecuación rectangular identificable, con el fin de obtener la gráfica, no siempre es útil ni siempre es necesario. Por lo general, se forma una tabla que enumera varios puntos de la gráfica. Si se revisa la simetría, es posible reducir el número de puntos necesarios para trazar la gráfica.

Simetría

 2 En las coordenadas polares, los puntos (r, θ) y $(r, -\theta)$ son simétricos con respecto al eje polar (y al eje x). Vea la figura 25*a*). Los puntos (r, θ) y

Figura 25



a) Puntos simétricos con respecto al eje polar.

b) Puntos simétricos con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$

c) Puntos simétricos con respecto al polo

$(r, \pi - \theta)$ son simétricos con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ (el eje y) Vea la figura 25*b*). Los puntos (r, θ) y $(-r, \theta)$ son simétricos con respecto al polo (el origen). Vea la figura 25*c*).

Los siguientes ensayos son consecuencia de estas observaciones.

Teorema

Pruebas en busca de simetría

Simetría con respecto al eje polar (eje x)

En una ecuación polar, se reemplaza a θ por $-\theta$. Si tiene como resultado una ecuación equivalente, la gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

Simetría con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ (eje y)

En una ecuación polar, se reemplaza θ por $\pi - \theta$. Si tiene como resultado una ecuación equivalente, la gráfica es simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Simetría con respecto al polo (origen)

En una ecuación polar, se reemplaza a r por $-r$. Si tiene como resultado una ecuación equivalente, la gráfica es simétrica con respecto al polo.

Las tres pruebas de simetría aquí expuestas son condiciones suficientes para la simetría, pero no son condiciones obligatorias. Es decir, una ecuación podría transgredir estas pruebas y aún así tener una gráfica simétrica con respecto al eje polar, a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$, o al polo. Por ejemplo, la gráfica de $r = \operatorname{sen}(2\theta)$ resulta simétrica con respecto al eje polar, a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$, y al polo; pero contraviene las tres pruebas mencionadas. Vea también los problemas 81, 82 y 83.


3 **EJEMPLO 7** **Graficar una ecuación polar (cardioide)**

Grafique la ecuación: $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

Solución Primero se verifica la simetría.

Eje polar: Si se reemplaza θ por $-\theta$. El resultado es

$$r = 1 - \operatorname{sen}(-\theta) = 1 + \operatorname{sen}\theta$$

La prueba fracasa, de manera que la gráfica puede o no ser simétrica con respecto al eje polar.

La recta $\theta = \frac{\pi}{2}$: Si se reemplaza θ por $\pi - \theta$. El resultado es:

$$\begin{aligned} r = 1 - \operatorname{sen}(\pi - \theta) &= 1 - (\operatorname{sen}\pi\cos\theta - \cos\pi\operatorname{sen}\theta) \\ &= 1 - [0 \cdot \cos\theta - (-1)\operatorname{sen}\theta] = 1 - \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Se satisface la prueba, de manera que la gráfica es simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

El polo: Si se reemplaza r por $-r$. Entonces el resultado es $-r = 1 - \operatorname{sen}\theta$, de manera que $r = -1 + \operatorname{sen}\theta$. La prueba fracasa, de manera que la gráfica puede o no ser simétrica con respecto al polo.

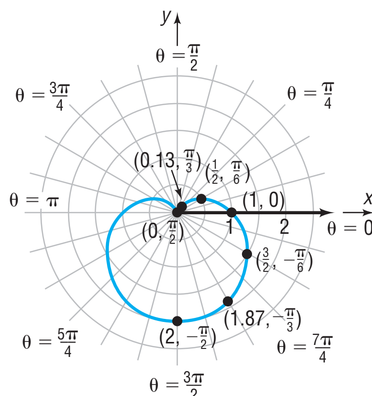
Tabla 1

θ	$r = 1 - \text{sen}\,\theta$
$-\frac{\pi}{2}$	$1 - (-1) = 2$
$-\frac{\pi}{3}$	$1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 1.87$
$-\frac{\pi}{6}$	$1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$
0	$1 - 0 = 1$
$\frac{\pi}{6}$	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.13$
$\frac{\pi}{2}$	$1 - 1 = 0$

Después, se identifican los puntos de la gráfica asignando valores al ángulo θ y calculando los valores de r correspondientes. Debido a la simetría con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$, sólo se necesita asignarle a θ valores desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, como se muestra en la tabla 1.

Ahora se grafican los puntos (r, θ) de la tabla 1 y se traza la gráfica, comenzando en el punto $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$ y terminando en el punto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Luego se refleja esta fracción de la gráfica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ (el eje y) para obtener la gráfica completa. La gráfica aparece en la figura 26.

Figura 26
$r = 1 - \text{sen}\,\theta$



◀



Exploración

Grafique $r_1 = 1 + \text{sen}\,\theta$. Borre la pantalla y grafique $r_1 = 1 - \cos\theta$. Borre la pantalla y grafique $r_1 = 1 + \cos\theta$. ¿Observa el patrón?

La curva de la figura 26 es un ejemplo de una *cardioide* (una curva con forma de corazón).

Las **cardioides** se caracterizan por ecuaciones con la forma

$$r = a(1 + \cos\theta) \qquad r = a(1 + \text{sen}\,\theta)$$
$$r = a(1 - \cos\theta) \qquad r = a(1 - \text{sen}\,\theta)$$

donde $a > 0$. La gráfica de una cardioide pasa por el polo.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37.

EJEMPLO 8 Graficar una ecuación polar (limaçon sin bucle interno)

Grafique la ecuación: $r = 3 + 2\cos\theta$

Solución Primero se verifica la simetría.

Eje polar: Si se reemplaza θ por $-\theta$. El resultado es:

$$r = 3 + 2\cos(-\theta) = 3 + 2\cos\theta$$

Se satisface la prueba, de manera que la gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

La recta $\theta = \frac{\pi}{2}$: Si se reemplaza θ por $\pi - \theta$. El resultado es:

$$r = 3 + 2\cos(\pi - \theta) = 3 + 2(\cos\pi\cos\theta + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\theta)$$
$$= 3 - 2\cos\theta$$

La prueba fracasa, de manera que la gráfica puede o no ser simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

El polo: Si se reemplaza r por $-r$, la prueba fracasa, de manera que la gráfica puede o no ser simétrica con respecto al polo.

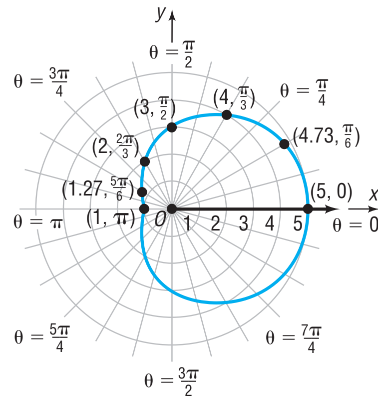
Después, se identifican los puntos de la gráfica asignando valores al ángulo θ y calculando los valores de r correspondientes. Debido a la simetría con respecto al eje polar, sólo se necesita asignarle a θ valores desde 0 hasta π, como se muestra en la tabla 2.

Ahora se grafican los puntos (r, θ) de la tabla 2 y se traza la gráfica, comenzando por el punto $(5, 0)$ y terminando en el punto $(1, \pi)$. Luego se refleja esta fracción de la gráfica con respecto al eje polar (el eje x) para obtener la gráfica completa. La gráfica aparece en la figura 27.

Tabla 2

θ	$r = 3 + 2\cos\theta$
0	$3 + 2(1) = 5$
$\frac{\pi}{6}$	$3 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 4.73$
$\frac{\pi}{3}$	$3 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 4$
$\frac{\pi}{2}$	$3 + 2(0) = 3$
$\frac{2\pi}{3}$	$3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$
$\frac{5\pi}{6}$	$3 + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 1.27$
π	$3 + 2(-1) = 1$

Figura 27
$r = 3 + 2\cos\theta$



◀



Exploración

Grafique $r_1 = 3 - 2\cos\theta$. Borre la pantalla y grafique $r_1 = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$. Borre la pantalla y grafique $r_1 = 3 - 2\operatorname{sen}\theta$. ¿Observa el patrón?

La curva que se muestra en la figura 27 es un ejemplo de limaçon (palabra francesa que significa caracol) sin bucle interno.

Los **limaçon sin bucle interno** se caracterizan por ecuaciones con la forma

$$r = a + b\cos\theta \qquad r = a + b\operatorname{sen}\theta$$
$$r = a - b\cos\theta \qquad r = a - b\operatorname{sen}\theta$$

donde $a > 0, b > 0$ y $a > b$. La gráfica de un limaçon sin bucle interno no pasa por el polo.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 43.

EJEMPLO 9 Graficar una ecuación polar (limaçon con bucle interno)

Grafique la ecuación: $r = 1 + 2\cos\theta$

Solución Primero, se verifica la simetría.

Eje polar: Si se reemplaza θ por $-\theta$. El resultado es:

$$r = 1 + 2\cos(-\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

Se satisface la prueba, de manera que la gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

La recta $\theta = \frac{\pi}{2}$: Si se reemplaza θ por $\pi - \theta$. El resultado es:

$$r = 1 + 2\cos(\pi - \theta) = 1 + 2(\cos\pi\cos\theta + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\theta)$$
$$= 1 - 2\cos\theta$$

La prueba fracasa, de manera que la gráfica puede o no ser simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

El polo: Si se reemplaza r por $-r$, la prueba fracasa, de manera que la gráfica puede o no ser simétrica con respecto al polo.

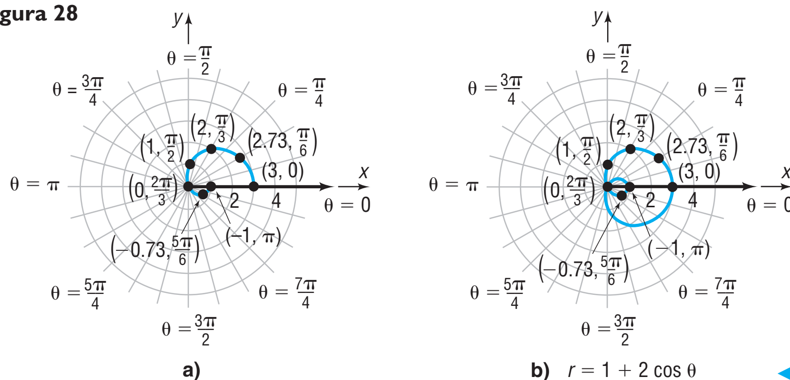
Después, se identifican los puntos de la gráfica $r = 1 + 2\cos\theta$ asignando valores al ángulo θ y calculando los valores de r correspondientes. Debido a la simetría con respecto al eje polar, sólo se necesita asignarle a θ valores desde 0 hasta π, como se muestra en la tabla 3.

Ahora se grafican los puntos (r, θ) de la tabla 3, comenzando por el punto $(3, 0)$ y terminando en el punto $(-1, \pi)$. Vea la figura 28*a*). Por último, se refleja esta fracción de la gráfica con respecto al eje polar (el eje x) para obtener la gráfica completa. Vea la figura 28*b*).

Tabla 3

θ	$r = 1 + 2\cos\theta$
0	$1 + 2(1) = 3$
$\frac{\pi}{6}$	$1 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 2.73$
$\frac{\pi}{3}$	$1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$
$\frac{\pi}{2}$	$1 + 2(0) = 1$
$\frac{2\pi}{3}$	$1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
$\frac{5\pi}{6}$	$1 + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx -0.73$
π	$1 + 2(-1) = -1$

Figura 28





Exploración

Grafique $r_1 = 1 - 2\cos\theta$. Borre la pantalla y grafique $r_1 = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$. Borre la pantalla y grafique $r_1 = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$. ¿Observa el patrón?

La curva que se muestra en la figura 28*b*) es un ejemplo de limaçon con bucle interno.

Los limaçon con bucle interno se caracterizan por ecuaciones con la forma

$$r = a + b\cos\theta \qquad r = a + b\,\text{sen}\,\theta$$
$$r = a - b\cos\theta \qquad r = a - b\,\text{sen}\,\theta$$

donde $a > 0, b > 0$, y $a < b$. La gráfica de un limaçon con bucle interno pasará dos veces por el polo.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45.

EJEMPLO 10 Graficar una ecuación polar (rosa)

Grafique la ecuación: $r = 2\cos(2\theta)$

Solución Se verifica la simetría.

Eje polar: Si se reemplaza θ por $-\theta$, el resultado es:

$$r = 2\cos[2(-\theta)] = 2\cos(2\theta)$$

Se satisface la prueba, de manera que la gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

La recta $\theta = \frac{\pi}{2}$: Si se reemplaza θ por $\pi - \theta$, se obtiene:

$$r = 2\cos[2(\pi - \theta)] = 2\cos(2\pi - 2\theta) = 2\cos(2\theta)$$

Se satisface la prueba, de manera que la gráfica es simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

El polo: Puesto que la gráfica es simétrica con respecto tanto al eje polar como a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$, debe ser simétrica con respecto al polo.

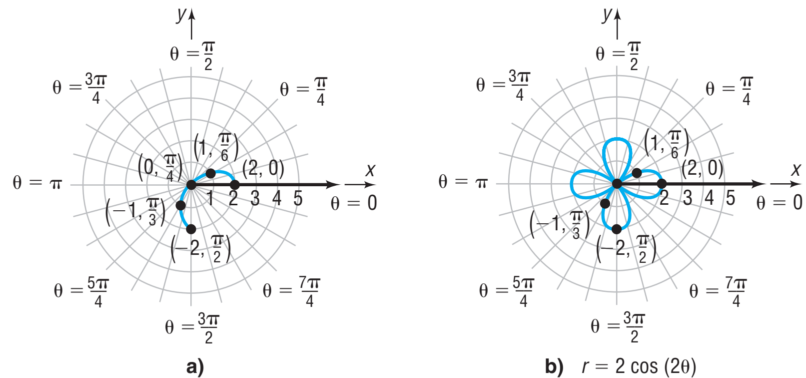
Después, se elabora la tabla 4. Debido a la simetría con respecto al eje polar, a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$, y al polo, sólo se considerarán valores de θ desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

En la figura 29*a*) se grafican y conectan esos puntos. Por último, debido a la simetría, se refleja esta fracción de la gráfica, primero con respecto al eje polar (el eje *x*) y luego con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ para obtener la gráfica completa. Vea la figura 29*b*).

Tabla 4

θ	$r = 2\cos(2\theta)$
0	$2(1) = 2$
$\frac{\pi}{6}$	$2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
$\frac{\pi}{4}$	$2(0) = 0$
$\frac{\pi}{3}$	$2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$
$\frac{\pi}{2}$	$2(-1) = -2$

Figura 29



a) **b)** $r = 2\cos(2\theta)$



Exploración

Grafique $r = 2\cos(4\theta)$; borre la pantalla y grafique $r = 2\cos(6\theta)$. ¿Cuántos pétalos tienen cada una de esas gráficas?

Borre la pantalla y grafique, en orden, cada una en una pantalla nueva, $r = 2\cos(3\theta)$, $r = 2\cos(5\theta)$, y $r = 2\cos(7\theta)$. ¿Qué observa con respecto al número de pétalos?

La curva que se muestra en la figura 29*b*) se denomina una *rosa* con cuatro pétalos.

Las **rosas** curvas se caracterizan por ecuaciones con la forma

$$r = a\cos(n\theta), \qquad r = a\,\text{sen}(n\theta), \qquad a \neq 0$$

y tienen gráficas con forma de rosa. Si $n \neq 0$ es par, la rosa tiene $2n$ pétalos; si $n \neq \pm 1$ es impar, la rosa tiene n pétalos.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 49.

EJEMPLO 11 Graficar una ecuación polar (lemniscata)

Grafique la ecuación: $r^2 = 4\,\text{sen}(2\theta)$

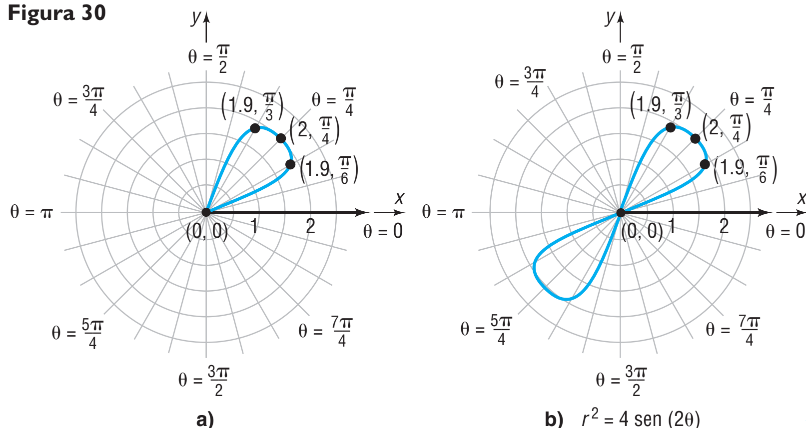
Solución Se deja al estudiante la labor de verificar si la gráfica es simétrica con respecto al polo. En la tabla 5 se enumeran los puntos de la gráfica para los valores de $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Observe que no existen puntos de la gráfica para $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (segundo cuadrante), ya que para esos valores $\text{sen}(2\theta) < 0$. En la figura 30*a*) se trazaron los puntos de la tabla 5, donde $r \geq 0$. Si se utiliza la simetría se obtiene el resto de los puntos de la gráfica. En la figura 30*b*) se muestra la gráfica final.

Tabla 5

θ	$r^2 = 4\,\text{sen}(2\theta)$	r
0	$4(0) = 0$	0
$\frac{\pi}{6}$	$4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$	± 1.9
$\frac{\pi}{4}$	$4(1) = 4$	± 2
$\frac{\pi}{3}$	$4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$	± 1.9
$\frac{\pi}{2}$	$4(0) = 4$	0

Figura 30



a) b) $r^2 = 4$ sen (2θ)

La curva que se muestra en la figura 30*b*) es un ejemplo de *lemniscata* (palabra griega que significa *listón*).

Las **lemniscatas** se caracterizan por ecuaciones con la forma

$$r^2 = a^2\,\text{sen}(2\theta) \qquad r^2 = a^2\cos(2\theta)$$

donde $a \neq 0$, y tienen gráficas con forma de hélice.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

EJEMPLO 12

Graficar una ecuación polar (espiral)

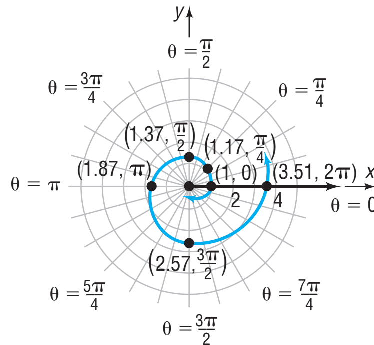
Grafique la ecuación: $r = e^{\theta/5}$

Solución Fallan las pruebas de simetría con respecto al polo, al eje polar y a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$. Además, no existe un número θ para el que $r = 0$, de manera que la gráfica no pasa por el polo. Se observa que r es positiva para toda θ, r aumenta a medida que θ lo hace, $r \to 0$ cuando $\theta \to -\infty$, y $r \to \infty$ cuando $\theta \to \infty$. Con ayuda de una calculadora, se obtienen los valores de la tabla 6. Vea la gráfica en la figura 31.

Tabla 6

θ	$r = e^{\theta/5}$
$-\frac{3\pi}{2}$	0.39
$-\pi$	0.53
$-\frac{\pi}{2}$	0.73
$-\frac{\pi}{4}$	0.85
0	1
$\frac{\pi}{4}$	1.17
$\frac{\pi}{2}$	1.37
π	1.87
$\frac{3\pi}{2}$	2.57
2π	3.51

Figura 31
$r = e^{\theta/5}$



◀

La curva que aparece en la figura 31 se denomina **espiral logarítmica**, ya que su ecuación se puede escribir como $\theta = 5 \ln r$ y gira de manera infinita, tanto en dirección al polo como alejándose de él.

Clasificación de ecuaciones polares

En la tabla 7 de la página 732 se muestran las ecuaciones de algunas rectas y algunos círculos en coordenadas polares, y sus ecuaciones correspondientes en coordenadas rectangulares. También se incluyen los nombres y las gráficas de algunas de las ecuaciones polares más frecuentes.

Bosquejo rápido

Si una ecuación polar sólo incluye una función seno (o coseno), se hace en forma rápida un boceto de su gráfica utilizando la tabla 7, la periodicidad y una tabla corta.

EJEMPLO 13

Bosquejar a mano en forma rápida la gráfica de una ecuación polar

Grafique la ecuación: $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$

Solución Se reconoce la ecuación polar: su gráfica es una cardioide. El periodo de sen θ es 2π, polo que se elabora en una tabla empleando $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se calcula r, se grafican los puntos (r, θ), y, a medida que θ varía de 0 a 2π se bosqueja la gráfica de una cardioide. Vea la tabla 8 y la figura 32 de la página 733.

Tabla 7

Rectas

Descripción	Recta que pasa por el polo formando un ángulo α con el eje polar.	Recta vertical	Recta horizontal
Ecuación rectangular	$y = (\tan \alpha)x$	$x = a$	$y = b$
Ecuación polar	$\theta = \alpha$	$r \cos \theta = a$	$r \operatorname{sen} \theta = b$
Gráfica típica			

Círculos

Descripción	Centro en el polo, radio a	Pasa por el polo, tangente a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$, centro sobre el eje polar, radio a	Pasa por el polo, tangente al eje polar, centro sobre la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$, radio a
Ecuación rectangular	$x^2 + y^2 = a^2, \quad a > 0$	$x^2 + y^2 = \pm 2ax, \quad a > 0$	$x^2 + y^2 = \pm 2ay, \quad a > 0$
Ecuación polar	$r = a, \quad a > 0$	$r = \pm 2a \cos \theta, \quad a > 0$	$r = \pm 2a \operatorname{sen} \theta, \quad a > 0$
Gráfica típica			

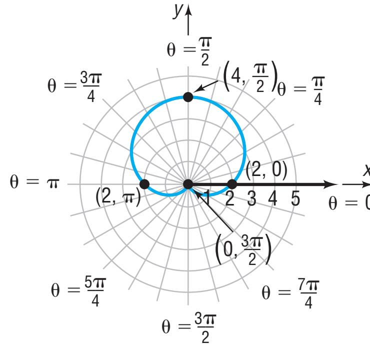
Otras ecuaciones

Nombre	Cardioide	Limaçon sin bucle interno	Limaçon con bucle interno
Ecuaciones polares	$r = a \pm a \cos \theta, \quad a > 0$ $r = a \pm a \operatorname{sen} \theta, \quad a > 0$	$r = a \pm b \cos \theta, \quad 0 < b < a$ $r = a \pm b \operatorname{sen} \theta, \quad 0 < b < a$	$r = a \pm b \cos \theta, \quad 0 < a < b$ $r = a \pm b \operatorname{sen} \theta, \quad 0 < a < b$
Gráfica típica			
Nombre	Lemniscata	Rosa de tres pétalos	Rosa de cuatro pétalos
Ecuaciones polares	$r^2 = a^2 \cos(2\theta), \quad a > 0$ $r^2 = a^2 \operatorname{sen}(2\theta), \quad a > 0$	$r = a \operatorname{sen}(3\theta), \quad a > 0$ $r = a \cos(3\theta), \quad a > 0$	$r = a \operatorname{sen}(2\theta), \quad a > 0$ $r = a \cos(2\theta), \quad a > 0$
Gráfica típica			

Tabla 8

θ	$r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$
0	$2 + 2(0) = 2$
$\frac{\pi}{2}$	$2 + 2(1) = 4$
π	$2 + 2(0) = 2$
$\frac{3\pi}{2}$	$2 + 2(-1) = 0$
2π	$2 + 2(0) = 2$

Figura 32



Comentario sobre cálculo



Para aquellos que planean estudiar cálculo, resulta procedente añadir un comentario sobre el importante papel de las ecuaciones polares.

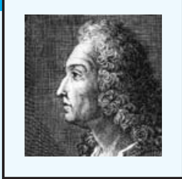
En las coordenadas rectangulares, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, cuya gráfica es el círculo unitario, no es la gráfica de una función. De hecho, se necesitan dos funciones para obtener la gráfica del círculo unitario:

$y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ Semicírculo superior $\qquad y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$ Semicírculo inferior

En las coordenadas polares, la ecuación $r = 1$, cuya gráfica también es el círculo unitario, define una función. Es decir, para cada opción de θ existe sólo un valor de r correspondiente; a saber, $r = 1$. Puesto que muchos problemas de cálculo requieren el uso de funciones, resulta muy útil la posibilidad de expresar en coordenadas polares las ecuaciones que no son funciones en coordenadas rectangulares.

Observe también que la prueba de la recta vertical sólo es válida para las ecuaciones en coordenadas rectangulares.

Aspecto histórico



Jakob Bernoulli (1654–1705)

Al parecer, las coordenadas polares fueron descubiertas por Jakob Bernoulli (1654-1705) alrededor de 1691, aunque como ocurre con la mayoría de las ideas de esta clase existen vestigios previos de esta noción. Los primeros usuarios del cálculo seguían confiando en las coordenadas rectangulares, y el uso de las coordenadas polares no se extendió sino hasta principios del siglo XIX. Incluso entonces, las usaron principalmente los estudiosos de la geometría para describir curvas extrañas. Por último, a mediados del siglo XIX, los estudiosos de las matemáticas aplicadas se percataron de la enorme simplificación que, gracias a las coordenadas polares, era posible en la descripción de objetos con simetría circular o cilíndrica. A partir de entonces se difundió su uso.

9.2 Evalúe su comprensión

"Está preparado" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Si las coordenadas rectangulares de un punto son $(4, -6)$, su punto de simetría con respecto al origen es __________. (pp. 165–173)
2. La fórmula de la diferencia para el coseno es $\cos(\alpha - \beta) =$ __________. (pp. 616 y 619)
3. La ecuación estándar de un círculo con centro $(-2, 5)$ y radio 3 es __________. (pp. 175–179)
4. ¿La función seno es par, impar o ninguna de las dos? __________? (pp. 544–545)
5. $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} =$ __________. (pp. 526–534)
6. $\cos \frac{2\pi}{3} =$ __________. (pp. 526–534)

Conceptos y vocabulario

7. Una ecuación cuyas variables están en coordenadas polares se denomina __________ __________.

8. Utilizando coordenadas polares (r, θ), el círculo $x^2 + y^2 = 2x$ toma la forma __________.

9. Una ecuación polar es simétrica con respecto al polo si al reemplazar r por __________se obtiene una ecuación equivalente.

10. *Falso o verdadero*: las pruebas de simetría para las coordenadas polares son necesarias, pero no suficientes.

11. *Falso o verdadero:* la gráfica de una cardioide nunca pasa por el polo.

12. *Falso o verdadero:* todas las ecuaciones polares tienen una característica simétrica.

Ejercicios

En los problemas 13-28, convierta cada ecuación polar en una ecuación de coordenadas rectangulares. Luego identifique y grafique la ecuación.

13. $r = 4$ **14.** $r = 2$ **15.** $\theta = \frac{\pi}{3}$ **16.** $\theta = -\frac{\pi}{4}$

17. $r \operatorname{sen} \theta = 4$ **18.** $r \cos \theta = 4$ **19.** $r \cos \theta = -2$ **20.** $r \operatorname{sen} \theta = -2$

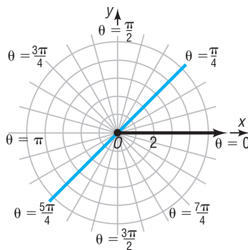
21. $r = 2 \cos \theta$ **22.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ **23.** $r = -4 \operatorname{sen} \theta$ **24.** $r = -4 \cos \theta$

25. $r \sec \theta = 4$ **26.** $r \csc \theta = 8$ **27.** $r \csc \theta = -2$ **28.** $r \sec \theta = -4$

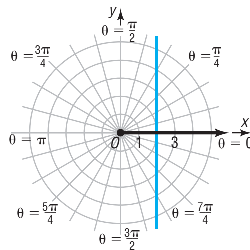
En los problemas 29-36, relacione cada una de las gráficas (A) a (H) con una de las siguientes ecuaciones polares.

29. $r = 2$ **30.** $\theta = \frac{\pi}{4}$ **31.** $r = 2 \cos \theta$ **32.** $r \cos \theta = 2$

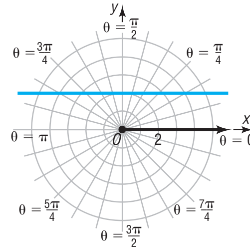
33. $r = 1 + \cos \theta$ **34.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ **35.** $\theta = \frac{3\pi}{4}$ **36.** $r \operatorname{sen} \theta = 2$



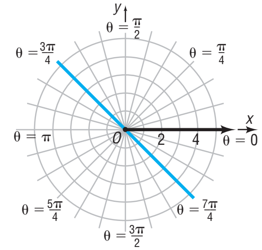
A)



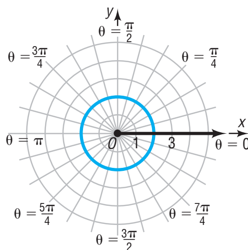
B)



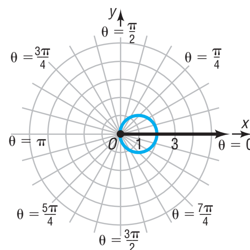
C)



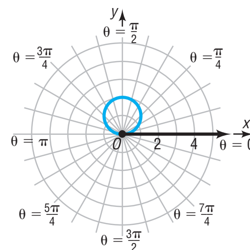
D)



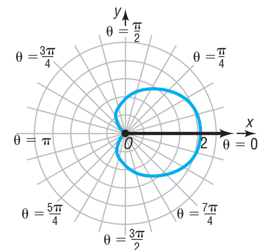
E)



F)



G)



H)

En los problemas 37-60, identifique y grafique cada ecuación polar.

37. $r = 2 + 2 \cos \theta$ **38.** $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ **39.** $er = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$ **40.** $r = 2 - 2 \cos \theta$

41. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$ **42.** $r = 2 - \cos \theta$ **43.** $r = 4 - 2 \cos \theta$ **44.** $r = 4 + 2 \operatorname{sen} \theta$

45. $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$ **46.** $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$ **47.** $r = 2 - 3 \cos \theta$ **48.** $r = 2 + 4 \cos \theta$

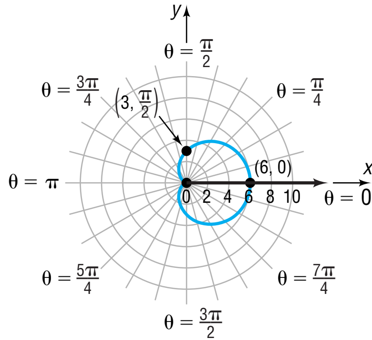
49. $r = 3 \cos(2\theta)$ **50.** $r = 2 \operatorname{sen}(3\theta)$ **51.** $r = 4 \operatorname{sen}(5\theta)$ **52.** $r = 3 \cos(4\theta)$

53. $r^2 = 9 \cos(2\theta)$ **54.** $r^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$ **55.** $r = 2^\theta$ **56.** $r = 3^\theta$

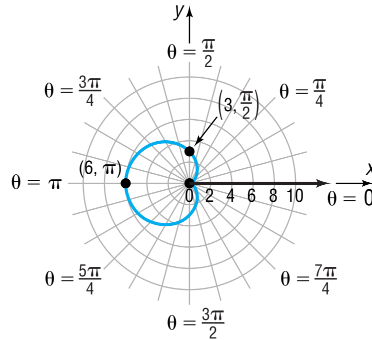
57. $r = 1 - \cos \theta$ **58.** $r = 3 + \cos \theta$ **59.** $r = 1 - 3 \cos \theta$ **60.** $r = 4 \cos(3\theta)$

En los problemas 61-64, la ecuación polar de cada gráfica es $r = a + b\cos\theta$ o $r = a + b\,\text{sen}\,\theta$, $a > 0$, $b > 0$. Seleccione la ecuación correcta y encuentre los valores de a y b.

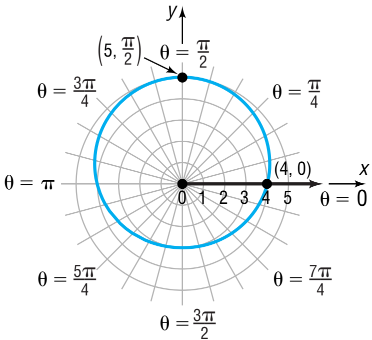
61.



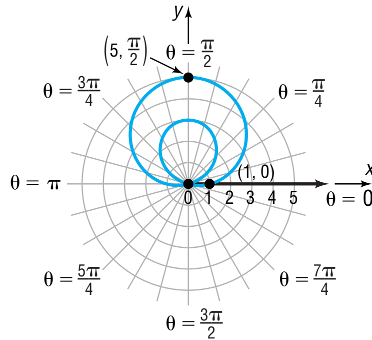
62.



63.



64.



En los problemas 65-74, grafique cada una de las ecuaciones polares.

65. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$ (parábola)

66. $r = \dfrac{2}{1 - 2\cos\theta}$ (hipérbola)

67. $r = \dfrac{1}{3 - 2\cos\theta}$ (elipse)

68. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$ (parábola)

69. $r = \theta, \quad \theta \geq 0$ (espiral de Arquímedes)

70. $r = \dfrac{3}{\theta}$ (espiral recíproca)

71. $r = \csc\theta - 2, \quad 0 < \theta < \pi$ (conchoide)

72. $r = \text{sen}\,\theta\tan\theta$ (cisoide)

73. $r = \tan\theta, \quad -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (curva kappa)

74. $r = \cos\dfrac{\theta}{2}$

---

75. Demuestre que la gráfica de la ecuación $r\,\text{sen}\,\theta = a$ es una recta horizontal que se encuentra a unidades arriba del polo si $a > 0$ y $|a|$ abajo del polo si $a < 0$.

76. Demuestre que la gráfica de la ecuación $r\cos\theta = a$ es una recta vertical que se encuentra a unidades a la derecha del polo si $a > 0$ y $|a|$ unidades a la izquierda del polo si $a < 0$.

77. Demuestre que la gráfica de la ecuación $r = 2a\,\text{sen}\,\theta$, $a > 0$, es un círculo de radio a con centro en $(0, a)$ en coordenadas rectangulares.

78. Demuestre que la gráfica de la ecuación $r = -2a\,\text{sen}\,\theta$, $a > 0$, es un círculo de radio a con centro en $(0, -a)$ en coordenadas rectangulares.

79. Demuestre que la gráfica de la ecuación $r = 2a\cos\theta$, $a > 0$, es un círculo de radio a con centro en $(a, 0)$ en coordenadas rectangulares.

80. Demuestre que la gráfica de la ecuación $r = -2a\cos\theta$, $a > 0$, es un círculo de radio a con centro en $(-a, 0)$ en coordenadas rectangulares.

81. Explique por qué es válida la siguiente prueba de simetría: Reemplazar r por $-r$ y θ por $-\theta$ en una ecuación polar. Si tiene como resultado una ecuación equivalente, la gráfica es simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ (eje y).

a) Demuestre que la prueba de la página 725 no sirve para $r^2 = \cos\theta$, pero que esta nueva prueba sí funciona.

b) Demuestre que la prueba de la página 725 funciona para $r^2 = \operatorname{sen}\theta$, pero no en esta nueva prueba.

82. Desarrolle una nueva prueba para la simetría con respecto al polo.

a) Encuentre una ecuación polar para la que no sirve esta nueva prueba, pero con la que sí funcione la prueba de la página 725.

b) Encuentre una ecuación polar con la que no funcione la prueba de la página 725, pero con la que funcione su nueva prueba.

83. Escriba dos distintas pruebas para la simetría con respecto al eje polar. Encuentre ejemplos en los que funcione una de las pruebas y no lo haga la otra. ¿Cuál prueba prefiere utilizar? Justifique su respuesta.

Respuestas a "Está preparado"

1. $(-4, 6)$ **2.** $\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

3. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$ **4.** Impar

5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **6.** $-\frac{1}{2}$

9.3 El plano complejo; teorema de De Moivre

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Números complejos (sección 1.3, pp. 109-115)
- Valor de las funciones seno y coseno para ciertos ángulos (sección 6.3, p.520, y sección 6.4, pp. 526-534)
- Fórmulas de suma y diferencia para seno y coseno (sección 7.4, pp. 616 y 619)



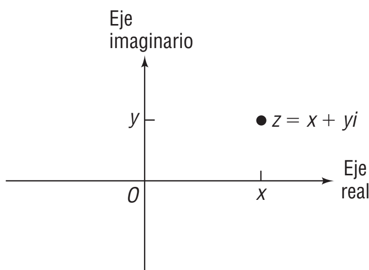
Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 742.

OBJETIVOS
1. Convertir un número complejo de forma rectangular a forma polar
2. Graficar puntos en el plano complejo
3. Encontrar los productos y cocientes de números complejos en forma polar
4. Utilizar el teorema de De Moivre
5. Encontrar raíces complejas

Al estudiar por primera vez números complejos, no se estaba preparado para dar la interpretación geométrica de un número complejo. Ahora se está listo. A pesar de que es posible dar varias interpretaciones, la más sencilla de entender es la siguiente.

Un número complejo $z = x + yi$ se interpreta de manera geométrica como el punto (x, y) en el plano xy. Cada punto en el plano corresponde a un número complejo y viceversa, cada número complejo corresponde a un punto en el plano. A la colección de tales puntos la llamaremos **plano complejo**. El eje x se denominará **eje real**, porque todo punto que quede sobre él tiene la forma $z = x + 0i = x$, que es un número real. El eje y se llama **eje imaginario**, porque todo punto que quede sobre él tiene la forma $z = 0 + yi = yi$, que es un número imaginario puro. Vea la figura 33.

Figura 33
Plano complejo

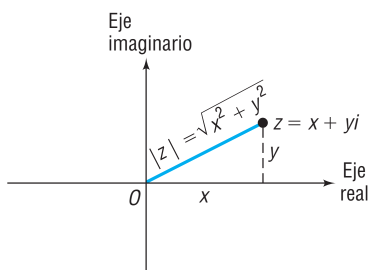


Sea $z = x + yi$ un número complejo. La **magnitud** o el **módulo** de z, que se denota $|z|$, se define como la distancia que hay del origen al punto (x, y). Es decir,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Vea la ilustración en la figura 34.

Figura 34



Esta definición de $|z|$ es congruente con la definición del valor absoluto de un número real: Si $z = x + yi$ es real, entonces $z = x + 0i$ y

$$|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

Por esta razón, la magnitud de z a veces se conoce como el valor absoluto de z.

Recuérdese (de la sección 1.3) que si $z = x + yi$ entonces su **conjugado**, denotado por $\bar{z}$, es $\bar{z} = x - yi$. Puesto que $z\bar{z} = x^2 + y^2$, a partir de la ecuación (1) se deduce que la magnitud de z puede escribirse como:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad \textbf{(2)}$$

Forma polar de un número complejo

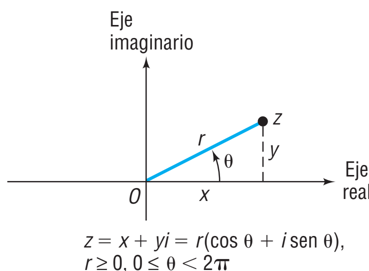
1 Cuando se escribe un número complejo en la forma estándar $z = x + yi$, se dice que está en su **forma rectangular**, o **cartesiana**, porque (x, y) son las coordenadas rectangulares del punto correspondiente en el plano complejo. Suponga que (r, θ) son las coordenadas polares de este punto. Entonces:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \quad \textbf{(3)}$$

Si $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, el número complejo $z = x + yi$ se escribe en **forma polar** de la siguiente manera:

$$z = x + yi = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \quad \textbf{(4)}$$

Figura 35



$z = x + yi = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$

Vea la figura 35.

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ es la forma polar de un número complejo, el ángulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, se denomina como el **argumento de z**.

Además, puesto que $r \geq 0$, se tiene $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. A partir de la ecuación (1), se deduce que la magnitud de $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ es:

$$|z| = r$$

2 **EJEMPLO 1** **Graficar un punto en el plano complejo y escribir un número complejo en forma polar**

Grafique el punto correspondiente a $z = \sqrt{3} - i$ en el plano complejo, y escriba una expresión para z en forma polar.

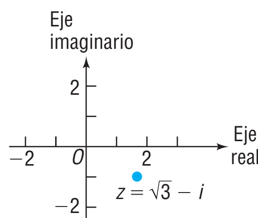
Solución El punto correspondiente a $z = \sqrt{3} - i$ tiene las coordenadas rectangulares $(\sqrt{3}, -1)$. En la figura 36 aparece graficado este punto, localizado en el cuarto cuadrante. Puesto que $x = \sqrt{3}$ y $y = -1$, se deduce que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

y

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Figura 36



Entonces $\theta = \dfrac{11\pi}{6}$ y $r = 2$, de manera que la forma polar de $z = \sqrt{3} - i$ es

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

EJEMPLO 2 Graficar un punto en el plano complejo y convertirlo de forma polar a rectangular

Grafique el punto correspondiente a $z = 2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$ en el plano complejo y escriba una expresión de forma rectangular para z.

Solución Para graficar el número complejo $z = 2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$, se traza el punto cuyas coordenadas polares son $(r, \theta) = (2, 30°)$, como se muestra en la figura 37. En forma rectangular,

$$z = 2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

Figura 37

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 23.

3 La forma polar de un número complejo brinda un método alterno para encontrar productos y cocientes de los números complejos.

Teorema

Sean $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \text{ sen } \theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)$ dos números complejos. Entonces:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen}(\theta_1 + \theta_2)] \quad \textbf{(5)}$$

Si $z_2 \neq 0$, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \text{ sen}(\theta_1 - \theta_2)] \quad \textbf{(6)}$$

En palabras
La magnitud de un número complejo z es r y su argumento es θ, de manera que cuando $z = r(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$, la magnitud del producto (o cociente) de dos números complejos es igual al producto (o cociente) de sus magnitudes; el argumento del producto (o cociente) de dos números complejos se determina mediante la suma (o resta) de sus argumentos.

Demostración Se demostrará la formula (5). La demostración de la fórmula (6) se deja como ejercicio (vea el problema 66).

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1(\cos \theta_1 + i \text{ sen } \theta_1)][r_2(\cos \theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos \theta_1 + i \text{ sen } \theta_1)(\cos \theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2) + i(\text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \text{ sen } \theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$ ■

Véase un ejemplo de cómo utilizar este teorema.

EJEMPLO 3 Encontrar productos y cocientes de números complejos con forma polar

Si $z = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$ y $w = 5(\cos 100° + i \text{ sen } 100°)$, calcular lo siguiente (dejar las respuestas en forma polar):

a) zw b) $\dfrac{z}{w}$

Solución a)

$$\begin{aligned} zw &= [3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)][5(\cos 100° + i \text{ sen } 100°)] \\ &= (3 \cdot 5)[\cos(20° + 100°) + i \text{ sen}(20° + 100°)] \\ &= 15(\cos 120° + i \text{ sen } 120°) \end{aligned}$$

b) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)}{5(\cos 100° + i \text{ sen } 100°)}$

$= \dfrac{3}{5}[\cos(20° - 100°) + i \text{ sen}(20° - 100°)]$

$= \dfrac{3}{5}[\cos(-80°) + i \text{ sen}(-80°)]$

$= \dfrac{3}{5}(\cos 280° + i \text{ sen } 280°)$ El argumento debe quedar entre 0° y 360°. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 33.

Teorema de De Moivre



El teorema de De Moivre, determinado por Abraham De Moivre (1667-1754) en 1730, pero ya conocido por mucha gente en 1710, es importante por la siguiente razón: Los procesos fundamentales del álgebra son las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, junto con las potencias y la extracción de raíces. El teorema de De Moivre permite aplicar estas últimas operaciones algebraicas fundamentales a los números complejos.

En forma más básica, el teorema de De Moivre es una fórmula para elevar un número complejo z a la potencia n, donde $n \geq 1$ es un número entero positivo. Se ve si se puede adivinar la forma del resultado.

Sea $z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$ un número complejo. Entonces, con base en la ecuación (5), se tiene

$n = 2$: $z^2 = r^2[\cos(2\theta) + i \text{ sen}(2\theta)]$ Ecuación (5)

$n = 3$: $z^3 = z^2 \cdot z$

$= \{r^2[\cos(2\theta) + i \text{ sen}(2\theta)]\}[r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)]$

$= r^3[\cos(3\theta) + i \text{ sen}(3\theta)]$ Ecuación (5)

$n = 4$: $z^4 = z^3 \cdot z$

$= \{r^3[\cos(3\theta) + i \text{ sen}(3\theta)]\}[r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)]$

$= r^4[\cos(4\theta) + i \text{ sen}(4\theta)]$ Ecuación (5)

Ahora el patrón debe estar claro.

Teorema

Teorema de De Moivre

Si $z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$ es un número complejo, entonces

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i \text{ sen}(n\theta)] \quad \textbf{(7)}$$

donde $n \geq 1$ es un entero positivo.

No se probará el teorema de De Moivre porque su demostración requiere inducción matemática (la cual no se analiza sino hasta la sección 12.4).

Pero véanse algunos ejemplos.

EJEMPLO 4 **Utilizar el teorema de De Moivre**

Escriba $[2(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)]^3$ en la forma estándar $a + bi$.

Solución

$$\begin{aligned}[2(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)]^3 &= 2^3[\cos(3\cdot 20°) + i \operatorname{sen}(3\cdot 20°)]\\ &= 8(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)\\ &= 8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4 + 4\sqrt{3}i\end{aligned}$$ ◄



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 41.

EJEMPLO 5 **Utilizar el teorema de De Moivre**

Escriba $(1 + i)^5$ en la forma estándar $a + bi$.

Solución Para aplicar el teorema de De Moivre, primero se debe escribir el número complejo en forma polar. Puesto que la magnitud de $1 + i$ es $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, se comienza por escribir

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Ahora

$$\begin{aligned}(1 + i)^5 &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]^5\\ &= (\sqrt{2})^5\left[\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(5\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]\\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)\\ &= 4\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i\right] = -4 - 4i\end{aligned}$$ ◄

Raíces complejas

5 Sea w un número complejo dado, y sea que $n \geq 2$ denota un entero positivo. Cualquier número complejo z que satisface la ecuación

$$z^n = w$$

se denomina **raíz *n*-ésima compleja** de w. Si se continúa con el uso anterior, si $n = 2$, las soluciones de la ecuación $z^2 = w$ se llaman **raíces cuadradas complejas** de w, y si $n = 3$, las soluciones de la ecuación $z^3 = w$ se denominan **raíces cúbicas complejas** de w.

Teorema

Cálculo de raíces complejas

Sea $w = r(\cos\theta_0 + i \operatorname{sen}\theta_0)$ con un número complejo y sea que $n \geq 2$ es un entero. Si $w \neq 0$, existen n raíces complejas distintas de w, dadas por la fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad \textbf{(8)}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Demostración (parcial) No se demostrará este resultado en su totalidad. En su lugar, sólo se demostrará que toda z_k de la ecuación (8) satisface a la ecuación $z_k^n = w$, con lo que se prueba que toda z_k es una raíz n-ésima compleja de w.

$$z_k^n = \left\{\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]\right\}^n$$

$$= (\sqrt[n]{r})^n\left\{\cos\left[n\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] + i\,\text{sen}\left[n\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]\right\}$$ Teorema de De Moivre

$$= r[\cos(\theta_0 + 2k\pi) + i\,\text{sen}(\theta_0 + 2k\pi)]$$ Se simplifica

$$= r(\cos\theta_0 + i\,\text{sen}\,\theta_0) = w$$ Propiedad periódica

Entonces, toda z_k, donde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, es una raíz n-ésima compleja de w. Para completar la demostración, se necesita mostrar que toda Z_k, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, es, de hecho, distinta y que no existen más raíces n-ésimas complejas que las obtenidas por medio de la ecuación (8). ■

EJEMPLO 6 Calcular raíces cúbicas complejas

Calcule las raíces cúbicas complejas de $-1 + \sqrt{3}i$. Deje las respuestas en forma polar, con el argumento en grados.

Solución Primero, se expresa $-1 + \sqrt{3}i$ en forma polar usando grados.

$$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°)$$

Entonces, $r = 2$ y $\theta_0 = 120°$. Las tres raíces cúbicas complejas de $-1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°)$ son

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{120°}{3} + \frac{360°k}{3}\right) + \text{i sen}\left(\frac{120°}{3} + \frac{360°k}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2$$

$$= \sqrt[3]{2}[\cos(40° + 120°k) + i\,\text{sen}(40° + 120°k)], \quad k = 0, 1, 2$$

Entonces

$$z_0 = \sqrt[3]{2}[\cos(40° + 120° \cdot 0) + i\,\text{sen}(40° + 120° \cdot 0)] = \sqrt[3]{2}(\cos 40° + i\,\text{sen}\,40°)$$

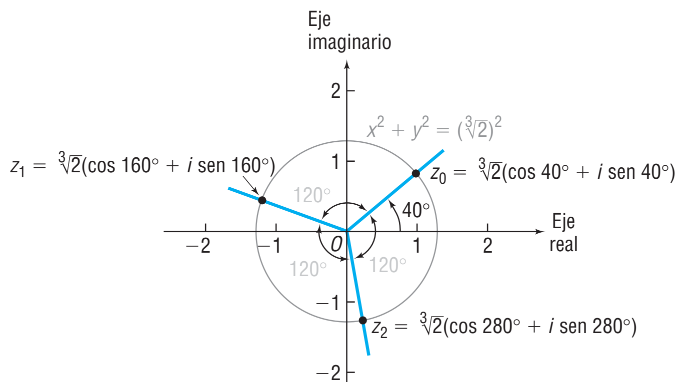
$$z_1 = \sqrt[3]{2}[\cos(40° + 120° \cdot 1) + i\,\text{sen}(40° + 120° \cdot 1)] = \sqrt[3]{2}(\cos 160° + i\,\text{sen}\,160°)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}[\cos(40° + 120° \cdot 2) + i\,\text{sen}(40° + 120° \cdot 2)] = \sqrt[3]{2}(\cos 280° + i\,\text{sen}\,280°)$$ ◀

Observe que cada una de las tres raíces complejas de $-1 + \sqrt{3}i$ tienen la misma magnitud, $\sqrt[3]{2}$. Esto significa que los puntos correspondientes a cada raíz cúbica quedan a la misma distancia del origen, es decir, los tres puntos quedan sobre un círculo con centro en el origen y radio $\sqrt[3]{2}$. Además, los argumentos de esas raíces cúbicas son 40°, 160° y 280°, siendo la diferencia de pares consecutivos $120° = \frac{360°}{3}$. Esto significa que los tres puntos están igualmen-

te distribuidos sobre el círculo, como se muestra en la figura 38. Estos resultados no son una casualidad. De hecho, en los problema 63 al 65 se le pide demostrar que dichos resultados son aplicables para las raíces n-ésimas complejas.

Figura 38



 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

ASPECTO HISTÓRICO


John Wallis

Babilonios, griegos y árabes consideraron imposibles las raíces cuadradas de cantidades negativas e irresolubles las ecuaciones con soluciones complejas. La primera pista de la existencia de alguna conexión entre las soluciones reales de ecuaciones y los números complejos surgió cuando Girolamo Cardano (1501-1576) y Tartaglia (1499-1557) encontraron raíces reales de ecuaciones cúbicas al calcular raíces cúbicas de cantidades complejas. A partir de entonces, y durante siglos, los matemáticos trabajaron con los números complejos sin estar convencidos de su existencia real. Al parecer, fue John Wallis quien en 1673 fue el primero en sugerir la representación gráfica de los números complejos, una idea de verdad significativa que no se concretó sino hasta alrededor de 1800. Varias personas, incluyendo a Karl Friedrich Gauss (1777-1855), redescubrieron entonces la idea, y la representación gráfica ayudó a establecer a los números complejos como miembros por igual de la familia de los números. En las aplicaciones prácticas, se encontró que el mayor uso de los números complejos corresponde al área de la corriente alterna, donde son una herramienta común, y en el área de la física subatómica.

Problemas históricos

1. La fórmula cuadrática funcionará perfectamente bien si los coeficientes son los números complejos. Resuelva lo siguiente utilizando el teorema de De Moivre donde resulte necesario.

   [**Sugerencia**: Las respuestas son "sencillas"].

   a) $z^2 - (2 + 5i)z - 3 + 5i = 0$ b) $z^2 - (1 + i)z - 2 - i = 0$

9.3 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. El conjugado de $-4 - 3i$ es __________. (pp. 109–115)
2. La fórmula de suma para el seno es $\text{sen}(\alpha + \beta) =$ __________. (pp. 616 y 619)
3. La fórmula de suma para el coseno es $\cos(\alpha + \beta) =$ __________. (pp. 616 y 619)
4. $\text{sen}(120°) =$ __________; $\cos(240°) =$ __________. (pp. 526–534)

Conceptos y vocabulario

5. Cuando un número complejo z se exhibe en la forma polar $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, el número r no negativo es el __________ o __________ de z, y el ángulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, es el __________ de z.

6. El teorema __________ se puede utilizar para elevar a una potencia un número complejo.

7. En general, un número complejo tiene __________ raíces cúbicas.

8. *Falso o verdadero:* el teorema de De Moivre es útil para elevar un número complejo a una potencia entera positiva.

9. *Falso o verdadero:* utilizando el teorema de De Moivre, el cuadrado de un número complejo tendrá dos respuestas.

10. *Falso o verdadero:* la forma polar de un número complejo es única.

Ejercicios

En los problemas 11-22, grafique en el plano complejo cada uno de los números complejos y escríbalos en forma polar. Exprese el argumento en grados.

11. $1 + i$ **12.** $-1 + i$ **13.** $\sqrt{3} - i$ **14.** $1 - \sqrt{3}i$

15. $-3i$ **16.** -2 **17.** $4 - 4i$ **18.** $9\sqrt{3} + 9i$

19. $3 - 4i$ **20.** $2 + \sqrt{3}i$ **21.** $-2 + 3i$ **22.** $\sqrt{5} - i$

En los problemas 23-32, escriba cada número complejo en forma rectangular.

23. $2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$ **24.** $3(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$ **25.** $4\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

26. $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$ **27.** $3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$ **28.** $4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

29. $0.2(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)$ **30.** $0.4(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°)$ **31.** $2\left(\cos\frac{\pi}{18} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{18}\right)$

32. $3\left(\cos\frac{\pi}{10} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\right)$

En los problemas 33-40, encuentre zw y $\frac{z}{w}$. Deje sus respuestas en forma polar.

33. $z = 2(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$, $w = 4(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$

34. $z = \cos 120° + i \operatorname{sen} 120°$, $w = \cos 100° + i \operatorname{sen} 100°$

35. $z = 3(\cos 130° + i \operatorname{sen} 130°)$, $w = 4(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$

36. $z = 2(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)$, $w = 6(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°)$

37. $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$, $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{10} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\right)$

38. $z = 4\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}\right)$, $w = 2\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{16}\right)$

39. $z = 2 + 2i$, $w = \sqrt{3} - i$

40. $z = 1 - i$, $w = 1 - \sqrt{3}i$

En los problemas 41-52, escriba cada ecuación en la forma estándar $a + bi$.

41. $[4(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)]^3$ **42.** $[3(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)]^3$ **43.** $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{10} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\right)\right]^5$

44. $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{16}\right)\right]^4$ **45.** $\left[\sqrt{3}(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)\right]^6$ **46.** $\left[\frac{1}{2}(\cos 72° + i \operatorname{sen} 72°)\right]^5$

47. $\left[\sqrt{5}\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{16}\right)\right]^4$ **48.** $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{18} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{18}\right)\right]^6$ **49.** $(1 - i)^5$

50. $\left(\sqrt{3} - i\right)^6$ **51.** $\left(\sqrt{2} - i\right)^6$ **52.** $\left(1 - \sqrt{5}i\right)^8$

En los problemas 53-60, encuentre todas las raíces complejas. Deje las respuestas en forma polar, con el argumento en grados.

53. Las raíces cúbicas complejas de $1 + i$

54. Las raíces cuartas complejas de $\sqrt{3} - i$

55. Las raíces cuartas complejas de $4 - 4\sqrt{3}i$

56. Las raíces cúbicas complejas de $-8 - 8i$

57. Las raíces cuartas complejas de $-16i$

58. Las raíces cúbicas complejas de -8

59. Las raíces quitas complejas de i

60. Las raíces quitas complejas de $-i$

61. Encuentre las cuatro raíces cuartas complejas de la unidad (1) y grafíquelas.

62. Encuentre las seis raíces sextas complejas de la unidad (1) y grafíquelas.

63. Demuestre que cada una de las raíces n-ésimas complejas de un número complejo w distinto de cero tiene la misma magnitud.

64. Utilice el resultado del problema 63 para sacar en conclusión que toda raíz n-ésima compleja queda sobre un círculo con centro en el origen. ¿Cuál es el radio de dicho círculo?

65. Consulte el problema 64. Demuestre que las raíces n-ésimas complejas de un número complejo w distinto de cero quedan igualmente separadas sobre círculo.

66. Demuestre la fórmula (6).

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $-4 + 3i$

2. $\text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$

3. $\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$ **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}$

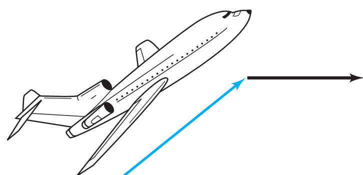
9.4 Vectores

OBJETIVOS
1. Graficación de vectores
2. Encontrar un vector de posición
3. Sumar y restar vectores
4. Encontrar un producto escalar y de la magnitud de un vector
5. Encontrar un vector unitario
6. Encontrar un vector a partir de su dirección y magnitud
7. Trabajar con objetos en equilibrio estático

En términos simples, un **vector** (palabra procedente del latín *vehere*, que significa transportar) es una cantidad que tiene magnitud y dirección. Se acostumbra representar los vectores utilizando una flecha. La longitud de la flecha representa su **magnitud** y la punta su **dirección**.

En la física, muchas cantidades se representan mediante vectores. Por ejemplo, la velocidad de una aeronave se representa por medio de una flecha que señala en dirección del movimiento; la longitud de la fecha representa la rapidez. Si la aeronave acelera, se alarga la flecha; si cambia de dirección, se introduce una flecha con la nueva dirección. Vea la figura 39. Con base en esta representación, no resulta sorpresivo que vectores y segmentos de recta dirigidos tengan cierta relación.

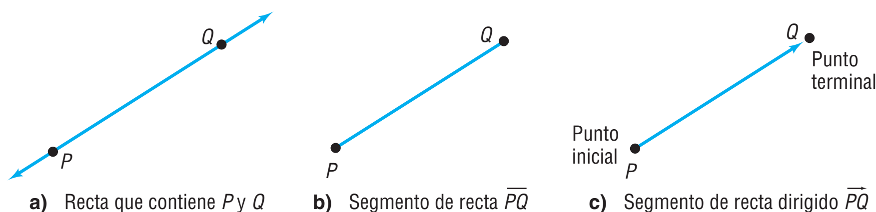
Figura 39



Vectores geométricos

Si P y Q son dos puntos distintos en el plano xy, existe exactamente una recta que contiene tanto a P como a Q [figura 40*a*)]. Los puntos sobre la parte de la recta que une a P con Q, incluyendo a P y a Q, se denominan **segmento de recta** $\overline{PQ}$ [figura 40*b*)]. Si se ordenan los puntos de manera que vayan de P a Q, se tiene un **segmento de recta dirigido** de P a Q, o un **vector geométrico**, que se denota por medio de $\overrightarrow{PQ}$. En un segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$, llamamos a P el **punto inicial** y a Q el **punto terminal**, como se indica en la figura 40*c*).

Figura 40



a) Recta que contiene P y Q **b)** Segmento de recta $\overline{PQ}$ **c)** Segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$

La magnitud de segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es la distancia que va del punto P hasta el punto Q; es decir, es la longitud del segmento de recta. La dirección de $\overrightarrow{PQ}$ es de P a Q. Si un vector **v*** tiene la misma magnitud y la misma dirección que el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$, se escribe

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$$

El vector **v** cuya magnitud es 0 se conoce como el **vector cero**, **0**. El vector cero no tiene dirección asignada.

Dos vectores, **v** y **w**, son iguales, lo que se escribe:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

si tienen la misma magnitud y la misma dirección.

Por ejemplo, los vectores que se muestran en la figura 41 tienen la misma magnitud y la misma dirección, por lo que son iguales, aunque tengan puntos iniciales y puntos terminales diferentes. En consecuencia, resulta útil considerar a los vectores como una sencilla flecha, recordando siempre que dos flechas (vectores) son iguales si tienen la misma dirección y la misma magnitud (longitud).

Figura 41

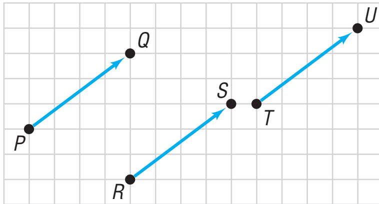
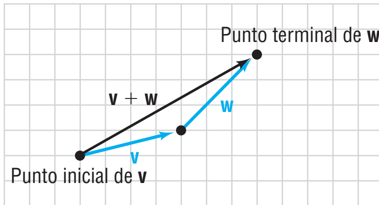


Figura 42



Suma de vectores

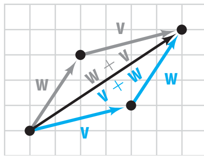
La **suma v + w** de dos vectores se define de la siguiente manera: Se colocan los vectores **v** y **w** de tal manera que el punto terminal de **v** coincide con el punto inicial de **w**, como se muestra en la figura 42. Entonces, el vector **v** + **w** es el vector único cuyo punto inicial coincide con el de **v,** cuyo punto terminal coincide con el de **w**.

La suma de vectores conmutativa. Es decir, si **v** y **w** son dos vectores, entonces

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

Este hecho se ilustra en la figura 43. (Observe que la propiedad conmutativa es otra manera de decir que los lados opuestos de un paralelogramo son iguales y paralelos).

Figura 43

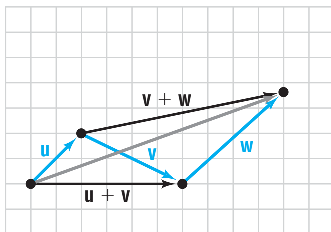


La suma de vectores también es **asociativa**. Es decir, si **v**, **u** y **w** son dos vectores, entonces

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

En la figura 44 se ilustra la propiedad asociativa de los vectores.

Figura 44
(u + v) + w = u + (v + w)



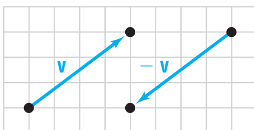
El vector cero tiene la propiedad de que:

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

para todo vector **v**.

Si **v** es un vector, entonces −**v** es un vector que tiene la misma magnitud que **v**, pero cuya dirección es opuesta a la de **v**, como se muestra en la figura 45.

Figura 45



Además,

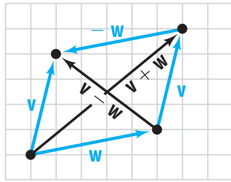
$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Si **v** y **w** son dos vectores, se define la resta o diferencia **v** − **w** como

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

*Para denotar los vectores se utilizarán caracteres en negritas, con el fin de distinguirlos de los números. En los trabajos escritos a mano, se coloca una flecha sobre la letra para distinguirla como vector.

Figura 46



En la figura 46 se ilustran las relaciones que existen entre **v**, **w**, **v** + **w**, y **v** − **w**.

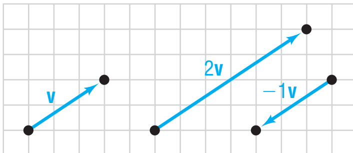
Multiplicación de vectores por números

Cuando se trata con vectores, se refiere a los números reales como **escalares**. Los escalares son cantidades que sólo tienen magnitud. Algunos ejemplos de cantidades escalares físicas son temperatura, rapidez y tiempo. A continuación se define cómo multiplicar un vector por un escalar.

Si α es un escalar y **v** es un vector, el **producto escalar** $\alpha\mathbf{v}$ se define de la siguiente manera:

1. Si $\alpha > 0$, el producto de $\alpha\mathbf{v}$ es igual al vector cuya magnitud es α veces la magnitud de **v** y cuya dirección es la misma que la de **v**.
2. Si $\alpha < 0$, el producto $\alpha\mathbf{v}$ es el vector cuya magnitud es $|\alpha|$ veces la actitud de **v** y cuya dirección es opuesta a la de **v**.
3. Si $\alpha = 0$ o si $\mathbf{v} = 0$, entonces $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Figura 47



Vea algunas ilustraciones en la figura 47.

Por ejemplo, si **a** es la aceleración de un objeto con masa m provocada por la fuerza **F** que se ejerce sobre él, entonces, mediante la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Aquí, $m\mathbf{a}$ es el producto del escalar m por el vector **a**.

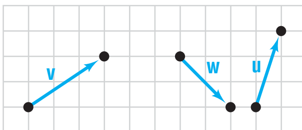
Los productos escalares tienen las siguientes propiedades:

$$0\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad 1\mathbf{v} = \mathbf{v} \qquad -1\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$
$$(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v} \qquad \alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$$
$$\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$$



EJEMPLO 1 Gráfica de vectores

Figura 48

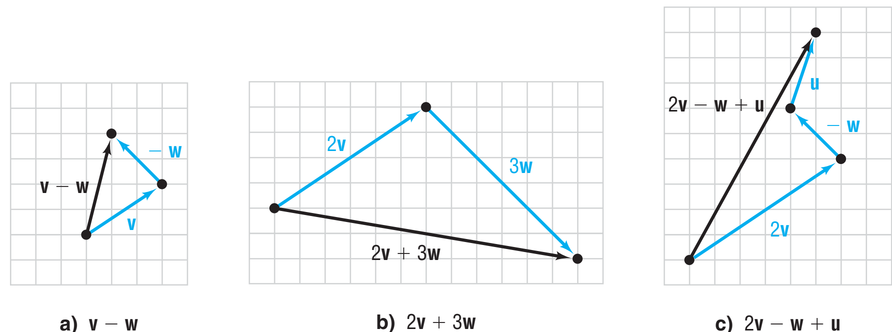


Utilizar los vectores ilustrados en la figura 48 para graficar cada uno de los siguientes vectores:

a) **v** − **w** b) 2**v** + 3**w** c) 2**v** − **w** + **u**

Solución En la figura 49 se ilustra cada una de las gráficas.

Figura 49



a) v − w **b)** 2v + 3w **c)** 2v − w + u



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 7 Y 9.

Magnitudes de los vectores

Si **v** es un vector, se usa el símbolo $\|\mathbf{v}\|$ para representar la **magnitud** de **v**. Puesto que $\|\mathbf{v}\|$ es igual a la longitud de un segmento de recta dirigido, se deduce que $\|\mathbf{v}\|$ tiene las siguientes propiedades:

Teorema

Propiedades de $\|\mathbf{v}\|$

Si **v** es un vector y si α es un escalar, entonces

a) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ b) $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

c) $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ d) $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$

La propiedad *a*) es consecuencia del hecho de que la distancia es un número positivo. La propiedad *b*) se deduce porque la longitud del segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es positiva, a menos que P y Q sean el mismo punto, en cuyo caso la longitud es 0. La propiedad *c*) se deduce porque la longitud del segmento de recta $\overline{PQ}$ es igual a la longitud del segmento de recta $\overline{QP}$. La propiedad *d*) es consecuencia directa de la definición de producto escalar.

Un vector **u** para el que $\|\mathbf{u}\| = 1$ se denomina **vector unitario**.

Para calcular la magnitud y dirección de un vector, necesitamos un método algebraico para representar los vectores.

Vectores algebraicos

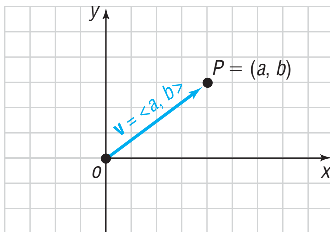


Un **vector algebraico v** se representa como

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$$

donde a y b son números reales (escalares) llamados las **componentes** del vector **v**.

Figura 50



Para representar vectores algebraicos en el plano, se utiliza un sistema de coordenadas rectangulares. Si $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ es un vector algebraico cuyo punto inicial se encuentra en el origen, entonces **v** se llama **vector de posición**. Vea la figura 50. Observe el punto terminal del vector de posición $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ es $P = (a, b)$.

El siguiente resultado establece que todo vector cuyo punto inicial no se encuentra en el origen es igual a un vector de posición único.

Teorema

Suponga que **v** es un vector con punto inicial $P_1 = (x_1, y_1)$, no necesariamente en el origen, y punto terminal $P_2 = (x_2, y_2)$. Si $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$, entonces **v** es igual al vector de posición:

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \quad \textbf{(1)}$$

Para observar por qué es cierto esto, vea la figura 51 de la página 748. El triángulo OPA y el triángulo P_1P_2Q son congruentes. [¿Sabe por qué? Los segmentos de recta tienen la misma magnitud, de manera que $d(O, P) = d(P_1, P_2)$; y tienen la misma dirección, de manera que $\angle POA = \angle P_2P_1Q$.

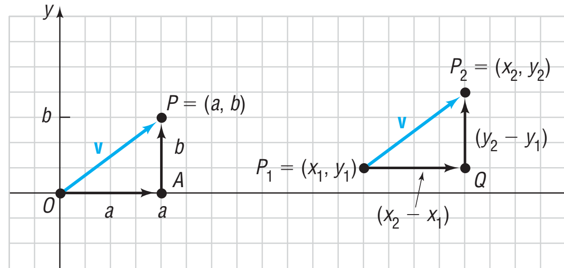


Figura 51
$\langle a, b\rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$

Puesto que los triángulos son triángulos rectángulos, se tiene ángulo-lado-ángulo]. Se deduce que los lados correspondientes son iguales. En consecuencia, $x_2 - x_1 = a$ y $y_2 - y_1 = b$, por lo que $\mathbf{v}$ se exhibe como

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$

Debido a este resultado, se puede reemplazar cualquier vector algebraico por un vector de posición único, y viceversa. Esta flexibilidad es una de las principales razones por las que ha proliferado el uso de los vectores.

EJEMPLO 2 Encontrar un vector de posición

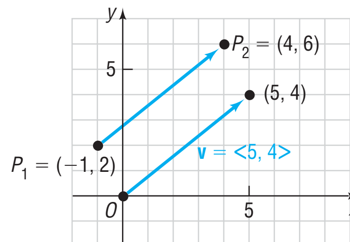
Encuentre el vector de posición del vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ si $P_1 = (-1, 2)$ y $P_2 = (4, 6)$.

Solución Por medio de la ecuación (1), el vector de posición igual a $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{v} = \langle 4 - (-1), 6 - 2\rangle = \langle 5, 4\rangle$$

Vea la figura 52.

Figura 52



◀

Dos vectores de posición $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son iguales si y sólo si el punto terminal de $\mathbf{v}$ es igual a punto terminal de $\mathbf{w}$. Esto nos conduce al siguiente resultado:

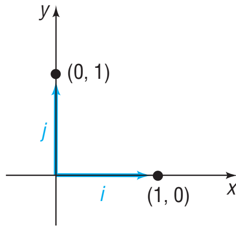
Teorema

Igualdad de vectores

Dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son iguales si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales. Es decir,

$$\text{Si } \mathbf{v} = \langle a_1, b_1\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \langle a_2, b_2\rangle$$
$$\text{entonces} \quad \mathbf{v} = \mathbf{w} \quad \text{si y sólo si} \quad a_1 = a_2 \quad \text{y} \quad b_1 = b_2.$$

Figura 53



Ahora se expondrá una representación alterna de un vector en el plano, que es muy común en las ciencias físicas. Sean **i**, que denota al vector unitario cuya dirección es a lo largo del eje x positivo; y **j**, que denota al vector unitario cuya dirección es a lo largo del eje y positivo. Entonces $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, como se muestra en la figura 53. Todo vector $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ se muestra utilizando los vectores unitarios **i** y **j** de la siguiente manera:

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle = a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

Se llaman a a y b las **componentes horizontal** y **vertical** de **v,** respectivamente.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

Se define la suma, la resta, el producto escalar y la magnitud en términos de las componentes del vector.

Sean $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} = \langle a_1, b_1 \rangle$ y $\mathbf{w} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} = \langle a_2, b_2 \rangle$ dos vectores, y sea α un escalar. Entonces:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a_1 + a_2)\mathbf{i} + (b_1 + b_2)\mathbf{j} = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2 \rangle \quad \textbf{(2)}$$

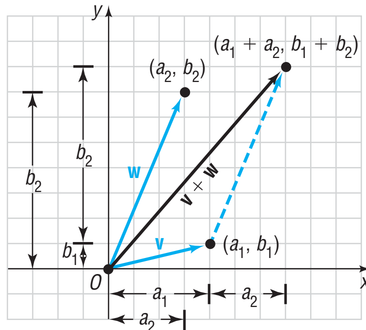
$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (a_1 - a_2)\mathbf{i} + (b_1 - b_2)\mathbf{j} = \langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle \quad \textbf{(3)}$$

$$\alpha\mathbf{v} = (\alpha a_1)\mathbf{i} + (\alpha b_1)\mathbf{j} = \langle \alpha a_1, \alpha b_1 \rangle \quad \textbf{(4)}$$

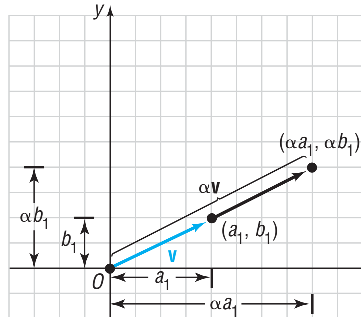
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \textbf{(5)}$$

Estas definiciones son compatibles con las definiciones geométricas previamente analizadas en esta sección. Vea la figura 54.

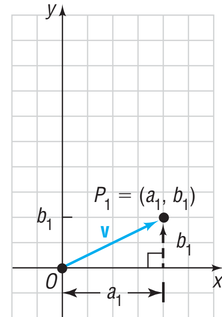
Figura 54



a) Ilustración de la propiedad (2)



b) Ilustración de la propiedad (4), $\alpha > 0$



c) Ilustración de la propiedad (5):
$\| \mathbf{v} \|$ = Distancia de O a P_1
$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$

Para sumar dos vectores, se suman las componentes correspondientes. Para restar dos vectores, se restan las componentes correspondientes.



EJEMPLO 3 Suma y resta de vectores

Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = \langle 2, 3 \rangle$ y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = \langle 3, -4 \rangle$, encontrar:

a) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ b) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$

Solución a) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = (2 + 3)\mathbf{i} + (3 - 4)\mathbf{j} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$

o

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 2, 3\rangle + \langle 3, -4\rangle = \langle 2 + 3, 3 + (-4)\rangle = \langle 5, -1\rangle$

b) $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = (2 - 3)\mathbf{i} + [3 - (-4)]\mathbf{j} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

o

$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle 2, 3\rangle - \langle 3, -4\rangle = \langle 2 - 3, 3 - (-4)\rangle = \langle -1, 7\rangle$ ◀

4 **EJEMPLO 4** **Encontrar productos escalares y magnitudes**

Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = \langle 2, 3\rangle$ y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = \langle 3, -4\rangle$, encontrar:

a) $3\mathbf{v}$ b) $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$ c) $\|\mathbf{v}\|$

Solución a) $3\mathbf{v} = 3(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 6\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

o

$3\mathbf{v} = 3\langle 2, 3\rangle = \langle 6, 9\rangle$

b) $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w} = 2(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - 3(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 9\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
$= -5\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$

o

$2\mathbf{v} - 3\mathbf{w} = 2\langle 2, 3\rangle - 3\langle 3, -4\rangle = \langle 4, 6\rangle - \langle 9, -12\rangle$
$= \langle 4 - 9, 6 - (-12)\rangle = \langle -5, 18\rangle$

c) $\|\mathbf{v}\| = \|2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ ◀

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **33** Y **39**.

Durante el resto de esta sección, se expresará al vector **v** de la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

5 Recuérdese que un vector unitario **u** es un vector para el que $\|\mathbf{u}\| = 1$. En muchas aplicaciones, resulta útil poder encontrar el vector unitario **u** que tiene la misma dirección que el vector **v** dado.

Teorema

Vector unitario con la dirección de v

Para todo vector **v** distinto de cero, el vector

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

es un vector unitario con la misma dirección que **v**.

Demostración Sea $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Entonces $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{a\mathbf{i} + b\mathbf{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{j}$$

El vector **u** tiene la misma dirección que **v**, ya que $\|\mathbf{v}\| > 0$. Además,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}} = 1$$

De esta manera, **u** es un vector unitario con la dirección de **v**. ■

Como consecuencia de este teorema, si **u** es un vector unitario con la misma dirección que el vector **v**, entonces este último se expresa como

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u} \qquad \textbf{(6)}$$

Esta manera de expresar los vectores es útil para muchas aplicaciones.

EJEMPLO 5 Encontrar un vector unitario

Encuentre un vector unitario con la misma dirección que $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

Solución Primero se encuentra $\|\mathbf{v}\|$.

$$\|\mathbf{v}\| = \|4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Ahora se multiplica **v** por el escalar $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{5}$. El vector unitario con la misma dirección que **v** es

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}}{5} = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$$

COMPROBACIÓN: De hecho, este vector es unitario porque

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 49.

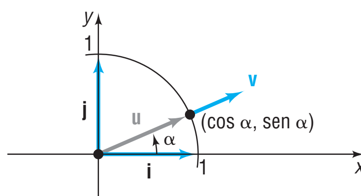
Escribir un vector en términos de su magnitud y dirección

6 Si un vector representa la rapidez y dirección de un objeto, se le denomina **vector velocidad**. Si un vector representa la dirección y magnitud de la fuerza que actúa sobre un objeto, se le denomina **vector fuerza**. En muchas aplicaciones, más que en términos de sus componentes, los vectores se describen en términos de su magnitud y dirección. Por ejemplo, una pelota lanzada con una velocidad inicial de 25 millas por hora con un ángulo de 30° con respecto al horizontal, es un vector velocidad.

Suponiendo que se conoce la magnitud $\|\mathbf{v}\|$ de un vector **v** distinto de cero y el ángulo α, $0° \leq \alpha < 360°$, entre **v** e **i**. Para expresar a **v** en términos de $\|\mathbf{v}\|$ y α, primero se calcula el vector unitario **u** que tiene la misma dirección de **v**.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{o} \quad \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u} \qquad \textbf{(7)}$$

Figura 55



Observe la figura 55. Las coordenadas del punto terminal de **u** son $(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$. Entonces $\mathbf{u} = \cos\alpha\mathbf{i} + \text{sen}\,\alpha\mathbf{j}$ y, a partir de (7),

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|(\cos\alpha\mathbf{i} + \text{sen}\,\alpha\mathbf{j}) \qquad \textbf{(8)}$$

donde α es el ángulo entre **v** e **i**.

EJEMPLO 6 Escribir un vector cuando su magnitud y dirección están dadas

Por ejemplo, una pelota lanzada con una velocidad inicial de 25 millas por hora con un ángulo de 30° con respecto al eje x positivo. Exprese el vector velocidad $\mathbf{v}$ en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. ¿Cuál es la velocidad inicial en dirección horizontal? ¿Cuál es la velocidad inicial en dirección vertical?

Solución La magnitud de $\mathbf{v}$ es $\|\mathbf{v}\| = 25$ millas por hora, y el ángulo entre la dirección de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{i}$, el eje x positivo, es $\alpha = 30°$. Por la ecuación (8),

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|(\cos\alpha\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\mathbf{j}) = 25(\cos 30°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 30°\mathbf{j}) = 25\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = \frac{25\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{25}{2}\mathbf{j}$$

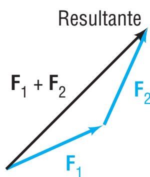
La velocidad inicial de la pelota en dirección horizontal corresponde a la componente horizontal de $\mathbf{v}$, $\frac{25\sqrt{3}}{2} \approx 21.65$ millas por hora. La velocidad inicial de la pelota en dirección vertical corresponde a la componente vertical de $\mathbf{v}$, $\frac{25}{2} = 12.5$ millas por hora. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 61.

Aplicación: Equilibrio estático

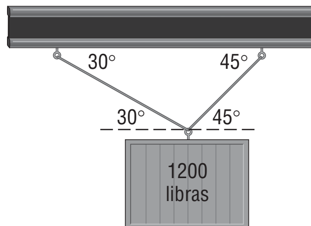

7 Debido a que las fuerzas se pueden representar por medio de vectores, dos fuerzas "combinan" la manera en que los vectores se "suman". Si $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son dos fuerzas que actúan en forma simultánea sobre un objeto, el vector suma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ es la **fuerza resultante**. La fuerza resultante produce sobre un objeto el mismo efecto que se obtiene cuando las dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ actúan sobre él. Vea la figura 56. Una aplicación de este concepto es el *equilibrio estático*. Se dice que un objeto está en **equilibrio estático** si **1.** el objeto está en reposo y **2.** la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto es igual a cero, es decir, si la fuerza resultante es 0.

Figura 56



EJEMPLO 7 Objeto en equilibrio estático

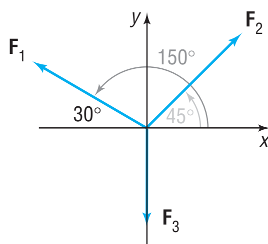
Figura 57



Dos cables sujetos del techo sostienen una caja que pesa 1200 libras, como se aprecia en la figura 57. ¿Cuál es la tensión en ambos cables?

Solución Se dibuja un diagrama de fuerza utilizando los vectores que aparecen en la figura 58. Las tensiones en los cables son las magnitudes $\|\mathbf{F}_1\|$ y $\|\mathbf{F}_2\|$ de los vectores fuerza $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. La magnitud del vector fuerza $\mathbf{F}_3$ es igual a 1200 libras, que es el peso de la caja. Ahora se escribe cada vector fuerza en términos de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Se utiliza la ecuación (8) con $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Recuerde que α es el ángulo entre el vector y el eje x positivo.

Figura 58



$$\mathbf{F}_1 = \|\mathbf{F}_1\|(\cos 150°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 150°\mathbf{j}) = \|\mathbf{F}_1\|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\|\mathbf{F}_1\|\mathbf{i} + \frac{1}{2}\|\mathbf{F}_1\|\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_2 = \|\mathbf{F}_2\|(\cos 45°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 45°\mathbf{j}) = \|\mathbf{F}_2\|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\|\mathbf{F}_2\|\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\|\mathbf{F}_2\|\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_3 = -1200\mathbf{j}$$

Para que exista equilibrio estático, la suma de los vectores fuerza debe ser igual a cero.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\|\mathbf{F}_1\|\mathbf{i} + \frac{1}{2}\|\mathbf{F}_1\|\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\|\mathbf{F}_2\|\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\|\mathbf{F}_2\|\mathbf{j} - 1200\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Cada una de las componentes **i** y **j** será igual a cero. Esto tiene como resultado dos ecuaciones:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\|\mathbf{F}_1\| + \frac{\sqrt{2}}{2}\|\mathbf{F}_2\| = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{F}_1\| + \frac{\sqrt{2}}{2}\|\mathbf{F}_2\| - 1200 = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

Despejando $\|\mathbf{F}_2\|$ en la ecuación (9), se obtiene

$$\|\mathbf{F}_2\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\|\mathbf{F}_1\| \qquad \textbf{(11)}$$

Si se sustituye este resultado en la ecuación (10) y se despeja $\|\mathbf{F}_1\|$, se obtiene

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{F}_1\| + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\|\mathbf{F}_1\|\right) - 1200 = 0$$

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{F}_1\| + \frac{\sqrt{3}}{2}\|\mathbf{F}_1\| - 1200 = 0$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\|\mathbf{F}_1\| = 1200$$

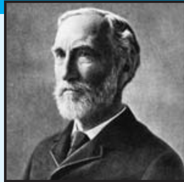
$$\|\mathbf{F}_1\| = \frac{2400}{1+\sqrt{3}} \approx 878.5 \text{ libras}$$

Si se sustituye este valor en la ecuación (11), se encuentra el valor de $\|\mathbf{F}_2\|$.

$$\|\mathbf{F}_2\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\|\mathbf{F}_1\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2400}{1+\sqrt{3}} \approx 1075.9 \text{ libras}$$

El cable izquierdo tiene una tensión de alrededor de 878.5 libras y el cable derecho una tensión aproximada de 1075.9 libras ◀

ASPECTO HISTÓRICO



Josiah Gibbs (1839–1903)

Para un concepto tan natural, la historia de los vectores resulta sorpresivamente complicada. En el plano *xy*, los números complejos imitan bastante bien a los vectores. Alrededor de 1840, los matemáticos se interesaron en encontrar un sistema que hiciera en tres dimensiones lo que los números complejos hacen en dos. Hermann Grassmann (1809-1877), en Alemania, y William Rowan Hamilton (1805-1865), en Irlanda, trataron de encontrar la solución.

El sistema de Hamilton fue el de los *cuaterniones*, que se entienden mejor como un número real más un vector, y hacen en cuatro dimensiones lo que los números complejos hacen en dos dimensiones. En este sistema, el orden de los factores sí altera el producto, es decir, **ab** ≠ **ba**. Además, surgieron dos tipos de producto de vectores, el escalar (o producto punto) y vectorial (o producto cruz).

Aunque en la actualidad se le entiende con facilidad, el estilo abstracto de Grassmann resultó casi impenetrable durante el siglo anterior, por lo que sólo se apreciaron algunas de sus ideas. Entre esas pocas ideas se encontraban los mismos productos escalar y vectorial encontrados por Hamilton.

Cerca de 1880, el físico estadounidense Josiah Willard Gibbs (1839-1903) desarrolló un álgebra que sólo incluía los conceptos más sencillos: los vectores y los dos tipos de producto. Después, les añadió algunas nociones de cálculo; el sistema resultante fue sencillo, flexible y bastante adecuado para expresar un gran número de leyes físicas. Este sistema continúa en uso virtualmente sin cambios. Los sistemas de Hamilton y Grassmann, más extensos, dan lugar a más conceptos matemáticos muy interesantes, pero pocos de ellos se estudian a niveles elementales.

9.4 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Un vector cuya magnitud es 1 se denomina vector __________.

2. El producto de un vector por un número se llama producto __________.

3. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, entonces a se denomina la componente __________ de $\mathbf{v}$ y b es la componente __________ de $\mathbf{v}$.

4. *Falso o verdadero:* los vectores son cantidades que tienen magnitud y dirección.

5. *Falso o verdadero:* la fuerza es un ejemplo físico de un vector.

6. *Falso o verdadero:* la masa es un ejemplo físico de un vector.

Ejercicios

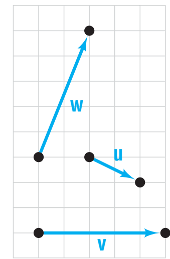
En los problemas 7-14, utilice los vectores de la figura de la derecha para graficar cada uno de los siguientes vectores.

7. $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ **8.** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

9. $3\mathbf{v}$ **10.** $4\mathbf{w}$

11. $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ **12.** $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

13. $3\mathbf{v} + \mathbf{u} - 2\mathbf{w}$ **14.** $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w}$



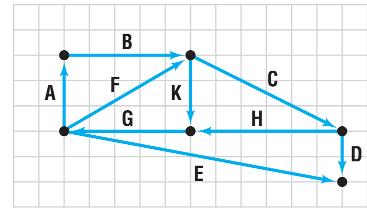
En los problemas 15-22, utilice la figura de la derecha. Determine si el enunciado dado es falso o verdadero.

15. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{F}$ **16.** $\mathbf{K} + \mathbf{G} = \mathbf{F}$

17. $\mathbf{C} = \mathbf{D} - \mathbf{E} + \mathbf{F}$ **18.** $\mathbf{G} + \mathbf{H} + \mathbf{E} = \mathbf{D}$

19. $\mathbf{E} + \mathbf{D} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$ **20.** $\mathbf{H} - \mathbf{C} = \mathbf{G} - \mathbf{F}$

21. $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{K} + \mathbf{G} = \mathbf{0}$ **22.** $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{H} + \mathbf{G} = \mathbf{0}$



23. Si $\|\mathbf{v}\| = 4$, ¿cuánto es $\|3\mathbf{v}\|$? **24.** Si $\|\mathbf{v}\| = 2$, ¿cuánto es $\|-4\mathbf{v}\|$?

En los problemas 25-32, el vector $\mathbf{v}$ *tiene un punto inicial P y un punto terminal Q. Escriba* $\mathbf{v}$ *en la forma* $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$*, es decir, encuentre su vector de posición.*

25. $P = (0, 0);\quad Q = (3, 4)$ **26.** $P = (0, 0);\quad Q = (-3, -5)$

27. $P = (3, 2);\quad Q = (5, 6)$ **28.** $P = (-3, 2);\quad Q = (6, 5)$

29. $P = (-2, -1);\quad Q = (6, -2)$ **30.** $P = (-1, 4);\quad Q = (6, 2)$

31. $P = (1, 0);\quad Q = (0, 1)$ **32.** $P = (1, 1);\quad Q = (2, 2)$

En los problemas 33-38, encuentre $\|\mathbf{v}\|$.

33. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ **34.** $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ **35.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

36. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$ **37.** $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **38.** $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

En los problemas 39-44, calcule cada cantidad si $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{w} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

39. $2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ **40.** $3\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ **41.** $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$

42. $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ **43.** $\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\|$ **44.** $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

En los problemas 45-50, encuentre el vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$.

45. $\mathbf{v} = 5\mathbf{i}$ **46.** $\mathbf{v} = -3\mathbf{j}$ **47.** $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

48. $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ **49.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ **50.** $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

51. Encuentre un vector **v** con magnitud de 4, cuya componente en la dirección **i** sea el doble de la componente en la dirección **j**.

52. Encuentre un vector **v** con magnitud de 3 y cuya componente en la dirección **i** sea igual al componente en la dirección **j**.

53. Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = x\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, encuentre todos los números x para los que $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 5$.

54. Si $P = (-3, 1)$ y $Q = (x, 4)$, encuentre todos los números x tales que el vector representado por $\overrightarrow{PQ}$ tenga una longitud de 5.

En los problemas 55-60, escriba el vector **v** *de la forma* $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, *dadas sus magnitud* $\|\mathbf{v}\|$ *y el ángulo* α *que forma con respecto al eje x positivo*.

55. $\|\mathbf{v}\| = 5, \quad \alpha = 60°$

56. $\|\mathbf{v}\| = 8, \quad \alpha = 45°$

57. $\|\mathbf{v}\| = 14, \quad \alpha = 120°$

58. $\|\mathbf{v}\| = 3, \quad \alpha = 240°$

59. $\|\mathbf{v}\| = 25, \quad \alpha = 330°$

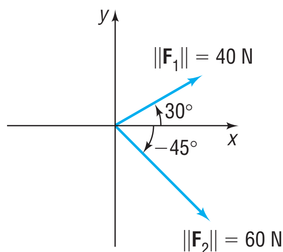
60. $\|\mathbf{v}\| = 15, \quad \alpha = 315°$

---

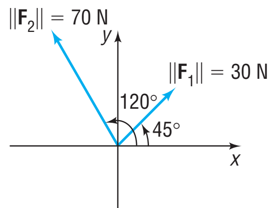
61. Un niño jala su carrito con una fuerza de 40 libras. La manija del carrito forma un ángulo de 30° con respecto al piso. Exprese el vector fuerza **F** en términos de **i** y **j**.

62. Un hombre empuja una carretilla hacia arriba de un plano inclinado de 20° con una fuerza de 100 libras. Exprese el vector fuerza **F** en términos de **i** y **j**.

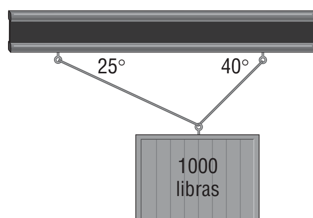
63. Fuerza resultante Dos fuerzas con magnitud de 40 y 60 newtons (N) actúan sobre un objeto con ángulos de 30° y −45° respecto del eje x positivo, como se muestra en la figura. Encuentre la dirección y la magnitud de la fuerza resultante, es decir, calcule $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.



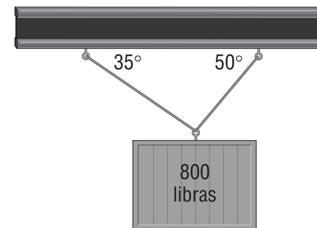
64. Fuerza resultante Dos fuerzas con magnitud de 30 y 70 newtons (N) actúan sobre un objeto con ángulos de 45° y 120° respecto del eje x positivo, como se muestra en la figura. Encuentre la dirección y la magnitud de la fuerza resultante, es decir, calcule $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.



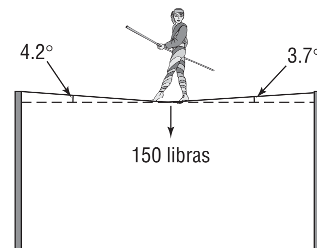
65. Equilibrio estático Un peso de 1000 libras cuelga de dos cables, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la tensión en los dos cables?



66. Equilibrio estático Un peso de 800 libras cuelga de dos cables, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la tensión en los dos cables?

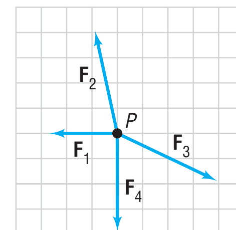


67. Equilibrio estático Un equilibrista ubicado en cierto punto provoca una deflexión en la cuerda, como se indica en la figura. Si el equilibrista pesa 150 libras, ¿cuánta tensión existente en cada sección de la cuerda?



68. Equilibrio estático Repita el problema 67 considerando ahora que el ángulo de izquierdo es de 3.8°, el ángulo del lado derecho es de 2.6° y el equilibrista pesa 135 libras.

69. En la siguiente gráfica, muestre la fuerza necesaria para que el objeto que está en P se encuentre en equilibrio estático.



70. Explique qué es un vector utilizando sus propias palabras. Proporcione un ejemplo de un vector.

71. Escriba un breve párrafo comparando el álgebra de los números complejos y el álgebra de vectores.

9.5 Producto punto

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Ley de cosenos (sección 8.3, p. 681)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 762.

OBJETIVOS
1. Encontrar el producto punto de dos vectores
2. Encontrar el ángulo entre dos vectores
3. Determinar si dos vectores son paralelos
4. Determinar si dos vectores son ortogonales
5. Descomponer un vector en dos vectores ortogonales
6. Calcular el trabajo

1 La definición del producto de dos vectores resulta un tanto inesperada. Sin embargo, dicho producto resulta significativo en muchas aplicaciones geométricas y físicas.

Si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ son dos vectores, el **producto punto** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ se define como

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a_1a_2 + b_1b_2 \quad \textbf{(1)}$$

EJEMPLO 1 **Encontrar productos punto**

Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, encontrar:

a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ b) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$
d) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ e) $\|\mathbf{v}\|$ f) $\|\mathbf{w}\|$

Solución

a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2(5) + (-3)3 = 1$ b) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 5(2) + 3(-3) = 1$
c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 2(2) + (-3)(-3) = 13$ d) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 5(5) + 3(3) = 34$
e) $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ f) $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ ◄

Puesto que el producto punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ de dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es un número real (escalar), a veces lo llamamos **producto escalar**.

Propiedades

Los resultados obtenidos en el ejemplo 1 sugieren algunas propiedades generales.

Teorema

Propiedades del producto punto

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores, entonces

Propiedad conmutativa

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad \textbf{(2)}$$

Propiedad distributiva

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} \qquad (3)$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 \qquad (4)$$

$$\mathbf{0}\cdot\mathbf{v} = 0 \qquad (5)$$

Demostración Aquí se comprobarán las propiedades (2) y (4), dejando como ejercicio la demostración de las propiedades (3) y (5) (vea los problemas 39 y 40).

Para demostrar la propiedad (2), sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. Entonces:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2 = a_2a_1 + b_2b_1 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$$

Para demostrar la propiedad (4), sea $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Entonces

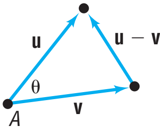
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = a^2 + b^2 = \|\mathbf{v}\|^2$$ ■

Uno de los usos del producto punto consiste en calcular el ángulo entre dos vectores.

Ángulo entre dos vectores

2 Sean **u** y **v** dos vectores con el mismo punto inicial A. Entonces los vectores **u**, **v**, y **u** − **v** forman un triángulo. El ángulo θ en el vértice A del triángulo es el ángulo que existe entre los vectores **u** y **v**. Vea la figura 59. Se pretende encontrar una fórmula para calcular el ángulo θ.

Figura 59



Los lados del triángulo tienen las longitudes $\|\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{u}\|$, y $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$, y θ. Es el ángulo interno entre los lados de longitud $\|\mathbf{v}\|$ y $\|\mathbf{u}\|$. Se utiliza la ley de cosenos (sección 8.3) para encontrar el coseno del ángulo interno.

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

Ahora se usa la propiedad (4) para reescribir esta ecuación en términos de productos punto.

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \qquad (6)$$

Después se aplica dos veces la propiedad distributiva (3) en el izquierdo de (6) para obtener

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \qquad (7)\end{aligned}$$

↑ Propiedad (2)

Si se combinan las ecuaciones (6) y (7), se tiene

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

Así, se ha demostrado lo siguiente:

Teorema

Ángulo entre dos vectores

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores distintos de cero, el ángulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, que existe entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se determina por medio de la fórmula:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \qquad \textbf{(8)}$$

EJEMPLO 2 Encontrar el ángulo θ entre dos vectores

Encuentre el ángulo θ que existe entre $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

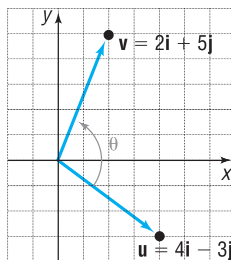
Solución Se calculan las cantidades $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$, y $\|\mathbf{v}\|$.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 4(2) + (-3)(5) = -7$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Figura 60



Por la fórmula (8), si θ es el ángulo que existe entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{-7}{5\sqrt{29}} \approx -0.26$$

Y se encuentra que $\theta \approx 105°$. Vea la figura 60. ◀



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 7a) Y b).

EJEMPLO 3 Encontrar la rapidez y la dirección reales de una aeronave



Un aeroplano Boeing 737 mantiene una velocidad constante de 500 millas por hora en dirección del sur. La velocidad del viento es de 80 millas por hora en dirección noreste. Encontrar la rapidez y la dirección reales de la aeronave con respecto al piso.

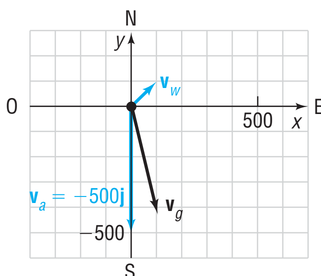
Solución Se establece un sistema de coordenadas en el que el norte (N) está a lo largo del eje y positivo. Vea la figura 61. Sean

$\mathbf{v}_a$ = velocidad de la aeronave con respecto al aire $= -500\mathbf{j}$

$\mathbf{v}_w$ = velocidad del viento

$\mathbf{v}_g$ = velocidad de la aeronave con respecto al piso

Figura 61



La velocidad del viento $\mathbf{v}_w$ tiene una magnitud de 80 y una dirección NE (noreste), de manera que $\alpha = 45°$. Si se expresa $\mathbf{v}_w$ en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, se tiene

$$\mathbf{v}_w = 80(\cos 45°\mathbf{i} + \text{sen } 45°\mathbf{j}) = 80\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\right) = 40\sqrt{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

La velocidad de la aeronave con respecto al piso es

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_w = -500\mathbf{j} + 40\sqrt{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 40\sqrt{2}\mathbf{i} + \left(40\sqrt{2} - 500\right)\mathbf{j}$$

La rapidez real de la aeronave es

$$\|\mathbf{v}_g\| = \sqrt{\left(40\sqrt{2}\right)^2 + \left(40\sqrt{2} - 500\right)^2} \approx 447 \text{ millas por hora}$$

El ángulo θ que existe entre $\mathbf{v}_g$ y el vector $\mathbf{v}_a = -500\mathbf{j}$ (a la velocidad del avión con respecto al aire) se determina por medio de la ecuación

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{v}_a}{\|\mathbf{v}_g\|\|\mathbf{v}_a\|} = \frac{\left(40\sqrt{2} - 500\right)(-500)}{(447)(500)} \approx 0.9920$$

$$\theta \approx 7.3°$$

La dirección de la aeronave respecto del piso es de alrededor de S7.3°E (alrededor de 7.3° al este del sur). ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.

Vectores paralelos y ortogonales


Se dice que dos vectores **v** y **w** son **paralelos** si existe una escalar α distinto de cero tal que $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{w}$. En este caso, el ángulo θ que existe entre **v** y **w** es 0 o π.

EJEMPLO 4 Determinar si dos vectores son paralelos

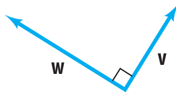
Los vectores $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ son paralelos, ya que $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{w}$. Además, puesto que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{18 + 2}{\sqrt{10}\sqrt{40}} = \frac{20}{\sqrt{400}} = 1$$

el ángulo θ que existe entre **v** y **w** es 0. ◀


Si el ángulo θ entre dos vectores distintos de cero **v** y **w** es $\frac{\pi}{2}$, estos vectores se consideran **ortogonales.*** Vea la figura 62.

Figura 62
v es ortogonal a **w**



De la fórmula (8) se deduce que si **v** y **w** son ortogonales, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, ya que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Por otra parte, si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ o $\cos\theta = 0$. En este último caso, $\theta = \frac{\pi}{2}$, y **v** y **w** son ortogonales. Si **v** o **w** es el vector cero, entonces, como vector cero no tiene dirección específica, se adopta la convención de que el vector cero es ortogonal a todos los vectores.

Teorema

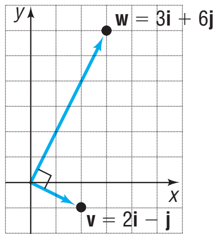
Dos vectores **v** y **w** son ortogonales si y sólo si

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$$

**Ortogonal*, *perpendicular* y *normal* son términos que significan "con unión en ángulo recto". Se acostumbra a decir que dos vectores son *ortogonales*, que dos rectas son *perpendiculares* y que una recta o vector con un plano son *normales*.

EJEMPLO 5 Determinar si dos vectores son ortogonales

Figura 63



Los vectores

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

son ortogonales, ya que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 6 - 6 = 0$$

Vea la figura 63. ◀

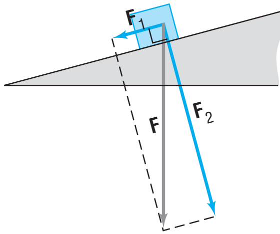


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7c).

Proyección de un vector sobre otro vector

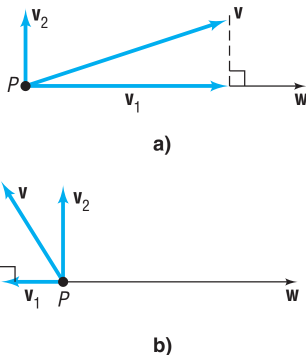
5 En muchas aplicaciones físicas, es necesario encontrar "qué tanto" de un vector se aplica en una dirección dada. Observe la figura 64. La fuerza **F** originada por la gravedad está ejerciendo un empuje hacia abajo (en dirección al centro de la Tierra) sobre el bloque. Para estudiar el efecto de la gravedad sobre el bloque, es necesario determinar qué tanto de **F** está jalando el bloque hacia abajo del plano inclinado ($\mathbf{F}_1$) y qué tanto lo está haciendo ejercer presión, en ángulo recto, sobre el plano inclinado ($\mathbf{F}_2$). Conocer la **descomposición** de **F** con frecuencia nos permitirá determinar cuándo se supera la fricción y el bloque se deslizará por el plano inclinado.

Figura 64



Suponga que **v** y **w** son dos vectores distintos de cero con el mismo punto inicial *P*. Se busca descomponer **v** en dos vectores: $\mathbf{v}_1$, que es paralelo a **w**, y $\mathbf{v}_2$, que es ortogonal a **w**. Vea las figuras 65*a*) y *b*). El vector $\mathbf{v}_1$ se llama **proyección del vector v en w**.

Figura 65



El vector $\mathbf{v}_1$ se obtiene de la siguiente manera: A partir del punto terminal de **v**, se traza una perpendicular a la recta que contiene a **w**. El vector $\mathbf{v}_1$ es el vector que va desde *P* hasta esta perpendicular. El vector $\mathbf{v}_2$ está dado por $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$. Observe que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1$ es paralelo a **w**, y $\mathbf{v}_2$ es ortogonal a **w**. Ésta es la descomposición de **v** que se buscaba.

Ahora hay que buscar la fórmula para $\mathbf{v}_1$ que se basa en el conocimiento de los vectores **v** y **w**. Como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, se tiene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w} \qquad \textbf{(9)}$$

Puesto que $\mathbf{v}_2$ es ortogonal a **w**, se tiene $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w} = 0$. Como $\mathbf{v}_1$ es paralelo a **w**, se tiene $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{w}$ para cierto escalar α. La ecuación (9) se escribe como

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \alpha\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \alpha\|\mathbf{w}\|^2 \qquad \mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{w};\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w} = 0$$

$$\alpha = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}$$

Entonces:

$$\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

Teorema

Si **v** y **w** son dos vectores distintos de cero, la proyección del vector **v** en **w** es

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} \qquad \textbf{(10)}$$

La descomposición de $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{v}_1$ es paralelo a $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}_2$ es perpendicular a $\mathbf{w}$, es

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 \tag{11}$$

EJEMPLO 6 **Descomponer un vector en dos vectores ortogonales**

Encuentre la proyección del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ en $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Descomponga $\mathbf{v}$ en dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{v}_1$ sea paralelo a $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}_2$ sea ortogonal a $\mathbf{w}$.

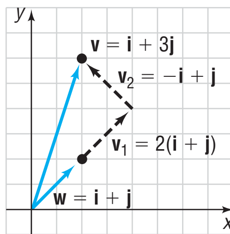
Solución Se usan las fórmulas (10) y (11).

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} = \frac{1 + 3}{(\sqrt{2})^2}\mathbf{w} = 2\mathbf{w} = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 = (\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - 2(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Vea la figura 66. ◀

Figura 66





TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

Trabajo realizado por una fuerza constante



En la física elemental, el **trabajo** realizado por una fuerza constante **F** al mover un objeto desde el punto A hasta el punto B se define como

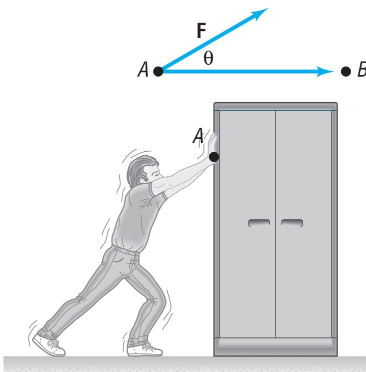
$$W = (\text{magnitud de la fuerza})(\text{distancia}) = \|\mathbf{F}\|\|\overrightarrow{AB}\|$$

El trabajo se suele medir en pies-libra o en newtons-metro (joules).

En esta definición, se supone que la fuerza **F** se aplica a lo largo de la línea de movimiento. Si la fuerza constante **F** no está a lo largo de la línea de movimiento, pero en su lugar tiene un ángulo θ con respecto a la dirección del movimiento, como se ilustra en la figura 67, entonces el **trabajo** W **realizado por F** al mover un objeto desde A hasta B se define como

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} \tag{12}$$

Figura 67



Esta definición es compatible con la definición de fuerza por distancia mencionada, ya que

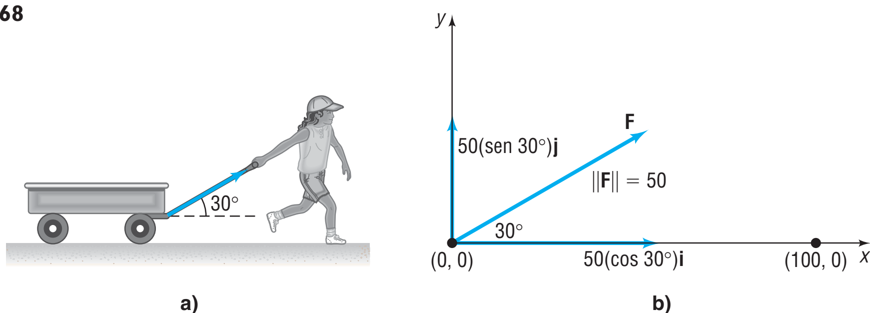
$$W = (\text{cantidad de fuerza en la dirección of } \overrightarrow{AB})(\text{distancia})$$

$$= \|\text{proyección de } \mathbf{F} \text{ sobre } AB\| \, \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AB}\| = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

EJEMPLO 7 **Calcular el trabajo**

En la figura 68*a*) se muestra una niña jalando un carro con una fuerza de 50 libras. ¿Cuánto trabajo se realiza al mover el carro 100 pies, si la manija forma un ángulo de 30° respecto del piso?

Figura 68



Solución Se colocan los vectores en un sistema de coordenadas, de tal manera que el carro se mueva de $(0, 0)$ a $(100, 0)$. El movimiento va desde $A = (0, 0)$ hasta $B = (100, 0)$, entonces $\overrightarrow{AB} = 100\mathbf{i}$. Como se muestra en la figura 68b), el vector fuerza **F** es

$$\mathbf{F} = 50(\cos 30°\mathbf{i} + \text{sen } 30°\mathbf{j}) = 50\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = 25\left(\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}\right)$$

Por la fórmula (12), el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} = 25\left(\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}\right) \cdot 100\mathbf{i} = 2500\sqrt{3} \text{ pies por libra}$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 35.

Aspecto histórico

1. En un aspecto histórico anterior, se estableció que los números complejos se utilizaron como vectores en el plano antes de que se aclarara la noción general de vector. Suponiendo que se establece la correspondencia

Vector ↔ Número complejo

$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \leftrightarrow a + bi$

$c\mathbf{i} + d\mathbf{j} \leftrightarrow c + di$

Se demuestra que:

$$(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) = \text{parte real } \left[(\overline{a + bi})(c + di)\right]$$

Así fue como se descubrió originalmente el producto punto. La parte imaginaria también resulta interesante. Es un determinante (vea la sección 11.3), y representa el área del paralelogramo cuyos bordes son vectores. Esto se acerca a algunas de las ideas de Hermann Grassmann y también se relaciona con el triple producto escalar de los vectores tridimensionales.

9.5 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. En un triángulo con lados a, b, c y ángulos α, β, γ, la ley de cosenos establece que __________. (p. 681)

Conceptos y vocabulario

2. Si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, entonces los vectores **v** y **w** son __________.
3. Si $\mathbf{v} = 3\mathbf{w}$, entonces los vectores **v** y **w** son __________.
4. *Falso o verdadero:* si **v** y **w** son vectores paralelos, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.
5. *Falso o verdadero:* dados los vectores **v** y **w** distintos de cero, siempre es posible descomponer **v** en dos vectores, uno paralelo y otro perpendicular a **w**.
6. *Falso o verdadero:* el trabajo es un ejemplo físico de un vector.

Ejercicios

En los problemas 7-16, a) encuentre el producto punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$; *b) encuentre el ángulo que se forma entre* **v** *y* **w**; *c) defina si los vectores son paralelos, ortogonales, o ninguna de las dos.*

7. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
8. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$
9. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
10. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
11. $\mathbf{v} = \sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
12. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

13. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

14. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

15. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{j}$

16. $\mathbf{v} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{w} = -3\mathbf{j}$

17. Encuentre una a tal que los vectores $\mathbf{v} = \mathbf{i} - a\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ sean ortogonales.

18. Encuentre una b tal que los vectores $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} + b\mathbf{j}$ sean ortogonales.

En los problemas 19-24, descomponga $\mathbf{v}$ *en dos vectores* $\mathbf{v}_1$ *y* $\mathbf{v}_2$*, donde* $\mathbf{v}_1$ *sea paralelo a* $\mathbf{w}$ *y* $\mathbf{v}_2$ *ortogonal a* $\mathbf{w}$.

19. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

20. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

21. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = i + 2\mathbf{j}$

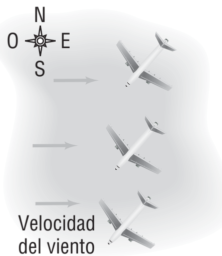
22. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

23. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

24. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

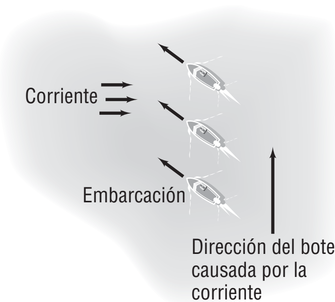
---

25. Encontrar la rapidez y dirección reales de una aeronave Un jumbo jet Boeing 747 conserva una velocidad de 550 millas por hora en dirección sureste. La velocidad del viento es constante y de 80 millas por hora procedente del oeste. Encuentre la rapidez y dirección reales de la aeronave.



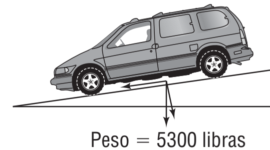
26. Encontrar la dirección correcta en la brújula El piloto de un aeroplano quieren dirigirse directamente hacia el este, pero se enfrenta a una velocidad del viento de 40 millas por hora procedente del noroeste. Si el piloto mantiene una velocidad de 250 millas por hora, ¿qué dirección debe señalar la brújula? ¿cuál es la rapidez real de la aeronave?

27. Dirección correcta al cruzar un río Un río tiene una corriente constante de 3 kilómetros por hora. ¿A qué ángulo con respecto al embarcadero se debe dirigir una embarcación de motor, capaz de mantener una rapidez de 20 kilómetros por hora, a fin de alcanzar la otra orilla en un punto directamente frente al embarcadero? Si el río tiene $\frac{1}{2}$ kilómetro de ancho, ¿cuánto tiempo tardará en cruzarlo?



28. Dirección correcta al cruzar un río Repita el problema 27 considerando ahora que la corriente va a 5 kilómetros por hora.

29. Carga de frenado Una camioneta familiar, con peso bruto de 5700 libras, se encuentra estacionada en una calle con una pendiente de 8°. Observe la figura. Calcule la fuerza necesaria para evitar que ruede por la cuesta. ¿Cuál es la fuerza perpendicular a la colina?



30. Carga de frenado Un automóvil de lujo, con un peso bruto de 4500 libras, se encuentra estacionado en una calle con una pendiente de 10°. Encuentre la fuerza necesaria para evitar que ruede por la cuesta. ¿Cuál es la fuerza perpendicular a la colina?

31. Rapidez y dirección reales de una aeronave Un aeroplano tiene una velocidad en el aire de 500 kilómetros por hora con dirección N45°E. La velocidad del viento es de 60 kilómetros por hora en dirección N30°O. Encuentre el vector resultante que representa la ruta del aeroplano con respecto al suelo. ¿Cuál es la rapidez real de la aeronave? ¿Cuál es su dirección?

32. Rapidez y dirección reales de una aeronave Un aeroplano tiene una velocidad en el aire de 600 kilómetros por hora con dirección S30°E. La velocidad del viento es de 40 kilómetros por hora en dirección S30°E. Encuentre el vector resultante que representa la ruta del aeroplano con respecto al suelo. ¿Cuál es la rapidez real de la aeronave? ¿Cuál es su dirección?

33. Cruce de un río Una pequeña embarcación de motor alcanza una velocidad de 20 millas por hora en aguas quietas. Si se dirige directamente a través de río (es decir, perpendicular a la corriente) cuya corriente es 3 millas por hora, encuentre un vector que represente la rapidez y dirección de la embarcación. ¿Cuál es la rapidez real de la embarcación? ¿Cuál es su dirección?

34. Cruce de un río Una pequeña embarcación de motor alcanza una velocidad de 10 millas por hora en aguas quietas. Si se dirige directamente a través de río (es decir, perpendicular a la corriente) cuya corriente es 4 millas por hora, encuentre un vector que represente la rapidez y dirección de la embarcación. ¿Cuál es la rapidez real de la embarcación? ¿Cuál es su dirección?

35. Calcular el trabajo Encuentre el trabajo realizado por una fuerza de 3 libras aplicada en una dirección de 60° con respecto a la horizontal, al mover un objeto 2 pies, de $(0, 0)$ a $(2, 0)$.

36. Calcular el trabajo Encuentre el trabajo realizado por una fuerza de 1 libra aplicada en una dirección de 45° con respecto a la horizontal, al mover un objeto 5 pies, de $(0, 0)$ a $(5, 0)$.

37. Calcular el trabajo Se jala un carro de manera horizontal, ejerciendo una fuerza de 20 libras en la manija con un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. ¿Cuánto trabajo se realiza al mover el carro 100 pies?

38. Encuentre el ángulo agudo que forma un vector fuerza unitario con respecto al eje x positivo, si el trabajo realizado por dicha fuerza al mover una partícula desde $(0, 0)$ hasta $(4, 0)$ es igual a 2.

39. Demuestre la propiedad distributiva:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

40. Demuestre la propiedad (5), $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$.

41. Si $\mathbf{v}$ es un vector unitario y α, es el ángulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{i}$, demuestre que $\mathbf{v} = \cos \alpha\mathbf{i} + \operatorname{sen} \alpha\mathbf{j}$.

42. Suponga que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son directores unitarios. Si α es el ángulo que se forma entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{i}$ y β, el que se forma entre $\mathbf{w}$ y $\mathbf{i}$, utilice la noción del producto punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ para demostrar que

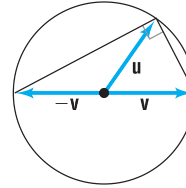
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

43. Demuestre que la proyección de $\mathbf{v}$ en $\mathbf{i}$ es $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i}$. De hecho, demuestre que siempre se puede escribir un vector $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$$

44. a) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma magnitud, demuestre que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ son ortogonales

b) Utilice lo anterior para demostrar que un ángulo inscrito en un semicírculo forma un ángulo recto (observe la figura).



45. Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, que representan dos vectores distintos de cero. Demuestre que si $\alpha = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})/\|\mathbf{w}\|^2$ el vector $\mathbf{v} - \alpha\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$.

46. Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, que representan dos vectores distintos de cero. Demuestre que los vectores $\|\mathbf{w}\|\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{w}$ y $\|\mathbf{w}\|\mathbf{v} - \|\mathbf{v}\|\mathbf{w}$ son ortogonales.

47. En la definición de trabajo proporcionada en esta sesión, ¿cuál es el trabajo realizado si $\mathbf{F}$ es ortogonal a $\overrightarrow{AB}$?

48. Demuestre la **identidad de polarización,**

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).$$

49. Elabore una aplicación distinta a todas las que se encuentran en este libro, cuya solución requiera hacer uso del producto punto.

Respuesta a "¿Está preparado?"

1. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Repaso del capítulo

Conceptos para recordar

Relación entre coordenadas polares (r, θ) y coordenadas rectangulares (x, y) (pp. 713 y 716)	$x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$ $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan \theta = \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$
Forma polar de un número complejo (p. 737)	Si $z = x + yi$, entonces $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, donde $r = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{y}{r}$, $\cos \theta = \dfrac{x}{r}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.
Teorema de De Moivre (p. 739)	Si $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, entonces $z^n = r^n[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$, donde $n \geq 1$ es un entero positivo.
Raíz n-ésima de un número complejo $z = r(\cos \theta_0 + i \operatorname{sen} \theta_0)$ (p. 740)	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\theta_0}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta_0}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right)\right]$, $k = 0, \ldots, n - 1$, donde $n \geq 2$ es un entero.
Vector (p. 744)	Cantidad con magnitud y dirección; equivalente a un segmento de recto dirigido $\overrightarrow{PQ}$
Vector de posición (p. 747)	Vector cuyo punto inicial está en el origen
Vector unitario (pp. 747 y 750)	Vector cuyo magnitud es 1
Producto punto (p. 756)	Si $\mathbf{v} = a_1\mathrm{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = a_2\mathbf{i} + b_2 j$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a_1a_2 + b_1b_2$.
Ángulo θ entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ distintos de cero (p. 758)	$\cos \theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$

Objetivos

Sección		Debe ser capaz de . . .	Ejercicios de repaso
9.1	1	Graficar puntos usando coordenadas polares (p. 710)	1–6
	2	Convertir coordenadas polares en coordenadas rectangulares (p. 713)	1–6
	3	Convertir coordenadas rectangulares en coordenadas polares (p. 714)	7–12
9.2	1	Graficar e identificar ecuaciones polares mediante la conversión a ecuaciones rectangulares (p. 720)	13–18
	2	Probar la simetría de ecuaciones polares (p. 724)	19–24
	3	Graficar ecuaciones polares mediante el trazo de puntos (p. 725)	19–24
9.3	1	Convertir un número complejo de forma rectangular a forma polar (p. 737)	25–28
	2	Graficar puntos en el plano complejo (p. 737)	29–34
	3	Encontrar los productos y cocientes de números complejos en forma polar (p. 738)	35–40
	4	Utilizar el teorema de De Moivre (p. 739)	41–48
	5	Encontrar raíces complejas (p. 740)	49–50
9.4	1	Graficación de vectores (p. 746)	51–54
	2	Encontrar un vector de posición (p. 747)	55–58
	3	Sumar y restar vectores (p. 749)	59, 60
	4	Encontrar un producto escalar y la magnitud de un vector (p. 750)	61–66
	5	Encontrar un vector unitario (p. 750)	67, 68
	6	Encontrar un vector a partir de su dirección y magnitud (p. 751)	69, 70
	7	Trabajar con objetos en equilibrio estático (p. 752)	87
9.5	1	Encontrar el producto punto de dos vectores (p. 756)	71–74
	2	Encontrar el ángulo entre dos vectores (p. 757)	71–74, 85, 86, 88
	3	Determinar si dos vectores son paralelos (p. 759)	75–80
	4	Determinar si dos vectores son ortogonales (p. 759)	75–80
	5	Descomponer un vector en dos vectores ortogonales (p. 760)	81, 82
	6	Calcular el trabajo (p. 761)	89

Ejercicios de repaso

(Un asterisco en un problema indica que el autor lo sugiere para un examen de práctica).

En los problemas 1-6, grafique cada uno de los puntos dados en coordenadas polares y encuentre sus coordenadas rectangulares.

* **1.** $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ **2.** $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ **3.** $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$

4. $\left(-1, \frac{5\pi}{4}\right)$ **5.** $\left(-3, -\frac{\pi}{2}\right)$ **6.** $\left(-4, -\frac{\pi}{4}\right)$

En los problemas 7-12, se le dan las coordenadas rectangulares de un punto. Encuentre los pares de coordenadas polares $r > 0$ de cada punto, uno con $r > 0$ y otro con $r < 0$. Exprese θ en radianes.

* **7.** $(-3, 3)$ **8.** $(1, -1)$ **9.** $(0, -2)$ **10.** $(2, 0)$ **11.** $(3, 4)$ **12.** $(-5, 12)$

En los problemas 13-18, las letras r y θ representan coordenadas polares. Escriba cada ecuación polar como una ecuación en coordenadas rectangulares (x, y). Identifique y grafique la ecuación.

***13.** $r = 2 \text{ sen } \theta$ **14.** $3r = \text{sen } \theta$ **15.** $r = 5$

16. $\theta = \frac{\pi}{4}$ **17.** $r \cos \theta + 3r \text{ sen } \theta = 6$ **18.** $r^2 + 4r \text{ sen } \theta - 8r \cos \theta = 5$

En los Problemas 19 al 24, esboce la gráfica de cada ecuación polar. Cerciórese de probar la simetría

19. $r = 4 \cos \theta$ **20.** $r = 3 \text{ sen } \theta$ ***21.** $r = 3 - 3 \text{ sen } \theta$

22. $r = 2 + \cos \theta$ **23.** $r = 4 - \cos \theta$ **24.** $r = 1 - 2 \text{ sen } \theta$

En los problemas 25-28, escriba cada número complejo en forma polar. Exprese cada uno de los argumentos en grados.

25. $-1 - i$ **26.** $-\sqrt{3} + i$ ***27.** $4 - 3i$ **28.** $3 - 2i$

En los problemas 29-34, escriba cada número complejo en la forma normal $a + bi$ y grafique cada uno de ellos en el plano complejo.

***29.** $2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$ **30.** $3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$ **31.** $3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right)$

32. $4\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$ **33.** $0.1(\cos 350° + i \operatorname{sen} 350°)$ **34.** $0.5(\cos 160° + i \operatorname{sen} 160°)$

En los problemas 35-40, encuentre zw y $\frac{z}{w}$. Deje sus respuestas en forma polar.

***35.** $z = \cos 80° + i \operatorname{sen} 80°$, $w = \cos 50° + i \operatorname{sen} 50°$

36. $z = \cos 205° + i \operatorname{sen} 205°$, $w = \cos 85° + i \operatorname{sen} 85°$

37. $z = 3\left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{9\pi}{5}\right)$, $w = 2\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}\right)$

38. $z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}\right)$, $w = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$

39. $z = 5(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$, $w = \cos 355° + i \operatorname{sen} 355°$

40. $z = 4(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)$, $w = \cos 340° + i \operatorname{sen} 340°$

En los problemas 41-48, escriba cada expresión en la forma estándar $a + bi$.

41. $[3(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)]^3$ **42.** $[2(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)]^3$ ***43.** $\left[\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{8}\right)\right]^4$ **44.** $\left[2\left(\cos \frac{5\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{16}\right)\right]^4$

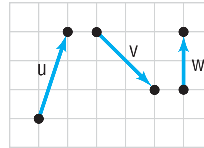
45. $(1 - \sqrt{3}i)^6$ **46.** $(2 - 2i)^8$ **47.** $(3 + 4i)^4$ **48.** $(1 - 2i)^4$

49. Encuentre todas las raíces cúbicas complejas de 27. **50.** Encuentre todas las raíces cuartas complejas de -16.

En los problemas 51-54, utilice la figura para graficar cada uno de los siguientes:

51. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ **52.** $\mathbf{v} + \mathbf{w}$

53. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ **54.** $5\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$



*En los problemas 55-58, el vector **v** se representa mediante el segmento de recto dirigido $\overrightarrow{PQ}$. Escriba **v** en la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, y encuentre $\|\mathbf{v}\|$.*

***55.** $P = (1, -2)$; $Q = (3, -6)$ **56.** $P = (-3, 1)$; $Q = (4, -2)$

57. $P = (0, -2)$; $Q = (-1, 1)$ **58.** $P = (3, -4)$; $Q = (-2, 0)$

En los problemas 59-66, utilice los vectores $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ para encontrar:

59. $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ **60.** $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ **61.** $4\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$ **62.** $-\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$

***63.** $\|\mathbf{v}\|$ **64.** $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ **65.** $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ **66.** $\|2\mathbf{v}\| - 3\|\mathbf{w}\|$

67. Encuentre un vector unitario con la misma dirección que **v**. **68.** Encuentre un vector unitario con la dirección opuesta a **w**.

69. Encuentre el vector **v** de magnitud 3, si el ángulo entre **v** e **i** es 60°.

70. Encuentre el vector **v** de magnitud 5, si el ángulo entre **v** e **i** es 150°.

*En los problemas 71-74, encuentre el producto punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, y el ángulo que se forma entre **v** y **w**.*

***71.** $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **72.** $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

73. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ **74.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

*En los problemas 75-80, determine si **v** y **w** son paralelos, ortogonales o ninguna de las dos cosas.*

***75.** $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{w} = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ **76.** $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ **77.** $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$; $\mathbf{w} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

78. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{w} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **79.** $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ **80.** $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

En los problemas 81 y 82, descomponga **v** *en dos vectores, uno paralelo a* **w** *y otro ortogonal a* **w**.

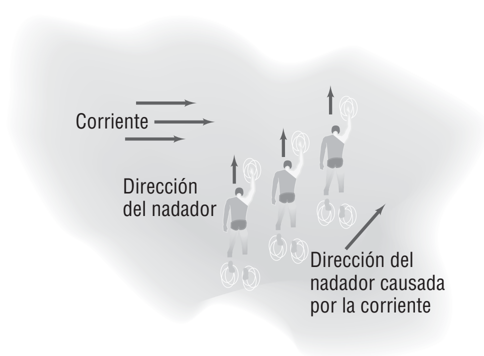
81. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{w} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

82. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{w} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

83. Encuentre la proyección del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ en $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

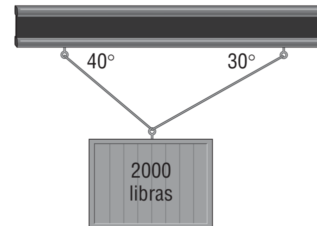
84. Encuentre la proyección del vector $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ en $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

85. Rapidez y dirección reales de un nadador Un nadador puede mantener una velocidad de 5 millas por hora. Si se dirige directamente a través de un río que tiene una corriente que se mueve con un ritmo de 2 millas por hora, ¿cuál es la velocidad real del nadador? (Observe la figura). Si el río tiene una milla de ancho, ¿a qué distancia río abajo alcanzará la otra orilla con respecto a su punto de partida?



86. Rapidez y dirección reales de un aeroplano Un aeroplano tiene una velocidad en el aire de 500 kilómetros por hora en dirección norte. La velocidad del viento es de 60 kilómetros por hora en dirección sureste. Encuentre la rapidez y dirección reales del aeroplano con respecto al piso.

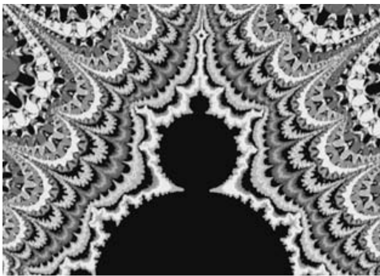
***87. Equilibrio estático** Un peso de 2000 libras cuelga de dos cables como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las tensiones que soporta cada uno de los cables?



88. Rapidez y dirección reales de una embarcación de motor Una pequeña embarcación de motor se mueve con una velocidad real de 11 millas por hora en dirección sur. Se sabe que la corriente procede del noreste, a 3 millas por hora. ¿Cuál es la rapidez de la embarcación con respecto al agua? De acuerdo con una brújula, ¿a qué dirección se encamina la embarcación?

89. Calcular el trabajo Encuentre el trabajo realizado por una fuerza de 5 libras aplicada en una dirección de 60° con respecto a la horizontal, al mover un objeto 20 pies, de (0, 0) a (20, 0).

Proyectos del capítulo



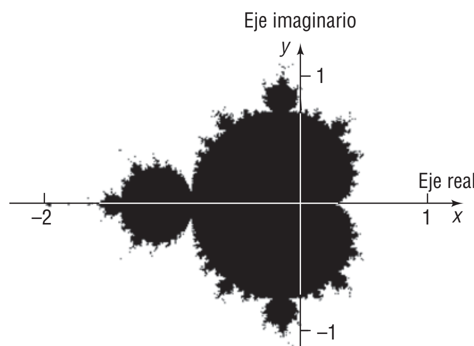
1. Conjuntos Mandelbrot

a) Sea $z = x + yi$ un número complejo. Los números complejos se grafican empleando un sistema de coordenadas llamado el plano complejo. El eje x se denominará eje real, porque cualquier punto que quede sobre él tiene la forma $z = x + 0i = x$, que es un número real. El eje y se llama eje imaginario, porque todo punto que quede sobre él tiene la forma $z = 0 + yi = yi$, que es un número imaginario puro. Para graficar el número complejo $z = x + yi$, grafique el par ordenado (x, y), donde x es la distancia señalada desde el eje imaginario y y es la distancia señalada desde el eje real. Dibuje un plano complejo y grafique los puntos $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = 0 - 2i$, y $z_4 = -2$.

b) Considere la expresión $a_n = (a_{n-1})^2 + z$, donde z es algún número complejo (llamado la **semilla**) y $a_0 = z$. Calcule a_1 $(= a_0^2 + z)$, a_2 $(= a_1^2 + z)$, $a_3$$(= a_2^2 + z)$, a_4, a_5 y a_6 para las siguientes semillas: $z_1 = 0.1 - 0.4i$, $z_2 = 0.5 + 0.8i$, $z_3 = -0.9 + 0.7i$, $z_4 = -1.1 + 0.1i$, $z_5 = 0 - 1.3i$, y $z_6 = 1 + 1i$.

c) La parte oscura de la gráfica que aparece en la página 768, representa al conjunto de todos los valores $z = x + yi$ que están en el conjunto de Mandelbrot. Determine cuáles de los números complejos del inciso *b*) forman parte de este conjunto, trazándolos sobre la gráfica. Los números complejos que no forman parte del conjunto de Mandelbrot, ¿tienen algunas características comunes con respecto a los valores de a_6 encontrados en el inciso *b*)?

d) Calcule $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ para cada uno de los números complejos del inciso *b*). Ahora calcule $|a_6|$ para cada uno de los números complejos del inciso *b*). ¿Para qué números complejos $|a_6| \geq |z|$ y $|z| > 2$? Concluya que $|a_n| \geq |z|$ y $|z| > 2$ es el criterio para que un número complejo forme parte del conjunto de Mandelbrot.



Los siguientes proyectos están disponibles en www.prenhall.com/sullivan

2. **Project at Motorola** ***Signal fades due to interference***
3. **Compound Interest**
4. **Complex Equations**

Repaso acumulativo

1. Encuentre las soluciones reales, si las hay, de la ecuación $e^{x^2-9} = 1$.
2. Encuentre una ecuación para la recta que pasa por el origen y forma un ángulo de 30° con el eje x positivo.
3. Encuentre una ecuación para el círculo con centro en el punto $(0, 1)$ y radio 4. Grafíquelo.
4. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x)$ $\ln(1 - 2x)$?
5. Pruebe la simetría de la ecuación $x^2 + y^3 = 2x^4$ con respecto al eje x, al eje y, y al origen.
6. Grafique la función $y = |\ln x|$.
7. Grafique la función $y = |\text{sen } x|$.
8. Grafique la función $y = \text{sen}|x|$.
9. Encuentre el valor exacto de $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.
10. Grafique las ecuaciones $x = 3$ y $y = 4$ utilizando el mismo juego de coordenadas rectangulares.
11. Grafique las ecuaciones $r = 2$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$ utilizando el mismo juego de coordenadas polares.

10 Geometría analítica

C O N T E N I D O

10.1 Cónicas

10.2 Parábola

10.3 Elipse

10.4 La hipérbola

10.5 Rotación de ejes, forma general de una cónica

10.6 Ecuaciones polares de cónicas

10.7 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Repaso del capítulo

Proyectos del capítulo

Repaso acumulativo

La insólita órbita de Plutón

Plutón está cerca de 39 veces más lejos del Sol que la Tierra. Su distancia promedio del Sol es cercana a 3,647,240,000 millas (5,869,660,000 kilómetros). Plutón gira alrededor del Sol en una órbita elíptica (ovalada). En algún punto de su órbita, se acerca más al Sol que Neptuno, el segundo planeta más alejado. Permanece dentro de la órbita de Neptuno por cerca de 20 años terrestres. Este evento se presenta cada 248 años terrestres, que son los que tarda la traslación completa de Plutón. Este planeta ingresó a la órbita de Neptuno el 23 de enero de 1979, y permaneció dentro de ella hasta el 11 de febrero de 1999. Plutón será el planeta más alejado del Sol hasta el 2227.

FUENTE: Reimpreso con autorización de The Associated Press. http://www2.worldbook.com/features/features.asp?feature=outerplanets&page=html/pluto_orbit.html&direct=yes

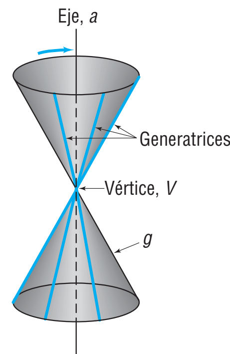
—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO.

10.1 Cónicas

OBJETIVO 1 Aprender los nombres de las cónicas

✓1 La palabra *cónica* se deriva de la palabra *cono*, que es una figura geométrica que se construye de la siguiente manera: Sean a y g dos rectas distintas que se cortan en un punto V. Se fija la recta a. Ahora se gira la recta g alrededor de a, conservando a la vez el mismo ángulo entre ambas rectas. La colección de puntos resultantes (generados) por la recta g se denomina **cono** (**recto circular**). Vea la figura 1. La recta fija a se llama **eje** del cono; el punto V es su **vértice**; las rectas que pasan por V y tienen el mismo ángulo que g con a son las **generatrices** del cono. Cada generatriz es una recta que queda totalmente sobre el cono. El cono se compone de dos partes, llamadas **paños**, que se intersecan en el vértice.

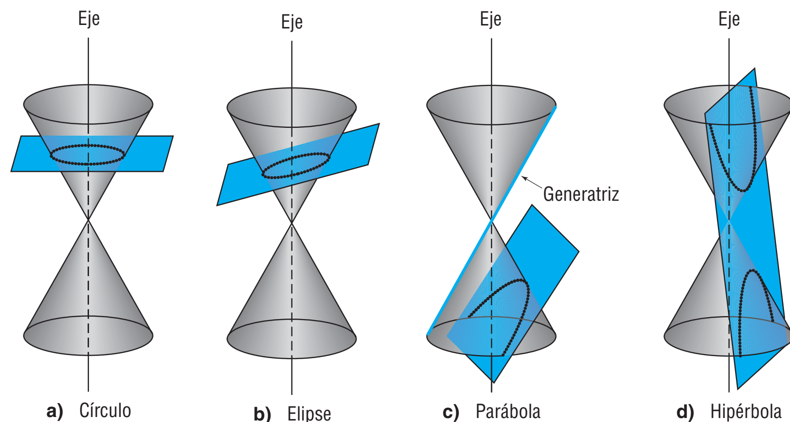
Figura 1



Las **cónicas**, abreviatura de **secciones cónicas,** son curvas que resultan de la intersección de un cono (recto circular) y un plano. Se estudiarán las cónicas que surgen cuando el plano no incluye al vértice, como se muestra en la figura 2. Cuando el plano es perpendicular al eje del cono y corta a todas las generatrices, la cónica es un **círculo**; la **elipse** aparece cuando el plano está ligeramente inclinado, de manera que corta a todas las generatrices, pero un solo paño del cono; las **parábolas** surgen cuando el plano está más inclinado, de manera que está paralelo a una (y sólo una) generatriz y corta un solo paño del cono, y las **hipérbolas,** cuando el plano corta ambos paños.

Si el plano incluye al vértice, la intersección del plano y el cono es un punto, una recta o un par de rectas que se cortan. Por lo general, éstas se denominan **cónicas degeneradas.**

Figura 2



10.2 Parábola

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Fórmula de la distancia (sección 2.1, p. 160)
- Simetría (sección 2.2, pp. 170-171)
- Método de raíz cuadrada (sección 1.2, pp. 98-99)
- Completar cuadrados (sección 1.2, p. 99)
- Técnicas de graficación: transformaciones (sección 3.5, pp. 262-271)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 778.

OBJETIVOS
1. Encontrar la ecuación de una parábola
2. Graficar parábolas
3. Analizar la ecuación de una parábola
4. Trabajar con parábolas con vértice en (h, k)
5. Resolver problemas de aplicación que incluyan parábolas

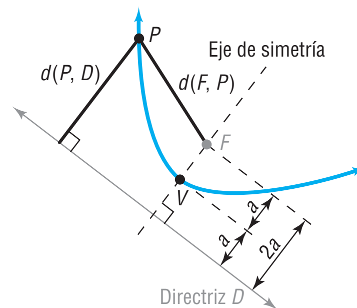
Ya establecimos (sección 4.1) que la gráfica de una función cuadrática es una parábola. En esta sección, comenzamos con una definición geométrica de parábola y la utilizamos para obtener una ecuación.

Una **parábola** es la colección de todos los puntos P del plano que están a la misma distancia de un punto fijo F y de una recta fija D. El punto F se conoce como el **foco** de la parábola, en tanto que la recta D es su **directriz**. En consecuencia, una parábola es el conjunto de puntos P para los que:

$$d(F, P) = d(P, D) \quad \textbf{(1)}$$

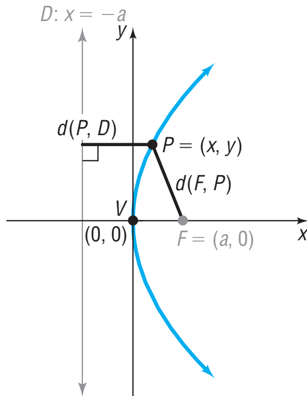
1 En la figura 3 se muestra una parábola. La recta que pasa por el foco F y perpendicular a la directriz D, se denomina **eje de simetría** de la parábola. El punto de intersección de la parábola con su eje de simetría se llama **vértice** V.

Figura 3



Puesto que el vértice V queda sobre la parábola, debe satisfacer la ecuación (1): $d(F, V) = d(V, D)$. El vértice está a mitad del camino entre el foco y la directriz. Sea a la distancia $d(F, V)$ que hay de F a V. Ahora se está listo para deducir una ecuación para la parábola. Para esto, se utiliza un sistema de coordenadas rectangulares, colocado de tal manera que el vértice V, el foco F y la directriz D de la parábola queden ubicados de forma conveniente. Si se elige ubicar el vértice V en el origen $(0, 0)$, entonces se coloca de manera conveniente al foco F, ya sea sobre el eje x o sobre el eje y.

Figura 4
$y^2 = 4ax$



Primero, consideramos el caso en el que el foco F está sobre el eje x positivo, como se muestra en la figura 4. Como la distancia de F a V es a, las coordenadas de F serán $(a, 0)$ con $a > 0$. Del mismo modo, puesto que la distancia desde V hasta la directriz D también es a, y ya que D debe ser perpendicular al eje x (porque éste es el eje simetría), la ecuación de la directriz D debe ser $x = -a$.

Ahora bien, si $P = (x, y)$ es cualquier punto de la parábola, entonces P debe satisfacer la ecuación (1):

$$d(F, P) = d(P, D)$$

Entonces, tenemos:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = |x + a| \quad \text{Usar la fórmula de la distancia.}$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2 \quad \text{Elevar ambos lados al cuadrado.}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2 \quad \text{Eliminar los paréntesis.}$$

$$y^2 = 4ax \quad \text{Simplificar.}$$

Teorema

Ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) y foco en (a, 0), $a > 0$

La ecuación de la parábola con vértice en $(0, 0)$, foco en $(a, 0)$ y directriz $x = -a$, $a > 0$, es:

$$y^2 = 4ax \qquad \textbf{(2)}$$

EJEMPLO 1 Encontrar y graficar la ecuación de una parábola

2

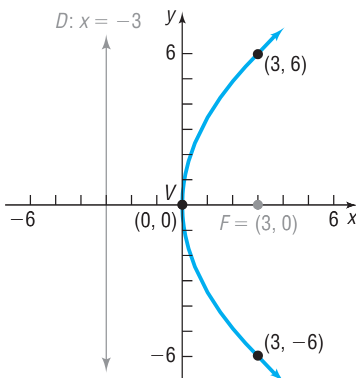
Encuentre la ecuación de la parábola con vértice en $(0, 0)$ y foco en $(3, 0)$. Grafique la ecuación.

Solución La distancia desde el vértice $(0, 0)$ hasta el foco $(3, 0)$ es $a = 3$. Con base en la ecuación (2), la ecuación de esta parábola es:

$$y^2 = 4ax$$

$$y^2 = 12x \quad a = 3$$

Figura 5



Para graficar esta parábola, es útil trazar los dos puntos de la gráfica que están por encima y por debajo del foco. Para localizarlos, se hace $x = 3$. Entonces:

$$y^2 = 12x = 12(3) = 36$$

$$y = \pm 6 \quad \text{Despejar } y.$$

Los puntos de la parábola que están por encima y por debajo del foco son $(3, 6)$ y $(3, -6)$. Estos puntos ayudan a graficar la parábola porque determinan la "abertura". Vea la figura 5. ◀

Por lo general, los puntos de una parábola $y^2 = 4ax$ que están por encima por debajo del foco $(a, 0)$ se encuentran a una distancia de $2a$ del foco. Esto se deduce del hecho de que si $x = a$, entonces $y^2 = 4ax = 4a^2$, por lo que $y = \pm 2a$. El segmento de recta que une estos dos puntos se conoce como el **latus rectum;** su longitud es de $4a$.



Comentario: Para graficar la parábola $y^2 = 12x$ analizada en el ejemplo 1, se necesita graficar las dos funciones $Y_1 = \sqrt{12x}$ y $Y_2 = -\sqrt{12x}$. Hágalo y compare lo que ve con la figura 5. ■



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

Al invertir los pasos que se utilizan para obtener la ecuación (2), se deduce que la gráfica de una ecuación con la forma de la (2), $y^2 = 4ax$, es una parábola; su vértice está en $(0, 0)$, su foco está en $(a, 0)$, su directriz es la recta $x = -a$ y su eje de simetría es el eje x.

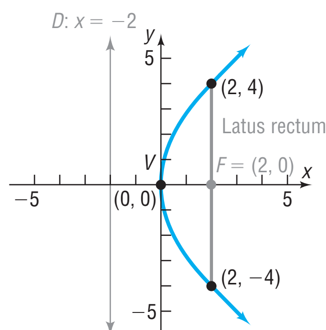
3 Durante el resto de esta sección, la instrucción "Analizar la ecuación" indicará encontrar vértice, foco y directriz de la parábola y graficarla.

EJEMPLO 2 Analizar la ecuación de una parábola

Analice la ecuación: $y^2 = 8x$

Solución La ecuación $y^2 = 8x$ tiene la forma $y^2 = 4ax$, donde $4a = 8$, por lo que $a = 2$. En consecuencia, la gráfica de la ecuación es una parábola con vértice en (0, 0) y foco en el punto $(2, 0)$ del eje x positivo. La directriz es la recta $x = -2$. Los dos puntos que definen el latus rectum se obtienen haciendo a $x = 2$. Entonces, $y2 = 16$, por lo que $y = \pm 4$. Vea la figura 6. ◀

Figura 6

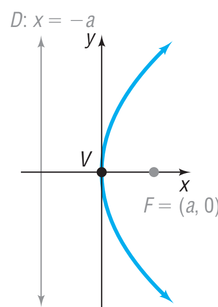


Recuerde que se obtuvo la ecuación (2) después de colocar al foco sobre el eje x positivo. Si se coloca al foco sobre el eje x negativo, el eje y positivo o negativo, se obtiene una fórmula de la parábola con distinta forma. En la tabla 1 aparecen las cuatro formas de la ecuación de una parábola con vértice en $(0, 0)$ y foco sobre alguno de los ejes coordenados, y sus gráficas en la figura 7. Observe que cada una de las gráficas es simétrica respecto de su eje de simetría.

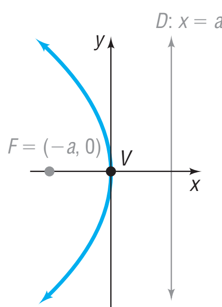
Tabla 1 Ecuaciones de la parábola con vértice en (0, 0) y foco sobre un eje; $a > 0$

Vértice	Foco	Directriz	Ecuación	Descripción
(0, 0)	$(a, 0)$	$x = -a$	$y^2 = 4ax$	Parábola con el eje x como eje de simetría, abierta a la derecha
(0, 0)	$(-a, 0)$	$x = a$	$y^2 = -4ax$	Parábola con el eje x como eje de simetría, abierta a la izquierda
(0, 0)	$(0, a)$	$y = -a$	$x^2 = 4ay$	Parábola con el eje y como eje de simetría, abierta hacia arriba
(0, 0)	$(0, -a)$	$y = a$	$x^2 = -4ay$	Parábola con el eje y como eje de simetría, abierta hacia abajo

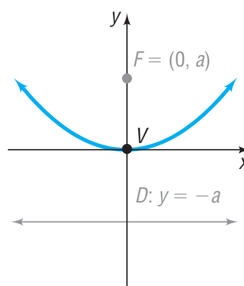
Figura 7



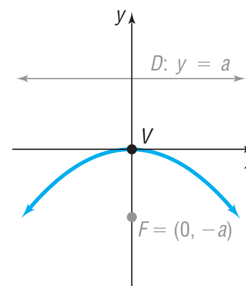
a) $y^2 = 4ax$



b) $y^2 = -4ax$



c) $x^2 = 4ay$

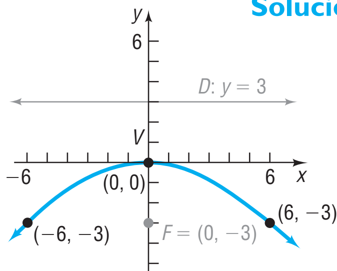


d) $x^2 = -4ay$

EJEMPLO 3 Analizar la ecuación de una parábola

Analice la ecuación: $x^2 = -12y$

Figura 8



Solución La ecuación $x^2 = -12y$ tiene la forma $x^2 = -4ay$, donde $a = 3$. En consecuencia, la gráfica de la ecuación es una parábola con vértice en $(0, 0)$, foco en el punto $(0, -3)$ y tiene como directriz la recta $y = 3$. Esta parábola es abierta hacia abajo, y su eje de simetría es el de las ordenadas. Para obtener los puntos que definen el latus rectum, sea $y = -3$. Entonces, $x^2 = 36$, de manera que $x = \pm 6$. Vea la figura 8. ◀

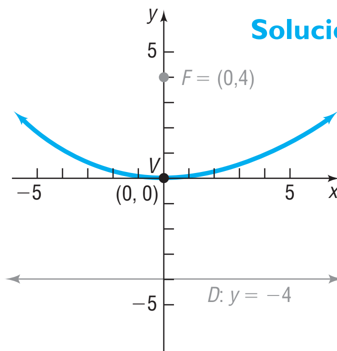


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

EJEMPLO 4 Encontrar la ecuación de una parábola

Encuentre la ecuación de la parábola con foco en $(0, 4)$, cuya directriz es la recta $y = -4$. Grafique la ecuación.

Figura 9



Solución Una parábola cuyo foco está en $(0, 4)$ y cuya directriz es la recta horizontal $y = -4$, tendrá su vértice en $(0, 0)$. (¿Sabe por qué? El vértice está a mitad del camino entre el foco y la directriz). Puesto que el foco está sobre el eje y positivo, en $(0, 4)$, la ecuación de esta parábola es de la forma $x^2 = 4ay$, con $a = 4$, es decir:

$$x^2 = 4ay = 4(4)y = 16y$$

$$\uparrow$$
$$a = 4$$

En la figura 9 se muestra la gráfica de $x^2 - 16y$. ◀

EJEMPLO 5 Encontrar la ecuación de una parábola

Encuentre la ecuación de una parábola con vértice en $(0, 0)$, si su eje de simetría es el eje de las abscisas y su gráfica incluye al punto $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. Encuentre su foco y directriz, y grafique la ecuación

Solución El vértice está en el origen, el eje de simetría es el eje de las abscisas y la gráfica contiene un punto del segundo cuadrante, por lo que la parábola es abierta hacia la izquierda. Se observa en la tabla 1 que la forma de la ecuación es:

$$y^2 = -4ax$$

Puesto que el punto $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ está sobre la parábola, las coordenadas $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$ deben satisfacer la ecuación. Si se sustituyen dichos valores a la ecuación, se encuentra que:

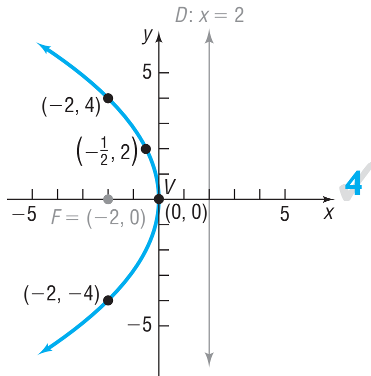
$$4 = -4a\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad y^2 = -4ax;\ x = -\frac{1}{2},\ y = 2$$

$$a = 2$$

La ecuación de la parábola es:

$$y^2 = -4(2)x = -8x$$

Figura 10



El foco está en $(-2, 0)$ y la directriz es la recta $x = 2$. Si $x = -2$, se encuentra que $y^2 = 16$, por lo que $y = \pm 4$. Los puntos $(-2, 4)$ y $(-2, -4)$ definen el latus rectum. Vea la figura 10. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

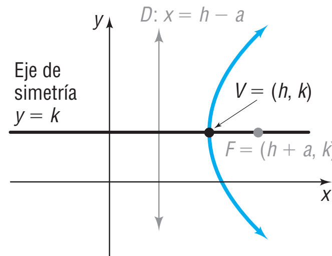
Vértice en (*h*, *k*)

4 Si se desplaza una parábola con vértice en el origen y eje de simetría a lo largo de un eje coordenado de manera horizontal en h unidades y luego de manera vertical en k unidades, el resultado es una parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados. Las ecuaciones de tales parábolas tienen las mismas formas de las que aparecen en la tabla 1, pero reemplazando x por $x - h$ (el desplazamiento horizontal) y y por $y - k$ (el desplazamiento vertical). En la tabla 2 se muestran las formas de las ecuaciones para dichas parábolas. Las figuras 11*a*)-*d*) ilustran las gráficas para $h > 0, k > 0$.

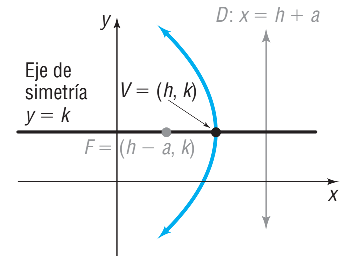
Tabla 2 **Parábolas con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo a un eje coordenado, $a > 0$**

Vértice	Foco	Directriz	Ecuación	Descripción
(h, k)	$(h + a, k)$	$x = h - a$	$(y - k)^2 = 4a(x - h)$	Parábola con eje de simetría paralelo al eje *x*, abierta a la derecha
(h, k)	$(h - a, k)$	$x = h + a$	$(y - k)^2 = -4a(x - h)$	Parábola con eje de simetría paralelo al eje *x*, abierta a la izquierda
(h, k)	$(h, k + a)$	$y = k - a$	$(x - h)^2 = 4a(y - k)$	Parábola con eje de simetría paralelo al eje *y*, abierta hacia arriba
(h, k)	$(h, k - a)$	$y = k + a$	$(x - h)^2 = -4a(y - k)$	Parábola con eje de simetría paralelo al eje *y*, abierta hacia abajo

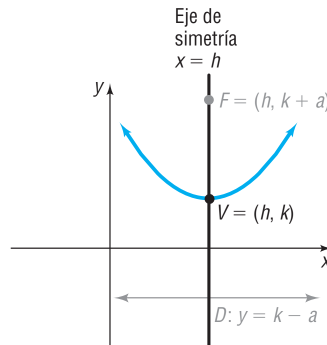
Figura 11



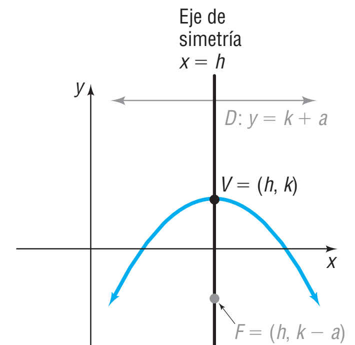
a) $(y - k)^2 = 4a(x - h)$



b) $(y - k)^2 = -4a(x - h)$



c) $(x - h)^2 = 4a(y - k)$

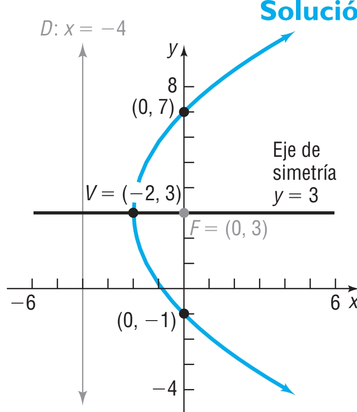


d) $(x - h)^2 = -4a(y - k)$

EJEMPLO 6 Encontrar la ecuación de una parábola cuyo vértice no está en el origen

Encuentre la ecuación de la parábola con vértice en $(-2, 3)$ y foco en $(0, 3)$. Grafique la ecuación.

Figura 12



Solución Tanto el vértice $(-2, 3)$ como el foco $(0, 3)$ quedan sobre la recta horizontal $y = 3$ (que es el eje de simetría). La distancia desde el vértice $(-2, 3)$ hasta el foco $(0, 3)$ es $a = 2$. Además, puesto que el foco queda a la derecha del vértice, se sabe que la parábola es abierta a la derecha. En consecuencia, la forma de la ecuación es:

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

donde $(h, k) = (-2, 3)$ y $a = 2$. Por lo tanto, la ecuación es

$$(y - 3)^2 = 4 \cdot 2[x - (-2)]$$
$$(y - 3)^2 = 8(x + 2)$$

Si $x = 0$, entonces $(y - 3)^2 = 16$. Entonces $y - 3 = \pm 4$, de donde $y = -1$ o $y = 7$. Los puntos $(0, -1)$ y $(0, 7)$ definen al latus rectum; la directriz es la recta $x = -4$. Vea la figura 12. ◀

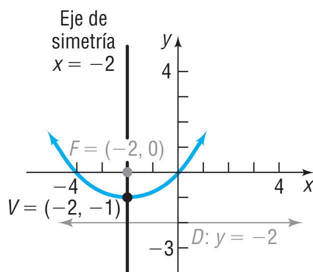
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

Cuando incluyen dos variables, una cuadrática y otra lineal, las ecuaciones polinomiales definen parábolas. Para analizar este tipo de ecuación, se completa primero el cuadrado de la variable que es cuadrática.

EJEMPLO 7 Analizar la ecuación de una parábola

Analice la ecuación: $x^2 + 4x - 4y = 0$

Figura 13



Solución Para analizar la ecuación $x^2 + 4x - 4y = 0$, se completa el cuadrado que incluye a la variable x.

$$x^2 + 4x - 4y = 0$$
$$x^2 + 4x = 4y \quad \text{Agrupar del lado izquierdo los términos que contienen } x.$$
$$x^2 + 4x + 4 = 4y + 4 \quad \text{Completar el cuadrado del lado izquierdo.}$$
$$(x + 2)^2 = 4(y + 1) \quad \text{Factorizar.}$$

Esta ecuación tiene la forma $(x - h)^2 = 4a(y - k)$, con $h = -2$, $k = -1$, y $a = 1$. La gráfica es una parábola con vértice en $(h, k) = (-2, -1)$ abierta hacia arriba. El foco está en $(-2, 0)$ y la directriz es la recta $y = -2$. Vea la figura 13. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

5 Las parábolas se utilizan en muchas aplicaciones. Por ejemplo, como se analiza en la sección 4.1, los puentes colgantes tienen cables con forma de una parábola. Otra propiedad de las parábolas que se utilizan en aplicaciones es su propiedad de reflexión.

Propiedad de reflexión

Supóngase que un espejo tiene forma de un **paraboloide de revolución**, que es la superficie formada al girar una parábola alrededor de su eje de simetría. Si se coloca una luz (o cualquiera otra fuente de emisión) en el foco de la parábola, todos los rayos de luz irradiados se reflejarán en forma de lí-

neas paralelas al eje de simetría. Este principio se utiliza en el diseño de reflectores, lámparas, fanales de automóvil y otros dispositivos del mismo tipo. Vea la figura 14.

Por el contrario, supóngase que los rayos de luz (u otras señales) proceden de una fuente distante, de tal manera que en esencia son paralelos. Cuando estos rayos golpean la superficie de un espejo parabólico, cuyo eje de simetría es paralelo a ellos, todos se reflejan hacia un solo punto en el foco. Este principio se utiliza en el diseño de algunos dispositivos de energía solar, las antenas satelitales (también llamadas parabólicas) y los espejos de algunos tipos de telescopios. Vea la figura 15.

Figura 14 Reflector



Figura 15 Telescopio

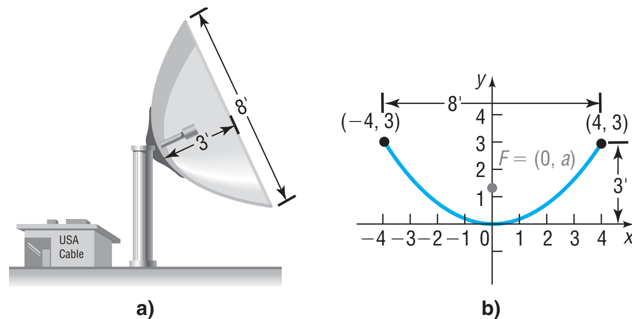


EJEMPLO 8 Antena parabólica

Como su nombre lo dice, esta antena tiene forma de un paraboloide de revolución. Las señales procedentes de un satélite pegan en la superficie del plato y rebotan hacia un solo punto, donde se encuentra el receptor. Si el plato tiene 8 pies de diámetro en su extremo y 3 pies de profundidad en el centro, ¿en qué lugar se debe colocar el receptor?

Solución En la figura 16*a*) se muestra la antena parabólica. También dibujamos la parábola utilizada para conformar el plato sobre un sistema de coordenadas rectangulares, de manera que su vértice se encuentre en el origen y su foco sobre el eje de las ordenadas. Vea la figura 16*b*).

Figura 16



La forma de la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 4ay$$

y su foco está en $(0, a)$. Puesto que $(4, 3)$ es un punto sobre la gráfica, se tiene:

$$4^2 = 4a(3)$$

$$a = \frac{4}{3}$$

El receptor se debe colocar a $1\frac{1}{3}$ pies de la base del plato, a lo largo de su eje de simetría. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 63.

10.2 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. La fórmula de la distancia d desde $P_1 = (x_1, y_1)$ hasta $P_2 = (x_2, y_2)$ es $d =$ __________. (p. 160)
2. Para completar el cuadrado de $x^2 - 4x$, se suma _______. (p. 99)
3. Utilice el método de la raíz cuadrada para encontrar las soluciones reales de $(x + 4)^2 = 9$. (pp. 98–99)
4. El punto simétrico con el punto $(-2, 5)$ con respecto al eje x es ____________. (pp. 170–171)
5. Para graficar $y = (x - 3)^2 + 1$, se desplaza la gráfica de $y = x^2$ ______________unidades hacia la derecha y luego 1 unidad hacia _____________. (pp. 262–271)

Conceptos y vocabulario

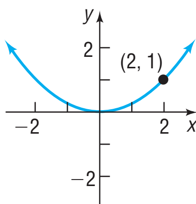
6. Un(a) _____________ es la colección de todos los puntos del plano, tales que la distancia entre cada uno de ellos y un punto fijo es igual a su distancia hasta una línea fija.
7. La superficie formada al girar una parábola respecto de su eje de simetría se denomina ___________ __________ __________.
8. *Falso o verdadero:* el vértice de una parábola es un punto de la parábola que también está sobre su eje de simetría.
9. *Falso o verdadero:* si se coloca una luz en el foco de una parábola, todos los rayos reflejados fuera de ella serán paralelos al eje de simetría.
10. *Falso o verdadero:* la gráfica de una función cuadrática es una parábola.

Ejercicios

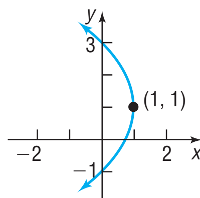
En los problemas 11-18, se da la gráfica de una parábola. Relacione cada gráfica con su ecuación.

A. $y^2 = 4x$
B. $x^2 = 4y$
C. $y^2 = -4x$
D. $x^2 = -4y$
E. $(y - 1)^2 = 4(x - 1)$
F. $(x + 1)^2 = 4(y + 1)$
G. $(y - 1)^2 = -4(x - 1)$
H. $(x + 1)^2 = -4(y + 1)$

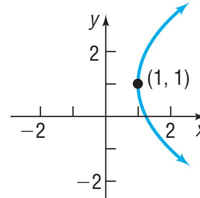
11.



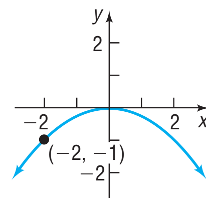
12.



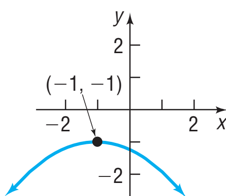
13.



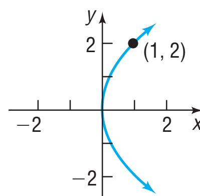
14.



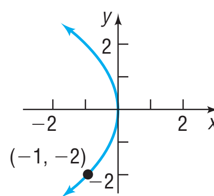
15.



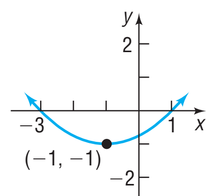
16.



17.



18.



En los problemas 19-36, encuentre la ecuación de la parábola descrita. Encuentre los dos puntos que definen al latus rectum y grafique la ecuación.

19. Foco en $(4, 0)$; vértice en $(0, 0)$

20. Foco en $(0, 2)$; vértice en $(0, 0)$

21. Foco en $(0, -3)$; vértice en $(0, 0)$

22. Foco en $(-4, 0)$; vértice en $(0, 0)$

23. Foco en $(-2, 0)$; directriz la recta $x = 2$

24. Foco en $(0, -1)$; directriz la recta $y = 1$

25. Directriz la recta $y = -\frac{1}{2}$; vértice en $(0, 0)$

26. Directriz la recta $x = -\frac{1}{2}$; vértice en $(0, 0)$

27. Vértice en $(0, 0)$; eje de simetría el eje de las ordenadas; que contenga al punto $(2, 3)$

28. Vértice en $(0, 0)$; eje de simetría el eje de las abscisas; que contenga al punto $(2, 3)$

29. Vértice en $(2, -3)$; foco en $(2, -5)$

30. Vértice en $(4, -2)$; foco en $(6, -2)$

31. Vértice en $(-1, -2)$; foco en $(0, -2)$

32. Vértice en $(3, 0)$; foco en $(3, -2)$

33. Foco en $(-3, 4)$; directriz la recta $y = 2$

34. foco en $(2, 4)$; directriz la recta $x = -4$

35. Foco en $(-3, -2)$; directriz la recta $x = 1$

36. foco en $(-4, 4)$; directriz la recta $y = -2$

En los problemas 37-54, encuentre el vértice, el foco y la directriz de cada parábola. Grafique la ecuación.

37. $x^2 = 4y$

38. $y^2 = 8x$

39. $y^2 = -16x$

40. $x^2 = -4y$

41. $(y - 2)^2 = 8(x + 1)$

42. $(x + 4)^2 = 16(y + 2)$

43. $(x - 3)^2 = -(y + 1)$

44. $(y + 1)^2 = -4(x - 2)$

45. $(y + 3)^2 = 8(x - 2)$

46. $(x - 2)^2 = 4(y - 3)$

47. $y^2 - 4y + 4x + 4 = 0$

48. $x^2 + 6x - 4y + 1 = 0$

49. $x^2 + 8x = 4y - 8$

50. $y^2 - 2y = 8x - 1$

51. $y^2 + 2y - x = 0$

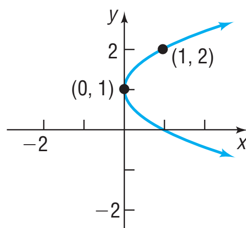
52. $x^2 - 4x = 2y$

53. $x^2 - 4x = y + 4$

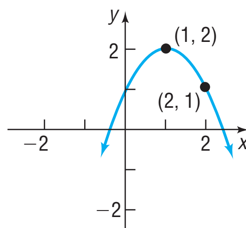
54. $y^2 + 12y = -x + 1$

En los problemas 55-62, escriba la ecuación de cada parábola.

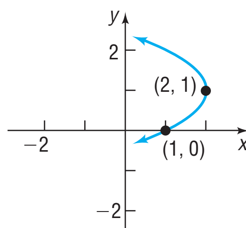
55.



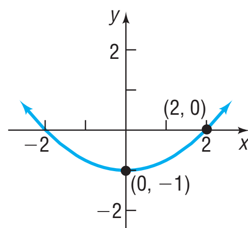
56.



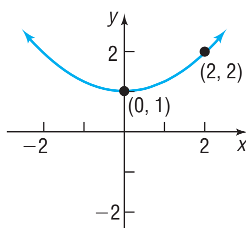
57.



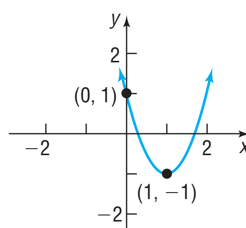
58.



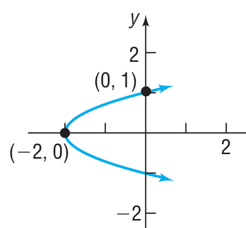
59.



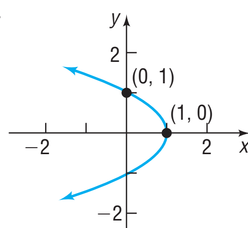
60.



61.



62.



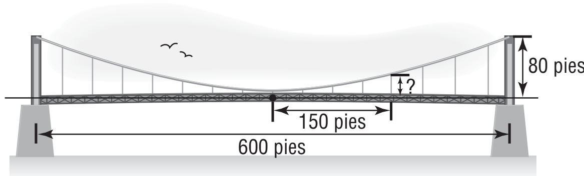
63. Antena parabólica Una antena parabólica tiene la forma de un paraboloide de revolución. Las señales procedentes de un satélite pegan en la superficie del plato y rebotan hacia un solo punto, donde se encuentra el receptor. Si el plato tiene 10 pies de diámetro en su extremo y 4 pies de profundidad en el centro, ¿en qué posición se debe colocar el receptor?

64. Construcción de una antena parabólica La antena receptora de televisión de paga tiene la forma de un paraboloide de revolución. Encuentre la ubicación del receptor, que está colocado en el foco, si el plato tiene 6 pies de diámetro en su extremo y 2 pies de profundidad.

65. Construcción de un reflector El espejo de un reflector tiene la forma de un paraboloide de revolución. Tiene 4 pulgadas de diámetro y 1 de profundidad. ¿A qué distancia del vértice se debe colocar la bombilla para que los rayos se reflejen de forma paralela al eje?

66. Construcción de un fanal Un fanal sellado tiene la forma de un paraboloide de revolución. La bombilla se encuentra colocada en el foco y está a 1 pulgada del vértice. Si la profundidad va a ser de 2 pulgadas, ¿cuál es el diámetro del fanal en su extremo?

67. Puente colgante Los cables de un puente colgante tienen la forma de una parábola, como se muestra en la figura. Las torres que sostienen el cableado están a 600 pies una de la otra y tienen 80 pies de altura. Si los cables tocan la superficie del camino a la mitad de la distancia entre las torres, ¿cuál es la altura del cable en un punto a 150 pies del centro del puente?

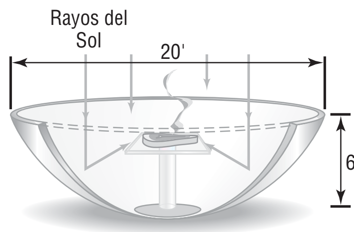


68. Puente colgante Los cables de un puente colgante tienen la forma de una parábola. Las torres que sostienen el cableado están a 400 pies una de la otra y tienen 100 pies de altura. Si los cables están a 10 pies de altura a la mitad de la distancia entre las torres, ¿cuál es la altura del cable en un punto a 50 pies del centro del puente?

69. Reflector Un reflector tiene la forma de un paraboloide de revolución. Si la fuente de luz se coloca a lo largo del eje de simetría, a 2 pies de la base, y el extremo tiene 5 pies de diámetro, ¿qué tan profundo debe ser el reflector?

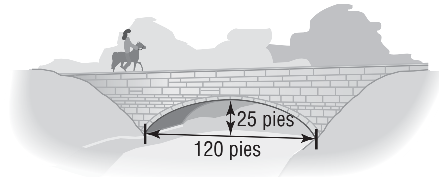
70. Reflector Un reflector tiene la forma de un paraboloide de revolución. Si la fuente de luz se coloca a lo largo del eje de simetría, a 2 pies de la base, y la fuente de luz está a 4 pies de profundidad, ¿cuál debe ser el diámetro de borde?

71. Calor solar Se utilizará un espejo con forma de paraboloide de revolución para concentrar los rayos del sol en su foco, creando una fuente de calor (vea la figura). Si el espejo tiene 20 pies de diámetro en su extremo y 6 pies de profundidad, ¿en dónde se concentrará la fuente de calor?



72. Telescopio de reflexión Un telescopio de reflexión tiene un espejo con forma de paraboloide de revolución. Si el espejo mide 4 pulgadas de diámetro en su extremo y 3 pies de profundidad, ¿en dónde se concentrará la luz acopiada?

73. Puente con arco parabólico Se construye un puente con forma de un arco parabólico. Este puente tiene una envergadura de 120 pies y una altura máxima de 25 pies. Vea la ilustración. Seleccione un sistema de coordenadas rectangulares adecuado y encuentre en la altura del arco a una distancia de 10, 30 y 50 pies del centro.



74. Puente con arco parabólico Se va a construir un puente con forma de arco parabólico y tendrá una envergadura de 100 pies La altura del arco a una distancia de 40 pies del centro será de 10 pies. Encuentre la altura del arco al centro.

75. Demuestre que una ecuación con la forma:

$$Ax^2 + Ey = 0, \qquad A \neq 0, E \neq 0$$

es la ecuación de una parábola con vértice en $(0, 0)$ y eje de simetría sobre el eje y. Encuentre su foco y su directriz.

76. Demuestre que una ecuación con la forma:

$$Cy^2 + Dx = 0, \qquad C \neq 0, D \neq 0$$

es la ecuación de una parábola con vértice en $(0, 0)$ y eje de simetría sobre el eje x. Encuentre su foco y su directriz.

77. Demuestre que la gráfica de una ecuación con la forma:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A \neq 0$$

a) Es una parábola si $E \neq 0$.
b) Es una recta vertical si $E = 0$ y $D^2 - 4AF = 0$.
c) Son dos rectas verticales si $E = 0$ y $D^2 - 4AF > 0$.
d) No contiene puntos si $E = 0$ y $D^2 - 4AF < 0$.

78. Demuestre que la gráfica de una ecuación con la forma:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad C \neq 0$$

a) Es una parábola si $D \neq 0$.
b) Es una recta horizontal si $D = 0$ y $E^2 - 4CF = 0$.
c) Se compone de dos rectas horizontales si $D = 0$ y $E^2 - 4CF > 0$.
d) No contiene puntos si $D = 0$ y $E^2 - 4CF < 0$.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2. 4

3. $x + 4 = \pm 3$; $\{-7, -1\}$

4. $(-2, -5)$

5. 3; arriba

10.3 Elipse

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Fórmula de la distancia (sección 2.1, p. 160)
- Completar cuadrados (sección 1.2, p. 99)
- Intersecciones (sección 2.2, pp. 169-170)
- Simetría (sección 2.2, pp. 170-171)
- Circunferencias (sección 2.3, pp. 175-179)
- Técnicas de graficación: Transformaciones (sección 3.5, pp. 262-271)



Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado? ", en la página 788.

OBJETIVOS
1 Encontrar la ecuación de una elipse
2 Graficar elipses
3 Analizar la ecuación de una elipse
4 Trabajar con elipses con centro en (h, k)
5 Resolver problemas de aplicación que incluyan elipses

Figura 17

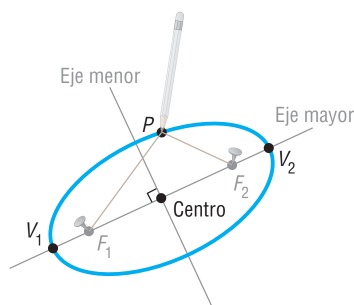
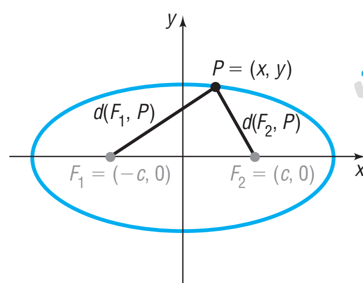


Figura 18
$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$



Una **elipse** es la colección de todos los puntos del plano en los que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, se llama **foco**, es constante.

En realidad, la definición contiene en sí un significado físico para el trazo de una elipse. Tome un pedazo de cuerda (su longitud es la constante mencionada en la definición). Luego tome dos tachuelas (los focos) e insértelos en un pedazo de cartón, de manera que la distancia entre ellos sea menor que el largo de la cuerda. Ahora junte los extremos de la cuerda a las tachuelas y, utilizando la punta de un lápiz, ténsela. Vea la figura 17. Conservando tensa la cuerda, mueva el lápiz alrededor de las tachuelas. Como se aprecia en la figura 17, el lápiz traza una elipse.

En la figura 17, los focos están señalados como F_1 y F_2. La recta que pasa por los focos se llama **eje mayor**. El punto medio del segmento de recta que une a los focos es el **centro** de la elipse. La recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje mayor es el **eje menor**.

Los dos puntos de intersección de la elipse con el eje mayor son los **vértices**, V_1 y V_2, de la elipse. La distancia de un vértice al otro es la **longitud del eje mayor**. La elipse es simétrica respecto de su eje mayor, respecto de su eje menor y respecto de su centro.

1 Con estas ideas en mente, ahora se está listo para encontrar la ecuación de una elipse en un sistema de coordenadas rectangulares. Primero, se coloca el centro de la elipse en el origen. Segundo, se coloca la elipse de manera que su eje mayor coincida con un eje coordenado. Supóngase que el eje mayor coincide con el eje de las abscisas, como se muestra en la figura 18. Si c es la distancia desde el centro a un foco, entonces un foco estará en $F_1 = (-c, 0)$ y el otro en $F_2 = (c, 0)$. Como se ve, es conveniente denotar con $2a$ a la distancia constante mencionada en la definición. Entonces, si $P = (x, y)$ es cualquier punto de la elipse, se tiene:

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$$ La suma de las distancias desde P hasta los focos es igual a una constante, $2a$.

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$ Se utiliza la fórmula de la distancia.

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$ Se aisla un radical.

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 \quad \text{Se elevan ambos lados al cuadrado.}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \quad \text{Se elimina el paréntesis.}$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad \text{Se simplifica: se aísla el radical.}$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad \text{Se dividen ambos lados entre 4.}$$

$$(cx - a^2)^2 = a^2[(x - c)^2 + y^2] \quad \text{Se eleva de nuevo ambos lados al cuadrado.}$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \quad \text{Se elimina el paréntesis.}$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \quad \text{Se redondean los términos.}$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad \text{Se multiplica por } -1\text{; ambos lados; se factoriza el lado derecho.} \qquad \textbf{(1)}$$

Para obtener puntos de la elipse que no se encuentren sobre el eje x, se debe considerar que $a > c$. Para entender por qué, observe de nuevo la figura 18.

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) > d(F_1, F_2) \quad \text{La suma de la longitud de los lados del triángulo es mayor que la longitud del tercer lado}$$

$$2a > 2c \quad d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a;\ d(F_1, F_2) = 2c$$

$$a > c$$

Puesto que $a > c$, también se tiene $a^2 > c^2$, entonces $a^2 - c^2 > 0$. Sea $b^2 = a^2 - c^2$, $b > 0$. Entonces $a > b$ y la ecuación (1) se utiliza como:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Se dividen ambos lados entre } a^2b^2.$$

Teorema

Ecuación de una elipse con centro en (0, 0), focos en (±c, 0) y eje mayor a lo largo del eje *x*

La ecuación de una elipse con centro en $(0, 0)$ y focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{donde } a > b > 0 \text{ y } b^2 = a^2 - c^2 \qquad \textbf{(2)}$$

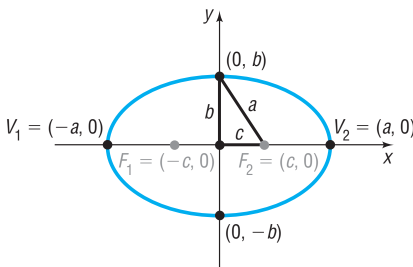
El eje mayor es el eje x. Los vértices están en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.



Como puede verificar, la elipse definida por la ecuación (2) es simétrica respecto del eje x, al eje y y al origen.

Debido a que el eje mayor es el correspondiente a las abscisas, se encuentran los vértices de la elipse definida por la ecuación (2) al hacer $y = 0$. Los vértices satisfacen la ecuación $\frac{x^2}{a^2} = 1$, cuyas soluciones son $x = \pm a$. En consecuencia, los vértices de la elipse correspondiente a la ecuación (2) son $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$. Las intersecciones de la elipse con el eje y, que se encuentran al hacer $x = 0$, tienen las coordenadas $(0, -b)$ y $(0, b)$. Estas cuatro intersecciones con los ejes: $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, y $(0, -b)$, se utilizan para graficar la elipse. Vea la figura 19.

Figura 19

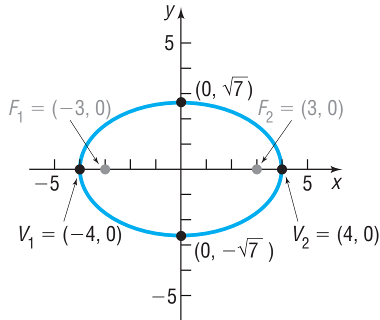


En la figura 19, observe el triángulo rectángulo formado por los puntos $(0, 0)$, $(c, 0)$, y $(0, b)$. Como $b^2 = a^2 - c^2$ (o $b^2 + c^2 = a^2$), la distancia desde el foco en $(c, 0)$ hasta el punto $(0, b)$ es a.

EJEMPLO 1 Encontrar la ecuación de una elipse

Encuentre la ecuación de la elipse con centro en el origen, un foco en $(3, 0)$ y un vértice en $(-4, 0)$. Grafique la ecuación.

Figura 20



Solución La elipse tiene centro en el origen y, puesto que el foco y el vértice dados quedan sobre el eje x, el eje mayor es dicho eje x. La distancia del centro, $(0, 0)$, a uno de los focos, $(3, 0)$, es c = 3. La distancia del centro, $(0, 0)$, a uno de los vértices, $(-4, 0)$, es $a = 4$. De la ecuación (2) se deduce que:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$$

Por lo que la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

La gráfica aparece en la figura 20. ◀

En la figura 20, observe como se utilizan las intersecciones de la ecuación para graficar la elipse. Seguir esta práctica le hará más sencillo obtener una gráfica exacta de la elipse.



COMENTARIO: Las intersecciones de la elipse también brindan información sobre cómo configurar el rectángulo de visualización. Para graficar la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

analizada en el ejemplo 1, se configura el rectángulo de visualización utilizando una pantalla cuadrada que incluya las intersecciones, quizá $-4.5 \le x \le 4.5$, $-3 \le y \le 3$. Luego se procede a despejar y:

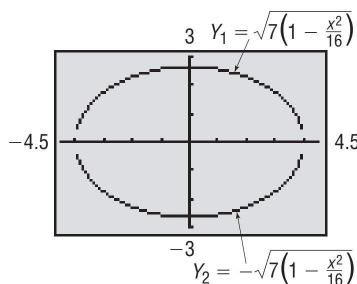
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

$$\frac{y^2}{7} = 1 - \frac{x^2}{16} \quad \text{Restando } \frac{x^2}{16} \text{ a cada lado.}$$

$$y^2 = 7\left(1 - \frac{x^2}{16}\right) \quad \text{Multiplicando ambos lados por 7.}$$

$$y = \pm\sqrt{7\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)} \quad \text{Sacando la raíz cuadrada de ambos lados.}$$

Figura 21



Ahora, se grafican las dos funciones:

$$Y_1 = \sqrt{7\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)} \quad \text{y} \quad Y_2 = -\sqrt{7\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)}$$

En la figura 21 se muestra el resultado. ■



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

Una ecuación con la forma de la ecuación (2), con $a > b$, es la ecuación de una elipse con centro en el origen, focos sobre el eje de las x, en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$, y eje mayor a lo largo del eje x.



Durante el resto de esta sección, la instrucción "Analizar la ecuación" indicará encontrar centro, eje mayor, focos y vértices de la elipse, y graficarla.

EJEMPLO 2 Analizar la ecuación de una elipse

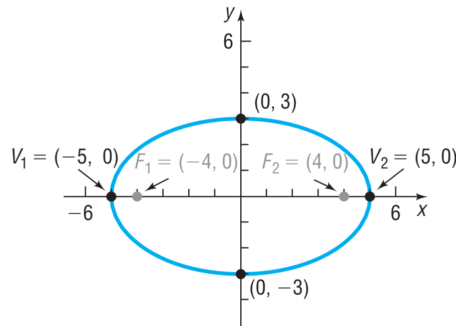
Analice la ecuación: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Solución La ecuación dada tiene la forma de la ecuación (2), con $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$. Es la ecuación de una elipse con centro $(0, 0)$ y eje mayor a lo largo del eje x. Los vértices están en $(\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$. Como $b^2 = a^2 - c^2$, se encuentra que:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$$

Los focos están en $(\pm c, 0) = (\pm 4, 0)$. La gráfica se muestra en la figura 22.

Figura 22



◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 17.

Si el eje mayor de una elipse con centro en $(0, 0)$ queda sobre el eje y, entonces los focos están en $(0, -c)$ y $(0, c)$. Utilizando los mismos pasos anteriores, la definición de una elipse nos lleva al siguiente resultado:

Teorema

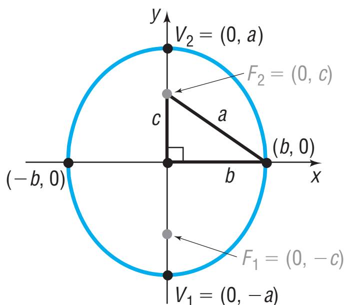
Ecuación de una elipse con centro en (0, 0), focos en (0, ±c) y eje mayor a lo largo del eje y

La ecuación de una elipse con centro en $(0, 0)$ y focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$ es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \qquad \text{donde } a > b > 0 \text{ y } b^2 = a^2 - c^2 \qquad \textbf{(3)}$$

El eje mayor es el eje y. Los vértices están en $(0, -a)$ y $(0, a)$.

Figura 23



En la figura 23 se ilustra la gráfica de esta elipse. De nuevo, observe entre ángulo recto con los puntos en $(0, 0)$, $(b, 0)$ y $(0, c)$.

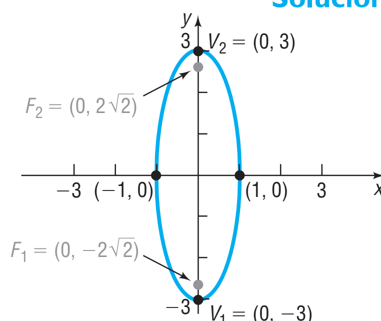
Observe con cuidado las ecuaciones (2) y (3). ¡Aunque parezcan similares, hay una diferencia! En la ecuación (2), el número mayor, a^2, está en el

denominador del término x^2, por lo que el eje mayor de la elipse está a lo largo del eje x. En la ecuación (3), el número mayor, a^2, está en el denominador del término y^2, por lo que el eje mayor está a lo largo del eje y.

EJEMPLO 3 Analizar la ecuación de una elipse

Analice la ecuación: $9x^2 + y^2 = 9$

Figura 24



Solución Para acomodar la ecuación en forma apropiada, se dividen ambos lados entre 9.

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

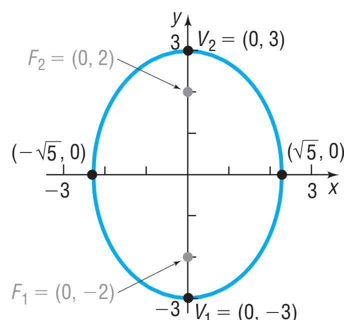
El número mayor, 9, está en el denominador del término y^2 de manera que, con base en la ecuación (3), ésta es la ecuación de una elipse con centro en el origen y eje mayor a lo largo del eje y. Además, se concluye que $a^2 = 9$, $b^2 = 1$, y $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8$. Los vértices están en $(0, \pm a) = (0, \pm 3)$, y los focos en $(0, \pm c) = (0, \pm 2\sqrt{2})$. La gráfica se muestra en la figura 24. ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

EJEMPLO 4 Encontrar la ecuación de una elipse

Encuentre la ecuación de la elipse con un foco en $(0, 2)$ y vértices en $(0, -3)$ y $(0, 3)$. Grafique la ecuación.

Figura 25



Solución Puesto que los vértices están en $(0, -3)$ y $(0, 3)$, el centro de la elipse está en su punto medio, el origen. También, su eje mayor queda sobre el eje y. La distancia del centro, $(0, 0)$, a uno de los focos, $(0, 2)$, es $c = 2$. La distancia del centro, $(0, 0)$, a uno de los vértices, $(0, 3)$, es $a = 3$. Entonces, $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$. La forma de la ecuación de esta elipse es la dada por la ecuación (3).

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La gráfica aparece en la figura 25. ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

El círculo podría considerarse un tipo especial de elipse. Para ver por qué, sea $a = b$ en la ecuación (2) o (3). Entonces:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Ésta es la ecuación de un círculo con centro en el origen y radio a. El valor de c es:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 0$$

Se concluye que cuanto más cerca están del centro los dos focos de una elipse, más se parecerá la elipse a un círculo.

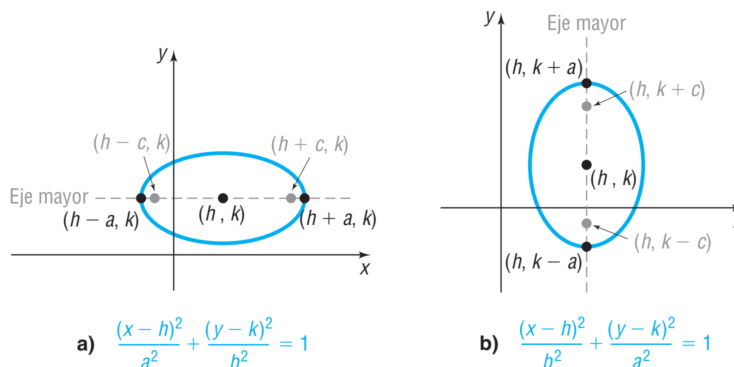
Centro en (h, k)

4 Si a una elipse con centro en el origen, cuyo eje mayor coincide con un eje coordenado se le desplaza de manera horizontal en h unidades y luego de manera vertical en k unidades, el resultado es una elipse con centro en (h, k) y eje mayor paralelo al mismo eje coordenado. Las ecuaciones de esta elipse tienen las mismas formas de las mencionadas en las ecuaciones (2) y (3), con excepción de que se reemplaza a x por $x - h$ (el desplazamiento horizontal) y a y por $y - k$ (el desplazamiento vertical). En la tabla 3 aparecen las formas de las ecuaciones de estas elipses, en tanto que en la figura 26 se muestran sus gráficas.

Tabla 3 **Elipses con centro en (h, k) y eje mayor paralelo a un eje coordenado**

Centro	Eje mayor	Focos	Vértices	Ecuación
(h, k)	Paralelo al eje x	$(h + c, k)$	$(h + a, k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$
		$(h - c, k)$	$(h - a, k)$	$a > b$ y $b^2 = a^2 - c^2$
(h, k)	Paralelo al eje y	$(h, k + c)$	$(h, k + a)$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1,$
		$(h, k - c)$	$(h, k - a)$	$a > b$ y $b^2 = a^2 - c^2$

Figura 26



a) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ **b)** $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

EJEMPLO 5 Encontrar la ecuación de una elipse que no tiene el centro en el origen

Encuentre la ecuación de la elipse con centro en $(2, -3)$, un foco en $(3, -3)$ y un vértice en $(5, -3)$. Grafique la ecuación.

Solución El centro está en $(h, k) = (2, -3)$, por lo que $h = 2$ y $k = -3$. Puesto que el centro, el foco y el vértice quedan sobre la recta $y = -3$, el eje mayor es paralelo al eje x. La distancia desde el centro $(2, -3)$ hasta un foco $(3, -3)$ es $c = 1$; la distancia desde el centro $(2, -3)$ hasta un vértice $(5, -3)$ es $a = 3$. Entonces, $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$. La forma de la ecuación es:

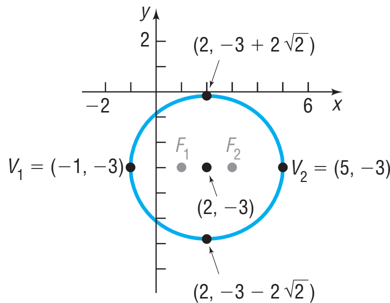
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{8} = 1 \qquad h = 2, k = -3, a = 3, b = 2\sqrt{2}$$

Para graficar la ecuación, utilizamos el centro $(h, k) = (2, -3)$ con el fin de localizar los vértices. El eje mayor es paralelo al eje x, de manera que los vértices son $a = 3$ unidades a la izquierda y a la derecha del centro $(2, -3)$. Por lo tanto, los vértices son:

$$V_1 = (2 - 3, -3) = (-1, -3) \quad \text{y} \quad V_2 = (2 + 3, -3) = (5, -3)$$

Figura 27



Puesto que $c = 1$ y el eje mayor es paralelo al eje x, los focos están 1 unidad a la izquierda y a la derecha del centro. Por lo tanto, los focos son:

$$F_1 = (2 - 1, -3) = (1, -3) \quad \text{y} \quad F_2 = (2 + 1, -3) = (3, -3)$$

Por último, se utiliza el valor de $b = 2\sqrt{2}$ para encontrar los dos puntos sobre y bajo el centro.

$$\left(2, -3 - 2\sqrt{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(2, -3 + 2\sqrt{2}\right)$$

La gráfica aparece en la figura 27. ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 55.

EJEMPLO 6 Analizar la ecuación de una elipse

Analice la ecuación: $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

Solución Se procede a completar los cuadrados en x y en y.

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$$

$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y = -4 \qquad \text{Se agrupan términos semejantes y se coloca la constante a la derecha.}$$

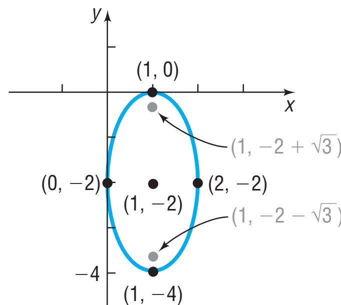
$$4(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = -4 \qquad \text{Se factorizan 4 de los dos primeros términos.}$$

$$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = -4 + 4 + 4 \qquad \text{Se completan los cuadrados.}$$

$$4(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 \qquad \text{Se factoriza.}$$

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1 \qquad \text{Se dividen ambos lados entre 4.}$$

Figura 28



Ésta es la ecuación de una elipse con centro en $(1, -2)$ y eje mayor paralelo al eje y. Como $a^2 = 4$ y $b^2 = 1$, se tiene $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$. Los vértices están en $(h, k \pm a) = (1, -2 \pm 2)$ o $(1, 0)$ y $(1, -4)$. Los focos están en $(h, k \pm c) = (1, -2 \pm \sqrt{3})$ o $(1, -2 - \sqrt{3})$ y $(1, -2 + \sqrt{3})$. La gráfica aparece en la figura 28. ◀

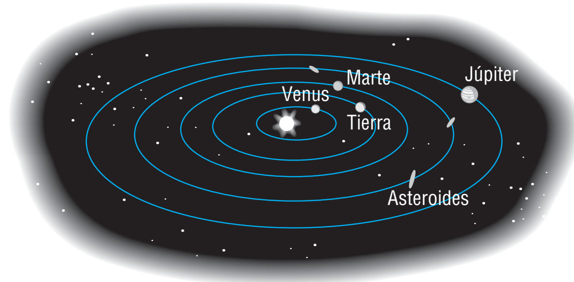
TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

Aplicaciones



Las elipses se encuentran en muchas aplicaciones de las ciencias e ingenierías. Por ejemplo, las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas, con la posición del Sol como foco. Vea la figura 29.

Figura 29



Con frecuencia, los puentes de piedra y concreto se hacen con forma de arcos semielípticos. En la maquinaria que requieren ritmos de movimiento variables, se utilizan engranes elípticos.

Las elipses también tienen una interesante propiedad de reflexión. Si se coloca una fuente de luz (o de sonido) en un foco, se reflejarán las ondas transmitidas por la elipse y se concentrarán en el otro foco. Éste es el principio subyacente tras las *galerías de susurros*, que son habitaciones diseñadas con techos elípticos. Una persona que está en un foco de la elipse puede susurrar y ser escuchada por otra persona colocada en el otro foco, porque todas las ondas sonoras emitidas por la primera y que llegan al techo se reflejan hacia la otra.

EJEMPLO 7

Galerías de susurros

Figura 30

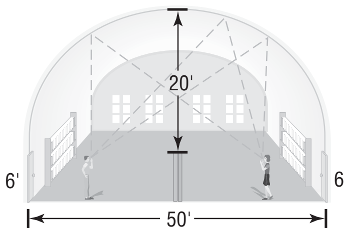
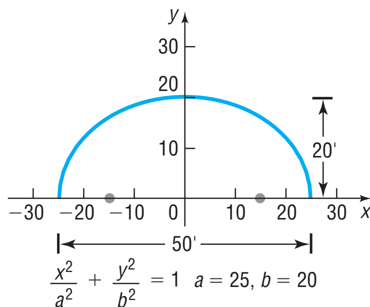


Figura 31



En la figura 30 se muestran las especificaciones de un techo elíptico para un salón diseñado como galería de susurros. En una galería susurrante, una persona que está en un foco de la elipse puede susurrar y ser escuchada por otra persona colocada en el otro foco, porque todas las ondas sonoras que llegan al techo procedentes de un foco se reflejan hacia el otro foco. ¿En dónde están los focos del salón?

Solución Se determina un sistema de coordenadas rectangulares tal que el centro de la elipse quede en el origen y el eje mayor a lo largo del eje x. Vea la figura 31. La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a = 25$ y $b = 20$.

Entonces, como:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225$$

se tiene $c = 15$. Los focos se localizan a 15 pies del centro de la elipse, a lo largo del eje mayor. ◀

10.3 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. La distancia d desde $P_1 = (2, -5)$ hasta $P_2 = (4, -2)$ es $d =$ __________. (p. 160)

2. Para completar el cuadrado de $x^2 - 3x$, se suma _______. (p. 99)

3. Encuentre las intersecciones de la ecuación $y^2 = 16 - 4x^2$. (pp. 169–170)

4. El punto simétrico respecto del eje y en el punto $(-2, 5)$ es __________. (pp. 170–171)

5. Para graficar $y - (x + 1)2 - 4$, se desplaza la gráfica de $y = x^2$ hacia la izquierda/derecha __________ unidades y luego hacia arriba/abajo _______ unidades. (pp. 262–271)

6. La ecuación modelo de un círculo con centro $(2, -3)$ y radio 1 es __________. (pp. 175–179)

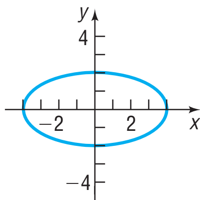
Conceptos y vocabulario

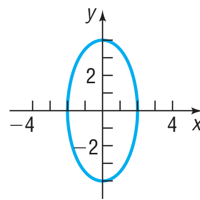
7. Un(a) _________ es la colección de todos los puntos del plano en los que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante.
8. En una elipse, los focos quedan sobre una recta llamada el eje _________.
9. Los vértices de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$, son los puntos ___________ y ___________.
10. *Falso o verdadero:* los focos, los vértices y el centro de una elipse quedan sobre una recta llamada eje de simetría.
11. *Falso o verdadero:* si el centro de una elipse está en el origen, y los focos quedan sobre el eje y, la elipse es simétrica respecto del eje x, al eje y y al origen.
12. *Falso o verdadero:* un círculo es cierto tipo de elipse.

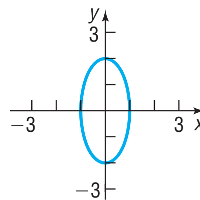
Ejercicios

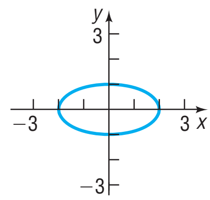
En los problemas 13-16, se da la gráfica de una elipse. Relacione cada gráfica con su ecuación.

A. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ *B.* $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ *C.* $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ *D.* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

13.


14.


15.


16.


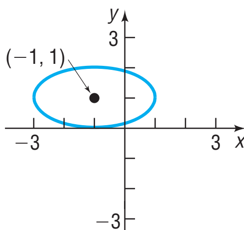
En los problemas 17-26, encuentre los vértices y focos de cada elipse. Grafique cada una de las ecuaciones.

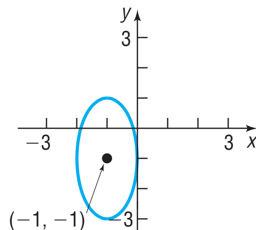
17. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$
18. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
19. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$
20. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$
21. $4x^2 + y^2 = 16$
22. $x^2 + 9y^2 = 18$
23. $4y^2 + x^2 = 8$
24. $4y^2 + 9x^2 = 36$
25. $x^2 + y^2 = 16$
26. $x^2 + y^2 = 4$

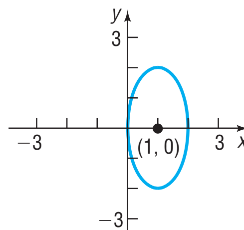
En los problemas 27-38, encuentre la ecuación de cada elipse. Grafique la ecuación.

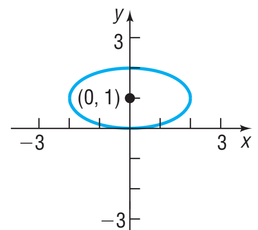
27. Centro en $(0, 0)$; foco en $(3, 0)$; vértice en $(5, 0)$
28. Centro en $(0, 0)$; foco en $(-1, 0)$; vértice en $(3, 0)$
29. Centro en $(0, 0)$; foco en $(0, -4)$; vértice en $(0, 5)$
30. Centro en $(0, 0)$; foco en $(0, 1)$; vértice en $(0, -2)$
31. Foco en $(\pm 2, 0)$; la longitud del eje mayor es 6
32. Foco en $(0, \pm 2)$; la longitud del eje mayor es 8
33. Foco en $(-4, 0)$; vértices en $(\pm 5, 0)$
34. Foco en $(0, -4)$; vértices en $(0, \pm 8)$
35. Focos en $(0, \pm 3)$; las intersecciones en x son ± 2
36. Vértices en $(\pm 4, 0)$; las intersecciones en y son ± 1
37. Centro en $(0, 0)$; vértice en $(0, 4)$; $b = 1$
38. Vértices en $(\pm 5, 0)$; $c = 2$

En los problemas 39-42, escriba la ecuación de cada elipse.

39.


40.


41.


42.


En los problemas 43-54, analice cada ecuación, es decir, encuentre el centro, los focos y los vértices de cada elipse. Grafique cada una de las ecuaciones.

43. $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$
44. $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$
45. $(x+5)^2 + 4(y-4)^2 = 16$
46. $9(x-3)^2 + (y+2)^2 = 18$
47. $x^2 + 4x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$
48. $x^2 + 3y^2 - 12y + 9 = 0$
49. $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y + 5 = 0$
50. $4x^2 + 3y^2 + 8x - 6y = 5$

51. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$

52. $x^2 + 9y^2 + 6x - 18y + 9 = 0$

53. $4x^2 + y^2 + 4y = 0$

54. $9x^2 + y^2 - 18x = 0$

En los problemas 55-64, encuentre la ecuación de cada elipse. Grafique la ecuación.

55. Centro en $(2, -2)$; vértice en $(7, -2)$; foco en $(4, -2)$

56. Centro en $(-3, 1)$; vértice en $(-3, 3)$; foco en $(-3, 0)$

57. Vértices en $(4, 3)$ y $(4, 9)$; foco en $(4, 8)$

58. Focos en $(1, 2)$ y $(-3, 2)$; vértice en $(-4, 2)$

59. Focos en $(5, 1)$ y $(-1, 1)$; la longitud del eje mayor es 8

60. Vértices en $(2, 5)$ y $(2, -1)$; $c = 2$

61. Centro en $(1, 2)$; foco en $(4, 2)$; contiene al punto $(1, 3)$

62. Centro en $(1, 2)$; foco en $(1, 4)$; contiene al punto $(2, 2)$

63. Centro en $(1, 2)$; vértice en $(4, 2)$; contiene al punto $(1, 3)$

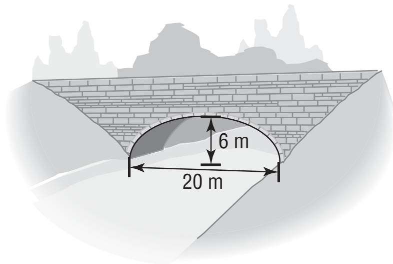
64. Centro en $(1, 2)$; vértice en $(1, 4)$; contiene al punto $(2, 2)$

En los problemas 65-68, grafique cada función.
[**Sugerencia:** Observe que cada una de las funciones es media elipse].

65. $f(x) = \sqrt{16 - 4x^2}$ **66.** $f(x) = \sqrt{9 - 9x^2}$ **67.** $f(x) = -\sqrt{64 - 16x^2}$ **68.** $f(x) = -\sqrt{4 - 4x^2}$

---

69. Puente con arco semielíptico Se va a utilizar un arco con la forma de la parte superior de una elipse para sostener un puente que va a atravesar un río con 20 metros de ancho. El centro del arco está a 6 metros sobre el centro del río (vea la figura). Escriba la ecuación de la elipse en la que el eje x coincide con el nivel del agua y el eje y pasa por el centro del arco.



70. Puente con arco semielíptico El arco de un puente es una semielipse con eje mayor horizontal. La envergadura es de 30 pies y la parte superior del arco está 10 pies por encima del eje mayor. El camino es horizontal y está 10 pies por encima de la parte superior del arco. Encuentre la distancia vertical que hay del camino hasta el arco en intervalos de 5 pies a lo largo del camino.

71. Galería de susurros Un salón de 100 pies de longitud se va a diseñar como galería de susurros. Si los focos se encuentran a 25 pies del centro, ¿qué altura tiene el techo en el centro?

72. Galería de susurros En una galería de susurros, Jim se encuentra en uno de los focos y está a 6 pies del muro más cercano. Su amigo está en el otro foco, a 100 pies de distancia. ¿Cuál es la longitud de esta galería de susurros? ¿Qué altura tiene su techo elíptico en el centro?

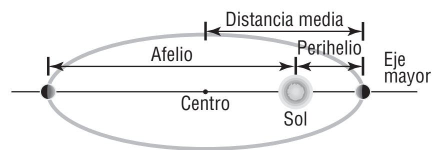
73. Puente con arco semielíptico Se construye un puente con forma de un arco semielíptico. Este puente tiene una envergadura de 120 pies y una altura máxima de 25 pies. Seleccione un sistema de coordenadas rectangulares adecuado y encuentre en la altura del arco a una distancia de 10, 30 y 50 pies del centro.

74. Puente con arco semielíptico Se va a construir un puente con forma de arco semielíptico y una envergadura de 100 pies. La altura del arco a una distancia de 40 pies del centro será de 10 pies. Encuentre la altura del arco al centro.

75. Arco semielíptico Un arco con forma de media elipse tiene 40 pies de ancho y 15 de arco al centro. Encuentre la altura del arco a intervalos de 10 pies, a lo largo de su anchura.

76. Puente con arco semielíptico El arco del puente de una carretera tiene la forma de media elipse. La parte superior del arco está a 20 pies por encima del nivel del piso (el eje mayor). La carretera tiene cuatro carriles, cada uno de 12 pies de ancho, una franja central de seguridad con 8 pies de ancho y dos acotamientos de 4 pies cada uno. ¿Cuál será la envergadura del puente (la longitud de su eje mayor) si la altura a 28 pies del centro debe ser de 13 pies?

*En los problemas 77-80, considere el hecho de que la órbita de un planeta alrededor del Sol es una elipse, de la que el Sol se encuentra en uno de los focos. El **afelio** de un planeta está a gran distancia del Sol y el perielio está ubicado en una distancia corta. La **distancia media** de un planeta al Sol es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica. Vea la ilustración.*



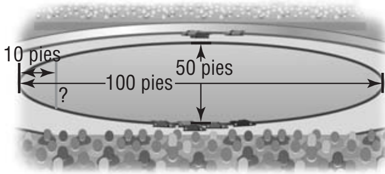
77. Tierra La distancia media de la Tierra al Sol es de 93 millones de millas. Si el afelio de la Tierra es de 94.5 millones de millas, ¿cuál es el perihelio? Escriba una ecuación para la órbita de la Tierra alrededor del Sol.

78. Marte La distancia media de Marte al Sol es de 142 millones de millas. Si el perihelio de Marte es de 128.5 millones de millas, ¿cuál es el afelio? Escriba una ecuación para la órbita de Marte alrededor del Sol.

79. **Júpiter** El afelio de Júpiter es de 507 millones de millas. Si la distancia del Sol al centro de su órbita elíptica es de 23.2 millones de millas, ¿cuál es el perihelio? ¿Cuál es la distancia media? Escriba una ecuación para la órbita de Júpiter alrededor del Sol.

80. El perihelio de Plutón es de 4551 millones de millas y la distancia del Sol al centro de su órbita elíptica es de 897.5 millones de millas. Encuentre el afelio de Plutón. ¿Cuál es la distancia media de Plutón al Sol? Escriba una ecuación para la órbita de Plutón alrededor del Sol.

81. **Pista de carreras** Vea la figura. Una pista de carreras tiene la forma de una elipse, con 100 pies de largo y 50 de ancho. ¿Cuál es su anchura a 10 pies del vértice?



82. **Pista de carreras** Una pista de carreras tiene la forma de una elipse con 80 pies de largo y 40 de ancho. ¿Cuál es su anchura a 10 pies del vértice?

83. Demuestre que una ecuación con la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0, \qquad A \neq 0, C \neq 0, F \neq 0$$

donde A y C tienen el mismo signo y F tienen signo opuesto

a) si $A \neq C$, es la ecuación de una elipse con centro en $(0, 0)$.

b) si $A = C$, es la ecuación de un círculo con centro en $(0, 0)$.

84. Demuestre que la gráfica de una ecuación con la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A \neq 0, C \neq 0$$

donde A y C tienen el mismo signo

a) si $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$ tiene el mismo signo que A, es una elipse.

b) si $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F = 0$, es un punto.

c) si $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$ tiene signo contrario al de A, no contiene puntos.

85. La **excentricidad** e de una elipse se define como número $\frac{c}{a}$, donde a y c son los números dados en la ecuación (2). Puesto que $a > c$, se deduce que $e < 1$. Escriba un breve párrafo sobre la forma general de cada una de las siguientes elipses. Cerciórese de fundamentar sus conclusiones.

a) Excentricidad cercana a 0

b) Excentricidad = 0.5

c) Excentricidad cercana a 1

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $\sqrt{13}$ **2.** $\frac{9}{4}$

3. $(-2, 0), (2, 0), (0, -4), (0, 4)$

4. $(2, 5)$ **5.** izquierda; 1; abajo; 4

6. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$

10.4 La hipérbola

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Fórmula de la distancia (sección 2.1, p. 160)
- Completar cuadrados (sección 1.2, p. 99)
- Intersecciones y simetría (sección 2.2, pp. 169-171)
- Asíntotas (sección 4.3, pp. 333-334)
- Técnicas de graficación: Transformaciones (sección 3.5, pp. 262-271)
- Método de raíz cuadrada (sección 1.2, pp. 98-99)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 803.

OBJETIVOS

1 Encontrar la ecuación de una hipérbola

2 Graficar hipérbolas

3 Analizar la ecuación de una hipérbola

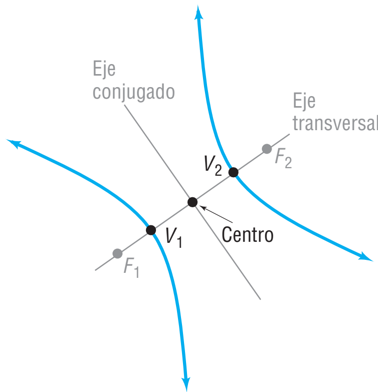
4 Encontrar las asíntotas de una hipérbola

5 Trabajar con hipérbolas con centro en (h, k)

6 Resolver problemas de aplicación que incluyan hipérbolas

Una **hipérbola** es la colección de todos los puntos del plano en los que la resta de sus distancias a dos puntos fijos, se llama **foco**, es constante.

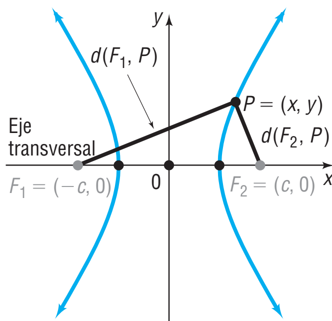
Figura 32



1 En la figura 32 se ilustra una hipérbola con focos F_1 y F_2. La recta que contiene a los focos se llama **eje transversal**. El punto medio del segmento de recta que une a los focos es el **centro** de la hipérbola. La recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje transversal es el **eje conjugado**. La hipérbola se compone de dos curvas separadas, llamadas **ramas**, que son simétricas respecto del eje transversal, el eje conjugado y el centro. Los dos puntos de intersección de la hipérbola y el eje transversal son los **vértices**, V_2 y V_1, de la hipérbola.

Con estas ideas en mente, ahora se está listo para encontrar la ecuación de una hipérbola en un sistema de coordenadas rectangulares. Primero, se coloca el centro en el origen. Luego, se coloca la hipérbola de manera que su eje transversal coincida con un eje coordenado. Supóngase que el eje transversal coincide con el eje x, como se muestra en la figura 33.

Figura 33
$d(F_1, P) - d(F_2, P) = \pm 2a$



Si c es la distancia desde el centro hasta un foco, entonces un foco estará en $F_1 = (-c, 0)$ y el otro en $F_2 = (c, 0)$. Ahora, denotemos con $\pm 2a$ la diferencia constante de la distancia desde cualquier punto $P = (x, y)$ de la hipérbola hasta los focos F_1 y F_2. (Si P está en la rama derecha, se utiliza el signo $+$; si P está en la rama izquierda, se utiliza el signo $-$). Las coordenadas de P deben satisfacer la ecuación:

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = \pm 2a$$ La diferencia de las distancias desde P hasta los focos es igual a $\pm 2a$.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$ Se usa la fórmula de la distancia.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$ Se aísla un radical.

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$ Se elevan ambos lados al cuadrado.

Después, se eliminan los paréntesis.

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$ Se simplifica aislando un radical.

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$ Se dividen ambos lados entre cuatro.

$$(cx - a^2)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$ Se elevan ambos términos al cuadrado.

$$c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$ Se simplifica.

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$ Se eliminan paréntesis y se simplifica.

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$ Se redondean términos.

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \qquad (1)$$ Se factoriza a^2 en el lado derecho.

Para obtener puntos de la hipérbola que no se encuentren sobre el eje x, se debe considerar que $a < c$. Para entender por qué, observe de nuevo la figura 33.

$$d(F_1, P) < d(F_2, P) + d(F_1, F_2)$$ Utilice el triángulo F_1PF_2.

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) < d(F_1, F_2)$$ P está en el lado derecho, tal que $d(F_1, P) - d(F_2, P) = 2a$.

$$2a < 2c$$
$$a < c$$

Puesto que $a < c$, también se tiene $a^2 < c^2$, por lo que $c^2 - a^2 > 0$. Sea $b^2 = c^2 - a^2$, b > 0. Entonces, la ecuación (1) se escribe:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{Se dividen ambos lados entre } a^2b^2.$$

Para encontrar los vértices de la hipérbola definida por esta ecuación, se toma $y = 0$. Los vértices satisfacen la ecuación $\frac{x^2}{a^2} = 1$, cuyas soluciones son $x = \pm a$.

En consecuencia, los vértices de la hipérbola son $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$. Observe que la distancia desde el centro $(0, 0)$ a cualquiera de los vértices es a.

Teorema

Ecuación de una hipérbola con centro en (0, 0) focos en ($\pm c$, 0), vértices en ($\pm a$, 0) y eje transversal a lo largo del eje x

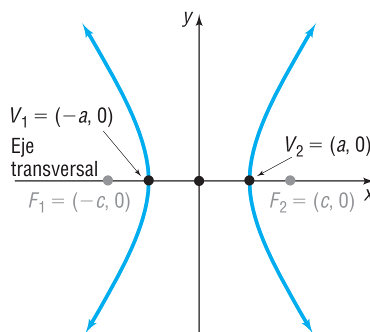
La ecuación de la hipérbola con centro en $(0, 0)$, focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, y vértices en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{donde } b^2 = c^2 - a^2 \qquad \textbf{(2)}$$

El eje transversal es el eje de las abscisas.

2 Vea la figura 34. Como puede verificar, la hipérbola definida por la ecuación (2) es simétrica respecto del eje x, el eje y y el origen. Para encontrar las intersecciones y, si las hay, sea $x = 0$ en la ecuación (2). Esto tiene como resultado a la ecuación $\frac{y^2}{b^2} = -1$, la cual no tiene solución real. Se concluye que la hipérbola definida por la ecuación (2) no tiene intersecciones y en el eje de las ordenadas. De hecho, como $\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} \geq 0$, se deduce que $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$. Para $-a < x < a$, no existen puntos sobre la gráfica.

Figura 34
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2$



EJEMPLO 1 Encontrar y graficar la ecuación de una hipérbola

Encuentre la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, un foco en $(3, 0)$ y un vértice en $(-2, 0)$. Grafique la ecuación.

Solución La hipérbola tiene centro en el origen y el eje transversal coincide con el eje x. Un foco está en $(c, 0) = (3, 0)$, por lo que $c = 3$. Un vértice está en

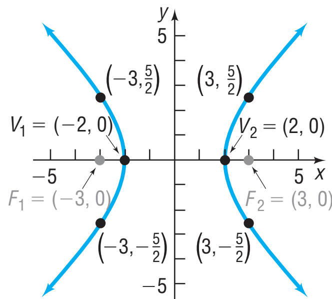
$(-a, 0) = (-2, 0)$, por lo que $a = 2$. De la ecuación (2), se deduce que $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$, por lo que la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

Para graficar una hipérbola, es útil localizar y graficar otros puntos sobre la gráfica. Por ejemplo, para encontrar los puntos sobre y bajo los focos, se hace $x = \pm 3$. Entonces:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$
$$\frac{(\pm 3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \qquad x = \pm 3$$
$$\frac{9}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$
$$\frac{y^2}{5} = \frac{5}{4}$$
$$y^2 = \frac{25}{4}$$
$$y = \pm\frac{5}{2}$$

Figura 35



Los puntos sobre y bajo el foco son $\left(\pm 3, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\pm 3, -\frac{5}{2}\right)$. Estos puntos ayudan porque determinan la "abertura". Vea la figura 35. ◀



COMENTARIO: Para graficar la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ analizada en el ejemplo 1, se necesita graficar las dos funciones $Y_1 = \sqrt{5}\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$ y $Y_2 = -\sqrt{5}\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$. Hágalo y compare lo que ve con la figura 35. ■

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 17.

Una ecuación con la forma de la ecuación (2), es la ecuación de una hipérbola con centro en el origen, focos sobre el eje de las x, en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$, y eje transversal a lo largo del eje x.

3 Durante el resto de esta sección, la instrucción "Analizar la ecuación" indicará encontrar centro, eje transversal, vértices y focos de la hipérbola, y graficarla.

EJEMPLO 2 Analizar la ecuación de una hipérbola

Analice la ecuación: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

Solución Esta ecuación tiene la forma de la ecuación (2), con $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$. La gráfica de la ecuación es una hipérbola con centro en $(0, 0)$ y eje transversal a lo largo del eje x. Además, se sabe que $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20$. Los vértices están en $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$, y los focos están en $(\pm c, 0) = (\pm 2\sqrt{5}, 0)$.

Para encontrar los puntos sobre y bajo los focos, se hace $x = \pm 2\sqrt{5}$. Entonces:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{(\pm 2\sqrt{5})^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1 \qquad x = \pm 2\sqrt{5}$$

$$\frac{20}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

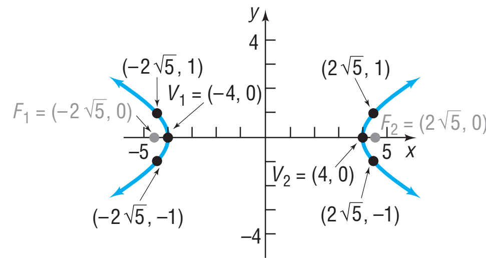
$$\frac{5}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \pm 1$$

Los puntos sobre y bajo los focos son $(\pm 2\sqrt{5}, 1)$ y $(\pm 2\sqrt{5}, -1)$. Vea la figura 36.

Figura 36





TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

El siguiente resultado da la forma de la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y eje transversal a lo largo del eje y.

Teorema

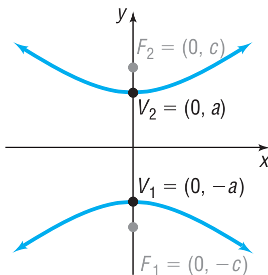
Ecuación de una hipérbola con centro en (0, 0) focos en (0, ±c); vértices en (0, ±*a*) y eje transversal a lo largo del eje y

La ecuación de la hipérbola con centro en $(0, 0)$, focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$, y vértices en $(0, -a)$ y $(0, a)$, es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \qquad \text{donde } b^2 = c^2 - a^2 \qquad \textbf{(3)}$$

El eje transversal es el eje de las ordenadas.

Figura 37 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2$



En la figura 37 se muestra la gráfica de una hipérbola típica definida por la ecuación (3).

Una ecuación con la forma de la ecuación (2), $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, es la ecuación de una hipérbola con centro en el origen, focos sobre el eje de las x, en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, y eje transversal a lo largo del eje x.

Una ecuación con la forma de la ecuación (3), $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, es la ecuación de una hipérbola con centro en el origen, focos sobre el eje de las y, en $(0, -c)$ y $(0, c)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, y eje transversal a lo largo del eje y.

Observe la diferencia en las formas de las ecuaciones de las fórmulas (2) y (3). Cuando se resta el término y^2 al término x^2, el eje transversal es el eje x. Cuando se resta el término x^2 al término y^2, el eje transversal es el eje y.

EJEMPLO 3 Analizar la ecuación de una hipérbola

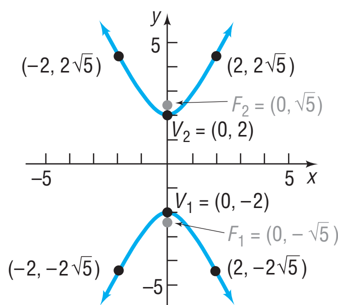
Analice la ecuación: $y^2 - 4x^2 = 4$

Solución Para acomodar la ecuación en forma apropiada, dividimos ambos lados entre 4:

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$

Puesto que se resta el término x^2 al término con y^2, la ecuación es la de una hipérbola con centro en el origen y eje transversal a lo largo del eje y. Además, al comparar la ecuación anterior con la ecuación (3), se concluye que $a^2 = 4$, $b^2 = 1$, y $c^2 = a^2 + b^2 = 5$. Los vértices están en $(0, \pm a) = (0, \pm 2)$, y los focos en $(0, \pm c) = (0, \pm\sqrt{5})$.

Figura 38



Para localizar otros puntos de la gráfica, se hace $x = \pm 2$. Entonces:

$$\begin{aligned} y^2 - 4x^2 &= 4 \\ y^2 - 4(\pm 2)^2 &= 4 \qquad x = \pm 2 \\ y^2 - 16 &= 4 \\ y^2 &= 20 \\ y &= \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

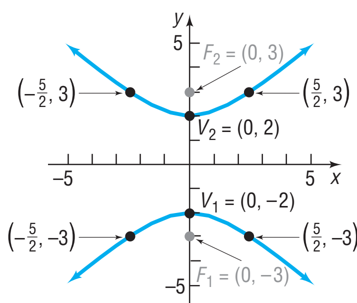
Otros cuatro puntos de la gráfica son $(\pm 2, 2\sqrt{5})$ y $(\pm 2, -2\sqrt{5})$. Vea la figura 38. ◀

EJEMPLO 4 Encontrar la ecuación de una hipérbola

Encuentre la ecuación de la hipérbola con un vértice en $(0, 2)$, y focos en $(0, -3)$ y $(0, 3)$.

Solución Puesto que los focos están en $(0, -3)$ y $(0, 3)$, el centro de esta hipérbola está en su punto medio, el origen. Además, el eje transversal está a lo largo del eje y. La información planteada también revela que $c = 3$, $a = 2$ y $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. La forma de la ecuación de la hipérbola está dada por la ecuación (3):

Figura 39



$$\begin{aligned} \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} &= 1 \end{aligned}$$

Sea $y = \pm 3$, para obtener los puntos de la gráfica que pasan por los focos. Vea la figura 39. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

Observe las ecuaciones de las hipérbolas de los ejemplos 2 y 4. En la del ejemplo 2, $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$, por lo que $a > b$; en la del ejemplo 4, $a^2 = 4$ y $b^2 = 5$, por lo que $a < b$. Se concluye que, en las hipérbolas, no existen requisitos que involucren las dimensiones relativas de a y b. Esta situación contrasta con el caso de la elipse, en la que las dimensiones relativas de a y b determinan cuál es el eje mayor. Las hipérbolas tienen otra característica que las distingue de las elipses y las parábolas: asíntotas.

Asíntotas

4 Hay que recordar que, como se explica en la sección 4.3, la asíntota horizontal u oblicua de una gráfica es una recta con la propiedad de que la distancia de dicha recta a los puntos de la gráfica tiende a 0, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$. Las asíntotas proporcionan información sobre el comportamiento final de la gráfica de la hipérbola.

Teorema

Asíntotas de una hipérbola

La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene dos asíntotas oblicuas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x \tag{4}$$

Demostración Se comienza por despejar y en la ecuación de la hipérbola.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

Como $x \neq 0$, se reordena el lado derecho en la forma:

$$y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

$$y = \pm\frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Ahora, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to -\infty$, el término $\frac{a^2}{x^2}$ tiende a 0, por lo que la expresión sin el radical tiende a 1. De tal modo, cuando $x \to -\infty$ o $x \to -\infty$, el valor de y tiende a $\pm\frac{bx}{a}$; es decir, la gráfica de hipérbola tiende a las rectas:

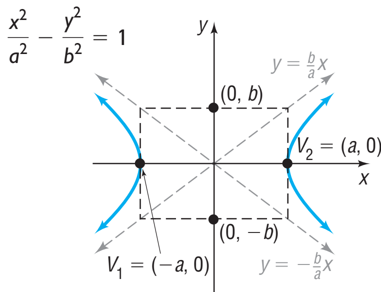
$$y = -\frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = \frac{b}{a}x$$

Esas rectas son asíntotas oblicuas de la hipérbola. ■

Las asíntotas de una hipérbola no forman parte de ella, pero sirven como guía para graficarla. Por ejemplo, suponiendo que se desea graficar la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Figura 40



Se comienza por trazar los vértices $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Después se trazan los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$, y se utilizan esos cuatro puntos para construir un rectángulo, como se muestra en la figura 40. Las diagonales desde este rectángulo tienen pendientes $\frac{b}{a}$ y $\frac{-b}{a}$, y sus extensiones son las asíntotas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ de la hipérbola. Si se grafican las asíntotas, se utilizan para establecer la "abertura" de la hipérbola y evitar el trazado de otros puntos.

Teorema

Asíntotas de una hipérbola

La hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ tiene dos asíntotas oblicuas

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x \tag{5}$$

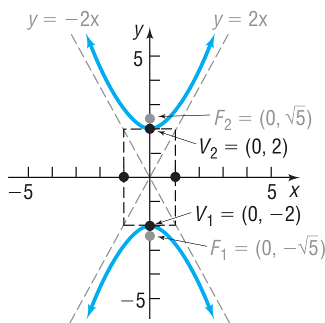
En el problema 72 se le pide que demuestre este resultado.

Durante el resto de esta sección, la instrucción "Analizar la ecuación" indicará encontrar centro, eje transversal, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola, y graficarla.

EJEMPLO 5 Analizar la ecuación de una hipérbola

Analice la ecuación: $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

Figura 41



Solución Puesto que se resta el término x^2 al término y^2, la ecuación tiene la forma de la ecuación (3), y es una hipérbola con centro en el origen y eje transversal a lo largo del eje y. Además, al comparar esta ecuación con la ecuación (3), se encuentra que $a^2 = 4$, $b^2 = 1$ y $c^2 = a^2 + b^2 = 5$. Los vértices están en $(0, \pm a) = (0, \pm 2)$, y los focos en $(0, \pm c) = (0, \pm\sqrt{5})$. Si se emplea la ecuación (5), las asíntotas son las rectas $y = \frac{a}{b}x = 2x$ y $y = -\frac{a}{b}x = -2x$. Se traza el rectángulo conformado por los puntos $(0, \pm a) = (0, \pm 2)$ y $(\pm b, 0) = (\pm 1, 0)$. La extensión de las diagonales de este rectángulo son las asíntotas. Ahora se grafican el rectángulo, las asíntotas y la hipérbola. Vea la figura 41.

◀

EJEMPLO 6 Analizar la ecuación de una hipérbola

Analice la ecuación: $9x^2 - 4y^2 = 36$

Solución Para acomodar la ecuación en forma apropiada, se dividen ambos lados entre 36.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Ahora se procede a analizar la ecuación. El centro de la hipérbola está en el origen. Puesto que en la ecuación está primero el término que contiene x^2, se sabe que el eje transversal está a lo largo del eje x, y los vértices y focos

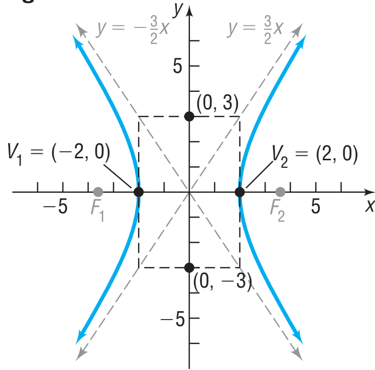


Figura 42

quedarán sobre ese mismo eje. Si se utiliza la ecuación (2), se encuentra que $a^2 = 4$, $b^2 = 9$, y $c^2 = a^2 + b^2 = 13$. Los vértices están $a = 2$ unidades a la izquierda y la derecha del centro en $(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$; y los focos en $c = \sqrt{13}$ unidades a la izquierda y la derecha del centro en $(\pm c, 0) = (\pm\sqrt{13}, 0)$; y las asíntotas tienen las ecuaciones:

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{3}{2}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x = -\frac{3}{2}x$$

Para graficar la hipérbola, se forma el rectángulo que contiene los puntos $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$, es decir, $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -3)$ y $(0, 3)$. Las asíntotas son la extensión de las diagonales de este rectángulo. Vea la gráfica en la figura 42. ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

Exploración

Grafique la porción superior de hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ analizada en el ejemplo 6 y sus síntotas $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$. Ahora utilice ZOOM y TRACE para ver lo que ocurre cuando x se vuelve no acotada en la dirección positiva. ¿Qué sucede cuando x se vuelve no acotada en dirección negativa?

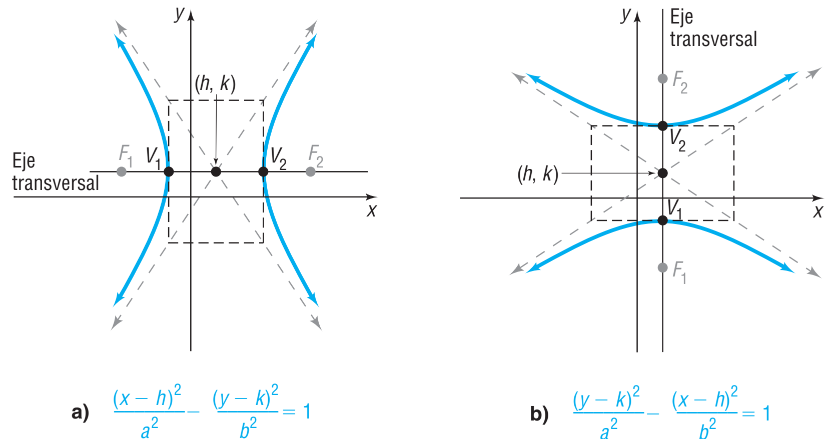
Centro en (*h*, *k*)

5 Si una hipérbola con centro en el origen y cuyo eje transversal coincide con un eje coordenado se desplaza de manera horizontal en h unidades y luego de manera vertical en k unidades, el resultado es una hipérbola con centro (h, k) y eje transversal paralelo al mismo eje coordenado. Las ecuaciones de esta clase de hipérbolas tienen las mismas formas mencionadas en las ecuaciones (2) y (3), con excepción de que se reemplaza a x por $x - h$ (el desplazamiento horizontal) y a y por $y - k$ (el desplazamiento vertical). En la tabla 4 se muestran las formas de las ecuaciones para dichas parábolas. Vea las gráficas en la figura 43.

Tabla 4 **Hipérbolas con centro en (*h*, *k*) y eje transversal paralelo a un eje coordenado**

Centro	Eje transversal	Focos	Vértices	Ecuación	Asíntotas
(h, k)	Paralelo al eje x	$(h \pm c, k)$	$(h \pm a, k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2$	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$
(h, k)	Paralelo al eje y	$(h, k \pm c)$	$(h, k \pm a)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2$	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$

Figura 43



a) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ b) $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

EJEMPLO 7 Encontrar la ecuación de una hipérbola que no tiene centro en el origen

Encuentre la ecuación de la hipérbola con centro en $(1, -2)$, un foco en $(4, -2)$ y un vértice en $(3, -2)$. Grafique la ecuación.

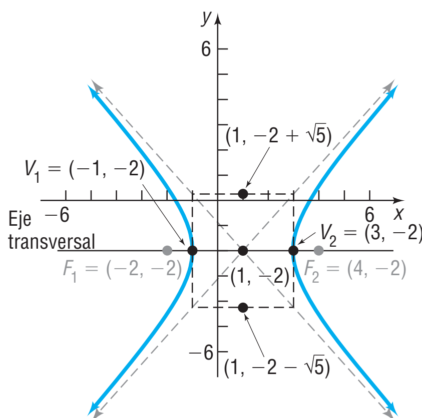
Solución El centro está en $(h, k) = (1, -2)$, por lo que $h = 1$ y $k = -2$. Puesto que el centro, el foco y el vértice quedan sobre la recta $y = -2$, el eje transversal es paralelo al eje x. La distancia desde el centro $(1, -2)$ hasta el foco $(4, -2)$ es $c = 3$; la distancia desde el centro $(1, -2)$ hasta el vértice $(3, -2)$ es $a = 2$. Entonces, $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. La ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1$$

Vea la figura 44.

Figura 44





TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

EJEMPLO 8 Analizar la ecuación de una hipérbola

Analice la ecuación: $-x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 11 = 0$

Solución Se completan los cuadrados en x y y.

$$-x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 11 = 0$$

$$-(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) = -11 \quad \text{Se agrupan términos.}$$

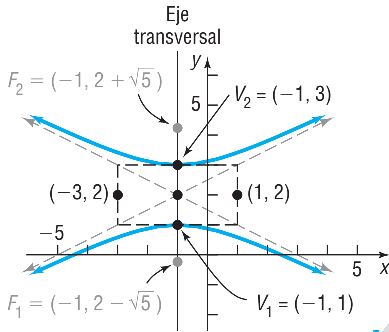
$$-(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) = -11 - 1 + 16 \quad \text{Se completan los cuadrados.}$$

$$-(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 4$$

$$(y-2)^2 - \frac{(x+1)^2}{4} = 1 \quad \text{Se dividen ambos lados entre 4.}$$

Ésta es la ecuación de una hipérbola con centro en $(-1, 2)$ y eje transversal paralelo al eje y. Además, $a^2 = 1$ y $b^2 = 4$, por lo que $c^2 = a^2 + b^2 = 5$.

Figura 45



Puesto que el eje transversal es paralelo al eje y, los vértices y focos se localizan a y c unidades arriba y abajo del centro, respectivamente. Los vértices están en $(h, k \pm a) = (-1, 2 \pm 1)$ o en $(-1, 1)$ y $(-1, 3)$. Los focos están en $(h, k \pm c) = (-1, 2 \pm \sqrt{5})$. Las asíntotas son $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$ y $y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$. La gráfica aparece en la figura 45. ◀

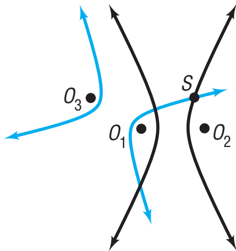


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

Aplicaciones

6 Vea la figura 46. Suponga que se dispara un arma en algún lugar desconocido S. Un observador que se encuentra en O_1 escucha la detonación (sonido del disparo) 1 segundo después que otro observador en O_2. Como el sonido viaja a 1100 pies por segundo, se deduce que el punto S debe estar 1100 pies más cerca de O_2 que de O_1. S queda sobre una rama de la hipérbola con focos O_1 y O_2. (¿Sabe por qué? La diferencia de las distancias de S a O_1 y de S a O_2 es la constante 1100.) Si un tercer observador ubicado en O_3 escucha la misma detonación 2 segundos después que O_1, entonces S quedará sobre una rama de una segunda hipérbola con focos O_1 y O_3. La intersección de ambas hipérbolas señalará la ubicación de S.

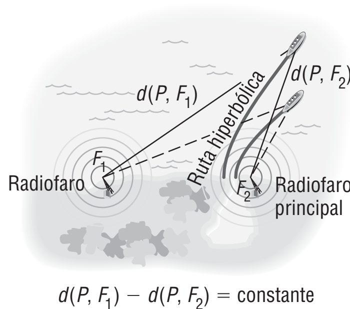
Figura 46



Loran

En el sistema Loran (por LOng RAnge Navigation, sistema de navegación de largo alcance), un radiofaro principal y uno secundario emiten señales que podría recibir un barco en el mar. Vea la figura 47. Como un barco que monitorea ambas señales, por lo general estará más cerca de una de las dos estaciones, habrá una diferencia en la distancia que viajan dos señales, la cual se registrará como una ligera diferencia de tiempo entre las señales. Mientras la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia de las dos distancias también será constante. Si el barco sigue una ruta que concuerde con la diferencia de tiempo fija, seguirá la ruta de una hipérbola cuyos focos están ubicados en las posiciones de los dos radiofaros. Entonces, cada diferencia de tiempo tiene como resultado una ruta hiperbólica diferente, que lleva al barco a distinto lugar de la costa. Las cartas de navegación muestran las diversas rutas hiperbólicas para distintas diferencia de tiempo.

Figura 47



$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \text{constante}$

EJEMPLO 9 Loran

Dos estaciones de Loran están a 250 millas una de la otra, a lo largo de una ribera recta.

a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00054 segundos entre las señales Loran. Establezca el sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar a qué parte de la ribera llevará el barco si siguiera la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

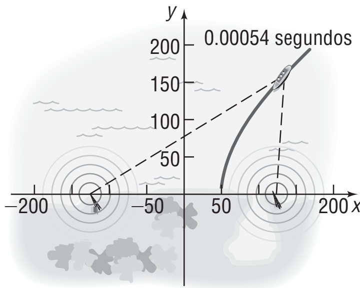
b) Si el barco quiere entrar a una bahía que está entre los dos radiofaros, a 25 millas del radiofaro principal, ¿qué diferencia de tiempo debe buscar?

c) Si el barco está a 80 millas mar adentro al momento de obtener la diferencia de tiempo, ¿cuál es la ubicación aproximada del barco?

[***Nota***: La velocidad de cada una de las señales de radio es alrededor de 186,000 millas por segundo].

Solución

Figura 48



a) Se establece con el sistema de coordenadas rectangulares que las dos estaciones queden sobre el eje x y el origen sea el punto medio entre ellas. Vea la figura 48. El barco queda sobre una hipérbola cuyos focos son los lugares donde se encuentran las dos estaciones. Esto se debe a que la diferencia de tiempo constante de las señales procedentes de cada estación tiene como resultado una diferencia constante en la distancia del barco a cada una de ellas. Puesto que la diferencia de tiempo es de 0.00054 segundos y la velocidad de la señal es de 186,000 millas por segundo, la diferencia entre las distancias del barco a cada una de las estaciones (focos) es:

$$\text{Distancia} = \text{Velocidad} \times \text{Tiempo} = 186{,}000 \times 0.00054 \approx 100 \text{ millas}$$

La diferencia entre las distancias del barco a cada una de las estaciones, 100, es igual a $2a$, por lo que $a = 50$, en tanto que el vértice de la hipérbola correspondiente está en (50,0). Como el foco está en (125,0), de seguir esta hipérbola, el barco llegará a la costa a 75 millas de la estación principal.

b) Para alcanzar la costa a 25 millas de la estación principal, el barco debe seguir una hipérbola con vértice en $(100, 0)$. Para esta hipérbola, $a = 100$, de manera que la diferencia constante de las distancias del barco en cada una de las estaciones es $2a = 200$. La diferencia de tiempo que debe buscar el barco es:

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{Distancia}}{\text{Velocidad}} = \frac{200}{186{,}000} \approx 0.001075 \text{ segundos}$$

c) Para encontrar la ubicación aproximada del barco, se necesita encontrar la ecuación de la hipérbola con vértice en (100, 0) y un foco en $(125, 0)$. La forma de la ecuación para esta hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

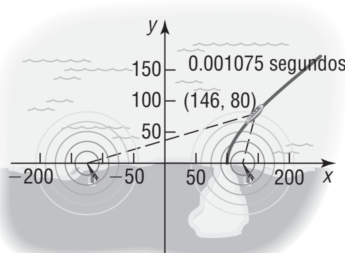
donde $a = 100$. Puesto que $c = 125$, se tiene:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 125^2 - 100^2 = 5625$$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{100^2} - \frac{y^2}{5625} = 1$$

Figura 49



Puesto que el barco está a 80 millas de la costa, en la ecuación se utiliza $y = 80$ y se despeja x.

$$\frac{x^2}{100^2} - \frac{80^2}{5625} = 1$$

$$\frac{x^2}{100^2} = 1 + \frac{80^2}{5625} \approx 2.14$$

$$x^2 \approx 100^2(2.14)$$

$$x \approx 146$$

El barco está en la posición $(146, 80)$. Vea la figura 49. ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 65.

10.4 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. La distancia d desde $P_1 = (3, -4)$ hasta $P_2 = (-2, 1)$ es $d =$ __________. (p. 160)
2. Para completar el cuadrado de $x^2 - 5x$, se suma __________. (p. 99)
3. Encuentre las intersecciones de la ecuación $y^2 = 9 + 4x^2$. (pp. 169–170)
4. *Falso o verdadero:* la ecuación $y^2 = 9 + x^2$ es simétrica respecto del eje x, el eje y y el origen. (pp. 170–171)
5. Para graficar $y = (x - 5)^3 - 4$, se desplaza la grafica de $y = x^3$ _________unidades hacia la izquierda/derecha, y luego _________ unidades hacia arriba/abajo. (pp. 262–271)
6. Encuentre las asíntotas verticales, si las hay, y las asíntotas horizontal u oblicua, si las hay, de $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. (pp. 333–334)

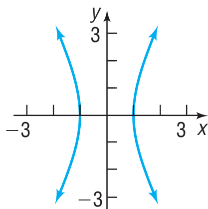
Conceptos y vocabulario

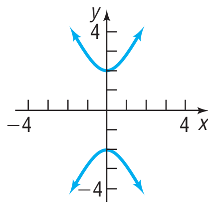
7. Un(a) _________ es la colección de los puntos del plano en los que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante.
8. En una hipérbola, los focos quedan sobre una recta llamada __________ __________.
9. Las asíntotas de la hipérbola $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ son ________ y __________.
10. *Falso o verdadero:* los focos de una hipérbola quedan sobre una recta llamada eje de simetría.
11. *Falso o verdadero:* las hipérbolas siempre tienen asíntotas.
12. *Falso o verdadero:* una hipérbola nunca se intersecará con su eje transversal.

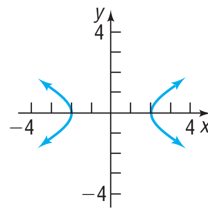
Ejercicios

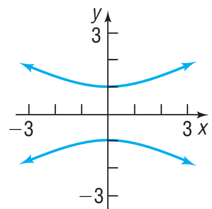
En los problemas 13-16, se le da la gráfica de una hipérbola. Relacione cada gráfica con su ecuación.

A. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ *B.* $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$ *C.* $\dfrac{y^2}{4} - x^2 = 1$ *D.* $y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$

13.


14.


15.


16.


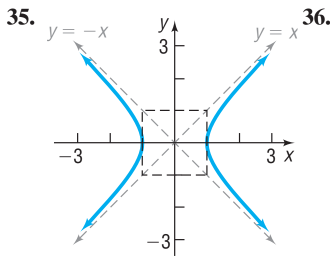
En los problemas 17-26, encuentre la ecuación de la hipérbola descrita. Grafique la ecuación.

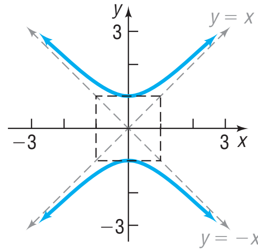
17. Centro en $(0, 0)$; foco en $(3, 0)$; vértice en $(1, 0)$
18. Centro en $(0, 0)$; foco en $(0, 5)$; vértice en $(0, 3)$
19. Centro en $(0, 0)$; foco en $(0, -6)$; vértice en $(0, 4)$
20. Centro en $(0, 0)$; foco en $(-3, 0)$; vértice en $(2, 0)$
21. Foco en $(-5, 0)$ y $(5, 0)$; vértice en $(3, 0)$
22. Foco en $(0, 6)$; vértices en $(0, -2)$ y $(0, 2)$;
23. Vértice en $(0, -6)$ y $(0, 6)$; asíntota la recta $y = 2x$;
24. Vértices en $(-4, 0)$ y $(4, 0)$; asíntota la recta $y = 2x$
25. Focos en $(-4, 0)$ y $(4, 0)$; asíntota la recta $y = -x$;
26. Focos en $(0, -2)$ y $(0, 2)$; asíntota la recta $y = -x$

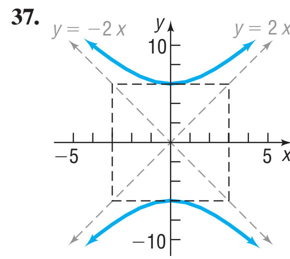
En los problemas 27-34, encuentre el centro, el eje transversal, los vértices, el foco y las asíntotas. Grafique cada una de las ecuaciones.

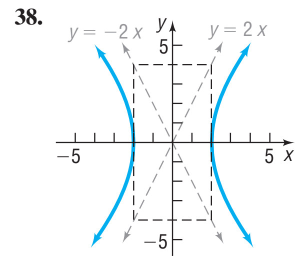
27. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$
28. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = 1$
29. $4x^2 - y^2 = 16$
30. $y^2 - 4x^2 = 16$
31. $y^2 - 9x^2 = 9$
32. $x^2 - y^2 = 4$
33. $y^2 - x^2 = 25$
34. $2x^2 - y^2 = 4$

En los problemas 35-38, exhiba la ecuación de cada hipérbola.

35.


36.


37.


38.


En los problemas 39-46, encuentre una ecuación para la hipérbola descrita. Grafique la ecuación.

39. Centro en $(4, -1)$; foco en $(7, -1)$; vértice en $(6, -1)$

40. Centro en $(-3, 1)$; foco en $(-3, 6)$; vértice en $(-3, 4)$

41. Centro en $(-3, -4)$; foco en $(-3, -8)$; vértice en $(-3, -2)$

42. Centro en $(1, 4)$; foco en $(-2, 4)$; vértice en $(0, 4)$

43. Focos en $(3, 7)$ y $(7, 7)$; vértice en $(6, 7)$

44. Foco en $(-4, 0)$; vértices en $(-4, 4)$ y $(-4, 2)$

45. Vértices en $(-1, -1)$ y $(3, -1)$; asíntota la recta $y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$

46. Vértices en $(1, -3)$ y $(1, 1)$; asíntota la recta $y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$

En los problemas 47-60, encuentre el centro, el eje transversal, los vértices, el foco y las asíntotas. Grafique cada una de las ecuaciones.

47. $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

48. $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$

49. $(y-2)^2 - 4(x+2)^2 = 4$

50. $(x+4)^2 - 9(y-3)^2 = 9$

51. $(x+1)^2 - (y+2)^2 = 4$

52. $(y-3)^2 - (x+2)^2 = 4$

53. $x^2 - y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

54. $y^2 - x^2 - 4y + 4x - 1 = 0$

55. $y^2 - 4x^2 - 4y - 8x - 4 = 0$

56. $2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

57. $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 16 = 0$

58. $2y^2 - x^2 + 2x + 8y + 3 = 0$

59. $y^2 - 4x^2 - 16x - 2y - 19 = 0$

60. $x^2 - 3y^2 + 8x - 6y + 4 = 0$

En los problemas 61-64, grafique cada función.
[**Sugerencia:** Observe que cada una de las funciones es media hipérbola].

61. $f(x) = \sqrt{16 + 4x^2}$

62. $f(x) = -\sqrt{9 + 9x^2}$

63. $f(x) = -\sqrt{-25 + x^2}$

64. $f(x) = \sqrt{-1 + x^2}$

---

65. Loran Dos estaciones de Loran están a 200 millas una de la otra, a lo largo de una costa recta.

a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00038 segundos entre las señales Loran. Establezca el sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar a qué parte de la costa lleva el barco si siguiera la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

b) Si el barco quiere entrar a una bahía que está entre los dos radiofaros, a 20 millas del radiofaro principal, ¿qué diferencia de tiempo debe buscar?

c) Si el barco está a 50 millas de la costa al momento de obtener la diferencia de tiempo, ¿cuál es la ubicación aproximada del barco?

[***Nota***: La velocidad de cada una de las señales de radio es alrededor de 186,000 millas por segundo].

66. Loran Dos estaciones de Loran están a 100 millas una de la otra, a lo largo de una costa recta.

a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00032 segundos entre las señales Loran. Determine el sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar a qué parte de la ribera lleva el barco si siguiera la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

b) Si el barco quiere entrar a una bahía que está entre los dos radiofaros, a 10 millas del radiofaro principal, ¿qué diferencia de tiempo debe buscar?

c) Si el barco está a 20 millas de la costa al momento de obtener la diferencia de tiempo, ¿cuál es la ubicación aproximada del barco?

[***Nota***: La velocidad de cada una de las señales de radio es alrededor de 186,000 millas por segundo].

67. Calibración de instrumentos En una prueba de sus dispositivos de registro, un equipo de sismólogos coloca dos aparatos a una distancia de 2000 pies uno del otro, quedando el artefacto del punto A al oeste del colocado en el punto B. En un sitio entre ambos dispositivos y a 200 pies del punto B, se detona una pequeña cantidad de explosivos y se toma nota del tiempo que le lleva al sonido llegar a cada dispositivo. Se va a realizar una segunda explosión en un sitio directamente al norte del punto B.

a) ¿Qué tan al norte se debe elegir el sitio de la segunda explosión, a fin de que la medición de la diferencia de tiempo registrada por los dispositivos sea igual a la registrada en la primera detonación?

b) Explique por qué se podría utilizar este experimento para calibrar los instrumentos.

68. Explique con sus propias palabras el sistema de navegación Loran.

69. La **excentricidad** de una hipérbola se define como el número $\frac{c}{a}$, donde a y c son los números dados en la ecuación (2).

Puesto que $c > a$, se deduce que $e > 1$. Describa la forma general de una hipérbola cuya excentricidad es cercana a 1. ¿Cuál es la forma si e es muy grande?

70. La hipérbola para la que $a = b$ se denomina **hipérbola equilátera**. Encuentre la excentricidad e de una hipérbola equilátera.

[***Nota***: La excentricidad de una hipérbola se define en el problema 69].

71. Dos hipérbolas con el mismo conjunto de asíntotas se conocen como **conjugadas**. Demuestre que las hipérbolas:

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \quad \text{y} \quad y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$$

están conjugadas. Grafique ambas hipérbolas sobre el mismo conjunto de coordenadas.

72. Demuestre que la hipérbola:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

tiene dos asíntotas oblicuas

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

73. Demuestre que la gráfica de una ecuación con la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0, \qquad A \neq 0, C \neq 0, F \neq 0$$

donde A y C son de signo opuesto, es una hipérbola con centro en $(0, 0)$.

74. Demuestre que la gráfica de una ecuación con la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A \neq 0, C \neq 0$$

donde A y C tienen signo opuesto:

a) es una hipérbola si $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \neq 0$.

b) Son dos rectas que se cortan si

$$\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F = 0$$

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $5\sqrt{2}$ **2.** $\frac{25}{4}$

3. $(0, -3), (0, 3)$ **4.** Cierto

5. derecha; 5; abajo; 4

6. Vertical: $x = -2$, $x = 2$; Horizontal: $y = 1$

10.5 Rotación de ejes, forma general de una cónica

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Fórmulas de suma para seno y coseno (sección 7.4, pp. 616 y 619)
- Fórmulas del medio ángulo para seno y coseno (sección 7.5, p. 630)
- Fórmulas del doble ángulo para seno y coseno (sección 7.5, p. 626)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 812.

OBJETIVOS
1. Identificar una cónica
2. Utilizar la rotación de los ejes para transformar ecuaciones
3. Analizar una ecuación utilizando la rotación de ejes
4. Identificar cónicas sin rotación de ejes

En esta sección, se muestra que la gráfica de un polinomio general de segundo grado con dos variables, x y y, es decir, una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

donde A, B y C no son 0 al mismo tiempo, es una cónica. Aquí no se verán los casos degenerados de la ecuación (1), como $x^2 + y^2 = 0$, cuya gráfica es

un solo punto $(0, 0)$ o $x^2 + 3y^2 + 3 = 0$, cuya gráfica no contiene puntos; o $x^2 - 4y^2 = 0$, su gráfica son dos rectas: $x - 2y = 0$ y $x + 2y = 0$.

Se comienza con el caso en el que $B = 0$. En este caso, no está el término que contiene a xy, por lo que la ecuación (1) tiene la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en donde $A \neq 0$ o $C \neq 0$.



Ya se estudió el procedimiento para identificar la gráfica de este tipo de ecuación; se completan los cuadrados de las expresiones cuadráticas en x o y, o en ambos. Una vez hecho lo anterior, se identifica la cónica al compararla con una de las formas estudiadas en las secciones 10.2 a 10.4.

Aunque se puede identificar la cónica en forma directa a partir de la ecuación sin completar los cuadrados.

Teorema

Identificación de cónicas sin completar los cuadrados

Excluyendo los casos degenerados, la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

donde A y C no pueden ser ambos iguales a cero.

a) Define una parábola si $AC = 0$.

b) Define una elipse (o un círculo) si $AC > 0$.

c) Define una hipérbola si $AC < 0$.

Demostración

a) Si $AC = 0$, entonces $A = 0$ o $C = 0$, pero no ambos; de manera que la forma de la ecuación (2) es

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A \neq 0$$

o

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad C \neq 0$$

Si se utilizan los resultados de los problemas 77 y 78 del ejercicio 10.2, se deduce que, exceptuando los casos degenerados, la ecuación es una parábola.

b) Si $AC > 0$, entonces A y C tienen el mismo signo. Si se utilizan los resultados del problema 84 del ejercicio 10.3, exceptuando los casos degenerados, la ecuación es una elipse si $A \neq C$ o un círculo si $A = C$.

c) Si $AC < 0$, entonces A y C son de signo opuesto. Si se utilizan los resultados del problema 74 del ejercicio 10.4, exceptuando los casos degenerados, la ecuación es una hipérbola. ■

No nos preocuparemos por los casos degenerados de la ecuación (2). Sin embargo, en la práctica, usted debe estar alerta a la posibilidad de degeneración.

EJEMPLO 1

Identificar una cónica sin completar los cuadrados

Identifique cada ecuación sin completar los cuadrados.

a) $3x^2 + 6y^2 + 6x - 12y = 0$ b) $2x^2 - 3y^2 + 6y + 4 = 0$

c) $y^2 - 2x + 4 = 0$

Solución a) Se compara la ecuación dada con la ecuación (2) y se concluye que $A = 3$ y $C = 6$. Como $AC = 18 > 0$, la ecuación es una elipse.

b) Aquí, $A = 2$ y $C = -3$, de manera que $AC = -6 < 0$. La ecuación es una hipérbola.

c) Aquí, $A = 0$ y $C = 1$, de manera que $AC = 0$. La ecuación es una parábola. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

A pesar de que se identifica el tipo de cónica representada por cualquier ecuación con la forma de la ecuación (2) sin necesidad de completar los cuadrados, se tendrá que hacerlo si se desea información adicional acerca de una cónica.

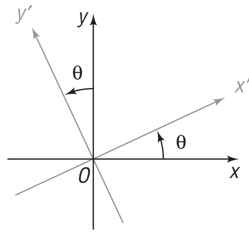
Ahora nuestra atención se concentrará en las ecuaciones con la forma de la ecuación (1), donde $B \neq 0$. Para analizar este caso, se necesita investigar antes un nuevo procedimiento: la rotación de los ejes.

Rotación de ejes

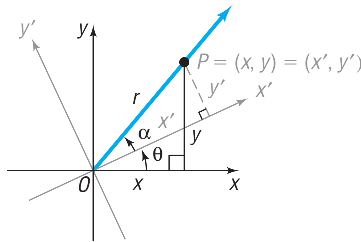


En una **rotación de ejes**, el origen permanece fijo mientras que los ejes x y y giran desde un ángulo θ hasta una nueva posición; estas nuevas posiciones de los ejes se denotan como x' y y', respectivamente, como se muestra en la figura 50*a*).

Figura 50



a)



b)

Se observa ahora la figura 50*b*). Allí, el punto P tiene las coordenadas (x, y) con respecto al plano xy, mientras que tiene las coordenadas (x', y') respecto al plano $x'y'$. Se buscan relaciones que permitan expresar a x y y en términos de x', y', y θ.

Como se muestra en la figura 50*b*), r denota la distancia desde el origen O hasta el punto P, y α denota el ángulo entre el eje x' positivo y el trazo que va de O a P. Entonces, si se utilizan las definiciones del seno y coseno, se tiene:

$$x' = r\cos\alpha \qquad y' = r\,\text{sen}\,\alpha \tag{3}$$

$$x = r\cos(\theta + \alpha) \qquad y = r\,\text{sen}(\theta + \alpha) \tag{4}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta + \alpha) \\ &= r(\cos\theta\cos\alpha - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha) && \text{Fórmula de suma para cosenos} \\ &= (r\cos\alpha)(\cos\theta) - (r\,\text{sen}\,\alpha)(\text{sen}\,\theta) \\ &= x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta && \text{Mediante la ecuación 3} \end{aligned}$$

De manera semejante,

$$\begin{aligned} y &= r\,\text{sen}(\theta + \alpha) \\ &= r(\text{sen}\,\theta\cos\alpha + \cos\theta\,\text{sen}\,\alpha) \\ &= x'\,\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

Teorema

Fórmulas de rotación

Si los ejes x y y se giran en un ángulo θ, las coordenadas (x, y) de un punto P respecto del plano xy y las coordenadas (x', y') del mismo respecto de los nuevos ejes x' y y' se relacionan por medio de las fórmulas

$$x = x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta \qquad y = x'\,\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta \tag{5}$$

EJEMPLO 2 Rotación de ejes

Exprese la ecuación $xy = 1$ en términos de nuevas coordenadas x' y' al girar los ejes un ángulo de 45°. Analice la nueva ecuación.

Solución Sea $\theta = 45°$ en la ecuación (5). Entonces

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

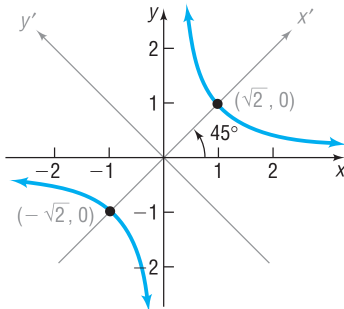
Si se sustituyen las expresiones para x y y en $xy = 1$, se tiene

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right] = 1$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = 1$$

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

Figura 51



Ésta es la ecuación de una hipérbola con centro en (0, 0) y eje transversal paralelo al eje x'. Los vértices están en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ sobre el eje x'; las asíntotas son $y' = x'$ y $y' = -x'$ (que corresponden a los ejes x y y originales). Vea la gráfica en la figura 51. ◀

Como se ilustra en el ejemplo 2, la rotación de los ejes en el ángulo apropiado podría transformar una ecuación de segundo grado que en x y y contiene un término xy, en una que en x' y y' donde no aparece un término $x'y'$. De hecho, se demostrará que una rotación de los ejes con el ángulo apropiado transforma cualquier ecuación de la forma de la ecuación (1) en una de x' y y' sin un término $x'y'$.

Con el fin de encontrar la fórmula para elegir un ángulo θ apropiado para girar los ejes, se comienza con la ecuación (1),

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0$$

Después, se giran un ángulo θ utilizando las fórmulas de rotación (5).

$$A(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)^2 + B(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta)$$
$$+ C(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta)^2 + D(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)$$
$$+ E(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) + F = 0$$

Si se desarrollan y agrupan términos semejantes, se obtiene

$$(A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta)x'^2 + [B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2(C - A)(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)]x'y'$$
$$+ (A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta)y'^2$$
$$+ (D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta)x'$$
$$+ (-D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta)y' + F = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

En la ecuación (6), el coeficiente de $x'y'$ es

$$B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2(C - A)(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$

Puesto que se desea eliminar el término de $x'y'$, se selecciona un ángulo θ, tal que

$$B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2(C - A)(\operatorname{sen}\theta\cos\theta) = 0$$

$$B\cos(2\theta) + (C - A)\operatorname{sen}(2\theta) = 0 \quad \text{Fórmulas del ángulo doble}$$

$$B\cos(2\theta) = (A - C)\operatorname{sen}(2\theta)$$

$$\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B}, \qquad B \neq 0$$

Teorema

Para transformar la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0$$

en una ecuación de x' y y' sin un término $x'y'$, se giran los ejes en un ángulo θ que satisfaga la ecuación:

$$\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B} \tag{7}$$

La ecuación (7) tiene un número de soluciones infinito para θ. Se adoptará la convención de seleccionar el ángulo agudo θ que satisfaga a (7). Entonces se tienen las dos siguientes posibilidades:

Si $\cot(2\theta) \geq 0$, entonces $0° < 2\theta \leq 90°$, de manera que $0° < \theta \leq 45°$

Si $\cot(2\theta) < 0$, entonces $90° < 2\theta < 180°$, de manera que $45° < \theta < 90°$

Cada uno de esos resultados, en una rotación de los ejes formando un ángulo agudo θ en sentido opuesto las manecillas del reloj.*

ADVERTENCIA: Si utiliza una calculadora para resolver la ecuación (7), tenga mucho cuidado.

1. Si $\cot(2\theta) = 0$, entonces $2\theta = 90°$ y $\theta = 45°$.
2. Si $\cot(2\theta) \neq 0$, encuentre primero $\cos(2\theta)$. Después, utilice la inversa de las teclas de función arco coseno para obtener 2θ, $0° < 2\theta < 180°$. Por último, divida entre dos para tener el ángulo agudo θ correcto. ■

3 **EJEMPLO 3** **Analizar una ecuación utilizando la rotación de ejes**

Analice la ecuación: $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0$

Solución Como está presente un término xy, se deben girar los ejes. Utilizando $A = 1$, $B = \sqrt{3}$ y $C = 2$ en la ecuación (7), el ángulo agudo θ apropiado para girar los ejes satisface la ecuación

$$\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad 0° < 2\theta < 180°$$

*Toda rotación (en sentido horario o antihorario) de un ángulo θ que satisface $\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B}$ eliminará al término $x'y'$. Sin embargo, la forma final de la ecuación transformada quizá resulte diferente (pero equivalente), dependiendo del ángulo seleccionado.

Puesto que $\cot(2\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, se encuentra que $2\theta = 120°$, por lo que $\theta = 60°$. Si se utiliza $\theta = 60°$ en las fórmulas de rotación (5), se encuentra

$$x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' = \frac{1}{2}\left(x' - \sqrt{3}y'\right)$$
$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x' + y'\right)$$

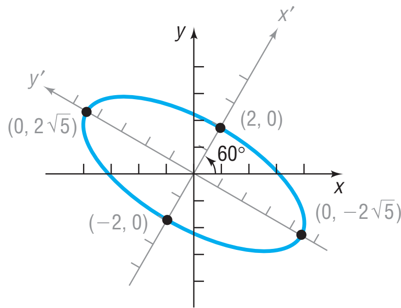
Si se sustituyen estos valores en la ecuación original y se simplifica, se tiene

$$x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0$$
$$\frac{1}{4}\left(x' - \sqrt{3}y'\right)^2 + \sqrt{3}\left[\frac{1}{2}\left(x' - \sqrt{3}y'\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x' + y'\right)\right] + 2\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}x' + y'\right)^2\right] = 10$$

Se multiplican ambos lados por 4 y se desarrolla para obtener

$$x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2 + \sqrt{3}\left(\sqrt{3}x'^2 - 2x'y' - \sqrt{3}y'^2\right) + 2\left(3x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + y'^2\right) = 40$$
$$10x'^2 + 2y'^2 = 40$$
$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{20} = 1$$

Figura 52



Ésta es la ecuación de una elipse con centro en $(0, 0)$ y eje mayor paralelo al eje y'. Los vértices están en $(0, \pm 2\sqrt{5})$ sobre el eje y'. Vea la gráfica en la figura 52. ◀

 **TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.**

En el ejemplo 3, el ángulo agudo θ a través del cual se giraron los ejes fue fácil de encontrar, gracias a los números que se utilizaron en la ecuación dada. Por lo general, la ecuación $\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B}$ no tiene una solución "bonita". Como se muestra en el siguiente ejemplo, si se aplican las fórmulas del medio ángulo, se pueden encontrar las fórmulas de rotación apropiadas sin utilizar una aproximación de calculadora.

EJEMPLO 4 Analizar una ecuación utilizando la rotación de ejes

Analice la ecuación: $4x^2 - 4xy + y^2 + 5\sqrt{5}x + 5 = 0$

Solución Si $A = 4$, $B = -4$, y $C = 1$ en la ecuación (7), el ángulo agudo θ apropiado para girar los ejes satisface

$$\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

Para utilizar las fórmulas de rotación (5), se necesita conocer los valores de sen θ y cos θ. Puesto que se busca un ángulo agudo θ, se sabe que sen $\theta > 0$ y cos $\theta > 0$. Se usan las fórmulas del medio ángulo con la forma:

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}}$$

Ahora se necesita encontrar el valor de $\cos(2\theta)$. Como $\cot(2\theta) = -\frac{3}{4}$, entonces $90° < 2\theta < 180°$ (¿sabe usted por qué?), de manera que $\cos(2\theta) = -\frac{3}{5}$. Entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Con estos valores, las fórmulas de rotación (5) son:

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}x' - \frac{2\sqrt{5}}{5}y' = \frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y')$$

$$y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x' + \frac{\sqrt{5}}{5}y' = \frac{\sqrt{5}}{5}(2x' + y')$$

Si se sustituyen estos valores en la ecuación original y se simplifica, se obtiene

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 5\sqrt{5}x + 5 = 0$$

$$4\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y')\right]^2 - 4\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y')\right]\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(2x' + y')\right] + \left[\frac{\sqrt{5}}{5}(2x' + y')\right]^2 + 5\sqrt{5}\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y')\right] = -5$$

Se multiplican ambos lados por 5 y se desarrollan para obtener

$$4(x'^2 - 4x'y' + 4y'^2) - 4(2x'^2 - 3x'y' - 2y'^2) + 4x'^2 + 4x'y' + y'^2 + 25(x' - 2y') = -25$$

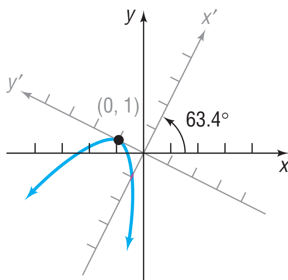
$$25y'^2 - 50y' + 25x' = -25 \quad \text{Se suman términos semejantes.}$$

$$y'^2 - 2y' + x' = -1 \quad \text{Se dividen entre 25.}$$

$$y'^2 - 2y' + 1 = -x' \quad \text{Se completa el cuadrado en } y'.$$

$$(y' - 1)^2 = -x'$$

Figura 53



Ésta es la ecuación de una parábola con vértice en $(0, 1)$ del plano $x'y'$. El eje de simetría es paralelo al eje x'. Utilice una calculadora para resolver $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, se encuentra que $\theta \approx 63.4°$. Vea la gráfica en la figura 53. ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37.

Identificar cónicas sin rotación de ejes

4 Supóngase que sólo se necesita identificar (y no analizar) una ecuación con la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Si a esta ecuación se le aplican las fórmulas de rotación (5), se obtiene una ecuación con la forma

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

donde A', B', C', D', E' y F' se podrían expresar en términos de A, B, C, D, E, F y el ángulo de rotación θ (vea el problema 53). Es posible demostrar que el valor de $B^2 - 4AC$ en la ecuación (8) y el valor de $B'^2 - 4A'C'$ en la ecuación (9) son iguales, independientemente del ángulo de rotación θ seleccionado (vea el problema 55). En particular, si el ángulo de rotación θ satisface la ecuación (7), entonces $B' = 0$ en la ecuación (9), y $B^2 - 4AC = -4A'C'$. Puesto que la ecuación (9) tiene entonces la forma de la ecuación (2),

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

se le identificaría sin completar los cuadrados, como se hizo al principio de esta sección. De hecho, ahora se identifica la cónica descrita por cualquier ecuación con la forma de la ecuación (8) sin una rotación de ejes.

Teorema

Identificar cónicas sin rotación de ejes

Excluyendo los casos degenerados, la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

a) Defina una parábola si $B^2 - 4AC = 0$.
b) Defina una elipse (o un círculo) si $B^2 - 4AC < 0$.
c) Defina una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

En el problema 56 se le pide que demuestre este teorema.

EJEMPLO 5 Identificar una cónica sin rotación de ejes

Identifique la ecuación: $8x^2 - 12xy + 17y^2 - 4\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y - 15 = 0$

Solución Aquí, $A = 8$, $B = -12$, y $C = 17$, de manera que $B^2 - 4AC = -400$. Como $B^2 - 4AC < 0$, la ecuación define una elipse. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 43.

10.5 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. La fórmula de suma para la función seno es $\text{sen}(\theta + \theta)$ =__________. (p. 619)

2. La fórmula del doble ángulo para la función seno es $\text{sen}(2\theta)$= __________. (p. 626)

3. Si θ es agudo, la fórmula del medio ángulo para la función seno es $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) =$ __________. (p. 630)

4. Si θ es agudo, la fórmula del medio ángulo para la función coseno es $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) =$ __________. (p. 630)

Conceptos y vocabulario

5. Para transformar la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0$$

en una ecuación de x' y y' sin un término $x'y'$, se giran los ejes en un ángulo agudo θ que satisfaga la ecuación __________.

6. Identifique la cónica: $x^2 - 2y^2 - x - y - 18 = 0$. __________.

7. Identifique la cónica: $x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 4y + 10 = 0$ __________.

8. *Falso o verdadero:* la ecuación $ax^2 + 6y^2 - 12y = 0$ define una elipse si $a > 0$.

9. *Falso o verdadero:* la ecuación $3x^2 + bxy + 12y^2 = 10$ define una parábola si $b = -12$.

10. *Falso o verdadero:* para eliminar de la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 3y + 5 = 0$ al término xy, se giran los ejes un ángulo θ, en el que $\cot\theta = B^2 - 4AC$.

Ejercicios

Los problemas 11-20, identifique cada ecuación sin completar los cuadrados.

11. $x^2 + 4x + y + 3 = 0$

12. $2y^2 - 3y + 3x = 0$

13. $6x^2 + 3y^2 - 12x + 6y = 0$

14. $2x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$

15. $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4 = 0$

16. $4x^2 - 3y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$

17. $2y^2 - x^2 - y + x = 0$

18. $y^2 - 8x^2 - 2x - y = 0$

19. $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$

20. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 8y = 0$

En los problemas 21-30, determine las fórmulas de rotación que es apropiado utilizar para que la nueva ecuación no contenga un término xy.

21. $x^2 + 4xy + y^2 - 3 = 0$

22. $x^2 - 4xy + y^2 - 3 = 0$

23. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

24. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 32 = 0$

25. $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = 0$

26. $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$

27. $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$

28. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y + 5 = 0$

29. $25x^2 - 36xy + 40y^2 - 12\sqrt{13}x - 8\sqrt{13}y = 0$

30. $34x^2 - 24xy + 41y^2 - 25 = 0$

En los problemas 31-42, gire los ejes de manera que la nueva ecuación no contenga un término xy. Analice y grafique la nueva ecuación. Consulte los problemas 21-30 para resolver los problemas 31-40.

31. $x^2 + 4xy + y^2 - 3 = 0$

32. $x^2 - 4xy + y^2 - 3 = 0$

33. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

34. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 32 = 0$

35. $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = 0$

36. $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$

37. $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$

38. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y + 5 = 0$

39. $25x^2 - 36xy + 40y^2 - 12\sqrt{13}x - 8\sqrt{13}y = 0$

40. $34x^2 - 24xy + 41y^2 - 25 = 0$

41. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 130x + 90y = 0$

42. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 60x + 80y = 0$

En los problemas 43-52, identifique cada ecuación sin aplicar la rotación de los ejes.

43. $x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + 2y + 5 = 0$

44. $2x^2 - 3xy + 4y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$

45. $x^2 - 7xy + 3y^2 - y - 10 = 0$

46. $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x - 2 = 0$

47. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - x - y = 0$

48. $10x^2 + 12xy + 4y^2 - x - y + 10 = 0$

49. $10x^2 - 12xy + 4y^2 - x - y - 10 = 0$

50. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - x - y = 0$

51. $3x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$

52. $3x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 2y + 10 = 0$

En los problemas 53-56, aplique las fórmulas de rotación (5) a

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

para obtener la ecuación:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

53. Exprese A', B', C', D', E' y F' en términos de A, B, C, D, E, F y el ángulo de rotación θ.

[**Sugerencia**: Consulte la ecuación (6)].

54. Demuestre que $A + C = A' + C'$ y por tanto muestra que $A + C$ es **invariante,** es decir, su valor no cambia con la rotación de los ejes.

55. Consulte el problema 54. Demuestre que $B^2 - 4AC$ es invariante.

56. Demuestre que, excluyendo los casos degenerados, la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

a) Defina una parábola si $B^2 - 4AC = 0$.

b) Defina una elipse (o un círculo) si $B^2 - 4AC < 0$.
c) Defina una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

57. Utilice las obras de rotación (5) para demostrar que la distancia es invariante ante la rotación de los ejes. Es decir, demuestre que la distancia de $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ en el plano xy es igual a la distancia de $P_1 = (x'_1, y'_1)$ a $P_2 = (x'_2, y'_2)$ en el plano $x'y'$.

58. Demuestre que la gráfica de la ecuación $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ forma parte de la gráfica de una parábola.

 **59.** Formule una estrategia para analizar y graficar una ecuación con la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

¿Cómo cambiaría su estrategia si la ecuación tuviera la siguiente forma?

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. sen α cos β + cos α sen β
2. 2 sen θ cos θ
3. $\sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{2}}$ **4.** $\sqrt{\dfrac{1 + \cos\theta}{2}}$

10.6 Ecuaciones polares de cónicas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Coordenadas polares (sección 9.1, pp. 710-717)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 819.

OBJETIVOS
1 Analizar y graficar ecuaciones polares de cónicas
2 Convertir la ecuación polar de una cónica en una ecuación rectangular

1 En las secciones 10.2 a 10.4, se establecieron definiciones separadas para parábola, elipse e hipérbola, con base en las propiedades geométricas y la fórmula de la distancia. En esta sección, se presenta una definición alterna que define da manera simultánea a todas esas cónicas. Como se verá, este método es bastante adecuado para la representación en coordenadas polares (consulte la sección 9.1).

Sean D que denota una recta llamada la **directriz**; F que denota un punto fijo llamado **foco**, que no está sobre D; y e un número fijo positivo llamado **excentricidad**. Una **cónica** es el conjunto de puntos P del plano, tales que la razón entre la distancia desde F hasta P y la distancia entre D hasta P es igual a e. Es decir, una cónica es la colección de puntos P para los que:

$$\frac{d(F, P)}{d(D, P)} = e \qquad \textbf{(1)}$$

Si $e = 1$, la cónica es una **parábola**.
Si $e < 1$, la cónica es una **elipse**.
Si $e > 1$, la cónica es una **hipérbola**.

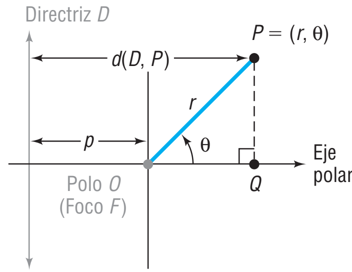
Observe que si $e = 1$, la definición de una parábola en la ecuación (1) es exactamente igual a la antes utilizada en la sección 10.2.

En el caso de la elipse, el **eje mayor** es una recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz. En el caso de la hipérbola, el **eje transversal** es una recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz. Tanto para elipse como para la hipérbola, la excentricidad e satisface:

$$e = \frac{c}{a} \qquad \textbf{(2)}$$

donde c es la distancia desde el centro hasta el foco y a es la distancia desde el centro hasta el vértice.

Figura 54



Tal como se hizo antes al utilizar coordenadas rectangulares, en las coordenadas polares también se dedujeron las ecuaciones de las cónicas eligiendo una posición conveniente para el foco F y la directriz D. El foco F se coloca en el polo, y la directriz D es paralela o perpendicular al eje polar.

Suponiendo que se comienza con la directriz D perpendicular al eje polar y a una distancia de p unidades a la izquierda del polo (foco F). Vea la figura 54.

Si $P = (r, \theta)$ es cualquier punto de la cónica, entonces mediante la ecuación (1):

$$\frac{d(F, P)}{d(D, P)} = e \quad \text{o} \quad d(F, P) = e \cdot d(D, P) \tag{3}$$

Ahora, se utiliza el punto Q obtenido al trasladar la perpendicular de P al eje polar para calcular $d(D, P)$.

$$d(D, P) = p + d(O, Q) = p + r\cos\theta$$

Si se utiliza en la ecuación (3) esta expresión y el hecho de que $d\{F, P) = d(O, P) = r$, se obtiene:

$$\begin{aligned} d(F, P) &= e \cdot d(D, P) \\ r &= e(p + r\cos\theta) \\ r &= ep + er\cos\theta \\ r - er\cos\theta &= ep \\ r(1 - e\cos\theta) &= ep \\ r &= \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \end{aligned}$$

Teorema

Ecuación polar de una cónica con foco en el polo y directriz perpendicular al eje polar a una distancia p a la izquierda del polo

La ecuación polar de una cónica con foco en el polo y directriz perpendicular al eje polar a una distancia p a la izquierda del polo es:

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \tag{4}$$

donde e es la excentricidad de la cónica.

EJEMPLO 1 Analizar y graficar la ecuación polar de una cónica

Analice y grafique la ecuación: $r = \dfrac{4}{2 - \cos\theta}$

Solución La ecuación dada no tiene la forma de la ecuación (4), ya que el primer término del denominador es 2 en vez de 1. Se divide entre 2 el numerador y el denominador para obtener:

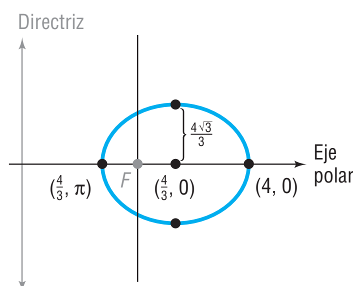
$$r = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta} \qquad r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$$

Esta ecuación es de la forma de la ecuación (4), con los puntos

$$e = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad ep = 2, \frac{1}{2}p = 2, \quad \text{entonces} \quad p = 4$$

Se concluye que la cónica es una elipse, ya que $e = \frac{1}{2} < 1$. Un foco está en el polo, y la directriz es perpendicular al eje polar, a una distancia de $p = 4$ unidades a la izquierda del polo. Se deduce que el eje mayor está a lo largo del eje polar. Para encontrar los vértices, se hace $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Los vértices de la elipse son $(4, 0)$ y $\left(\frac{4}{3}, \pi\right)$. El punto medio entre los vértices, $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ en coordenadas polares, es el centro de la elipse. [¿Sabe por qué? Los vértices $(4, 0)$ y $\left(\frac{4}{3}, \pi\right)$ en coordenadas polares son $(4, 0)$ y $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ en coordenadas rectangulares. El punto medio en coordenadas rectangulares es $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, el cual también es $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ en coordenadas polares]. Entonces, a = distancia de centro a un vértice $= \frac{8}{3}$. Si se utiliza $a = \frac{8}{3}$ y $e = \frac{1}{2}$ en la ecuación (2), $e = \frac{c}{a}$, se encuentra que $c = \frac{4}{3}$. Por último, si se utiliza $a = \frac{8}{3}$ y $c = \frac{4}{3}$ en $b^2 = a^2 - c^2$, se tiene:

Figura 55



$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} = \frac{48}{9}$$

$$b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

La gráfica aparece en la figura 55. ◀



COMPROBACIÓN: En modo polar con θ mín $= 0$, θ máx $= 2\pi$, e intervalo de $\theta = \frac{\pi}{24}$, grafique $r_1 = \frac{4}{2 - \cos\theta}$ y compare el resultado con la figura 55.



Exploración

Grafique $r_1 = \frac{4}{2 + \cos\theta}$ y compare el resultado con la figura 55. ¿Cuál es su conclusión? Limpie la pantalla y grafique $r_1 = \frac{4}{2 - \operatorname{sen}\theta}$ y luego $r_1 = \frac{4}{2 + \operatorname{sen}\theta}$. Compare ambas gráficas con la figura 55. ¿Cuál es su conclusión?

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

La ecuación (4) se obtuvo con la suposición de que la directriz era la perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la izquierda del polo. Con un argumento semejante (vea el problema 43), en el que la directriz es perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la derecha del polo, se obtiene la ecuación:

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}$$

En los problemas 44 y 45 se le pide que deduzca las ecuaciones polares de cónicas con foco en el polo y directriz paralela al eje polar. En la tabla 5 se resumen las ecuaciones polares de las cónicas.

Tabla 5

Ecuaciones polares de cónicas (con el foco en el polo y excentricidad e)

Ecuación	Descripción
a) $r = \dfrac{ep}{1 - e\cos\theta}$	Directriz perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la izquierda del polo.
b) $r = \dfrac{ep}{1 + e\cos\theta}$	Directriz perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la derecha del polo.
c) $r = \dfrac{ep}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$	Directriz paralela al eje polar a una distancia de p unidades arriba del polo.
d) $r = \dfrac{ep}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$	Directriz paralela al eje polar a una distancia de p unidades abajo del polo.

Excentricidad

Si $e = 1$, la cónica es una parábola; el eje de simetría es perpendicular a la directriz.

Si $e < 1$, la cónica es una elipse; el eje mayor es perpendicular a la directriz.

Si $e > 1$, la cónica es una hipérbola; el eje transversal es perpendicular a la directriz.

EJEMPLO 2 Analizar y graficar la ecuación polar de una cónica

Analice y grafique la ecuación: $r = \dfrac{6}{3 + 3\,\text{sen}\,\theta}$

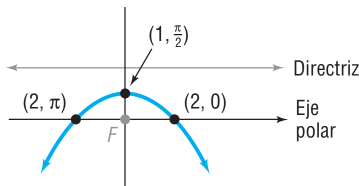
Solución Para acomodar la ecuación en forma apropiada, se divide entre 3 el numerador y el denominador para obtener:

$$r = \frac{2}{1 + \text{sen}\,\theta}$$

Al consultar la tabla 5, se concluye que esta ecuación tiene la forma de la ecuación c), con:

$$e = 1 \quad \text{y} \quad ep = 2$$
$$p = 2 \quad e = 1$$

Figura 56



La cónica es una parábola con foco en el polo. La directriz es paralela al eje polar a una distancia de 2 unidades por encima del polo; el eje de simetría es perpendicular al eje polar. El vértice de la parábola está en $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (¿sabe por qué?). Vea la gráfica en la figura 56. Observe que se grafican dos puntos adicionales, $(2, 0)$ y $(2, \pi)$, como ayuda en la graficación. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

EJEMPLO 3 Analizar y graficar la ecuación polar de una cónica

Analice y grafique la ecuación: $r = \dfrac{3}{1 + 3\cos\theta}$

Solución Esta ecuación tiene la forma de la ecuación b) de la tabla 5. Se concluye que:

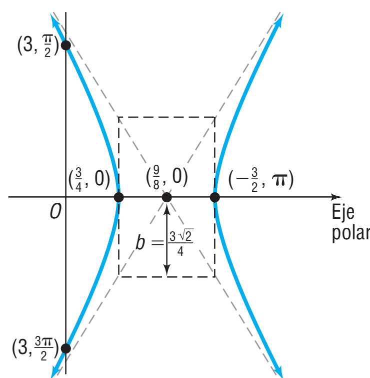
$$e = 3 \quad \text{y} \quad ep = 3$$
$$p = 1 \quad e = 3$$

Ésta es la ecuación de una hipérbola con un foco en el polo. La directriz es perpendicular al eje polar a una distancia de 1 unidad a la derecha del polo. El eje transversal está a lo largo del eje polar. Para encontrar los vértices, se hace $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Los vértices son $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, \pi\right)$. El centro, que está en el punto medio entre $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, \pi\right)$, es $\left(\frac{9}{8}, 0\right)$. Entonces $c =$ distancia del centro a un foco $= \frac{9}{8}$. Como $e = 3$, de la ecuación (2), $e = \frac{c}{a}$, se deduce que $a = \frac{3}{8}$. Por último, se utiliza $a = \frac{3}{8}$ y $c = \frac{9}{8}$ en $b^2 = c^2 - a^2$; se encuentra:

$$b^2 = c^2 - a^2 = \frac{81}{64} - \frac{9}{64} = \frac{72}{64} = \frac{9}{8}$$

$$b = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Figura 57



La gráfica aparece en la figura 57. Observe que se grafican dos puntos adicionales, $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$, en la rama izquierda, y se usa la simetría para obtener la rama derecha. Las asíntotas de esta hipérbola se encontraron de la manera habitual, mediante la construcción del rectángulo que se muestra en línea punteada. ◄



COMPROBACIÓN: Grafique $r_1 = \frac{3}{1 + 3\cos\theta}$ y compare el resultado con la figura 57.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 17.

2 EJEMPLO 4 **Convertir la ecuación polar en una ecuación rectangular**

Convierta la ecuación polar:

$$r = \frac{1}{3 - 3\cos\theta}$$

en una ecuación rectangular.

Solución Aquí, la estrategia consiste en reordenar primero la ecuación y elevar al cuadrado ambos lados, antes de utilizar las ecuaciones de transformación.

$$r = \frac{1}{3 - 3\cos\theta}$$
$$3r - 3r\cos\theta = 1$$
$$3r = 1 + 3r\cos\theta \quad \text{Se reordena la ecuación.}$$
$$9r^2 = (1 + 3r\cos\theta)^2 \quad \text{Se elevan ambos lados al cuadrado.}$$
$$9(x^2 + y^2) = (1 + 3x)^2 \quad x^2 + y^2 = r^2;\ x = r\cos\theta$$
$$9x^2 + 9y^2 = 9x^2 + 6x + 1$$
$$9y^2 = 6x + 1$$

Ésta es la ecuación de una parábola en coordenadas rectangulares. ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.

10.6 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Si (x, y) son las coordenadas rectangulares de un punto P y (r, θ) son sus coordenadas polares, entonces $x =$ __________ y $y =$ __________. (pp. 710–717)

2. En las coordenadas polares, al punto $(0, 0)$ se le llama __________ . (pp. 710–717)

Conceptos y vocabulario

3. La ecuación polar $r = \dfrac{8}{4 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ es una cónica cuya excentricidad es __________. Es una __________ cuya directriz es __________ al eje polar a una distancia de __________ unidades __________ del polo.

4. La excentricidad e de una parábola es __________, de una elipse es __________ y de una hipérbola es __________.

5. *Falso o verdadero:* si (r, θ) son coordenadas polares, la ecuación $r = \dfrac{2}{2 + 3\,\text{sen}\,\theta}$ define una hipérbola.

6. *Falso o verdadero:* la excentricidad de una hipérbola es 1.

Ejercicios

En los problemas 7-12, identifique la cónica que representa cada ecuación polar. También encuentre la posición de la directriz.

7. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$ **8.** $r = \dfrac{3}{1 - \text{sen}\,\theta}$ **9.** $r = \dfrac{4}{2 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

10. $r = \dfrac{2}{1 + 2\cos\theta}$ **11.** $r = \dfrac{3}{4 - 2\cos\theta}$ **12.** $r = \dfrac{6}{8 + 2\,\text{sen}\,\theta}$

En los problemas 13-24, analice y grafique cada ecuación.

13. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$ **14.** $r = \dfrac{3}{1 - \text{sen}\,\theta}$ **15.** $r = \dfrac{8}{4 + 3\,\text{sen}\,\theta}$

16. $r = \dfrac{10}{5 + 4\cos\theta}$ **17.** $r = \dfrac{9}{3 - 6\cos\theta}$ **18.** $r = \dfrac{12}{4 + 8\,\text{sen}\,\theta}$

19. $r = \dfrac{8}{2 - \text{sen}\,\theta}$ **20.** $r = \dfrac{8}{2 + 4\cos\theta}$ **21.** $r(3 - 2\,\text{sen}\,\theta) = 6$

22. $r(2 - \cos\theta) = 2$ **23.** $r = \dfrac{6\sec\theta}{2\sec\theta - 1}$ **24.** $r = \dfrac{3\csc\theta}{\csc\theta - 1}$

En los problemas 25-36, convierta cada ecuación polar en una ecuación rectangular.

25. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$ **26.** $r = \dfrac{3}{1 - \text{sen}\,\theta}$ **27.** $r = \dfrac{8}{4 + 3\,\text{sen}\,\theta}$

28. $r = \dfrac{10}{5 + 4\cos\theta}$ **29.** $r = \dfrac{9}{3 - 6\cos\theta}$ **30.** $r = \dfrac{12}{4 + 8\,\text{sen}\,\theta}$

31. $r = \dfrac{8}{2 - \text{sen}\,\theta}$ **32.** $r = \dfrac{8}{2 + 4\cos\theta}$ **33.** $r(3 - 2\,\text{sen}\,\theta) = 6$

34. $r(2 - \cos\theta) = 2$ **35.** $r = \dfrac{6\sec\theta}{2\sec\theta - 1}$ **36.** $r = \dfrac{3\csc\theta}{\csc\theta - 1}$

En los problemas 37-42, encuentre una ecuación polar para cada cónica. En todas, el foco está en el polo.

37. $e = 1$; directriz paralela al eje polar a 1 unidad arriba del polo.

38. $e = 1$; directriz paralela al eje polar a 2 unidades abajo del polo.

39. $e = \dfrac{4}{5}$; directriz perpendicular al eje polar a 3 unidades a la izquierda del polo.

40. $e = \dfrac{2}{3}$; directriz paralela al eje polar a 3 unidades arriba del polo.

41. $e = 6$; directriz paralela al eje polar a 2 unidades abajo del polo.

42. $e = 5$; directriz perpendicular al eje polar a 5 unidades a la derecha del polo.

43. Deduzca la ecuación b) de la tabla 5:

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}$$

44. Deduzca la ecuación c) de la tabla 5:

$$r = \frac{ep}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$$

45. Deduzca la ecuación d) de la tabla 5:

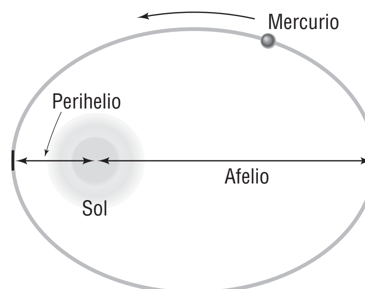
$$r = \frac{ep}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$$



46. Órbita de Mercurio El planeta Mercurio gira alrededor del Sol siguiendo una órbita elíptica dada de manera aproximada por:

$$r = \frac{(3.442)10^7}{1 - 0.206\cos\theta}$$

donde r se mide en millas y el Sol está en el polo. Encuentre la distancia de Mercurio al Sol en el *afelio* (a mayor distancia del Sol) y en el *perihelio* (a menor distancia del Sol). Observe la figura. Utilice el afelio y el perihelio para graficar la órbita de Mercurio utilizando una calculadora gráfica.



Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $r\cos\theta$; $r\,\text{sen}\,\theta$

2. polo

10.7 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Amplitud y periodo de gráficas sinusoidales (sección 6.6, p. 554)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 830.

OBJETIVOS
1. Graficar ecuaciones paramétricas
2. Encontrar una ecuación rectangular para una curva definida de forma paramétrica
3. Utilizar el tiempo como parámetro de las ecuaciones paramétricas
4. Encontrar ecuaciones paramétricas para curvas definidas por medio de ecuaciones rectangulares

Las ecuaciones con la forma $y = f(x)$, donde f es una función, tienen gráficas que se cortan a lo más una vez con cualquier recta vertical. Las gráficas de muchas de las cónicas y algunas otras, más complicadas, no tienen esta característica. Pero toda gráfica, como la gráfica de una función, es una colección de puntos (x, y) en el plano xy, es decir, es una curva plana. En esta sección se analiza otra manera de representar tales gráficas.

Sean $x = f(t)$ y $y = g(t)$, donde f y g son dos funciones cuyo dominio común es cualquier intervalo I. La colección de puntos definida por

$$(x, y) = (f(t), g(t))$$

se llama una **curva plana**. Las ecuaciones:

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

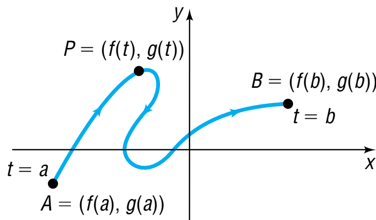
donde t está en I, se llaman **ecuaciones paramétricas** de la curva. La variable t se denomina **parámetro**.

1 Las ecuaciones paramétricas son especialmente útiles para describir el movimiento a lo largo de una curva. Suponiendo que una curva está definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad a \leq t \leq b$$

donde f y g están, cada una, definidas dentro de intervalo $a \leq t \leq b$. Para un valor dado de t, se puede encontrar el valor de $x = f(t)$ y de $y = g(t)$, obteniendo un punto (x, y) sobre la curva. De hecho, a medida que t varía dentro del intervalo desde $t = a$ hacia $t = b$, los valores sucesivos de t dan lugar a un movimiento dirigido a lo largo de la curva, es decir, siguen la curva en cierta dirección mediante la sucesión de puntos (x, y) correspondiente. Vea la figura 58. A medida que t varía de a hacia b, las fechas muestran la dirección u orientación, a lo largo de la curva.

Figura 58



EJEMPLO 1 Analizar una curva definida mediante ecuaciones paramétricas

Analice la curva definida por las ecuaciones paramétricas

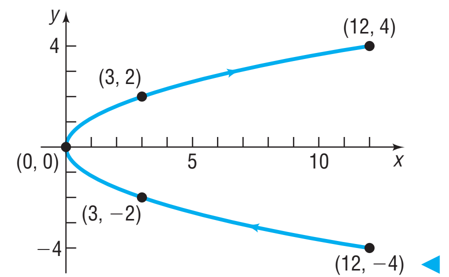
$$x = 3t^2, \qquad y = 2t, \qquad -2 \leq t \leq 2 \qquad \textbf{(1)}$$

Solución Para todo número t, $-2 \leq t \leq 2$, corresponde un número x y un número y. Por ejemplo, cuando $t = -2$, entonces $x = 12$ y $y = -4$. Cuando $t = -2$, entonces $x = 0$ y $y = 0$. De hecho, se podría establecer una tabla enumerando las diversas opciones del parámetro t y los valores correspondientes de x y y, como se muestra en la tabla 6. Al graficar esos puntos y unirlos con una curva suave se obtiene la curva de la figura 59. Las flechas de esta figura se usan para señalar la orientación.

Tabla 6

t	x	y	(x, y)
−2	12	−4	(12, −4)
−1	3	−2	(3, −2)
0	0	0	(0, 0)
1	3	2	(3, 2)
2	12	4	(12, 4)

Figura 59





COMENTARIO: La mayoría de las calculadoras gráficas tienen la capacidad para graficar ecuaciones paramétricas. Vea la sección 9 del apéndice. ■

2 La curva del ejemplo 1 debe ser familiar. Para identificarla con exactitud, se encuentra la ecuación rectangular correspondiente eliminando al parámetro t de las ecuaciones paramétricas incluidas en el ejemplo 1.

$$x = 3t^2, \qquad y = 2t, \qquad -2 \leq t \leq 2$$

Se observa que es fácil despejar t en $y = 2t$, con lo que se obtiene $t = \frac{y}{2}$, se sustituye esta expresión en la otra ecuación.

$$x = 3t^2 = 3\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{3y^2}{4}, \qquad -4 \leq y \leq 4$$

$$\uparrow \; t = \frac{y}{2}$$

Esta ecuación $x = \frac{3y^2}{4}$, es la ecuación de una parábola con vértice en $(0, 0)$ y eje de simetría a lo largo del eje x.

Observe que la curva paramétrica definida por la ecuación (1) y que aparece en la figura 59, sólo es parte de la parábola $x = \frac{3y^2}{4}$. Por lo general, la gráfica de la ecuación rectangular que se obtiene al eliminar el parámetro contiene más puntos que la curva paramétrica. Por lo tanto, debe ser cuidadoso al trazar a mano una curva paramétrica después de eliminar el parámetro. Aun así, a veces el proceso de eliminación del parámetro t de una curva paramétrica, con el fin de identificarla con exactitud, es un método preferible que simplemente trazar los puntos. Sin embargo, el proceso de eliminación a veces requiere un poco de ingenio.

EJEMPLO 2 Encontrar la ecuación rectangular de una curva definida de manera paramétrica

Encuentre la ecuación rectangular de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = a\cos t \qquad y = a \operatorname{sen} t$$

donde $a > 0$ es una constante. Grafique esta curva e indique su orientación.

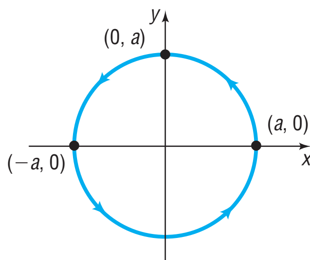
Solución En las ecuaciones paramétricas, la presencia de senos y cosenos sugiere que se utilice una identidad pitagórica. De hecho, como

$$\cos t = \frac{x}{a} \qquad \operatorname{sen} t = \frac{y}{a}$$

se encuentra que

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = a^2$$

Figura 60



La curva es un círculo con centro en $(0, 0)$ y radio a. A medida que el parámetro t aumenta, digamos de $t = 0$ [el punto $(a, 0)$] a $t = \frac{\pi}{2}$ [el punto $(0, a)$] a $t = \pi$ [el punto $(-a, 0)$], se ve que los puntos correspondientes se trazan en dirección opuesta a las manecillas del reloj alrededor del círculo. En la figura 60 se indica la orientación. ◀


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 7 Y 19.

Ahora, analícese más a fondo la curva del ejemplo 2. El dominio de cada una de las ecuaciones paramétricas es $-\infty < t < \infty$. De tal modo, en realidad la gráfica de la figura 60 se repite cada vez que t aumenta en 2π.

Si se quiere que la curva consista de una revolución exacta en sentido opuesto a las manecillas del reloj, se escribe

$$x = a\cos t, \qquad y = a \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Esta curva comienza en $t = 0$ [el punto $(a, 0)$] y, siguiendo en sentido opuesto a las manecillas del reloj alrededor del círculo, termina en $t = 2\pi$ [que también es el punto $(a, 0)$].

Si se quiere que la curva consista de 3 revoluciones exactas en sentido opuesto a las manecillas del reloj, se podría escribir

$$x = a\cos t, \qquad y = a \operatorname{sen} t, \qquad -2\pi \le t \le 4\pi$$

o

$$x = a\cos t, \qquad y = a \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 6\pi$$

o

$$x = a\cos t, \qquad y = a \operatorname{sen} t, \qquad 2\pi \le t \le 8\pi$$

EJEMPLO 3 Describir ecuaciones paramétricas

Encuentre las ecuaciones rectangulares y grafique las curvas definidas por las siguientes ecuaciones paramétricas.

a) $x = a\cos t, \quad y = a\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi, \quad a > 0$

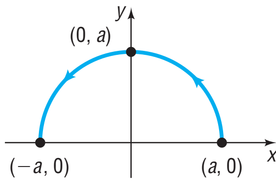
b) $x = -a\operatorname{sen} t, \quad y = -a\cos t, \quad 0 \le t \le \pi, \quad a > 0$

Solución a) Se elimina el parámetro t utilizando una identidad pitagórica.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Figura 61



La curva definida por estas ecuaciones paramétricas es un círculo, con radio a y centro en $(0, 0)$. El círculo comienza en el punto $(a, 0)$, $t = 0$, pasa por el punto $(0, a)$, $t = \frac{\pi}{2}$; y termina en el punto $(-a, 0)$, $t = \pi$. Las ecuaciones paramétricas definen un semicírculo superior de radio a con una orientación en sentido opuesto a las manecillas del reloj. Vea la figura 61. La ecuación rectangular es

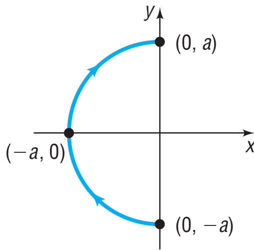
$$y = a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \qquad -a \le x \le a$$

b) Se elimina el parámetro t utilizando una identidad pitagórica.

$$\left(\frac{x}{-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{-a}\right)^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Figura 62



La curva definida por estas ecuaciones paramétricas es un círculo, con radio a y centro en $(0, 0)$. Este círculo comienza en el punto $(0, -a)$, $t = 0$, pasa por el punto $(-a, 0)$, $t = \frac{\pi}{2}$; y termina en el punto $(0, a)$, $t = \pi$. Las ecuaciones paramétricas definen un semicírculo a la izquierda, de radio a con una orientación en el sentido de las manecillas del reloj. Vea la figura 62. La ecuación rectangular es

$$x = -a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}, \qquad -a \le y \le a$$



En el ejemplo 3 se ilustra la versatilidad de las ecuaciones paramétricas para reemplazar ecuaciones rectangulares complicadas, a la par que proveen información adicional respecto de la orientación. Estas características hacen que las ecuaciones paramétricas sean muy útiles en aplicaciones tales como el tiro parabólico.

Para ver el concepto



Grafique $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ para $0 \le t \le 2\pi$. Compare el resultado con la figura 60. Grafique $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ para $0 \le t \le \pi$. Compare el resultado con la figura 61. Grafique $x = -\operatorname{sen} t$, $y = -\cos t$ para $0 \le t \le \pi$. Compare el resultado con la figura 62.

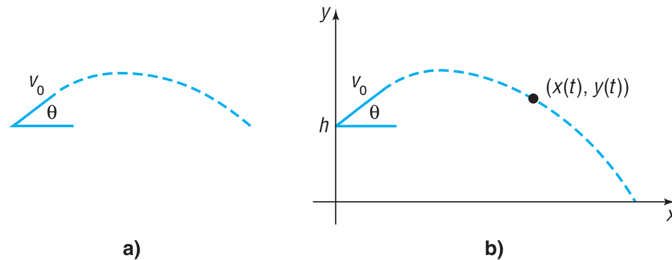
El tiempo como parámetro: tiro parabólico; representación de movimiento

3 Si se considera al parámetro t como el tiempo, entonces las ecuaciones paramétricas $x = f(x)$ y $y = g(t)$ de una curva C especifican como varían con el tiempo las coordenadas x y y de un punto en movimiento.

Por ejemplo, se utilizan ecuaciones paramétricas para describir el movimiento de un objeto, a veces conocido como **movimiento curvilíneo**. Utilizando ecuaciones paramétricas, no sólo se especifica por donde viaja el objeto, es decir, su ubicación (x, y), también se especifica cuándo llega un punto, es decir, el tiempo t.

Cuando un objeto viaja impulsado hacia arriba con una inclinación θ, con respecto a la horizontal y una velocidad inicial v_0, el movimiento resultante se denomina **tiro parabólico**. Vea la figura 63*a*).

Figura 63





Utilizando cálculo, se demuestra que las ecuaciones paramétricas de la ruta de un proyectil disparado con una inclinación θ con respecto a la horizontal, una velocidad inicial v_0 y a una altura h sobre la horizontal son:

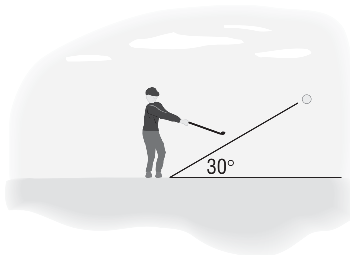
$$x = (v_0 \cos\theta)t \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t + h \qquad \textbf{(2)}$$

donde t es el tiempo y g es la constante de aceleración de la gravedad (aproximadamente 32 pies/seg/seg o 9.8 m/seg/seg). Vea la figura 63*b*).

EJEMPLO 4 Tiro parabólico

Suponiendo que Jim golpea una pelota de golf con una velocidad inicial de 150 pies por segundo y un ángulo de 30° respecto de la horizontal. Vea la figura 64.

Figura 64



a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen la posición de la pelota en función del tiempo.

b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

c) ¿Cuándo alcanza su altura máxima? Determine la altura máxima de la pelota.

d) Determine qué distancia viaja la pelota por el aire.

e) Use una calculadora gráfica para representar el movimiento de la pelota de golf, graficando al mismo tiempo las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

Solución a) Se tiene $v_0 = 150, \theta = 30°, h = 0$ (la pelota está sobre el suelo), y $g = 32$ (ya que las unidades están en pies y segundos). Si se sustituyen estos valores en las ecuaciones (2), se encuentra que

$$x = (v_0 \cos\theta)t = (150 \cos 30°)t = 75\sqrt{3}\,t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t + h \quad = -\frac{1}{2}(32)t^2 + (150 \operatorname{sen} 30°)t + 0$$

$$= -16t^2 + 75t$$

b) Para determinar el tiempo que la pelota permanece en el aire, se resuelve la ecuación $y = 0$.

$$-16t^2 + 75t = 0$$

$$t(-16t + 75) = 0$$

$$t = 0 \text{ seg.} \quad \text{o} \quad t = \frac{75}{16} = 4.6875 \text{ seg.}$$

La pelota golpeará el suelo después de 4.6875 segundos.

c) Observamos que la altura y de la pelota es una función cuadrática de t, por lo que su altura máxima se encuentra determinando el vértice de $y = -16t^2 + 75t$. El valor de t en el vértice es:

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-75}{-32} = 2.34375 \text{ seg.}$$

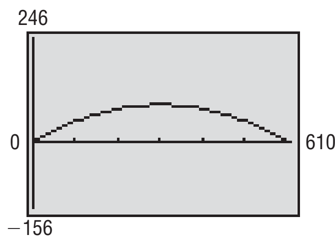
La pelota alcanza su altura máxima después de 2.34375 segundos. La altura máxima de la pelota se calcula evaluando la función y con $t =$ 2.34375 segundos.

$$\text{Altura máxima} = -16(2.34375)^2 + (75)2.34375 \approx 87.89 \text{ pies}$$

d) Puesto que la pelota está en el aire durante 4.6875 segundos, viaja una distancia horizontal de

$$x = \left(75\sqrt{3}\right)4.6875 \approx 608.92 \text{ pies}$$

Figura 65





e) Se introducen las ecuaciones del inciso *a*) en una calculadora gráfica, con Tmín = 0, Tmáx = 4.7, y Tstep = 0.1. Se utiliza ZOOM-SQUARE para evitar cualquier distorsión del ángulo de elevación. Vea la figura 65. ◄

Exploración

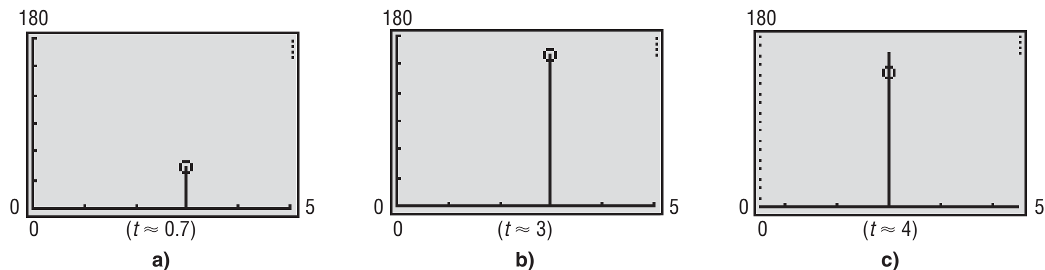


Represente el movimiento de una pelota disparada directamente hacia arriba, con una velocidad inicial de 100 pies por segundo, desde una altura de 5 pies por encima del suelo. Utilice el modo paramétrico con Tmín = 0, Tmáx = 6.5, Tstep = 0.1, Xmín = 0, Xmáx = 5, Ymín = 0 y Ymáx = 180. ¿Qué sucede con la velocidad con la que se traza la gráfica mientras la pelota va hacia arriba y luego vuelve hacia abajo? ¿Cómo interpreta esto físicamente? Repita el experimento utilizando otros valores para Tstep. ¿Cómo influye esto en el experimento

[**Sugerencias:** En las ecuaciones del tiro parabólico, sea $\theta = 90°$, $v_0 = 100$, $h = 5$, y $g = 32$. Se utiliza $x = 3$ en lugar de $x = 0$ para observar mejor el movimiento vertical].

RESULTADO Vea la figura 66. En la figura 66*a*), la pelota va hacia arriba. En la figura 66*b*), la pelota está cerca de llegar al punto más alto. Por último, en la figura 66c), la pelota está bajando.

Figura 66



Observe que mientras la pelota sube, su velocidad disminuye, hasta que en el punto más alto es igual a cero. Luego la velocidad aumenta mientras la pelota baja.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 33.

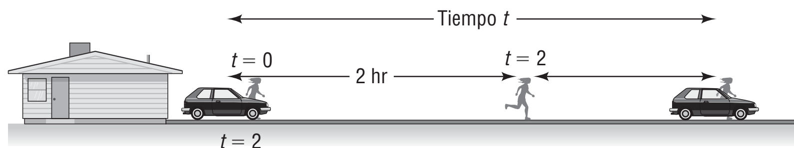
También se puede emplear una calculadora gráfica para representar otros tipos de movimiento. Desarróllese de nuevo el ejemplo 5 de la sección 1.7.



EJEMPLO 5 Representación de movimiento

Tanya, corredora de fondo, trota con una velocidad promedio de 8 millas por hora. Dos horas después de que Tanya sale de su casa, usted lo hace en su automóvil y sigue la misma ruta. Si su velocidad promedio es de 40 millas por hora, ¿cuánto tiempo pasará antes de que alcance a Tanya? Vea la figura 67. Utilice la representación de ambos movimientos para verificar su respuesta.

Figura 67



Solución Se comienza con dos conjuntos de ecuaciones paramétricas: uno para describir el movimiento de Tanya y otro para describir el movimiento del automóvil. Se selecciona el tiempo $t = 0$ para cuando Tanya sale de casa. Si se selecciona $y_1 = 2$ como la ruta de Tanya, entonces se puede utilizar $y_2 = 4$ como la ruta paralela del automóvil. Las distancias horizontales recorridas en el tiempo t (distancia = velocidad × tiempo) son:

$$\text{Tanya: } x_1 = 8t \qquad \text{Automóvil: } x_2 = 40(t - 2)$$

El automóvil alcanza a Tanya cuando $x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned} 8t &= 40(t - 2) \\ 8t &= 40t - 80 \\ -32t &= -80 \\ t &= \frac{-80}{-32} = 2.5 \end{aligned}$$

El automóvil alcanza a Tanya 2.5 horas después de que ella salió de la casa.

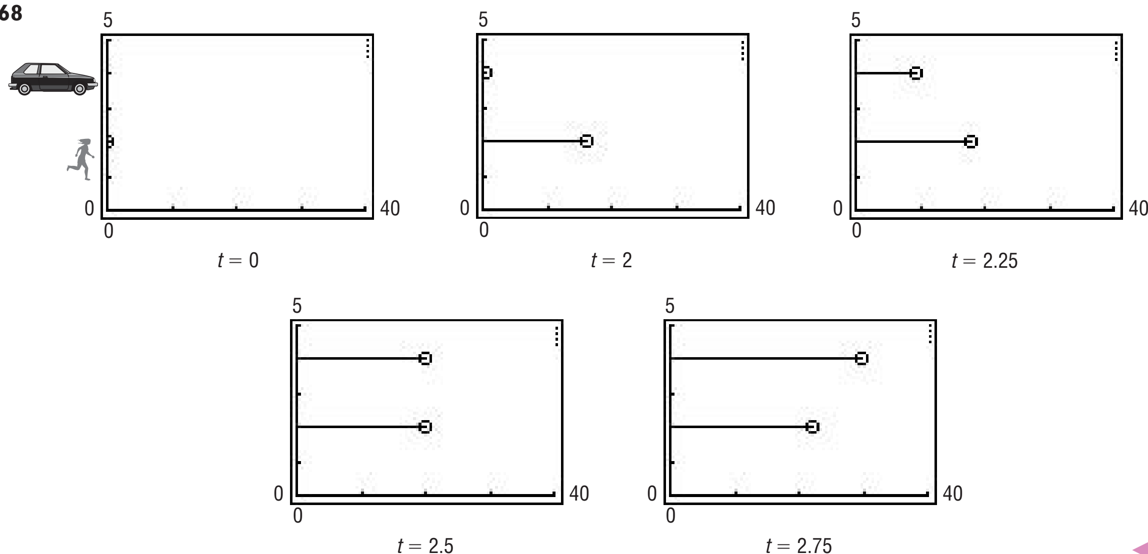
En modo paramétrico, con Tstep = 0.01, se grafica al mismo tiempo:

$$\text{Tanya: } \begin{aligned} x_1 &= 8t \\ y_1 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{Automóvil: } \begin{aligned} x_2 &= 40(t - 2) \\ y_2 &= 4 \end{aligned}$$

para $0 \le t \le 3$.

En la figura 68 se muestran las posiciones relativas de Tanya y del automóvil para $t = 0, t = 2, t = 2.25, t = 2.5$, y $t = 2.75$.

Figura 68



Encontrar ecuaciones paramétricas

Ahora se abordará la interrogante de cómo encontrar las ecuaciones paramétricas de una curva dada.

4 Si una curva está definida por la ecuación $y = f(x)$, donde f es una función, una manera de encontrar las ecuaciones paramétricas consiste en hacer $x = t$. Entonces $y = f(t)$ y

$$x = t, \quad y = f(t), \qquad t \text{ en el dominio de } f$$

son las ecuaciones paramétricas de la curva.

EJEMPLO 6 **Encontrar las ecuaciones paramétricas de una curva definida mediante una ecuación rectangular**

Encuentre las ecuaciones paramétricas de la ecuación $y = x^2 - 4$.

Solución Sea $x = t$. Entonces, las ecuaciones paramétricas son

$$x = t, \quad y = t^2 - 4, \qquad -\infty < t < \infty$$

Otro método menos evidente para el ejemplo 6 consiste en hacer $x = t^3$. Entonces, las ecuaciones paramétricas se convierten en:

$$x = t^3, \quad y = t^6 - 4, \qquad -\infty < t < \infty$$

Se debe tener cuidado al utilizar este procedimiento, ya que la sustitución de x debe ser una función que permita que x asuma todos los valores especificados por el dominio de f. Por ejemplo, hacer a $x = t^2$ de manera que $y = t^4 - 4$ no tiene como resultado las ecuaciones paramétricas de $y = x^2 - 4$, ya que sólo se obtienen los puntos para los que $x \geq 0$.

EJEMPLO 7 Encontrar las ecuaciones paramétricas para un objeto en movimiento

Encuentre las ecuaciones paramétricas para la elipse

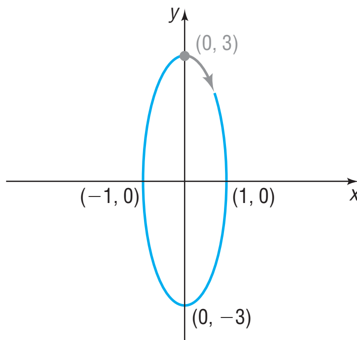
$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

donde el parámetro t es el tiempo (en segundos) y:

a) El movimiento alrededor de la elipse es en sentido de las manecillas del reloj, comienza en el punto $(0, 3)$ y transcurre 1 segundo para completar una revolución.

b) El movimiento alrededor de la elipse ese sentido opuesto a las manecillas del reloj, comienza en el punto $(1, 0)$, y transcurren 2 segundos para completar una revolución.

Figura 69



Solución a) Vea la figura 69. Como el movimiento comienza en el punto $(0, 3)$, se quiere que $x = 0$ y $y = 3$ cuando $t = 0$. Además, puesto que la ecuación dada es la de una elipse, se comienza por hacer

$$x = \operatorname{sen}(\omega t) \qquad \frac{y}{3} = \cos(\omega t)$$

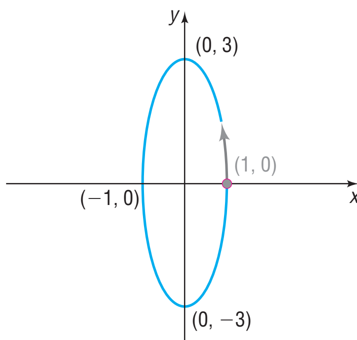
para alguna constante ω. Estas ecuaciones paramétricas satisfacen la ecuación de la elipse. Además, con esta opción, cuando $t = 0$, se tiene $x = 0$ y $y = 3$.

En cuanto al movimiento en el sentido de las manecillas del reloj, tiene que comenzar aumentando el valor de x y reduciendo el de y a medida que aumenta t. Esto requiere que $\omega > 0$. [¿Sabe usted por qué? Si $\omega > 0$, entonces $x = \operatorname{sen}(\omega t)$ es creciente cuando $t > 0$ es cercano a cero y $y = 3\cos(\omega t)$ es decreciente cuando $t > 0$ es cercano a cero]. Vea la parte más gruesa de la gráfica en la figura 69.

Por último, como 1 revolución tarda 1 segundo, el periodo $\frac{2\pi}{\omega} = 1$, de manera que $\omega = 2\pi$. Las ecuaciones paramétricas que satisfacen las condiciones establecidas son:

$$x = \operatorname{sen}(2\pi t), \quad y = 3\cos(2\pi t), \qquad 0 \le t \le 1 \tag{3}$$

Figura 70



b) Vea la figura 70. Como el movimiento comienza en el punto $(1, 0)$, se quiere que $x = 1$ y $y = 0$ cuando $t = 0$. Además, puesto que la ecuación dada es la de una elipse, se comienza por hacer

$$x = \cos(\omega t) \qquad \frac{y}{3} = \operatorname{sen}(\omega t)$$

para alguna constante ω. Estas ecuaciones paramétricas satisfacen la ecuación de la elipse. Además, con esta opción, cuando $t = 0$, tenemos $x = 1$ y $y = 0$.

En cuanto al movimiento en sentido opuesto al de las manecillas del reloj, tiene que comenzar desminuyendo el valor de x y aumentando el de y a medida que aumenta t. Esto requiere que $\omega > 0$. [¿Sabe usted por qué?] Por último, como 1 revolución tarda 2 segundos, el periodo es $\frac{2\pi}{\omega} = 2$, de manera que $\omega = \pi$. Las ecuaciones paramétricas que satisfacen las condiciones establecidas son:

$$x = \cos(\pi t), \quad y = 3\operatorname{sen}(\pi t), \qquad 0 \le t \le 2 \tag{4}$$

◀

Cualquiera de las ecuaciones (3) o (4) servirían como ecuación paramétrica para la elipse $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ dada en el ejemplo 7. La dirección

del movimiento, el punto de inicio y el de la duración de una revolución sólo sirven para ayudarnos a encontrar una representación paramétrica en particular.

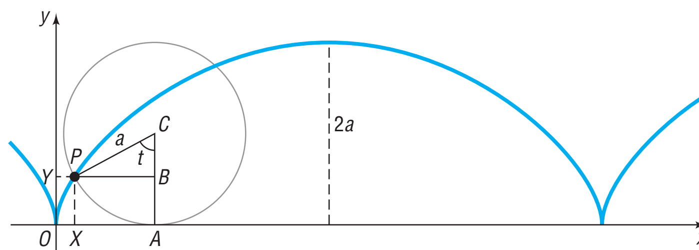

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 49.

Cicloide

Suponga que un círculo de radio a gira sobre una recta horizontal sin deslizarse. A medida que rueda a lo largo de la línea, un punto P del círculo trazará una curva llamada **cicloide** (vea la figura 71). Ahora se buscarán las ecuaciones paramétricas* para una cicloide.

Se comenzará con un círculo de radio a y se considerará que la línea fija sobre la que gira el círculo es el eje x. Sea el origen uno de los puntos en los que el punto P hace contacto con el eje x. En la figura 71 se ilustra la posición de dicho punto P luego de que el círculo ha girado un poco. El ángulo t (en radianes) mide al ángulo a través del giro del círculo.

Figura 71



Puesto que se estableció que no hay deslizamiento, se deduce que:

$$\text{Arc } AP = d(O, A)$$

La longitud del arco AP está dada por $s = r\theta$, donde $r = a$ y $\theta = t$ radianes. Entonces:

$$at = d(O, A) \qquad s = r\theta, \text{ donde } r = a \text{ y } \theta = t$$

La coordenada x del punto P es

$$d(O, X) = d(O, A) - d(X, A) = at - a \operatorname{sen} t = a(t - \operatorname{sen} t)$$

La coordenada y del punto P es igual a

$$d(O, Y) = d(A, C) - d(B, C) = a - a \cos t = a(1 - \cos t)$$

Las ecuaciones paramétricas de la cicloide son:

$$x = a(t - \operatorname{sen} t) \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad \textbf{(5)}$$

Exploración

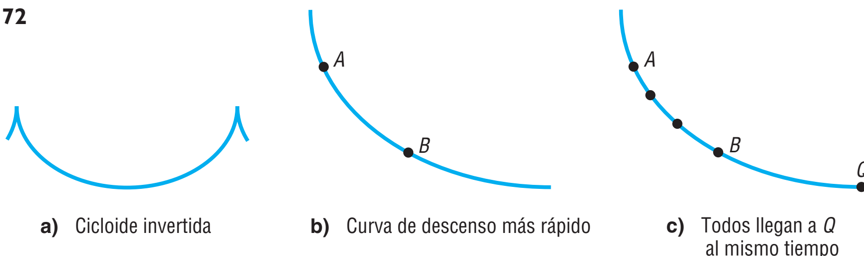
Grafique $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 3\pi$, utilizando su calculadora gráfica con $T\text{step} = \frac{\pi}{36}$ y pantalla cuadrada. Compare sus resultados con la figura 71.

*Todo intento de deducir la ecuación rectangular de una cicloide pronto demostrará lo complicado de esa tarea.

Aplicaciones en la mecánica

Si en la ecuación (5) a es negativa, se obtiene una cicloide invertida como la que se muestra en la figure 72a). La cicloide invertida aparece como resultado de algunas aplicaciones notables en el campo de la mecánica. Se mencionarán dos de ellas: la *braquistócrona* y la *tautócrona*.*

Figura 72

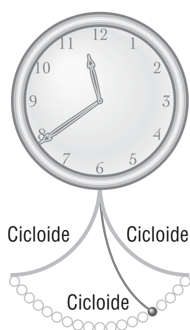


a) Cicloide invertida **b)** Curva de descenso más rápido **c)** Todos llegan a Q al mismo tiempo



La **braquistócrona** es la curva con descenso más rápido. Si a una partícula se le obliga a seguir una ruta desde el punto A hasta un punto B más bajo (y no en la misma línea vertical), y sólo actúa sobre ella la gravedad, el tiempo necesario para efectuar el descenso es menor si la ruta es una cicloide invertida. Vea la figura 72b). Este notable descubrimiento, que se atribuye a muchos matemáticos famosos (incluyendo a Johann Bernoulli y Blaise Pascal), fue un paso muy significativo para la constitución de la rama de las matemáticas conocida como *cálculo de variaciones*.

Figura 73



Para definir la **tautócrona**, sea Q el punto más bajo de una cicloide invertida. Si varias partículas, colocadas en distintas posiciones sobre una cicloide invertida, comienzan a deslizarse por ella al mismo tiempo, llegarán al punto Q al mismo tiempo, como se muestra en la figura 72c). Christiaan Huygens (1629-1695), matemático, físico y astrónomo holandés, utilizó la propiedad tautócrona de la cicloide para construir un reloj cuyo péndulo se balanceaba a lo largo de una cicloide (vea la figura 73). Esto lo lograba colgando el péndulo de un cable delgado entre dos placas con forma de cicloides. En un reloj con este diseño, el periodo del péndulo es independiente de su amplitud.

*En griego, *braquistócrono* quiere decir el tiempo más corto y *tautócrono* significa mismo tiempo.

10.7 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. La función $f(x) = 3\,\text{sen}(4x)$ tiene una amplitud de __________ y un periodo de __________. (p. 554)

Conceptos y vocabulario

2. Sean $x = f(t)$ y $y = g(t)$, donde f y g son dos funciones cuyo dominio común es algún intervalo I. La colección de puntos definidos por $(x, y) = (f(t)$ y $g(t))$ se denomina __________ __________. La variable t se denomina __________.

3. Las ecuaciones paramétricas $x = 2\,\text{sen}\,t$, $y = 3\cos t$ definen un(a) __________.

4. Si un círculo rueda sobre una recta horizontal sin deslizarse, un punto P del círculo trazará una curva llamada __________.

5. *Falso o verdadero:* las ecuaciones paramétricas que definen una curva son únicas.

6. *Falso o verdadero:* las curvas definidas empleando ecuaciones paramétricas tienen una orientación.

Ejercicios

En los problemas 7-26, grafique la curva a la que corresponden las ecuaciones paramétricas dadas y muestre su orientación. Encuentre la ecuación rectangular de cada curva.

7. $x = 3t + 2, \quad y = t + 1; \quad 0 \le t \le 4$

8. $x = t - 3, \quad y = 2t + 4; \quad 0 \le t \le 2$

9. $x = t + 2, \quad y = \sqrt{t}; \quad t \ge 0$

10. $x = \sqrt{2t}, \quad y = 4t; \quad t \ge 0$

11. $x = t^2 + 4, \quad y = t^2 - 4; \quad -\infty < t < \infty$

12. $x = \sqrt{t} + 4, \quad y = \sqrt{t} - 4; \quad t \ge 0$

13. $x = 3t^2, \quad y = t + 1; \quad -\infty < t < \infty$

14. $x = 2t - 4, \quad y = 4t^2; \quad -\infty < t < \infty$

15. $x = 2e^t, \quad y = 1 + e^t; \quad t \ge 0$

16. $x = e^t, \quad y = e^{-t}; \quad t \ge 0$

17. $x = \sqrt{t}, \quad y = t^{3/2}; \quad t \ge 0$

18. $x = t^{3/2} + 1, \quad y = \sqrt{t}; \quad t \ge 0$

19. $x = 2\cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

20. $x = 2\cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le \pi$

21. $x = 2\cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t; \quad -\pi \le t \le 0$

22. $x = 2\cos t, \quad y = \operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

23. $x = \sec t, \quad y = \tan t; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

24. $x = \csc t, \quad y = \cot t; \quad \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$

25. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \cos^2 t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

26. $x = t^2, \quad y = \ln t; \quad t > 0$

---

27. Tiro parabólico Bob lanza una pelota directamente hacia arriba, con una velocidad inicial de 50 pies por segundo, desde una altura de 6 pies.

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen el movimiento de la pelota en función del tiempo.
b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?
c) ¿Cuándo alcanza su altura máxima? Determine la altura máxima de la pelota.
d) Represente el movimiento de la pelota de golf graficando las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

28. Tiro parabólico Alice lanza una pelota hacia arriba, con una velocidad inicial de 40 pies por segundo, desde una altura de 5 pies.

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen el movimiento de la pelota en función del tiempo.
b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?
c) ¿Cuándo alcanza su altura máxima? Determine la altura máxima de la pelota.
d) Represente el movimiento de la pelota de golf graficando las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

29. Alcanzar al tren El tren de Bill sale a las 8:06 y acelera con un ritmo de 2 metros por segundo. Bill, que puede correr a 5 metros por segundo, llega al andén de la estación 5 segundos después de que el tren partió.

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen el movimiento del tren y el de Bill en función del tiempo.

[**Sugerencia**: La posición s en el tiempo t de un objeto con aceleración es $s = \frac{1}{2}at^2$].

b) Determine de manera algebraica si Bill alcanzará al tren. De ser así, ¿cuándo?
c) Represente el movimiento del tren y de Bill, graficando al mismo tiempo las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

30. Alcanzar al autobús El autobús de Jodi sale a las 5:30 y acelera con un ritmo de 3 metros por segundo. Jodi, que puede correr a 5 metros por segundo, llega la parada del autobús 2 segundos después de que el suyo partió.

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen el movimiento del autobús y el de Jodi en función del tiempo.

[**Sugerencia**: La posición s en el tiempo t de un objeto con aceleración es $s = \frac{1}{2}at^2$].

b) Determine de manera algebraica si Jodi alcanzará al autobús. De ser así, ¿cuándo?
c) Represente el movimiento del autobús y de Jodi, graficando al mismo tiempo las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

31. Tiro parabólico Nolan Ryan lanza una pelota de béisbol con una velocidad inicial de 145 pies por segundo y un ángulo de 20° respecto de la horizontal. La pelota deja la mano de Ryan a una altura de 5 pies.

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen la posición de la pelota en función del tiempo.
b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?
c) ¿Cuándo alcanza su altura máxima? Determine la altura máxima de la pelota.
d) Determine qué distancia viajó la pelota.
e) Use una calculadora gráfica para graficar al mismo tiempo las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

32. Tiro parabólico Mark McGwire batea una pelota de béisbol con una velocidad inicial de 180 pies por segundo y un ángulo de 40° respecto de la horizontal. La pelota recibió el golpe a 3 pies por encima del suelo.

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen la posición de la pelota en función del tiempo.
b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?
c) ¿Cuándo alcanza su altura máxima? Determine la altura máxima de la pelota.
d) Determine qué distancia viajó la pelota.
e) Use una calculadora gráfica para graficar al mismo tiempo las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

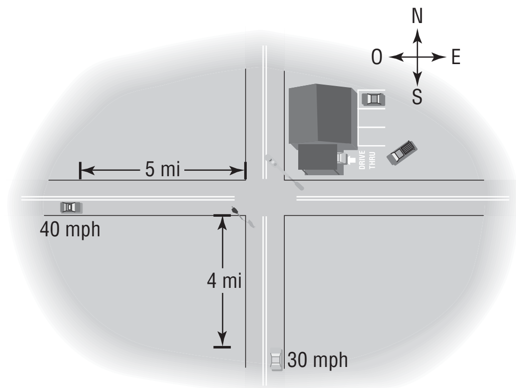
33. Tiro parabólico Desde un acantilado de 300 metros de altura, Adam lanza una pelota de tenis con una velocidad inicial de 40 metros por segundo y un ángulo de 45° respecto de la horizontal.

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen la posición de la pelota en función del tiempo.
b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?
c) ¿Cuándo alcanza su altura máxima? Determine la altura máxima de la pelota.
d) Determine qué distancia viajó la pelota.
e) Use una calculadora gráfica para graficar al mismo tiempo las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

34. Tiro parabólico Desde un acantilado de 300 metros de altura ubicado en la Luna, Adam lanza una pelota de tenis con una velocidad inicial de 40 metros por segundo y un ángulo de 45° respecto de la horizontal (la gravedad de la Luna equivale a un sexto de la de la Tierra).

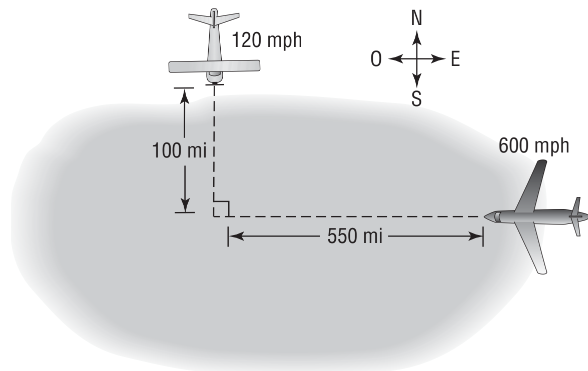
a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen la posición de la pelota en función del tiempo.
b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?
c) ¿Cuándo alcanza su altura máxima? Determine la altura máxima de la pelota.
d) Determine qué distancia viajó la pelota.
e) Use una calculadora gráfica para graficar al mismo tiempo las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

35. Movimiento uniforme Un automóvil compacto (que va hacia el este a 40 mph) y uno de lujo (que va hacia el norte a 30 mph) se dirigen hacia el mismo crucero. Cuando el automóvil compacto está a 5 millas del crucero, el de lujo está a 4 millas. Observe la figura.



a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen el movimiento de los automóviles compacto y de lujo.
b) Encuentre una fórmula para la distancia entre ambos automóviles en función del tiempo.
c) Grafique la función del inciso *b*) empleando una calculadora gráfica.
d) ¿Cuál es la distancia mínima entre los automóviles? ¿Cuándo están más cerca?
e) Represente el movimiento de los automóviles, graficando al mismo tiempo las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

36. Movimiento uniforme Una avioneta (que va hacia el sur a 120 mph) y un avión de pasajeros (que va hacia el oeste a 660 mph) vuelan hacia el mismo punto a la misma altura. La avioneta está a 100 millas del punto en el que se cruzan los patrones de vuelo y el avión está a 550 millas de dicho punto. Observe la figura.



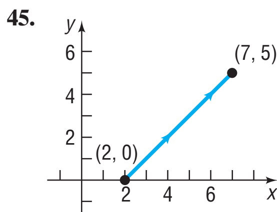
a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen el movimiento de la avioneta y el avión.
b) Encuentre una fórmula para la distancia entre ambas aeronaves en función del tiempo.
c) Grafique la función del inciso *b*) empleando una calculadora gráfica.
d) ¿Cuál es la distancia mínima entre los aviones? ¿Cuándo están más cerca?
e) Represente el movimiento de los aviones graficando al mismo tiempo las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

En los problemas 37-44, encuentre dos ecuaciones paramétricas distintas para cada ecuación rectangular.

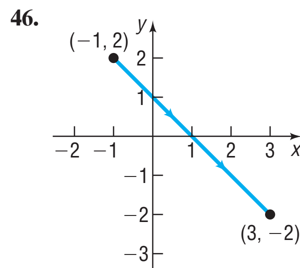
37. $y = 4x - 1$
38. $y = -8x + 3$
39. $y = x^2 + 1$
40. $y = -2x^2 + 1$
41. $y = x^3$
42. $y = x^4 + 1$
43. $x = y^{3/2}$
44. $x = \sqrt{y}$

En los problemas 45-48, encuentre las ecuaciones paramétricas que definen a la curva.

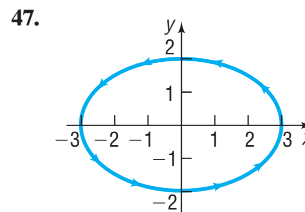
45.



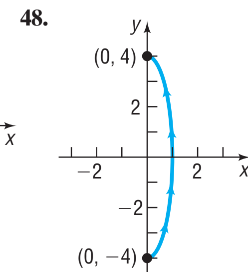
46.



47.



48.



En los problemas 49-52, encuentre las ecuaciones paramétricas para un objeto que se mueve por la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ *con el movimiento que se describe.*

49. El movimiento comienza en $(2, 0)$, es en el sentido de las manecillas del reloj y transcurren 2 segundos para completar una revolución.

50. El movimiento comienza en $(0, 3)$, es en sentido opuesto al de las manecillas del reloj y transcurre 1 segundo para completar una revolución.

51. El movimiento comienza en $(0, 3)$, es el sentido de las manecillas del reloj y transcurre 1 segundo para completar una revolución.

52. El movimiento comienza en $(2, 0)$, es en sentido opuesto al de las manecillas del reloj y transcurren 3 segundos para completar una revolución.

En los problemas 53-54, se encuentran las ecuaciones paramétricas de cuatro curvas. Grafique cada una de ellas, indicando la orientación.

53. C_1: $x = t, \quad y = t^2; \quad -4 \le t \le 4$
C_2: $x = \cos t, \quad y = 1 - \operatorname{sen}^2 t; \quad 0 \le t \le \pi$
C_3: $x = e^t, \quad y = e^{2t}; \quad 0 \le t \le \ln 4$
C_4: $x = \sqrt{t}, \quad y = t; \quad 0 \le t \le 16$

54. C_1: $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}; \quad -1 \le t \le 1$
C_2: $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t; \quad 0 \le t \le 2\pi$
C_3: $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le 2\pi$
C_4: $x = \sqrt{1 - t^2}, \quad y = t; \quad -1 \le t \le 1$

---

55. Demuestre que las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son:

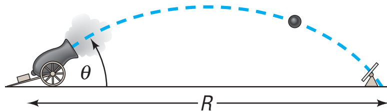
$$x = (x_2 - x_1)t + x_1$$
$$y = (y_2 - y_1)t + y_1, \quad -\infty < t < \infty$$

¿Cuál es la orientación de esta recta?

56. Tiro parabólico Las siguientes ecuaciones paramétricas describen la posición de un proyectil disparado con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo y un ángulo θ respecto de la horizontal, una vez transcurridos t segundos:

$$x = (v_0 \cos \theta)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - 16t^2$$

Vea la siguiente ilustración.

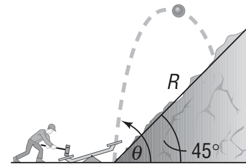


a) Encuentre la ecuación rectangular de la trayectoria e identifique la curva.

b) Demuestre que el proyectil golpea el suelo $(y = 0)$ cuando $t = \frac{1}{16} v_0 \operatorname{sen} \theta$.

c) ¿Qué distancia (horizontal) recorrió el proyectil hasta golpear el suelo? En otras palabras, encuentre el alcance R.

d) Encuentre el tiempo t en el que $x = y$. Después, encuentre la distancia horizontal x y la distancia vertical y recorridas por el proyectil en ese momento. Luego, calcule $\sqrt{x^2 + y^2}$. Ésta es la distancia R, el alcance, que recorre el proyectil sobre un plano inclinado de 45° respecto de la horizontal $(x = y)$. Vea la siguiente ilustración. (Observe también el problema 83 del ejercicio 7.5).



En los problemas 57-60, utilice una calculadora gráfica para trazar la curva definida por las ecuaciones paramétricas indicadas.

57. $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t \cos t$

58. $x = \operatorname{sen} t + \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t - \cos t$

59. $x = 4 \operatorname{sen} t - 2 \operatorname{sen}(2t)$
$y = 4 \cos t - 2 \cos(2t)$

60. $x = 4 \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen}(2t)$
$y = 4 \cos t + 2 \cos(2t)$

---

61. Hipocicloide La hipocicloide es la curva definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = \cos^3 t, \quad y(t) = \operatorname{sen}^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

a) Grafique la hipocicloide empleando una calculadora gráfica.

b) Encuentre las ecuaciones rectangulares de la hipocicloide.

62. En el problema 61, graficamos la hipocicloide. Ahora grafique las ecuaciones rectangulares de la hipocicloide. ¿Obtuvo una gráfica completa? Si no es así, experimente hasta lograrlo.

63. Observe las curvas llamadas *hipocicloide* y *epicicloide*. Elabore un informe sobre sus hallazgos. Cerciórese de incluir comparaciones con la cicloide.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. 3; $\frac{\pi}{2}$

Repaso del capítulo

Conceptos para recordar

Ecuaciones

Parábola	Vea las tablas 1 y 2 (pp. 773 y 775).	
Elipse	Vea la tabla 3 (p. 786).	
Hipérbola	Vea la tabla 4 (p. 799).	
Ecuación general de una cónica (p. 812)	$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	Parábola si $B^2 - 4AC = 0$ Elipse (o círculo) si $B^2 - 4AC < 0$ Hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$
Ecuaciones polares de una cónica con foco en el polo	Vea la tabla 5 (p. 817).	
Ecuaciones paramétricas de una curva (p. 820)	$x = f(t), y = g(t)$, t es el parámetro	

Definiciones

Parábola (p. 771)	Conjunto de puntos P en el plano para los que $d(F, P) = d(P, D)$, donde F es el foco y D la directriz	
Elipse (p. 781)	Conjunto de los puntos P del plano en los que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (focos) es constante	
Hipérbola (p. 791)	Conjunto de los puntos P del plano en los que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (focos) es constante	
Cónica en coordenadas polares (p. 814)	$\dfrac{d(F, P)}{d(P, D)} = e$	Parábola si $e = 1$ Elipse si $e < 1$ Hipérbola si $e > 1$

Fórmulas

Fórmulas de rotación (p. 807)	$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$ $y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$
Ángulo θ de rotación que elimina al término $x'y'$ (p. 809)	$\cot(2\theta) = \dfrac{A - C}{B}, \quad 0° < \theta < 90°$

Objetivos

Sección		Usted debe ser capaz de . . .	Ejercicios de repaso
10.1	1	Aprender los nombres de las cónicas (p. 770)	1–20
10.2	1	Encontrar la ecuación de una parábola (p. 771)	21, 24
	2	Graficar parábolas (p. 772)	21, 24
	3	Analizar la ecuación de una parábola (p. 773)	1, 2
	4	Trabajar con parábolas con vértice en (h, k) (p. 775)	7, 11, 12, 17, 18, 27, 30
	5	Resolver problemas aplicados que incluyan parábolas (p. 776)	77, 78
10.3	1	Encontrar la ecuación de una elipse (p. 781)	22, 25
	2	Graficar elipses (p. 782)	22, 25
	3	Analizar la ecuación de una elipse (p. 784)	5, 6, 10
	4	Trabajar con elipses con centro en (h, k) (p. 786)	14–16, 19, 28, 31
	5	Resolver problemas de aplicación que incluyan elipses (p. 787)	79, 80

10.4	1	Encontrar la ecuación de una hipérbola (p. 92)	23, 26
	2	Graficar hipérbolas (p. 93)	23, 26
	3	Analizar la ecuación de una hipérbola (p. 794)	3, 4, 8, 9
	4	Encontrar las asíntotas de una hipérbola (p. 97)	3, 4, 8, 9
	5	Trabajar con hipérbolas con centro en (h, k) (p. 799)	13, 20, 29, 32–36
	6	Resolver problemas de aplicación que incluyan hipérbolas (p. 801)	81
10.5	1	Identificar una cónica (p. 806)	37–40
	2	Utilizar la rotación de los ejes para transformar ecuaciones (p. 807)	47–52
	3	Analizar una ecuación utilizando la rotación de ejes (p. 809)	47–52
	4	Identificar cónicas sin rotación de los ejes (p. 811)	41–46
10.6	1	Analizar y graficar ecuaciones polares de cónicas (p. 814)	53–58
	2	Convertir la ecuación polar de una cónica en una ecuación rectangular (p.818)	59–62
10.7	1	Graficar ecuaciones paramétricas (p. 821)	63–68
	2	Encontrar una ecuación rectangular para una curva definida de manera paramétrica (p. 821)	63–68
	3	Utilizar el tiempo como parámetro de las ecuaciones paramétricas (p. 824)	82–83
	4	Encontrar ecuaciones paramétricas para curvas definidas por medio de ecuaciones rectangulares (p. 827)	69–72

Ejercicios de repaso (*Un asterisco en el número de un problema indica que el autor lo sugiere para un examen de práctica*).

En los problemas 1-20, identifique cada ecuación. Si es una parábola, encuentre vértice, foco y directriz; si es una elipse, encuentre centro, vértices y focos; si es una hipérbola, encuentre centro, vértices, focos y asíntotas.

1. $y^2 = -16x$

2. $16x^2 = y$

3. $\dfrac{x^2}{25} - y^2 = 1$

4. $\dfrac{y^2}{25} - x^2 = 1$

5. $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{16} = 1$

6. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

7. $x^2 + 4y = 4$

8. $3y^2 - x^2 = 9$

9. $4x^2 - y^2 = 8$

10. $9x^2 + 4y^2 = 36$

11. $x^2 - 4x = 2y$

12. $2y^2 - 4y = x - 2$

13. $y^2 - 4y - 4x^2 + 8x = 4$

14. $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$

15. $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y = 11$

16. $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 11$

17. $4x^2 - 16x + 16y + 32 = 0$

18. $4y^2 + 3x - 16y + 19 = 0$

19. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y = 23$

20. $x^2 - y^2 - 2x - 2y = 1$

En los problemas 21-36, encuentre una ecuación para la cónica descrita. Grafique la ecuación.

21. Parábola; foco en $(-2, 0)$; directriz la recta $x = 2$

22. Elipse; centro en $(0, 0)$; foco en $(0, 3)$; vértice en $(0, 5)$

23. Hipérbola; centro en $(0, 0)$; foco en $(0, 4)$; vértice en $(0, -2)$

24. Parábola; vértice en $(-0, 0)$; directriz la recta $y = -3$

25. Elipse; focos en $(-3, 0)$ y $(3, 0)$; vértice en $(4, 0)$

26. Hipérbola; vértices en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$; foco en $(4, 0)$

27. Parábola; vértice en $(2, -3)$; foco en $(2, -4)$

28. Elipse; centro en $(-1, 2)$; foco en $(0, 2)$; vértice en $(2, 2)$

29. Hipérbola; centro en $(-2, -3)$; foco en $(-4, -3)$ vértice en $(-3, -3)$

30. Parábola; foco en $(3, 6)$; directriz la recta $y = 8$

31. Elipse; focos en $(-4, 2)$ y $(-4, 8)$; vértice en $(-4, 10)$

32. Hipérbola; vértices en $(-3, 3)$ y $(5, 3)$; foco en $(7, 3)$

33. Centro en $(-1, 2)$; $a = 3$; $c = 4$; eje transversal paralelo al eje y.

34. Centro en $(4, -2)$; $a = 1$; $c = 4$; eje transversal paralelo al eje x.

35. Vértices en $(0, 1)$ y $(6, 1)$; asíntota la recta $3y + 2x = 9$

36. Vértices en $(4, 0)$ y $(4, 4)$; asíntota la recta $y + 2x = 10$

En los problemas 37-46, identifique cada cónica sin completar los cuadrados ni aplicar la rotación de los ejes.

37. $y^2 + 4x + 3y - 8 = 0$

38. $2x^2 - y + 8x = 0$

39. $x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$

40. $x^2 - 8y^2 - x - 2y = 0$

***41.** $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 8x + 12y = 0$

42. $4x^2 + 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x + 16\sqrt{5}y = 0$

43. $4x^2 + 10xy + 4y^2 - 9 = 0$

44. $4x^2 - 10xy + 4y^2 - 9 = 0$

45. $x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$

46. $4x^2 + 12xy - 10y^2 + x + y - 10 = 0$

En los problemas 47-52, gire los ejes de manera que la nueva ecuación no contenga un término xy. Analice y grafique la nueva ecuación.

47. $2x^2 + 5xy + 2y^2 - \dfrac{9}{2} = 0$

48. $2x^2 - 5xy + 2y^2 - \dfrac{9}{2} = 0$

***49.** $6x^2 + 4xy + 9y^2 - 20 = 0$

50. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 16\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y = 0$

51. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 12x + 8y = 0$

52. $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 80x + 60y = 0$

En los problemas 53-58, identifique y grafique la cónica que representa cada ecuación polar.

53. $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$

54. $r = \dfrac{6}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

***55.** $r = \dfrac{6}{2 - \operatorname{sen}\theta}$

56. $r = \dfrac{2}{3 + 2\cos\theta}$

57. $r = \dfrac{8}{4 + 8\cos\theta}$

58. $r = \dfrac{10}{5 + 20\operatorname{sen}\theta}$

En los problemas 59-62, convierta cada ecuación polar en una ecuación rectangular.

59. $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$

60. $r = \dfrac{6}{2 - \operatorname{sen}\theta}$

61. $r = \dfrac{8}{4 + 8\cos\theta}$

62. $r = \dfrac{2}{3 + 2\cos\theta}$

En los problemas 63-68, grafique la curva a la que corresponden las ecuaciones paramétricas dadas y muestre su orientación. Encuentre la ecuación rectangular de cada curva.

63. $x = 4t - 2, \quad y = 1 - t; \quad -\infty < t < \infty$

64. $x = 2t^2 + 6, \quad y = 5 - t; \quad -\infty < t < \infty$

***65.** $x = 3\operatorname{sen} t, \quad y = 4\cos t + 2; \quad 0 \le t \le 2\pi$

66. $x = \ln t, \quad y = t^3; \quad t > 0$

67. $x = \sec^2 t, \quad y = \tan^2 t; \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$

68. $x = t^{3/2}, \quad y = 2t + 4; \quad t \ge 0$

En los problemas 69-70, encuentre dos ecuaciones paramétricas distintas para cada ecuación rectangular.

69. $y = -2x + 4$

70. $y = 2x^2 - 8$

En los problemas 71 y 72, encuentre las ecuaciones paramétricas para un objeto que se mueve por la elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ *con el movimiento que se describe.*

71. El movimiento comienza en $(4, 0)$, es en sentido opuesto al de las manecillas del reloj, y transcurren 4 segundos para completar una revolución.

72. El movimiento comienza en $(0, 3)$, es en el sentido de las manecillas del reloj y transcurren 5 segundos para completar una revolución.

---

73. Encuentre la ecuación de una hipérbola cuyos focos son los vértices del elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ y cuyos vértices son los focos de esta misma elipse.

74. Encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son los vértices de la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 16$ y cuyos vértices son los focos de esta misma hipérbola.

75. La colección de todos los puntos de plano, tales que la distancia de cada uno de ellos al punto $(3, 0)$ es igual a tres cuartas partes de su distancia a la recta $x = \dfrac{16}{3}$.

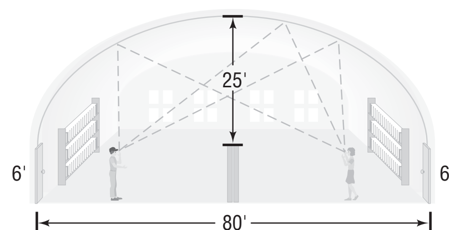
76. Describa la colección de los puntos del plano tales que la distancia de cada uno de ellos al punto $(5, 0)$ es igual a cinco cuartas partes de su distancia a la recta $x = \dfrac{16}{5}$.

77. Espejos Un espejo tiene forma de un paraboloide de revolución. Si la fuente de luz se coloca a 1 pie de la base a lo largo del eje de simetría y el extremo tiene 2 pies de diámetro, ¿qué tan profundo debe ser el espejo?

78. Puente con arco parabólico Se construye un puente con forma de un arco parabólico. Este puente tiene una envergadura de 60 pies y una altura máxima de 20 pies. Encuentre la altura del arco a distancias de 5, 10 y 20 pies del centro.

***79. Puente con arco semielíptico** Se construye un puente con forma de un arco semielíptico. Este puente tiene una envergadura de 60 pies y una altura máxima de 20 pies. Encuentre la altura del arco a distancias de 5, 10 y 20 pies del centro.

80. Galerías de susurros En la figura se muestran las especificaciones del techo elíptico de un salón diseñado como galería de susurros. ¿En dónde están los focos del salón?



81. Loran Dos estaciones de Loran están a 150 millas una de la otra, a lo largo de una costa recta.

a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00032 segundos entre las señales Loran. Determine el sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar a qué parte de la costa lleva el barco, si siguiera la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

b) Si el barco quiere entrar a una bahía que está entre los dos radiofaros, a 15 millas de la emisora principal, ¿qué diferencia de tiempo debe buscar?

c) Si el barco está a 20 millas de la costa al momento de obtener la diferencia de tiempo, ¿cuál es la ubicación aproximada del barco?

[***Nota***: La velocidad de cada una de las señales de radio es alrededor de 186,000 millas por segundo].

82. Movimiento uniforme El tren de Mary sale a las 7:15 y acelera con un ritmo de 3 metros por segundo. Mary, que puede correr a 6 metros por segundo, llega al andén de la estación 2 segundos después de que el tren partió.

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen el movimiento del tren y de Mary en función del tiempo.

[**Sugerencia**: La posición s al tiempo t de un objeto con una aceración a es $s = \frac{1}{2}at^2$].

b) Determine de manera algebraica si Mary alcanzará al tren. De ser así, ¿cuándo?

c) Represente el movimiento del tren y de Mary, graficando al mismo tiempo las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

83. Tiro parabólico Drew Bledsoe lanza un balón de fútbol americano con una velocidad inicial de 100 pies por segundo y un ángulo de 35° respecto de la horizontal. El balón deja la mano de Bledsoe a una altura de 6 pies.

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas que describen la posición de la pelota en función del tiempo.

b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

c) ¿Cuándo alcanza su altura máxima? Determine la altura máxima de la pelota.

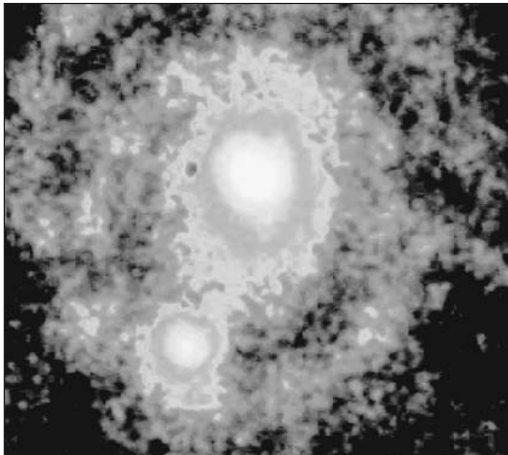
d) Determine qué distancia viajó el balón.

e) Use una calculadora gráfica para graficar al mismo tiempo las ecuaciones obtenidas en el inciso *a*).

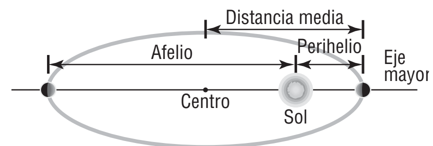
84. Formule una estrategia para analizar y graficar una ecuación con la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Proyectos del capítulo



1. Las órbitas de Neptuno y Plutón La órbita de un planeta alrededor del Sol es una elipse, de la que el Sol se encuentra en uno de los focos. El planeta está en su **afelio** cuando está a mayor distancia del Sol y en su **perihelio** cuando está a menor distancia del Sol. La **distancia media** de un planeta al Sol es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica. Vea la ilustración.



a) El afelio de Neptuno es 4532.2 x 10^6 km y su perihelio es 4458.0 X 10^6 km. Escriba la ecuación para la órbita de Neptuno alrededor del Sol.

b) El afelio de Plutón es 7381.2 x 10^6 km y su perihelio es 4445.8 X 10^6 km. Escriba la ecuación para la órbita de Plutón alrededor del Sol.

c) Grafique las órbitas de Plutón y Neptuno en una calculadora gráfica. ¡Las gráficas de las órbitas obtenidas de estos planetas no se cortan! Pero las órbitas en realidad *sí* lo hacen. ¿Cuál es la explicación?

d) Las gráficas obtenidas de las órbitas tienen el mismo centro, por lo cual sus focos tienen distintas ubicaciones. Para ver una representación exacta, es necesario que la ubicación del Sol (un foco) sea la misma para ambas gráficas. Esto se logra trasladando hacia la izquierda la órbita de Plutón. La cantidad de desplazamiento debe ser igual a la distancia que hay desde el centro de Plutón [en la grafica del inciso *c*)] al Sol, menos la distancia del centro de Neptuno al

Sol. Encuentre la nueva ecuación que representa a la órbita de Plutón.

e) Grafique la ecuación correspondiente a la órbita de Plutón que encontró en el inciso *d*) junto con la ecuación de la órbita de Neptuno. ¿Ve que la órbita de Plutón a veces se encuentra dentro de la de Neptuno?

f) Encuentre el o los puntos de intersección de ambas órbitas.

g) ¿Cree usted que estos dos planetas choquen alguna vez?

Los siguientes proyectos están disponibles en www.prenhall.com/sullivan

2. **Project at Motorola** ***Distorted Deployable Space Reflector Antennas***
3. **Constructing a Bridge over the East River**
4. **Systems of Parametric Equations**

Repaso acumulativo

1. Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\text{sen}(2\theta) = 0.5$.

2. Encuentre la ecuación polar de una recta que pasa por el origen y forma un ángulo de 30° con el eje x positivo.

3. Encuentre la ecuación polar de un círculo con centro en el punto $(4, 0)$ y radio 4. Grafíquelo.

4. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \dfrac{3}{\text{sen } x + \cos x}$?

5. Para $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$, encuentre: $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

6. a) Encuentre el dominio y el rango de $y = 3^x + 2$.
   b) Encuentre el inverso de $y = 3^x + 2$ y determine su dominio y rango.

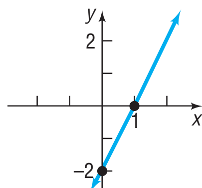
7. Resuelva la ecuación $9x^4 + 33x^3 - 71x^2 - 57x - 10 = 0$.

8. ¿Para qué números x es $6 - x \geq x^2$?

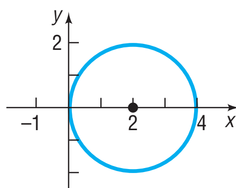
9. Resuelva la ecuación $\cot(2\theta) = 1$, donde $0° < \theta < 90°$.

10. Encuentre la ecuación de cada una de las siguientes gráficas:

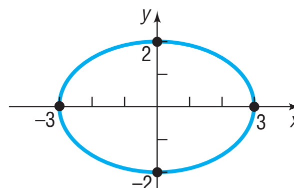
   a) Recta:



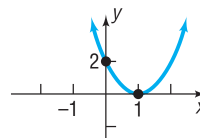
   b) Círculo:



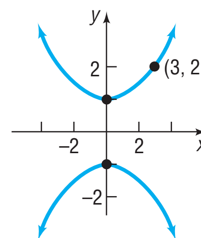
   c) Elipse:



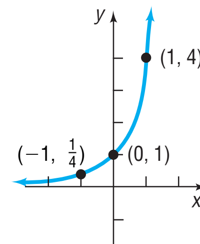
   d) Parábola:



   e) Hipérbola:



   f) Exponencial:



11. Si $f(x) = \log_4(x - 2)$:
   a) Resuelva $f(x) = 2$.
   b) Resuelva $f(x) \leq 2$.

11 Sistemas de ecuaciones y desigualdades

CONTENIDO

11.1 Sistemas de ecuaciones lineales: Sustitución y eliminación
11.2 Sistemas de ecuaciones lineales: Matrices
11.3 Sistemas de ecuaciones lineales: Determinantes
11.4 Álgebra matricial
11.5 Descomposición en fracciones parciales
11.6 Sistemas de ecuaciones no lineales
11.7 Sistemas de desigualdades
11.8 Programación lineal
Repaso del capítulo
Proyectos del capítulo
Repaso acumulativo

Resultados económicos

Ingresos anuales de adultos jóvenes

Los adultos de 25 a 34 años con por lo menos una licenciatura, tienen ingresos medios superiores a los que cuentan con menos escolaridad. Por ejemplo, en el 2000 los graduados universitarios ganaban 60% y 95% más, respectivamente, que los que sólo terminaron la preparatoria u obtuvieron un Certificado de Desarrollo Educativo (General Education Development Certificate, GED). Por el contrario, los hombres y las mujeres entre 25 y 34 años que desertaron de la preparatoria ganaban 27 y 30% menos, respectivamente, que los que terminaron la preparatoria u obtuvieron el GED.

Entre 1980 y 2000, los ingresos medios de los adultos jóvenes con por lo menos una licenciatura, aumentaron respecto de los de sus homólogos que sólo estudiaron la preparatoria u obtuvieron el GED. Dicho aumento fue para hombres y mujeres, pasando de una diferencia del 19% en 1980 a 60% en 2000 para los hombres, y del 52% en 1980 al 95% en 2000 para las mujeres.

FUENTE: Department of Education, National Center for Education Statistics, *The Condition of Education,* 2002.

—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO.

11.1 Sistemas de ecuaciones lineales: Sustitución y eliminación

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Ecuaciones lineales (sección 1.1. pp. 84-93)
- Rectas (sección 2.4. pp. 181-190)
- Líneas paralelas (sección 2.5, pp. 194-195)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?",' en la página 852.

OBJETIVOS
1. Solución de sistemas de ecuaciones por sustitución
2. Solución de sistemas de ecuaciones por eliminación
3. Identificación de los sistemas de ecuaciones incongruentes con dos variables
4. Expresar la solución de un sistema de ecuaciones dependientes con dos variables
5. Solución de sistemas de tres ecuaciones con tres variables
6. Identificación de los sistemas de ecuaciones incongruentes con tres variables
7. Expresar la solución de un sistema de ecuaciones dependientes con tres variables

Para comenzar, un ejemplo.

EJEMPLO 1 Venta de boletos para el cine

En un cine venden los boletos a \$8.00 cada uno, aplicando un descuento de \$2.00 a los jubilados. Una tarde, el cine obtuvo ingresos por \$3580. Si x representa el número de boletos vendidos a \$8.00 y y el número de boletos vendidos al precio de descuento de \$6.00, escriba una ecuación que relacione estas variables.

Solución Cada boleto a precio normal representa \$8.00, por lo que x boletos se convierte en $8x$ dólares. Del mismo modo, y boletos con descuento se convierten en $6y$ dólares. Puesto que el total obtenido es de \$3580, se tiene:

$$8x + 6y = 3580$$ ◀

En el ejemplo 1, se supone que también se sabe que esa tarde se vendieron 525 boletos. Entonces, se tendrá otra ecuación que relaciona a las variables x y y,

$$x + y = 525$$

Ambas ecuaciones

$$8x + 6y = 3580$$
$$x + y = 525$$

conforman un *sistema* de ecuaciones.

En general, un **sistema de ecuaciones** es una colección de dos o más ecuaciones, cada una con una o más variables. En el ejemplo 2 se ilustran los sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 2 Ejemplos de sistemas de ecuaciones

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ -4x + 6y = -2 & (2) \end{cases}$ Dos ecuaciones con dos variables, x y y

b) $\begin{cases} x + y^2 = 5 & (1) \\ 2x + y = 4 & (2) \end{cases}$ Dos ecuaciones con dos variables, x y y

c) $\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ 3x - 2y + 4z = 9 & (2) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{cases}$ Tres ecuaciones con tres variables, x, y y z

d) $\begin{cases} x + y + z = 5 & (1) \\ x - y = 2 & (2) \end{cases}$ Dos ecuaciones con tres variables, x, y y z

e) $\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ 2x + 2z = 4 & (2) \\ y + z = 2 & (3) \\ x = 4 & (4) \end{cases}$ Cuatro ecuaciones con tres vairables, x, y y z

◀

Como se muestra, se utiliza una llave para recordar que se trata de un sistema de ecuaciones. También resulta conveniente enumerar cada ecuación del sistema.

La **solución** de un sistema de ecuaciones se compone de los valores de las variables que satisfacen cada una de las ecuaciones que lo constituyen. **Resolver** un sistema de ecuaciones implica encontrar todas las soluciones del sistema.

Por ejemplo, $x = 2, y = 1$ es una solución del sistema que aparece en el ejemplo 2*a*), porque:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ -4x + 6y = -2 & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5 \\ -4(2) + 6(1) = -8 + 6 = -2 \end{cases}$$

Una solución al sistema del ejemplo 2*b*) es $x = 1, y = 2$, porque:

$$\begin{cases} x + y^2 = 5 & (1) \\ 2x + y = 4 & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \\ 2(1) + 2 = 2 + 2 = 4 \end{cases}$$

Otra solución al sistema del ejemplo 2*b*) es $x = \frac{11}{4}, y = -\frac{3}{2}$, la cual podría verificar usted mismo.

Una solución al sistema del ejemplo 2*c*) es $x = 3, y = 2, z = 1$, porque:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ 3x - 2y + 4z = 9 & (2) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 + 2 + 1 = 6 & (1) \\ 3(3) - 2(2) + 4(1) = 9 - 4 + 4 = 9 & (2) \\ 3 - 2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Observe que $x = 3, y = 3, z = 0$ no es una solución al sistema del ejemplo 2*c*).

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ 3x - 2y + 4z = 9 & (2) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 + 3 + 0 = 6 & (1) \\ 3(3) - 2(3) + 4(0) = 3 \neq 9 & (2) \\ 3 - 3 - 0 = 0 & (3) \end{cases}$$

Aunque estos valores satisfacen las ecuaciones (1) y (3), no satisfacen la ecuación (2). Toda solución del sistema debe satisfacer *cada una* de las ecuaciones del sistema.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

Cuando un sistema de ecuaciones tiene por lo menos una solución, se dice que es **congruente**; de lo contrario, se le llama **incongruente**.

Se dice que una ecuación con n variables es **lineal** si es equivalente a una ecuación con la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $x_1, x_2, \ldots x_n$ son n variables distintas, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b es una constante, y por lo menos una de las a no es 0.

Algunos ejemplos de ecuaciones lineales son:

$$2x + 3y = 2 \qquad 5x - 2y + 3z = 10 \qquad 8x + 8y - 2z + 5w = 0$$

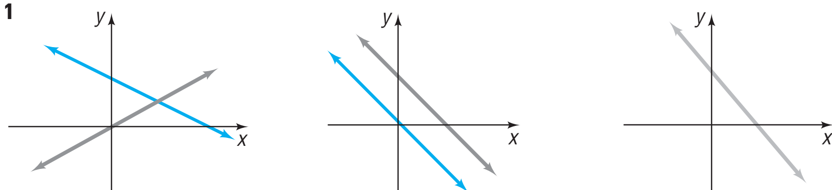
Si todas las ecuaciones de un sistema son lineales, entonces tenemos un **sistema de ecuaciones lineales**. Los sistemas de los ejemplos 2*a*), *c*), *d*) y *e*) son lineales, mientras que el sistema del ejemplo 2*b*) es no lineal. En las secciones 11.1 a 11.4 de este capítulo, resolveremos sistemas lineales. Los sistemas no lineales se analizan en la sección 11.6.

Dos ecuaciones lineales con dos variables

La solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables se podría ver como un problema geométrico. La gráfica de cada una de las ecuaciones del sistema es una recta. De tal manera, un sistema de dos ecuaciones con dos variables representa un par de rectas. Las rectas: (1) se intersecan, (2) son paralelas o (3) son **coincidentes** (es decir, idénticas).

1. Si las rectas se cortan, entonces el sistema de ecuaciones tiene una solución, dada por el punto de intersección. El sistema es **congruente** y las ecuaciones son **independientes**. Vea la figura 1*a*).
2. Si las rectas son paralelas, entonces el sistema de ecuaciones no tiene una solución, porque las rectas nunca se cortan. El sistema es **incongruente**. Vea la figura 1*b*).
3. Si las líneas son coincidentes, entonces el sistema de ecuaciones tiene infinidad de soluciones, representadas por la totalidad de los puntos sobre la recta. El sistema es **congruente** y las ecuaciones son **dependientes**. Vea la figura 1*c*).

Figura 1

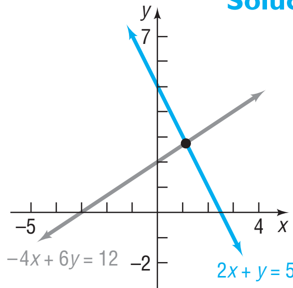


a) Las rectas se cortan; el sistema tiene una solución **b)** Rectas paralelas; el sistema no tiene una solución **c)** Rectas coincidentes; el sistema tiene infinidad de soluciones

EJEMPLO 3 Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales

Graficar el sistema: $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ -4x + 6y = 12 & (2) \end{cases}$

Figura 2



Solución La forma pendiente-intersección de la ecuación (1) es $y = -2x + 5$, la cual tiene una pendiente de -2 e intersección y igual a 5. La forma pendiente-intersección de la ecuación 2 es $y = \frac{2}{3}x + 2$, la cual queda una pendiente que $\frac{2}{3}$ e intersección y igual a 2. Sus gráficas se muestran en la figura 2. ◀

En la gráfica de la figura 2, se ve que las rectas se cortan, por lo que el sistema dado en el ejemplo 3 es congruente. También se utiliza la gráfica como un mecanismo para aproximar la solución. Para este sistema, la solución parece estar cerca del punto (1, 3). La solución real, que debe verificar, es $\left(\frac{9}{8}, \frac{11}{4}\right)$.



Para ver el concepto

Grafique las rectas $2x + y = 5$ $(Y_1 = -2x + 5)$ y $-4x + 6y = 12$ $\left(Y_2 = \frac{2}{3}x + 2\right)$, luego compare con lo que observa en la figura 2. Utilice INTERSECT para verificar que el punto de intersección es (1.125, 2.75).



Para obtener soluciones exactas, utilizamos métodos algebraicos. El primer método algebraico que usaremos es el *método de sustitución*.

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales de manera algebraica. En esta sección, se presentan dos métodos: *sustitución y eliminación.* Se ilustrará el **método de sustitución** resolviendo el sistema dado en el ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Resolver un sistema de ecuaciones lineales por sustitución

Resolver: $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ -4x + 6y = 12 & (2) \end{cases}$

Solución Se despeja y de la primera ecuación y se obtiene:

$$2x + y = 5 \quad (1)$$
$$y = -2x + 5 \quad \text{Se resta } 2x \text{ a cada lado de (1).}$$

Se sustituye este valor de y en la segunda ecuación. El resultado es una ecuación que sólo contiene a la variable x, la cual entonces se puede resolver.

$$-4x + 6y = 12 \quad (2)$$
$$-4x + 6(-2x + 5) = 12 \quad \text{Se sustituye y 5 −2x 1 5 en (2).}$$
$$-4x - 12x + 30 = 12 \quad \text{Se elimina el paréntesis.}$$
$$-16x = -18 \quad \text{Se suman los términos semejantes y se resta 30 a ambos lados.}$$
$$x = \frac{-18}{-16} = \frac{9}{8} \quad \text{Se dividen ambos lados entre } -16.$$

Una vez que se sabe que $x = \frac{9}{8}$, se encuentra fácilmente el valor de y por medio de la **sustitución hacia atrás**, es decir, colocando el valor $\frac{9}{8}$ en lugar de la x en una de las ecuaciones originales.
Se utilizará la primera ecuación.

$$2x + y = 5 \qquad (1)$$

$$y = -2x + 5 \qquad \text{Se resta } 2x \text{ a ambos lados.}$$

$$y = -2\left(\frac{9}{8}\right) + 5 \qquad \text{Se sustituye } x = \frac{9}{8} \text{ en (1).}$$

$$= \frac{-9}{4} + \frac{20}{4} = \frac{11}{4}$$

La solución del sistema es $x = \frac{9}{8} = 1.125$, $y = \frac{11}{4} = 2.75$.

✔ **COMPROBACIÓN:**

$$\begin{cases} 2x + y = 5: & 2\left(\frac{9}{8}\right) + \frac{11}{4} = \frac{9}{4} + \frac{11}{4} = \frac{20}{4} = 5 \\ -4x + 6y = 12: & -4\left(\frac{9}{8}\right) + 6\left(\frac{11}{4}\right) = -\frac{9}{2} + \frac{33}{2} = \frac{24}{2} = 12 \end{cases}$$

El método utilizado en el ejemplo 4 para resolver el sistema se denomina **sustitución.** A continuación se describen los pasos utilizados.

Pasos para resolver un sistema de ecuaciones por sustitución

PASO 1: Seleccione una de las ecuaciones y despeje una de las variables para que quede en términos de las demás.

PASO 2: Sustituya el resultado en las demás ecuaciones.

PASO 3: Si queda una ecuación con una variable, resuélvala. De no ser así, repita los pasos 1 y 2 hasta que quede una sola ecuación con una variable.

PASO 4: Encuentre los valores de las demás variables por medio de la sustitución hacia atrás.

PASO 5: Compruebe la solución encontrada.



AHORA USE LA SUSTITUCIÓN PARA RESOLVER EL PROBLEMA 19.



Otro procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales es el *método de eliminación*. Por lo general, este método es preferible cuando la sustitución produce fracciones o el sistema tiene más de dos variables. La eliminación también brinda la motivación necesaria para resolver sistemas utilizando matrices aumentadas (tema de la sección 11.2).

La idea subyacente al método de eliminación radica en reemplazar el sistema de ecuaciones originales por un sistema equivalente, de manera que al sumar dos de las ecuaciones se elimine una variable. Las reglas para obtener ecuaciones equivalentes son las mismas que ya se han estudiado. Sin embargo, también se podría intercambiar cualesquiera dos ecuaciones del sistema y/o reemplazar cualquier ecuación del sistema por la suma (o diferencia) de la ecuación y un múltiplo distinto de cero de cualquiera otra ecuación del sistema.

Reglas para obtener un sistema de ecuaciones equivalente

1. Intercambiar cualesquiera dos ecuaciones del sistema.
2. Multiplicar (o dividir) ambos lados de la ecuación por la misma constante distinta de cero.
3. Reemplazar cualquier ecuación del sistema por la suma (o diferencia) de la ecuación y un múltiplo constante distinto de cero de cualquier otra ecuación del sistema.

Un ejemplo le explicará la idea. Cuando desarrolle el ejemplo, ponga mucha atención al patrón que se sigue.

EJEMPLO 5 Resolver un sistema de ecuaciones lineales por eliminación

Resolver: $\begin{cases} 2x + 3y = 1 & (1) \\ -x + y = -3 & (2) \end{cases}$

Solución Si se multiplica por 2 cada lado de la ecuación (2), para que los coeficientes de x en ambas ecuaciones sean de distinto signo entre sí. El resultado es el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & (1) \\ -2x + 2y = -6 & (2) \end{cases}$$

Si ahora se reemplaza la ecuación (2) de este sistema por la suma de las dos ecuaciones, se obtiene una ecuación que contienen sólo a la variable y, que se despeja.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & (1) \\ -2x + 2y = -6 & (2) \end{cases}$$
$$5y = -5 \quad \text{Suma de (1) y (2).}$$
$$y = -1 \quad \text{Despejando } y.$$

Sustituyendo este valor de y en la ecuación (1) y simplificando, se obtiene:

$$2x + 3y = 1 \quad (1)$$
$$2x + 3(-1) = 1 \quad \text{Sustituyendo } y = -1 \text{ en (1).}$$
$$2x = 4 \quad \text{Simplificando.}$$
$$x = 2 \quad \text{Despejando } x.$$

La solución del sistema original es $x = 2$, $y = -1$. Que el lector realice la comprobación de la solución. ◀

El procedimiento utilizado en el ejemplo 5 se denomina **método de eliminación**. Observe el patrón de la solución. Primero, se elimina la variable x de la segunda ecuación. Luego se sustituye hacia atrás, es decir, se sustituye el valor calculado para y en la primera ecuación, para encontrar x.



AHORA USE LA ELIMINACIÓN PARA RESOLVER EL PROBLEMA 19.

Regresemos al ejercicio del cine utilizado en el ejemplo 1.

EJEMPLO 6 **Venta de boletos para el cine**

En un cine venden los boletos a \$8.00 cada uno, aplicando un descuento de \$2.00 a los jubilados. Una tarde, el cine vendió 525 boletos y obtuvo ingresos por \$3580. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

Solución Si x representa el número de boletos vendidos a \$8.00 y y al número de boletos vendidos al precio de descuento de \$6.00, entonces la información con la que se cuenta constituye el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 8x + 6y = 3580 & (1) \\ x + y = 525 & (2) \end{cases}$$

Se utiliza la eliminación y se multiplica la segunda ecuación por -6, para luego sumar las ecuaciones.

$$\begin{cases} 8x + 6y = 3580 \\ -6x - 6y = -3150 \end{cases}$$

$$2x = 430 \quad \text{Suma de las ecuaciones.}$$

$$x = 215$$

Puesto que $x + y = 525$, entonces $y = 525 - x = 525 - 215 = 310$. De tal modo, se vendieron 215 boletos a precio normal y 310 boletos con descuento para jubilados. ◀



Los ejemplos anteriores trataron con sistemas de ecuaciones congruentes que tenían soluciones únicas. Los dos ejemplos siguientes tratan con las otras posibilidades que pueden ocurrir. El primero es un sistema que no tiene solución.

EJEMPLO 7 **Sistema de ecuaciones lineales incongruente**

Resolver: $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ 4x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$

Solución Se elige utilizar el método de sustitución y se despeja y de la ecuación (1).

$$2x + y = 5 \quad (1)$$

$$y = -2x + 5 \quad \text{Se resta } 2x \text{ a cada lado.}$$

Ahora, se sustituye $y = -2x + 5$ en la ecuación (2) y se despeja x.

$$4x + 2y = 8 \quad (2)$$

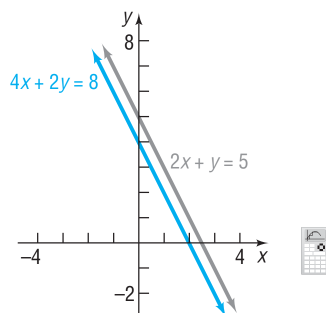
$$4x + 2(-2x + 5) = 8 \quad \text{Se sustituye y 5 22x 1 5 en (2).}$$

$$4x - 4x + 10 = 8 \quad \text{Se elimina el paréntesis.}$$

$$0 \cdot x = -2 \quad \text{Se resta 10 a ambos lados.}$$

Esta ecuación no tiene solución. Se concluye que el sistema en sí no tiene solución y, por lo tanto, es incongruente. ◀

Figura 3



En la figura 3 se ilustra el par de rectas cuyas ecuaciones conforman el sistema del ejemplo 7. Observe que las gráficas de estas ecuaciones son rectas con pendiente -2; una con intersección y igual a 5, la otra igual a 4. Las rectas son paralelas y no tienen punto de intersección. Este planteamiento geométrico equivale al planteamiento algebraico de que el sistema no tiene solución.

Para ver el concepto

Grafique las rectas $2x + y = 5$ ($Y_1 = -2x + 5$) y $4x + 2y = 8$ ($Y_2 = -2x + 4$) y compare lo que observa con la figura 3. ¿Cómo estaría seguro de que las líneas son paralelas?

4 El siguiente es un ejemplo de un sistema con infinidad de soluciones.

EJEMPLO 8 Resolver un sistema de ecuaciones dependientes

Resolver: $\begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ -6x - 3y = -12 & (2) \end{cases}$

Solución Elegimos utilizar el método de eliminación.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ -6x - 3y = -12 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 3y = 12 & (1) \\ -6x - 3y = -12 & (2) \end{cases}$$ Se multiplica por 3 ambos lados de la ecuación (1).

$$\begin{cases} 6x + 3y = 12 & (1) \\ 0 = 0 & (2) \end{cases}$$ Se reemplaza la ecuación (2) por la suma de las ecuaciones (1) y (2).

El sistema original es equivalente a un sistema con una ecuación, por lo que las ecuaciones son dependientes. Esto quiere decir que cualesquiera valores de x y y para los que $6x + 3y = 12$ o, de manera equivalente, $2x + y = 4$, son soluciones. Por ejemplo, $x = 2, y = 0$; $x = 0, y = 4$; $x = -2, y = 8$; $x = 4, y = -4$; y así sucesivamente, son soluciones. De hecho, existe una infinidad de valores para x y y para los que $2x + y = 4$, de tal manera que el sistema original tiene infinidad de soluciones. Las soluciones del sistema original se escriben como:

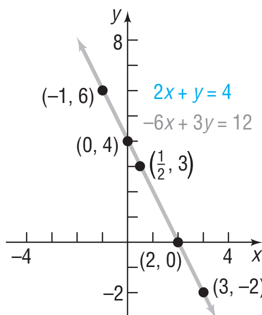
$$y = -2x + 4$$

donde x puede ser cualquier número real, o como:

$$x = -\frac{1}{2}y + 2$$

donde y puede ser cualquier número real. ◀

Figura 4



En la figura 4 se ilustra la situación expuesta en el ejemplo 8. Observe que las gráficas de estas ecuaciones son rectas, ambas con pendiente -2 e intersección con el eje y en 4. Las rectas coincidentes. También observe que la ecuación (2) del sistema original es sólo -3 veces la ecuación (1), lo que indica que las dos ecuaciones son dependientes.

Para el sistema del ejemplo 8, se pueden escribir algunas del número infinito de soluciones, asignando valores a x y calculando luego $y = -2x + 4$.

Si $x = -2$, entonces $y = 8$.
Si $x = 0$, entonces $y = 4$.
Si $x = 2$, entonces $y = 0$.

Los pares ordenados (x, y) son puntos sobre la línea de la figura 4.

Para ver el concepto



Grafique las rectas $2x + y = 4$ ($Y_1 = 22x + 4$) y $-6x - 3y = -12$ ($Y_2 = -2x + 4$) y compare lo que observa con la figura 4. ¿Cómo estaría seguro de que las rectas son coincidentes?



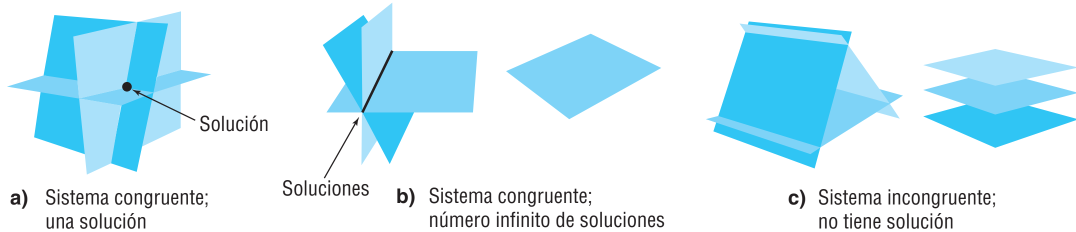
TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 25 Y 29.

Tres ecuaciones con tres variables

Al igual que un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables también tiene (1) exactamente una solución (un sistema congruente con ecuaciones independientes), (2) no tiene solución (un sistema incongruente) o (3) infinidad de soluciones (un sistema congruente con ecuaciones dependientes).

La solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables se podría considerar un problema geométrico. La gráfica de cada una de las ecuaciones de un sistema de este tipo es un plano en el espacio. Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables representa a tres planos en el espacio. En la figura 5 se ilustran algunas de las posibilidades.

Figura 5



a) Sistema congruente; una solución
b) Sistema congruente; número infinito de soluciones
c) Sistema incongruente; no tiene solución

Cabe recordar que la **solución** de un sistema de ecuaciones consiste en encontrar los valores de las variables que satisfacen cada una de las ecuaciones que lo componen. Por ejemplo, $x = 3, y = -1, z = -5$ es una solución para el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = -3 & (1) \quad 3 + (-1) + (-5) = -3 \\ 2x - 3y + 6z = -21 & (2) \quad 2(3) - 3(-1) + 6(-5) = 6 + 3 - 30 = -21 \\ -3x + 5y = -14 & (3) \quad -3(3) + 5(-1) = -9 - 5 = -14 \end{cases}$$

porque estos valores de las variables son solución para cada una de las ecuaciones.

Por lo general, para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables, se utiliza el método de eliminación. Recuerde que la idea subyacente al método de eliminación radica en formar ecuaciones equivalentes, de manera que al sumar dos de ellas se elimine una variable.



Veamos cómo funciona la eliminación en un sistema de tres ecuaciones con tres variables.

EJEMPLO 9 Resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables

Utilizar el método de eliminación para resolver el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y - z = -1 & (1) \\ 4x - 3y + 2z = 16 & (2) \\ 2x - 2y - 3z = 5 & (3) \end{cases}$$

Solución En un sistema de tres ecuaciones, trataremos de eliminar una variable a la vez, utilizando pares de ecuaciones hasta que quede una ecuación con una sola variable. Nuestro plan de ataque para este sistema será utilizar la ecuación (1) para eliminar la variable x de las ecuaciones (2) y (3).

Comenzamos por multiplicar por -4 ambos lados del ecuación (1) y sumar el resultado a la ecuación (2) (¿sabe por qué? Los coeficientes de x ahora son de distinto signo). También se multiplica la ecuación (1) por -2 y se suma

el resultado a la ecuación (3). Observe que estos dos procedimientos tienen como resultado la eliminación de la variable x en las ecuaciones (2) y (3).

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \quad (1) \\ 4x - 3y + 2z &= 16 \quad (2) \end{aligned} \quad \text{Se multiplica por } -4 \quad \begin{aligned} -4x - 4y + 4z &= 4 \quad (1) \\ 4x - 3y + 2z &= 16 \quad (2) \\ \hline -7y + 6z &= 20 \quad \text{Se suma.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \quad (1) \\ 2x - 2y - 3z &= 5 \quad (3) \end{aligned} \quad \text{Se multiplica por } -2 \quad \begin{aligned} -2x - 2y + 2z &= 2 \quad (1) \\ 2x - 2y - 3z &= 5 \quad (3) \\ \hline -4y - z &= 7 \quad \text{Se suma.} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + y - z = -1 & (1) \\ -7y + 6z = 20 & (2) \\ -4y - z = 7 & (3) \end{cases}$$

Ahora hay que concentrarse en las ecuaciones (2) y (3), tratándolas como un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Es más fácil eliminar z. Se multiplica por 6 ambos lados de la ecuación (3) y se suman las ecuaciones (2) y (3). El resultado es la nueva ecuación (3).

$$\begin{aligned} -7y + 6z &= 20 \quad (2) \\ -4y - z &= 7 \quad (3) \text{ Se multiplica por 6} \end{aligned} \quad \begin{aligned} -7y + 6z &= 20 \quad (2) \\ -24y - 6z &= 42 \quad (3) \\ \hline -31y &= 62 \quad \text{Se suma.} \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} x + y - z = -1 & (1) \\ -7y + 6z = 20 & (2) \\ -31y = 62 & (3) \end{cases}$$

Ahora se despeja y de la ecuación (3), dividiendo ambos lados entre -31.

$$\begin{cases} x + y - z = -1 & (1) \\ -7y + 6z = 20 & (2) \\ y = -2 & (3) \end{cases}$$

Si se sustituye $y = -2$ en la ecuación (2) y se despeja z.

$$\begin{aligned} -7y + 6z &= 20 && (2) \\ -7(-2) + 6z &= 20 && \text{Se sustituye } y = -2 \text{ en (2).} \\ 6z &= 6 && \text{Se resta 14 a ambos lados de la ecuación.} \\ z &= 1 && \text{Se divide ambos lados de la ecuación entre 6.} \end{aligned}$$

Por último, se sustituye $y = -2$ y $z = 1$ en la ecuación (1) y se despeja x.

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 && (1) \\ x + (-2) - 1 &= -1 && \text{Se sustituye } y = -2 \text{ y } z = 1 \text{ en (1).} \\ x - 3 &= -1 && \text{Se simplifica.} \\ x &= 2 && \text{Se suma 3 en ambos lados.} \end{aligned}$$

La solución del sistema original es $x = 2$, $y = -2$, $z = 1$. Se deja que el lector realice la comprobación de la solución. ◀

Revise de nuevo la solución dada al ejemplo 9. Observe el patrón de eliminar una de las variables de dos de las ecuaciones, seguido por la solución de este sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Aunque es su elección cuáles variables se eliminan, la metodología es igual para todos los sistemas.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 43.

6 El ejemplo anterior trataba con un sistema congruente con una solución única. Los dos ejemplos siguientes tratan con las otras posibilidades que pueden presentarse.

EJEMPLO 10 Sistema de ecuaciones lineales incongruente

Resolver: $\begin{cases} 2x + y - z = -2 & (1) \\ x + 2y - z = -9 & (2) \\ x - 4y + z = 1 & (3) \end{cases}$

Solución Nuestro plan de ataque es el mismo que el del ejemplo 9. Sin embargo, en este sistema parece más fácil eliminar primero la variable z. ¿Sabe por qué?

Se multiplica por -1 ambos lados de la ecuación (1) y el resultado se suma a la ecuación (2). Se suman las ecuaciones (2) y (3).

$$\begin{array}{rl} -2x - y + z = 2 & (1) \text{ Se multiplica por } -1. \\ x + 2y - z = -9 & (2) \\ \hline -x + y = -7 & \text{Se suma.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x + 2y - z = -9 & (2) \\ x - 4y + z = 1 & (3) \\ \hline 2x - 2y = -8 & \text{Se suma.} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = -2 & (1) \\ -x + y = -7 & (2) \\ 2x - 2y = -8 & (3) \end{cases}$$

Ahora hay que concentrarse en las ecuaciones (2) y (3), tratándolas como un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Se multiplica por 2 ambos lados de la ecuación (2) y se suma el resultado a la ecuación (3).

$$\begin{array}{rl} -x + y = -7 & (2) \text{ Se multiplica por 2.} \\ 2x - 2y = -8 & (3) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -2x + 2y = -14 & (2) \\ 2x - 2y = -8 & (3) \\ \hline 0 = -22 & \text{Se suma.} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = -2 & (1) \\ -x + y = -7 & (2) \\ 0 = -22 & (3) \end{cases}$$

La ecuación (3) no tiene solución y el sistema es incongruente. ◀

7 Ahora veamos un sistema de ecuaciones dependientes.

EJEMPLO 11 Resolver un sistema de ecuaciones dependientes

Resolver: $\begin{cases} x - 2y - z = 8 & (1) \\ 2x - 3y + z = 23 & (2) \\ 4x - 5y + 5z = 53 & (3) \end{cases}$

Solución Se multiplica por -2 ambos lados de la ecuación (1) y se suma el resultado a la ecuación (2). Además, se multiplica por -4 ambos lados de la ecuación (1) y se suma el resultado a la ecuación (3).

$$\begin{array}{rl} x - 2y - z = 8 & (1) \text{ Se multiplica por } -2. \\ 2x - 3y + z = 23 & (2) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -2x + 4y + 2z = -16 & (1) \\ 2x - 3y + z = 23 & (2) \\ \hline y + 3z = 7 & \text{Se suma.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x - 2y - z = 8 & (1) \text{ Se multiplica por } -4 \\ 4x - 5y + 5z = 53 & (3) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -4x + 8y + 4z = -32 & (1) \\ 4x - 5y + 5z = 53 & (2) \\ \hline 3y + 9z = 21 & \text{Se suma.} \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y - z = 8 & (1) \\ y + 3z = 7 & (2) \\ 3y + 9z = 21 & (3) \end{cases}$$

Se tratan las ecuaciones (2) y (3) como un sistema de dos ecuaciones con dos variables, y se elimina la variable y se multiplica por -3 ambos lados de la ecuación (2) y se suma el resultado a la ecuación (3).

$$\begin{aligned} y + 3z &= 7 \\ 3y + 9z &= 21 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Se multiplica por } -3.} \quad \begin{aligned} -3y - 9z &= -21 \\ 3y + 9z &= 21 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned} \quad \text{Se suma.} \quad \begin{cases} x - 2y - z = 8 & (1) \\ y + 3z = 7 & (2) \\ 0 = 0 & (3) \end{cases}$$

El sistema original es equivalente a un sistema con dos ecuaciones, por lo que las ecuaciones son dependientes y el sistema tiene infinidad de soluciones. Si se despeja y de la ecuación (2), se puede expresar y en términos de z como $y = -3z + 7$. Se sustituye esta expresión en la ecuación (1) para determinar x en términos de z.

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 8 && (1) \\ x - 2(-3z + 7) - z &= 8 && \text{Se sustituye } y = -3z + 7 \text{ en (1).} \\ x + 6z - 14 - z &= 8 && \text{Se elimina el paréntesis.} \\ x + 5z &= 22 && \text{Se suman términos semejantes.} \\ x &= -5z + 22 && \text{Se despeja } x. \end{aligned}$$

La solución del sistema se escribe como:

$$\begin{cases} x = -5z + 22 \\ y = -3z + 7 \end{cases}$$

donde z puede ser cualquier número real.

Esta manera de escribir la solución hace más fácil encontrar soluciones específicas del sistema. Para encontrar soluciones específicas, seleccione cualquier valor de z y utilice las ecuaciones $x = -5z + 22$ y $y = -3z + 7$ para determinar x y y. Por ejemplo, así $z = 0$, entonces $x = 22$ y $y = 7$, y si $z = 1$, entonces $x = 17$ y $y = 4$. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45.

Dos puntos en el plano cartesiano determinan una recta única. Dados tres puntos no colineales, es posible encontrar la función cuadrática (única) cuya gráfica contiene a esos tres puntos.

EJEMPLO 12 Ajuste de una curva

Encuentre los números reales a, b, y c tales que la gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ incluya a los puntos $(-1, -4)$, $(1, 6)$, y $(3, 0)$.

Solución Se necesita que los tres puntos satisfagan la ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

Para el punto $(-1, -4)$ se tiene: $-4 = a(-1)^2 + b(-1) + c$ $\quad -4 = a - b + c$

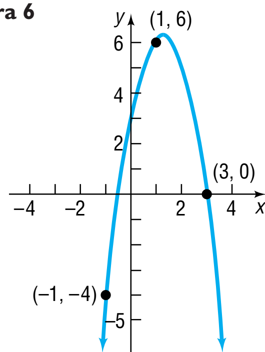
Para el punto $(1, 6)$ se tiene: $6 = a(1)^2 + b(1) + c$ $\quad 6 = a + b + c$

Para el punto $(3, 0)$ se tiene: $0 = a(3)^2 + b(3) + c$ $\quad 0 = 9a + 3b + c$

Se quiere determinar a, b, y c de tal manera que quede satisfecha cada una de las ecuaciones, es decir, se quiere resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres variables.

$$\begin{cases} a - b + c = -4 & (1) \\ a + b + c = 6 & (2) \\ 9a + 3b + c = 0 & (3) \end{cases}$$

Figura 6



Al resolver este sistema de ecuaciones, se obtiene $a = -2, b = 5,$ y $c = 3$. Por lo tanto, la función cuya gráfica incluye a los puntos $(-1, -4), (1, 6)$, y $(3, 0)$ es

$$y = -2x^2 + 5x + 3 \qquad y = ax^2 + bx + c, \quad a = -2, b = 5, c = 3$$

En la figura 6 se muestra la gráfica de la función junto con los tres puntos. ◀

11.1 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Resuelva la ecuación: $3x + 4 = 8 - x$. (pp. 84–93)

2. *a*) Grafique la recta: $3x + 4y = 12$. (pp. 181–190)
b) ¿Cuál es la pendiente de una recta paralela a ésta? (pp. 194–195)

Conceptos y vocabulario

3. Si un sistema de ecuaciones no tiene solución, se dice que es __________.

4. Si un sistema de ecuaciones tiene una, o más soluciones, se dice que el sistema es __________.

5. *Falso o verdadero:* Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables siempre tiene por lo menos una solución.

6. *Falso o verdadero:* La solución de un sistema de ecuaciones se compone de los valores de las variables que satisfacen cada una de las ecuaciones que lo constituyen.

Ejercicios

En los problemas 7-16, verifique que los valores de las variables sean soluciones del sistema de ecuaciones.

7. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ $x = 2, y = -1$

8. $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x - 7y = -30 \end{cases}$ $x = -2, y = 4$

9. $\begin{cases} 3x - 4y = 4 \\ \frac{1}{2}x - 3y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $x = 2, y = \frac{1}{2}$

10. $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = 0 \\ 3x - 4y = -\frac{19}{2} \end{cases}$ $x = -\frac{1}{2}, y = 2$

11. $\begin{cases} x - y = 3 \\ \frac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$ $x = 4, y = 1$

12. $\begin{cases} x - y = 3 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$ $x = -2, y = -5$

13. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 4 \\ x - y - z = 0 \\ 2y - 3z = -8 \end{cases}$ $x = 1, y = -1, z = 2$

14. $\begin{cases} 4x - z = 7 \\ 8x + 5y - z = 0 \\ -x - y + 5z = 6 \end{cases}$ $x = 2, y = -3, z = 1$

15. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 4 \\ x - 3y + z = 10 \\ 5x - 2y - 3z = 8 \end{cases}$ $x = 2, y = -2, z = 2$

16. $\begin{cases} 4x - 5z = 6 \\ 5y - z = -17 \\ -x - 6y + 5z = 24 \end{cases}$ $x = 4, y = -3, z = 2$

En los problemas 17-54, resuelva los sistemas de ecuaciones. Si el sistema no tiene solución, mencione que es incongruente.

17. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x = 24 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x + 5y = -3 \\ -2y = -4 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x - 6y = 2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x + 4y = \frac{2}{3} \\ 3x - 5y = -10 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x - y = 5 \\ -3x + 3y = 2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x + 3y = -1 \\ 4x + y = \dfrac{8}{3} \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 10x + y = 11 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 5x + 10y = 4 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + y = -2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}y = 3 \\ \dfrac{1}{4}x - \dfrac{2}{3}y = -1 \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x - \dfrac{3}{2}y = -5 \\ \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{3}y = 11 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 15x + 5y = 21 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 8 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{y} = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 0 \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{3}{2y} = 2 \end{cases}$

[**Sugerencia:** Sean $u = \dfrac{1}{x}$ y $v = \dfrac{1}{y}$, y resuelva para u y v. Entonces $x = \dfrac{1}{u}$ y $y = \dfrac{1}{v}$].

41. $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x - 3z = 16 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ -2y + 4z = 0 \\ 3x - 2z = -11 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -10 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y + z = -7 \\ 3x - 4y - 3z = 7 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 3x - 4y - z = 1 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - 2y - 7z = 0 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \\ x + 5y + 3z = 2 \end{cases}$

49. $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y - 7z = 1 \end{cases}$

50. $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 6 \\ 7x - 3y + 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

51. $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = -5 \\ x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$

52. $\begin{cases} x - y + z = -4 \\ 2x - 3y + 4z = -15 \\ 5x + y - 2z = 12 \end{cases}$

53. $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 4y + z = -7 \\ -2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

54. $\begin{cases} x + 4y - 3z = -8 \\ 3x - y + 3z = 12 \\ x + y + 6z = 1 \end{cases}$

55. El perímetro de un piso rectangular es de 90 pies. Calcule las dimensiones del piso, si éste tiene el doble del largo que de ancho.

56. La longitud de la reja necesaria para cercar un terreno rectangular es de 3000 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre su longitud y su anchura es de 50 metros?

57. Precio de comida Cuatro hamburguesas con queso y dos malteadas de chocolate cuestan en total \$7.90. Dos malteadas cuestan 15¢ más que una hamburguesa con queso. ¿Cuál es el precio de una hamburguesa con queso? ¿Y el de una malteada?

58. Boletos para el cine En un cine cobran a \$9.00 la entrada para adultos y a \$7.00 para jubilados. Un día en el que pagaron su entrada 325 personas, se recaudaron \$2495. ¿Cuántas entradas fueron de adulto? ¿Cuántas fueron de jubilado?

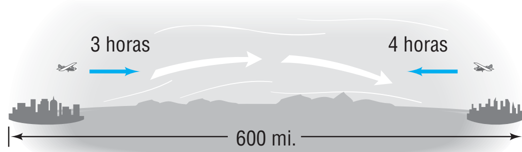
59. Mezcla de semillas Una tienda vende las almendras a \$5.00 la libra y los cacahuates a \$1.50 la libra. El gerente decide mezclar 30 libras de cacahuates con algunas almendras y vender la mezcla a \$3.00 la libra. ¿Cuántas libras de almendras se deben mezclar con los cacahuates de manera que la mezcla genere las mismas utilidades que se obtendrían vendiéndolas por separado?

60. Planeación financiera Una pareja recientemente retirada necesita \$12,000 al año para complementar su pensión. Cuentan con \$150,000 para invertir y obtener este ingreso. Se han decidido por dos opciones de inversión: Bonos AA con un rendimiento del 10% anual y un certificado bancario que rinde 5%.

a) ¿Cuánto deben invertir en cada una, para obtener exactamente \$12,000?

b) Si al paso de dos años, la pareja necesita tener ingresos por \$14,000 anuales, ¿cómo deben reorganizar sus inversiones, para recibir esta nueva cifra?

61. Cálculo de la velocidad del viento Con viento de cola, un pequeño aeroplano Piper es capaz de volar 600 millas en 3 horas. Volando en contra del mismo viento, el Piper podría volar la misma distancia en cuatro horas. Calcule la velocidad promedio del viento y del Piper.



62. Cálculo de la velocidad del viento La velocidad promedio de una aeronave monomotor es de 150 millas por hora. Si esta aeronave voló la misma distancia en 2 horas con el viento a favor y en 3 horas con el viento en contra, ¿cuál era la velocidad del viento?

63. Administración de un restaurante La gerente de un restaurante quiere comprar 200 juegos de platos. Un modelo cuesta $25 por juego, mientras que otro cuesta $45 por juego. Si sólo dispone de $7400 para este gasto, ¿cuántos juegos debe pedir de cada modelo?

64. Precio de comida Un grupo de personas compró 10 hot dogs y 5 refrescos por $12.50. Otro grupo compró 7 hot dogs y 4 refrescos por $9.00. ¿Cuál es el precio de un hot dog? ¿Y el de un refresco?





65. Cálculo del reembolso En la tienda a la que acostumbramos asistir, no marcan el precio sobre los productos. Mi esposa fue a esta tienda y compró 3 paquetes de una libra de tocino y tres cartones de huevo, por lo que pagó un total de $7.45. Como yo no sabía que ella ya había ido, fui a la tienda y compré 2 paquetes de una libra de tocino y 3 cartones de huevo, por lo que pagué un total de $6.45. Ahora queremos devolver 2 paquetes de tocino y 2 cartones de huevo. ¿Cuánto nos reembolsarán?

66. Velocidad de una corriente Pamela tarda 3 horas en nadar 15 millas a favor de la corriente en el río Illinois. El viaje de regreso en contra de la corriente le lleva 5 horas. Calcule la velocidad promedio de Pamela en agua inmóvil. ¿Qué tan rápida es la corriente? (Suponga que la velocidad de Pamela es la misma en ambas direcciones).

67. Farmacia La receta del doctor le indica un consumo diario de 40 mg de vitamina C y 30 mg de vitamina D. En la farmacia tienen dos compuestos para utilizar: uno contiene 20% de vitamina C y 30% de vitamina D, el otro tiene 40% de vitamina C y 20% de vitamina D. ¿Cuántos miligramos de cada uno de estos compuestos se deben mezclar para satisfacer la receta?

68. Farmacia La receta de un médico solicita la elaboración de pastillas que contengan 12 unidades de vitamina B_{12} y 12 unidades de vitamina E. En la farmacia cuentan con dos polvos que se puedan emplear para hacer las pastillas: uno contiene 20% de vitamina B_{12} y 30% de vitamina E, el otro tiene 40% de vitamina B_{12} y 20% de vitamina E. ¿Cuántas unidades de cada uno de esos polvos se deben mezclar en cada pastilla?

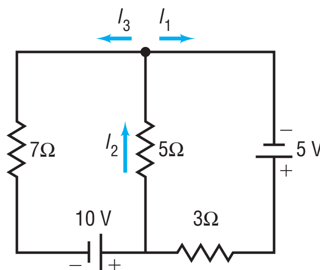
69. Ajuste de una curva Encuentre los números reales *a, b* y *c* tales que la gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ incluya a los puntos $(-1, -4)$, $(2, 3)$, y $(0, 1)$.

70. Ajuste de una curva Encuentre los números reales *a, b* y *c* tales que la gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ incluya a los puntos $(-1, -2)$, $(1, -4)$, y $(2, 4)$.

71. Electricidad: Reglas de Kirchhoff La aplicación de las reglas de Kirchhoff al circuito que se muestra más adelante tiene como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_2 = I_1 + I_3 \\ 5 - 3I_1 - 5I_2 = 0 \\ 10 - 5I_2 - 7I_3 = 0 \end{cases}$$

Encuentre las corrientes I_1, I_2 e I_3.*

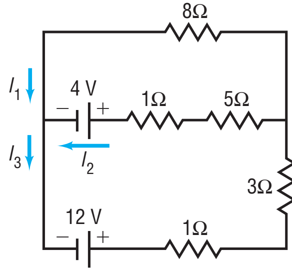


72. Electricidad: Reglas de Kirchhoff La aplicación de las reglas de Kirchhoff al circuito que se muestra más adelante tiene como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ 8 = 4I_3 + 6I_2 \\ 8I_1 = 4 + 6I_2 \end{cases}$$

*FUENTE: *Physics for Scientists & Engineers*, 3ª ed. de Serway. © 1990. Impreso con autorización de Brooks/Cole, división de Thomson Learning: www.thomsonrights.com. Fax 800−730−2215.

Encuentre las corrientes I_1, I_2 e I_3.*



73. Ingresos de un teatro Un teatro de Broadway tiene 500 butacas, repartidas en asientos de orquesta, principales y de balcón. Los asientos de la zona de orquesta cuestan \$50, los de la zona principal \$35 y los de balcón \$25. Si se venden todas las entradas, el ingreso bruto del teatro suma \$17,100. Si se venden todas las entradas de las zonas principal y de balcón, pero sólo la mitad de los de la zona de orquesta, el ingreso bruto es de \$14,600. ¿Cuántos asientos hay en cada zona?

74. Ingresos de un teatro En un cine cobran a \$8.00 la entrada para adultos, a \$4.50 para niños y a \$6.00 para jubilados. Un día, el cine vendió 405 boletos y obtuvo \$2320 en ingresos. La cantidad de boletos vendidos para niños duplicó a la de boletos para adultos. ¿Cuántos adultos, niños y jubilados fueron al cine ese día?

75. Nutrición Un nutriólogo quiere que uno de sus pacientes consuma una comida con 66 gramos de proteínas, 94.5 gramos de carbohidratos y 910 miligramos de calcio. El servicio de alimentos del hospital informa al nutriólogo que la comida del día es pollo, granos de elote y leche al 2%. Cada ración de pollo tiene 30 gramos de proteínas, 35 gramos de carbohidratos y 200 miligramos de calcio. Cada ración de elote tiene 3 gramos de proteínas, 16 gramos de carbohidratos y 10 miligramos de calcio. Cada ración de leche al 2% tiene 9 gramos de proteínas, 13 gramos de carbohidratos y 300 miligramos de calcio. ¿Cuántas raciones de cada alimento se deben servir al paciente?

76. Inversiones Kelly dispone de \$20,000 para invertir. Como su asesor financiero, usted le recomienda que diversifique en tres inversiones: Letras de la tesorería que rinden 5% de interés simple, Bonos de la tesorería que rinden 7% de interés simple, y bonos corporativos que rinden 10% de interés simple. Kelly quiere obtener \$1390 anuales de ganancia. También desea que su inversión en letras de la Tesorería sea \$3000 superior a su inversión en bonos corporativos. ¿Cuánto debe invertir en cada una de ellas?

77. Precio de comida Un grupo de personas compró 8 hamburguesas, 6 órdenes grandes de papas y 6 refrescos grandes por \$26.10. Otro grupo pidió 10 hamburguesas, 6 papas grandes y 8 refrescos grandes, y pagó \$31.60. ¿Hay información suficiente para determinar el precio de cada alimento? Si no, construya una tabla con las diversas posibilidades. Suponga que las hamburguesas cuestan entre \$1.75 y \$2.25, las papas entre \$0.75 y \$1.00, y los refrescos entre \$0.60 y \$0.90.

78. Precio de comida Utilice la información del problema 77 y suponga que un tercer grupo compró 3 hamburguesas, 2 papas grandes y 4 refrescos grandes por \$10.95. ¿Ya hay información suficiente para determinar el precio de cada alimento? Si es así, determine cada uno de los precios.

79. Pintura de una casa Trabajando juntos, tres pintores, Beth, Bill y Edie, pintan el exterior de una casa en 10 horas. Bill y Edie juntos han pintado una casa semejante en 15 horas. Un día, los tres trabajaron juntos en una casa como ésta durante 4 horas, después de las cuales Edie se fue. Beth y Bill necesitaron de 8 horas más para terminar. Suponiendo que no ganan ni pierden eficiencia, ¿cuánto tiempo les llevaría a cada uno de ellos hacer el trabajo a solas?



80. Elabore un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables que:

a) No tenga solución

b) Tenga exactamente una solución

c) Tenga infinidad de soluciones

Entregue los tres sistemas a un amigo para que los resuelva y juzgue.

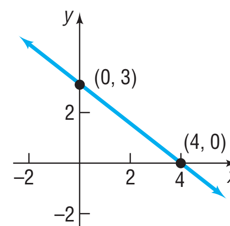
81. Describa en un breve párrafo su estrategia para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

82. Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables ¿prefiere usted el método de sustitución o el método de eliminación? Exponga los motivos.

Respuestas a “¿Está preparado?”

1. $\{1\}$

2. a)



b) $\frac{3}{4}$

*Fuente: *Physics for Scientists & Engineers*, 3ª ed. de Serway. © 1990. Impreso con autorización de Brooks/Cole, división de Thomson Learning: www.thomsonrights.com. Fax 800-730-2215.

11.2 Sistemas de ecuaciones lineales: Matrices

OBJETIVOS
1. Escribir la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales
2. Escribir el sistema a partir de la matriz aumentada
3. Realizar operaciones de fila en una matriz
4. Resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices

El enfoque sistemático del método de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales, brinda otro método de solución que involucra una anotación simplificada.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 4y = 14 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Si no se escriben los símbolos utilizados para las variables, este sistema se representa como:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 14 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

donde se entiende que la primera columna la conforman los coeficientes de la variable x, la segunda columna los de la variable y y la tercera columna las constantes están a la derecha del signo de igual. La línea vertical sirve como recordatorio de los signos de igual. Los corchetes son los símbolos tradicionales utilizados en el álgebra para denotar una *matriz*.

Una matriz se define como un arreglo rectangular de números,

$$\begin{array}{c} \\ \text{Fila } 1 \\ \text{Fila } 2 \\ \vdots \\ \text{Fila } i \\ \vdots \\ \text{Fila } m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{Columna } 1 & \text{Columna } 2 & & \text{Columna } j & & \text{Columna } n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \quad \textbf{(1)}$$

Cada número a_{ij} de la matriz tiene dos índices: El **índice de fila** i y el **índice de columna** j. La matriz que aparece en el cuadro (1) tiene m filas y n columnas. Por lo general, los números a_{ij} se conocen como las **entradas** de la matriz. Por ejemplo, a_{23} se refiere a la entrada de la segunda fila, tercera columna.


Ahora, utilizaremos la notación del matrices para representar un sistema de ecuaciones lineales. Las matrices empleadas para representar sistemas de ecuaciones lineales se conocen como **matrices aumentadas**. Al escribir la matriz aumentada de un sistema, las variables de cada ecuación deben estar a la izquierda del signo de igual y las constantes a la derecha. Si en la ecuación no aparece una variable, tiene un coeficiente de 0.

EJEMPLO 1 Escribir la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales

Escribir la matriz aumentada de cada uno de los sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3x - 4y = -6 & (1) \\ 2x - 3y = -5 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 & (1) \\ x + z - 1 = 0 & (2) \\ x + 2y - 8 = 0 & (3) \end{cases}$

Solución a) La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{rr|r} 3 & -4 & -6 \\ 2 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

b) Se debe tener cuidado de que el sistema se escriba de tal manera que estén presentes los coeficientes de todas las variables (si no aparece cualquier variable, su coeficiente es 0). También, todas las constantes deben estar a la derecha del signo de igual. Necesitamos reordenar el sistema dado como se muestra continuación:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 & (1) \\ x + z - 1 = 0 & (2) \\ x + 2y - 8 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 & (1) \\ x + 0 \cdot y + z = 1 & (2) \\ x + 2y + 0 \cdot z = 8 & (3) \end{cases}$$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

◀

Si no se incluyen las constantes que se encuentran a la derecha del signo de igual, es decir, a la derecha de la barra vertical de la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones, la matriz resultante se denomina **matriz de coeficientes** del sistema. Las **matrices de coeficientes** de los sistemas analizados en el ejemplo 1 son:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

2

EJEMPLO 2 Escribir el sistema de ecuaciones lineales a partir de la matriz aumentada

Escribir el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a cada matriz aumentada.

a) $\left[\begin{array}{rr|r} 5 & 2 & 13 \\ -3 & 1 & -10 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Solución a) La matriz tiene dos filas; por lo tanto, representa a un sistema de dos ecuaciones. Las dos columnas a la izquierda de la barra vertical indican que el sistema tiene dos variables. Si se usan x y y para denotar esas variables, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 13 & (1) \\ -3x + y = -10 & (2) \end{cases}$$

b) Puesto que la matriz aumentada tiene tres filas, representa un sistema de tres ecuaciones. Como hay tres columnas a la izquierda de la barra vertical, el sistema contiene tres variables. Si se usan x, y y z son las tres variables, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 3x - y - z = 7 & (1) \\ 2x + 2z = 8 & (2) \\ y + z = 0 & (3) \end{cases}$$

◄

Operaciones de fila en una matriz

3 Las **operaciones de fila** de una matriz se usan para resolver sistemas de ecuaciones cuando el sistema está escrito como matriz aumentada. Existen tres operaciones de filas básicas.

Operaciones de fila

1. Intercambiar cualesquiera dos filas.
2. Reemplazar una fila por un múltiplo constante distinto de cero de dicha fila
3. Reemplazar una fila por la suma de dicha fila y un múltiplo constante distinto de cero de alguna otra fila.

Estas tres operaciones de fila corresponden a las tres reglas ya estudiadas para obtener un sistema de ecuaciones equivalente. Cuando en una matriz se realiza una operación de fila, la matriz resultante representa un sistema de ecuaciones equivalente al sistema representado por la matriz original.

Por ejemplo, considerando la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Suponiendo que se desea aplicar a esta matriz una operación de fila que tenga como resultado una matriz cuya entrada en la fila 2, columna 1, sea un 0. La operación de fila que utilizar es:

Multiplicar por -4 cada una de las entradas de la fila 1 y sumar el resultado a las entradas correspondientes de la fila 2 **(2)**

Si se utiliza R_2 para representar las dos entradas de la fila 2 y r_1 y r_2 para representar las entradas originales en las filas 1 y 2, respectivamente, entonces se representa la operación de filas del enunciado (2) mediante:

$$R_2 = -4r_1 + r_2$$

Entonces:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -4(1)+4 & -4(2)+(-1) & -4(3)+2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -10 \end{array}\right]$$

$R_2 = -4r_1 + r_2$

Como se deseaba, ahora tenemos la entrada 0 en la fila 2, columna 1

EJEMPLO 3 Aplicar una operación de fila a una matriz aumentada

Aplicar la operación de fila $R_2 = -3r_1 + r_2$ a la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 9 \end{array}\right]$$

Solución La operación de fila $R_2 = -3r_1 + r_2$ nos dice que se van a reemplazar las entradas de la fila 2 por las entradas obtenidas luego de multiplicar por -3 cada entrada en la fina 1, y sumar el resultado a las entradas correspondientes de la fila 2.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ -3(1)+3 & (-3)(-2)+(-5) & -3(2)+9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$R_2 = -3r_1 + r_2$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 17.

EJEMPLO 4 Encontrar una operación de fila en particular

Utilizando la matriz:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Encuentre una operación de fila que tenga como resultado el que esta matriz tenga un 0 en la fila 1, columna 2.

Solución Queremos un 0 en la fila 1, columna 2. Este resultado se obtiene multiplicando por 2 la fila 2 y sumando el resultado a la fila 1. Es decir, aplicamos la operación de fila $R_1 = 2r_2 + r_1$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 2(0)+1 & 2(1)+(-2) & 2(3)+2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$R_1 = 2r_2 + r_1$ ◀

Unas palabras sobre la notación que se acaba de presentar. Una operación de fila como $R_1 = 2r_2 + r_1$ cambia las entradas de la fila 1. Observe también que, en este tipo de operación de fila, se cambian las entradas de una fila dada multiplicando las entradas de alguna otra fila por un número distinto de cero apropiado y sumando los resultados a las entradas originales de la fila por cambiar.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando matrices

4 Para resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando matrices, se utilizan operaciones de fila en la matriz aumentada del sistema, para obtener una matriz con *forma de filas escalonadas*.

Una matriz tiene **forma de filas escalonadas** cuando:

1. La entrada en la fila 1, columna 1 es un 1, y los ceros aparecen abajo.
2. La primera entrada distinta de cero en todas las filas después de la primera es un 1, los ceros aparecen abajo, y aparece a la derecha de la primera entrada distinta de cero de cualquier fila superior.
3. Cualesquiera filas que contengan todos los ceros a la izquierda de la barra vertical se encuentran en la parte inferior.

Por ejemplo, la matriz aumentada para un sistema de tres ecuaciones con tres variables y una solución única, está en forma de fila escalonada si tiene la forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & d \\ 0 & 1 & c & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{array}\right]$$

donde a, b, c, d, e y f son números reales. La última fila de la matriz aumentada establece que $z = f$. Entonces, se determina el valor de y utilizando la sustitución hacia atrás con $z = f$, ya que la fila 2 representa a la ecuación $y + cz = e$. Por último, x se determinó utilizando de nuevo la sustitución hacia atrás.

La solución de un sistema de ecuaciones escribiendo la matriz aumentada en forma de fila escalonada tiene las dos siguientes ventajas:

1. El proceso es algorítmico, es decir, se compone de pasos repetitivos que se programan en una computadora.
2. El proceso funciona en cualquier sistema de ecuaciones lineales, independientemente de la cantidad de ecuaciones o variables presentes.

Del siguiente ejemplo se muestra como exhibir una matriz en forma de fila escalonada.

EJEMPLO 5 **Solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando matrices (forma de filas escalonadas)**

Resolver:
$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 & (1) \\ x + y + z = 1 & (2) \\ 3x + 4y - z = 13 & (3) \end{cases}$$

Solución Primero se escribe la matriz aumentada que representa a este sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 13 \end{array}\right]$$

El primer paso requiere tomar la entrada 1 de la fila 1 columna 1. La manera más fácil de hacerlo es intercambiando las filas 1 y 2. [Observe que esto equivale a intercambiar las ecuaciones (1) y (2) del sistema].

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 0 & | & 6 \\ 3 & 4 & -1 & | & 13 \end{bmatrix}$$

Después, se quiere un 0 en la fila 2, columna 1, y un 0 en la fila 3, columna 1. Para lograrlo, se utiliza las operaciones de fila $R_2 = -2r_1 + r_2$ y $R_3 = -3r_1 + r_3$. Observe que al usar estas operaciones, la fila 1 permanece sin cambios. Además, ¿se da cuenta de que realizar estas operaciones de fila en forma simultánea es lo mismo que efectuar una después de la otra?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 0 & | & 6 \\ 3 & 4 & -1 & | & 13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \\ 0 & 1 & -4 & | & 10 \end{bmatrix}$$

$R_2 = -2r_1 + r_2$
$R_3 = -3r_1 + r_3$

Ahora queremos la entrada 1 en la fila 2, columna 2. Esto se logra intercambiando las filas 2 y 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \\ 0 & 1 & -4 & | & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -4 & | & 10 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Por último, queremos un 1 en la fila 3, columna 3. Para obtenerlo, usamos la operación de fila $R_3 = -\frac{1}{2}r_3$. El resultado es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -4 & | & 10 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -4 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

$R_3 = -\frac{1}{2}r_3$

Esta matriz es la forma de fila escalonada de la matriz aumentada. La tercera fila de esta matriz representa a la ecuación $z = -2$. Se restituye $z = -2$ en la ecuación $y - 4z = 10$ (de la segunda fila) y se obtiene

$$y - 4z = 10$$
$$y - 4(-2) = 10 \qquad z = -2$$
$$y = 2 \qquad \text{Despejando } y.$$

Por último, se restituye $y = 2$ y $z = -2$ en la ecuación $x + y + z = 1$ (de la primera fila) y se obtiene:

$$x + y + z = 1$$
$$x + 2 + (-2) = 1 \qquad y = 2, z = -2$$
$$x = 1 \qquad \text{Despejando } x.$$

La solución del sistema es $x = 1, y = 2, z = -2$. 

Los pasos que se utilizan para resolver el sistema de ecuaciones lineales en el ejemplo 5, se resumen de la siguiente manera:

Solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando matrices (forma de filas escalonadas)

PASO 1: Escribir la matriz aumentada que representa al sistema.

PASO 2: Realizar operaciones de fila que coloquen la entrada 1 en la fila 1, columna 1.

PASO 3: Realizar operaciones de fila que no muevan a la entrada 1 de la fila 1, columna 1, mientras provocan que los 0 aparezcan debajo de ella en la columna 1.

PASO 4: Realizar operaciones de fila que pongan a la entrada 1 en la fila 2, columna 2, dejando sin cambios las entradas de las columnas a su izquierda. Si no es posible colocar un 1 en la fila 2, columna 2, entonces se procede a colocar un 1 en la fila dos, columna 3. Una vez que el 1 está en su lugar, se realizan operaciones de fila para colocar los 0 bajo él.
[Si se obtienen algunas filas que sólo tengan ceros a la izquierda de la barra vertical, colóquelas en la parte inferior de la matriz].

PASO 5: Ahora, repita el paso 4, colocando un 1 en la siguiente fila, pero una columna hacia la derecha. Continúe hasta llegar a la fila inferior o a la barra vertical.

PASO 6: La matriz resultante es la forma de filas escalonadas de la matriz aumentada. Analice el sistema de ecuaciones que le corresponde, para resolver el sistema original.

EJEMPLO 6 Solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando matrices (forma de filas escalonadas)

Resolver: $\begin{cases} x - y + z = 8 & (1) \\ 2x + 3y - z = -2 & (2) \\ 3x - 2y - 9z = 9 & (3) \end{cases}$

Solución **PASO 1:** La matriz aumentada del sistema es:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -9 & 9 \end{array}\right]$$

PASO 2: Puesto que la entrada 1 ya se encuentra en la fila 1, columna 1, se puede saltar al paso 3.

PASO 3: Se realizan las operaciones de fila $R_2 = -2r_1 + r_2$ y $R_3 = -3r_1 + r_3$. Cada una de ellas deja a la entrada 1 sin cambios en la fila 1, columna 1, mientras provocan que los ceros aparezcan debajo de ella.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -9 & 9 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \end{array}\right]$$

$\uparrow$ $R_2 = -2r_1 + r_2$
$R_3 = -3r_1 + r_3$

PASO 4: La manera más simple de colocar la entrada 1 en la fila 2, columna 2, sin alterar la columna 1, consiste en intercambiar las filas 2 y 3 (otra manera sería multiplicar la fila por $\frac{1}{5}$, pero esto introduce fracciones).

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \end{array}\right]$$

Para colocar un 0 bajo el 1 de la fila 2, columna 2, se realiza la operación de fila $R_3 = -5r_2 + r_3$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \end{array}\right] \underset{R_3 = -5r_2 + r_3}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 57 & 57 \end{array}\right]$$

PASO 5: A continuación se obtiene un 1 en la fila 3, columna 3, mediante el uso de $R_3 = \frac{1}{57}r_3$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 57 & 57 \end{array}\right] \underset{R_3 = \frac{1}{57}r_3}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

PASO 6: La matriz de la derecha es la forma de fila escalonada de la matriz aumentada. El sistema de ecuaciones representado por la matriz en forma de fila escalonada es:

$$\begin{cases} x - y + z = 8 & (1) \\ y - 12z = -15 & (2) \\ z = 1 & (3) \end{cases}$$

Utilizando $z = 1$, se restituye para obtener:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 8 & (1) \\ y - 12(1) = -15 & (2) \end{cases} \underset{\text{Si se simplifica.}}{\longrightarrow} \begin{cases} x - y = 7 & (1) \\ y = -3 & (2) \end{cases}$$

Se obtiene $y = -3$, y se restituye en $x - y = 7$, se encuentra que $x = 4$. La solución del sistema es $x = 4$, $y = -3$, $z = 1$. ◀

Algunas veces, resulta conveniente escribir una matriz en **forma de filas escalonadas reducida**. En esta forma, se utilizan las operaciones de fila para obtener entradas iguales a 0 en la parte superior (e inferior) del 1 inicial de una fila. Por ejemplo, la forma de filas escalonadas obtenida en el ejemplo 6 es:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Para escribir esta matriz en forma de filas escalonadas reducida, procedemos de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{R_1 = r_2 + r_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{R_1 = 11r_3 + r_1 \\ R_2 = 12r_3 + r_2}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora la matriz se escribe en forma de fila escalonada reducida. La ventaja de escribir la matriz con esta forma radica en que la solución del sistema, $x = 4, y = -3, z = 1$, se encuentra con rapidez, sin necesidad de sustituir hacia atrás. Otra de sus ventajas se observará en la sección 11.4, donde se analiza el inverso de una matriz.

 **TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 37 Y 47.**

El método matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales también identifica a los sistemas que tienen infinidad de soluciones y los sistemas que son incongruentes. Veamos cómo.

EJEMPLO 7 Solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando matrices

Resolver:
$$\begin{cases} 6x - y - z = 4 & (1) \\ -12x + 2y + 2z = -8 & (2) \\ 5x + y - z = 3 & (3) \end{cases}$$

Solución Se comienza con la matriz aumentada del sistema.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 6 & -1 & -1 & 4 \\ -12 & 2 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{R_1 = -1r_3 + r_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -12 & 2 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 = 12r_1 + r_2 \\ R_3 = -5r_1 + r_3}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -22 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Para obtener un 1 en la fila 2, columna 2, sin cambiar la columna 1, sólo se realiza $R_2 = -\frac{1}{22}r_2$ o $R_3 = -\frac{1}{11}r_3$ y se intercambian columnas; o con $R_2 = \frac{23}{11}r_3 + r_2$. Se utilizará la primera de ellas.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -22 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{R_2 = -\frac{1}{22}r_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 11 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{R_3 = -11r_2 + r_3}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz tiene la forma de filas escalonadas. Puesto que la fila inferior se compone totalmente de ceros, en realidad el sistema se compone de sólo dos ecuaciones.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & (1) \\ y - \frac{1}{11}z = -\frac{2}{11} & (2) \end{cases}$$

Para simplificar la escritura de algunas de las soluciones, expresamos a x y y en términos de z. De la segunda ecuación, $y = \frac{1}{11}z - \frac{2}{11}$. Ahora se sustituye hacia atrás esta solución de y en la primera ecuación y se obtiene:

$$x = 2y + 1 = 2\left(\frac{1}{11}z - \frac{2}{11}\right) + 1 = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11}$$

El sistema original es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11} & (1) \\ y = \frac{1}{11}z - \frac{2}{11} & (2) \end{cases}$$

donde z puede ser cualquier número real.

Véase la situación. El sistema original de tres ecuaciones es equivalente a un sistema que contiene dos ecuaciones. Esto quiere decir que cualesquiera valores de x, y, z, que satisfacen a

$$x = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11} \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{11}z - \frac{2}{11}$$

Serán soluciones. Por ejemplo, $z = 0, x = \frac{7}{11}, y = -\frac{2}{11}$; $z = 1, x = \frac{9}{11}, y = -\frac{1}{11}$; y $z = -1, x = \frac{5}{11}, y = -\frac{3}{11}$ son algunas de las soluciones del sistema original. De hecho, existe una infinidad de valores de x, y y z que satisfacen a ambas ecuaciones, es decir, el sistema original tiene infinidad de soluciones. La solución del sistema original se escribirá:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11} \\ y = \frac{1}{11}z - \frac{2}{11} \end{cases}$$

donde z puede ser cualquier número real. ◀

También se encuentra la solución escribiendo la matriz aumentada en forma de fila escalonada reducida. Comenzando con la forma de fila escalonada, se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{R_1 = 2r_2 + r_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{7}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matriz de la derecha tiene forma de filas escalonadas reducida. El sistema de ecuaciones correspondiente es:

$$\begin{cases} x - \frac{2}{11}z = \frac{7}{11} & (1) \\ y - \frac{1}{11}z = -\frac{2}{11} & (2) \end{cases}$$

o, de manera equivalente:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{11}z + \dfrac{7}{11} & (1) \\ y = \dfrac{1}{11}z - \dfrac{2}{11} & (2) \end{cases}$$

donde z puede ser cualquier número real.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

EJEMPLO 8 Solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando matrices

$$\text{Resolver:} \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = 3 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Solución Comenzando con la matriz aumentada, se procede de la siguiente manera.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{array}\right]$$

$R_2 = -2r_1 + r_2$, $R_3 = -1r_1 + r_3$; Intercambiando las filas 2 y 3.; $R_3 = 3r_2 + r_3$

Esta matriz tiene la forma de filas escalonadas. La fila inferior equivale a la ecuación:

$$0x + 0y + 0z = -27$$

que no tiene solución. Por lo tanto, el sistema original es incongruente. ◄



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

El método de matrices especialmente eficaz con los sistemas en los que el número de ecuaciones y el de variables es diferente. Aquí también, tales sistemas pueden ser congruentes o incongruentes. Si es congruente, tendrá exactamente una solución o infinidad de soluciones.

Observemos un sistema de cuatro ecuaciones que contiene tres variables.

EJEMPLO 9 Solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando matrices

$$\text{Resolver:} \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 & (1) \\ 2x + 2y - 3z = -3 & (2) \\ y - z = -1 & (3) \\ -x + 4y + 2z = 13 & (4) \end{cases}$$

Solución Comenzando con la matriz aumentada, se procede de la siguiente manera.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 13 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 = -2r_1 + r_2 \\ R_4 = r_1 + r_4}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right] \underset{\text{Se intercambian las filas 2 y 3.}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{R_3 = -6r_2 + r_3 \\ R_4 = -2r_2 + r_4}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right] \underset{R_4 = -5r_3 + r_4}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Aquí se podría detener, ya que la matriz está en forma de filas escalonadas, y sustituir hacia atrás $z = 3$ para calcular x y y. O se puede continuar hasta obtener la forma de filas escalonadas reducida.

$$\underset{R_1 = 2r_2 + r_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{R_1 = r_3 + r_1 \\ R_2 = r_3 + r_2}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ahora, la matriz tiene forma de filas escalonadas reducida, y se observa que la solución es $x = 1, y = 2, z = 3$. ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 69.

EJEMPLO 10 Nutrición

El nutriólogo del hospital Cook County quiere que un paciente consuma una comida con 65 gramos de proteínas, 95 gramos de carbohidratos y 905 miligramos de calcio. El servicio de alimentos del hospital le informa que la comida del día es pollo *a la regia*, papas al horno y leche al 2%. Cada ración de pollo *a la regia* tiene 30 gramos de proteínas, 35 gramos de carbohidratos y 200 miligramos de calcio. Cada ración de papas al horno tiene 4 gramos de proteínas, 33 gramos de carbohidratos y 10 miligramos de calcio. Cada vaso de leche al 2% tiene 9 gramos de proteínas, 13 gramos de carbohidratos y 300 miligramos de calcio. ¿Cuántas raciones de cada alimento debe proporcionar el nutriólogo al paciente?

Solución Sean c, p y m, que representan el número de raciones de pollo *a la regia*, papas al horno y leche, respectivamente. El nutriólogo quiere que el paciente consuma 65 gramos de proteínas. Cada ración de pollo *a la regia* tiene 30 gramos de proteínas, por lo que c raciones tendrán $30c$ gramos de proteínas. Cada ración de papas al horno tiene 4 gramos de proteínas, por lo que p papas tendrán $4p$ gramos de proteínas. Por último, cada vaso de leche tiene 9 gramos de proteínas, por lo que m vasos de leche tendrán $9m$ gramos de

proteínas. La misma lógica que tendrá resultado en las ecuaciones para los carbohidratos y calcio, y tendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 30c + 4p + 9m = 65 & \text{ecuación de las proteínas} \\ 35c + 33p + 13m = 95 & \text{ecuación de los carbohidratos} \\ 200c + 10p + 300m = 905 & \text{ecuación del calcio} \end{cases}$$

Comenzando con la matriz aumentada, procedemos de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 30 & 4 & 9 & 65 \\ 35 & 33 & 13 & 95 \\ 200 & 10 & 300 & 905 \end{array}\right] \underset{R_1 = \left(\frac{1}{30}\right)r_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{15} & \frac{3}{10} & \frac{13}{6} \\ 35 & 33 & 13 & 95 \\ 200 & 10 & 300 & 905 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 = -35r_1 + r_2 \\ R_3 = -200r_1 + r_3}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{15} & \frac{3}{10} & \frac{13}{6} \\ 0 & \frac{85}{3} & \frac{5}{2} & \frac{115}{6} \\ 0 & -\frac{50}{3} & 240 & \frac{1415}{3} \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2 = \left(\frac{3}{85}\right)r_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{15} & \frac{3}{10} & \frac{13}{6} \\ 0 & 1 & \frac{3}{34} & \frac{23}{34} \\ 0 & -\frac{50}{3} & 240 & \frac{1415}{3} \end{array}\right] \underset{R_3 = \left(\frac{50}{3}\right)r_2 + r_3}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{15} & \frac{3}{10} & \frac{13}{6} \\ 0 & 1 & \frac{3}{34} & \frac{23}{34} \\ 0 & 0 & \frac{4105}{17} & \frac{8210}{17} \end{array}\right] \underset{R_3 = \left(\frac{17}{4105}\right)r_3}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{15} & \frac{3}{10} & \frac{13}{6} \\ 0 & 1 & \frac{3}{34} & \frac{23}{34} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

La matriz tiene ahora la forma de filas escalonadas. La última matriz representa al sistema:

$$\begin{cases} c + \frac{2}{15}p + \frac{3}{10}m = \frac{13}{6} & (1) \\ p + \frac{3}{34}m = \frac{23}{34} & (2) \\ m = 2 & (3) \end{cases}$$

A partir de (3), se determina que se deben servir dos vasos de leche. Resustituyendo $m = 2$ en la ecuación (2), se encuentra que $p = \frac{1}{2}$, por lo que se deben servir $\frac{1}{2}$ papa al horno. Sustituyendo hacia atrás estos valores en la ecuación (1), se encuentra que $c = 1.5$, por lo que se deben servir al paciente 1.5 raciones de pollo *a la regia*, a fin de satisfacer los requisitos dietéticos. ◀



COMENTARIO: La mayoría de las calculadoras gráficas tienen la capacidad de convertir una matriz aumentada a su forma de filas escalonadas (ref) y también a su forma de filas escalonadas reducida (rref). Vea el análisis en la sección 7 del apéndice. ■

11.2 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Un arreglo rectangular de *m* por *n* números se denomina __________.

2. La matriz utilizada para representar un sistema de ecuaciones lineales se denomina matriz __________ .

3. *Falso o vedadero:* La matriz aumentada de un sistema de dos ecuaciones con tres variables tiene dos filas y cuatro columnas.

4. *Falso verdadero:* La matriz $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ está en forma de filas escalonadas.

Ejercicios

En los problemas 5-16, escriba la matriz aumentada de los sistemas de ecuaciones dados.

5. $\begin{cases} x - 5y = 5 \\ 4x + 3y = 6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 4x - 6y + 2 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 9x - y = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 0.01x - 0.03y = 0.06 \\ 0.13x + 0.10y = 0.20 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{3}{2}y = \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = \frac{2}{3} \end{cases}$

11. $\begin{cases} x - y + z = 10 \\ 3x + 3y = 5 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + y = 5 \\ 2x - 3z = 2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x - 2y = 2 \\ 5x + 3y - z = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - 5z + 2 = 0 \\ x + 2y - 3z = -2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x - y - z = 10 \\ 2x + y + 2z = -1 \\ -3x + 4y = 5 \\ 4x - 5y + z = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x - y + 2z - w = 5 \\ x + 3y - 4z + 2w = 2 \\ 3x - y - 5z - w = -1 \end{cases}$

En los problemas 17-24, aplique a la matriz dada la o las ecuaciones de fila según se indica.

17. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & 5 \end{array}\right]$ $R_2 = -2r_1 + r_2$

18. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ 2 & -5 & -4 \end{array}\right]$ $R_2 = -2r_1 + r_2$

19. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 6 & 6 \\ -3 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$ a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ b) $R_3 = 3r_1 + r_3$

20. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -5 \\ 2 & -5 & -3 & -5 \\ -3 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right]$ a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ b) $R_3 = 3r_1 + r_3$

21. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ -3 & -6 & 4 & 6 \end{array}\right]$ a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ b) $R_3 = 3r_1 + r_3$

22. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right]$ a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ b) $R_3 = 3r_1 + r_3$

23. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right]$ a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ b) $R_3 = 3r_1 + r_3$

24. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 6 \\ -3 & -6 & 4 & 6 \end{array}\right]$ a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ b) $R_3 = 3r_1 + r_3$

En los problemas 25-36, se le proporciona la forma de filas escalonadas reducida de un sistema de ecuaciones lineales. Escriba el sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz dada. Utilice como variables a x, y; o x, y, z; o x_1, x_2, x_3, x_4. Determine si el sistema es congruente o incongruente. Si es congruente, encuentre la solución

25. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

26. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

27. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

28. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$

29. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

30. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

31. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

32. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$

33. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

34. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

35. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

36. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

En los problemas en 37-72, resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones utilizando matrices (operaciones de fila). Si el sistema no tiene solución, mencione que es incongruente.

37. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 4x + 2y = \frac{8}{3} \end{cases}$

41. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$

43. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$

44. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = -2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

45. $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 15x + 5y = 21 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases}$

47. $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x - 3z = 16 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ -2y + 4z = 0 \\ 3x - 2z = -11 \end{cases}$

49. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -10 \end{cases}$

50. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y + z = -7 \\ 3x - 4y - 3z = 7 \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 2 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

52. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 3x - 4y - z = 1 \end{cases}$

53. $\begin{cases} -x + y + z = -1 \\ -x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - 2y - 7z = 0 \end{cases}$

54. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \\ x + 5y + 3z = 2 \end{cases}$

55. $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y - 7z = 1 \end{cases}$

56. $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 6 \\ 7x - 3y + 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

57. $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = -5 \\ x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$

58. $\begin{cases} x - y + z = -4 \\ 2x - 3y + 4z = -15 \\ 5x + y - 2z = 12 \end{cases}$

59. $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 4y + z = -7 \\ -2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

60. $\begin{cases} x + 4y - 3z = -8 \\ 3x - y + 3z = 12 \\ x + y + 6z = 1 \end{cases}$

61. $\begin{cases} 3x + y - z = \frac{2}{3} \\ 2x - y + z = 1 \\ 4x + 2y = \frac{8}{3} \end{cases}$

62. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = \frac{8}{3} \end{cases}$

63. $\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + z - w = 6 \\ x - 2y - 2z + 2w = -1 \end{cases}$

64. $\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - w = 6 \\ -2x + y - 2z + 2w = -1 \end{cases}$

65. $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + 3z = 3 \end{cases}$

66. $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x - 3y + 3z = 4 \end{cases}$

67. $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

68. $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$

69. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$

70. $\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 4z = 0 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

71. $\begin{cases} 4x + y + z - w = 4 \\ x - y + 2z + 3w = 3 \end{cases}$

72. $\begin{cases} -4x + y = 5 \\ 2x - y + z - w = 5 \\ z + w = 4 \end{cases}$

73. Ajuste de curva Encuentre la función $y = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica contiene a los puntos (1, 2), (−2, −7), y (2,−3).

74. Ajuste de curva Encuentre la función $y = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica contiene a los puntos (1, −1), (3, −1), y (−2, 14).

75. Ajuste de una curva Encuentre la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para la que $f(-3) = -112$, $f(-1) = -2$, $f(1) = 4$ y $f(2) = 13$.

76. Ajuste de una curva Encuentre la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para la que $f(-2) = -10$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 5$ y $f(3) = 15$.

77. Nutrición El nutriólogo del hospital Palos Community quiere que un paciente consuma una comida con 78 gramos de proteínas, 59 gramos de carbohidratos y 75 miligramos de vitamina A. El servicio de alimentos del hospital le informa que la comida del día es filete de salmón, huevos cocidos y calabacitas. Cada ración de filete de salmón tiene 30 gramos de proteínas, 20 gramos de carbohidratos y 2 miligramos vitamina A. Cada ración de huevo cocido tiene 15 gramos de proteínas, 2 gramos de carbohidratos y 20 miligramos vitamina A. Cada ración de calabacitas tiene 3 gramos de proteínas, 25 gramos de carbohidratos y 32 miligramos vitamina A. ¿Cuántas raciones de cada alimento debe proporcionar el nutriólogo al paciente?

78. Nutrición El nutriólogo del Hospital General quiere que un paciente consuma una comida con 47 gramos de proteínas, 58 gramos de carbohidratos y 630 miligramos de calcio. El servicio de alimentos del hospital informa al nutriólogo que la comida del día es chuleta de cerdo, elote entero y leche al 2%. Cada ración de chuleta tiene 23 gramos de proteínas, 0 gramos de carbohidratos y 10 miligramos de calcio. Cada ración de elote entero tiene 3 gramos de proteínas, 16 gramos de carbohidratos y 10 miligramos de calcio. Cada vaso de leche al 2% tiene 9 gramos de proteínas, 13 gramos de carbohidratos y 300 miligramos de calcio. ¿Cuántas raciones de cada alimento debe proporcionar el nutriólogo al paciente?

79. Planeación financiera Carletta dispone de $10,000 para invertir. Como su asesor financiero, usted le recomienda invertir en letras de la Tesorería que rinden 6%, bonos de la Tesorería que rinden 7% y bonos corporativos que rinden 8%. Carletta quiere tener un ingreso anual de $680, y que la cantidad invertida en bonos corporativos sea igual a la mitad de lo invertido en bonos de la Tesorería. Calcule la cantidad asignada a cada inversión.

80. Planeación financiera John dispone de $20,000 para invertir. Como su asesor financiero, usted le recomienda invertir en letras de la Tesorería que rinden 5%, bonos de la Tesorería que rinden 7% y bonos corporativos que rinden 9%. John quiere tener un ingreso anual de $1280, y que la cantidad invertida en bonos de la Tesorería sea el doble de lo invertido en bonos corporativos. Calculen la cantidad asignada a cada inversión.

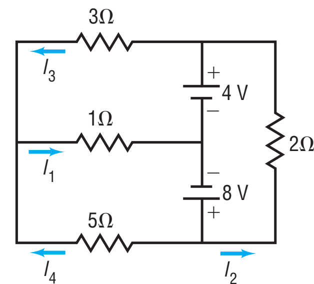
81. Producción En la fabricación de un automóvil, se requiere pintarlo, secarlo y pulirlo. La compañía Motores Epsilon produce tres tipos de automóviles: el Delta, el Beta y el Sigma. Cada Delta necesita 10 horas de pintado, 3 horas de secado y 2 horas de pulido. Un Beta necesita 16 horas de pintado, 5 horas de secado y 3 horas de pulido, mientras que un Sigma necesita 8 horas de pintado, 2 horas de secado y 1 hora de pulido. Si la compañía dispone de 240 horas para pintado, 69 horas para secado, y 41 horas para pulido al mes, ¿cuántos automóviles de cada tipo produce?

82. Producción Una compañía productora de jugos termina la preparación sus productos con el esterilizado, llenado y etiquetado de los envases. Cada envase de jugo de naranja requiere 9 minutos de esterilización, 6 minutos de llenado y 1 minuto de etiquetado. Cada envase de jugo de toronja requiere 10 minutos de esterilización, 4 minutos de llenado y 2 minutos de etiquetado. Cada envase de jugo de tomate requiere 12 minutos de esterilización, 4 minutos de llenado y 1 minuto de etiquetado. Si la compañía utiliza la máquina esterilizadora por 398 minutos, la máquina llenadora por 164 minutos y la máquina etiquetadora por 58 minutos, ¿cuántos envases de cada tipo de jugo se prepararon?

83. Electricidad: Reglas de Kirchhoff La aplicación de las reglas de Kirchhoff al circuito que se muestra más adelante tiene como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -4 + 8 - 2I_2 = 0 \\ 8 = 5I_4 + I_1 \\ 4 = 3I_3 + I_1 \\ I_3 + I_4 = I_1 \end{cases}$$

Encuentre las corrientes I_1, I_2, I_3 e I_4.*

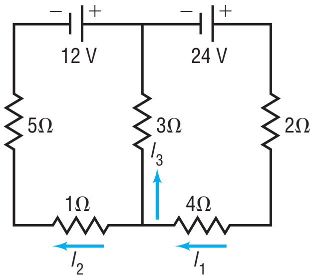


84. Electricidad: Reglas de Kirchhoff La aplicación de las reglas de Kirchhoff al circuito que se muestra más adelante, tiene como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_1 = I_3 + I_2 \\ 24 - 6I_1 - 3I_3 = 0 \\ 12 + 24 - 6I_1 - 6I_2 = 0 \end{cases}$$

*FUENTE: *Physics for Scientists & Engineers*, 3ª ed. de Serway. © 1990. Impreso con autorización de Brooks/Cole, división de Thomson Learning: www.thomsonrights.com. Fax 800-730-2215.

Encuentre las corrientes I_1, I_2 e I_3.*



85. Planeación financiera Tres parejas de jubilados necesitan un ingreso anual adicional de $2000 al año. Como su asesor financiero, usted les recomienda invertir algo de dinero en letras de la Tesorería que rinden 7%, algo de dinero en bonos corporativos que rinden 9% y algo en bonos chatarra que rinden 11%. Elabore una tabla para cada pareja que muestre las diversas maneras en las que podrían alcanzar su objetivo:

a) Si la primera pareja dispone de $20,000 para invertir.
b) Si la segunda pareja dispone de $25,000 para invertir.
c) Si la tercera pareja dispone de $30,000 para invertir.
d) ¿Qué recomendación le haría cada pareja con respecto a la cantidad a invertir y las opciones disponibles?

[**Sugerencia:** Mayores rendimientos suelen acarrear mayor riesgo].

86. Planeación financiera Una joven pareja dispone de $25,000 para invertir. Como su asesor financiero, usted les recomienda invertir algo de dinero en letras de la tesorería que rinden 7%, algo de dinero en bonos corporativos que rinden 9% y algo en bonos chatarra que rinden 11%. Elabore una tabla en la que muestre las diversas maneras en las que podrían alcanzar sus objetivos:

a) La pareja desea recibir $1500 al año.
b) La pareja desea recibir $2000 al año.
c) La pareja desea recibir $2500 al año.
d) ¿Qué recomendación le haría a esta pareja con respecto a la los ingresos que requieren y las opciones disponibles?

[**Sugerencia:** Mayores rendimientos suelen acarrear mayor riesgo].

87. Farmacia La receta de un doctor indica el consumo diario de un líquido con 40 mg de vitamina C y 30 mg de vitamina D. En la farmacia tienen varios compuestos para utilizar: uno contiene 20% de vitamina C y 30% de vitamina D; otro, 40% de vitamina C y 20% de vitamina D; y un tercero tiene 30% de vitamina C y 50% de vitamina D. Elabore una tabla que muestre las combinaciones posibles que se utilizan para satisfacer lo recetado.

88. Farmacia La receta de un médico solicita la elaboración de pastillas que contengan 12 unidades de vitamina B_{12} y 12 unidades de vitamina E. En la farmacia cuentan con tres polvos que se puedan emplear para hacer las pastillas: uno contiene 20% de vitamina B_{12} y 30% de vitamina E; el segundo, 40% de vitamina B_{12} y 20% de vitamina E; y el tercero, 30% de vitamina B_{12} y 40% de vitamina E. Elabore una tabla que muestre las posibles combinaciones de cada polvo que se pueden mezclar en cada pastilla.

89. Describa en uno o dos breves párrafos su estrategia para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices.

90. Para resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando matrices, ¿prefiere acomodar la matriz aumentada en forma de fila escalonada o en forma de fila escalonada reducida? Exponga las razones de su elección.

91. Construya un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables que:

a) No tenga solución
b) Tenga exactamente una solución
c) Tenga infinidad de soluciones

Entregue los tres sistemas a un amigo para que los resuelva y juzgue.

*Fuente: Ibid., Problema 38, p. 791.

11.3 Sistemas de ecuaciones lineales: Determinantes

OBJETIVOS
1 Evaluar determinantes de 2 por 2
2 Utilizar la regla de Cramer para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables
3 Evaluar determinantes de 3 por 3
4 Utilizar la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables
5 Aprender las propiedades de las determinantes

1 En la sección anterior, describimos el método de uso de matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales. En esta sección se trata con otro método para resolver sistemas de ecuaciones lineales; sin embargo, sólo se puede utilizar cuando el número de ecuaciones es igual al número de variables. Aunque el método funcionará con cualquier sistema (siempre que el número de ecuaciones sea igual al número de variables), se utiliza con más

frecuencia en sistemas de dos ecuaciones con dos variables o de tres ecuaciones con tres variables. Este método, llamado *regla de Cramer*, se basa en el concepto de un *determinante*.

Determinantes de 2 por 2

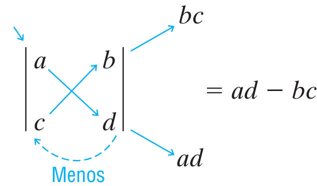
Si *a, b, c* y *d* son cuatro números reales, el símbolo:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

se denomina **determinante de 2 por 2**. Su valor es el número $ad - bc$, es decir:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \textbf{(1)}$$

El siguiente mecanismo resulta útil para recordar el valor de un determinante de 2 por 2:



EJEMPLO 1 **Evaluar un determinante de 2 × 2**

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (6)(-2) = 3 - (-12) = 15$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

Reglas de Cramer



2 Vea ahora el papel que desempeña un determinante de 2 por 2 en la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} ax + by = s & (1) \\ cx + dy = t & (2) \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Se utilizará el método de eliminación para resolver este sistema.

Siempre que $d \neq 0$ y $b \neq 0$, este sistema es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} adx + bdy = sd & (1) \text{ Multiplicado por } d. \\ bcx + bdy = tb & (2) \text{ Multiplicado por } b. \end{cases}$$

Al restar la segunda ecuación a la primera, se obtiene:

$$\begin{cases} (ad - bc)x + 0 \cdot y = sd - tb & (1) \\ \qquad bcx + bdy = tb & (2) \end{cases}$$

Ahora, es posible reescribir la primera ecuación utilizando la notación de determinantes.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}$$

Si $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, se despeja x para obtener:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{D} \qquad \textbf{(3)}$$

Ahora, se regresa al sistema original (2). Siempre que $a \neq 0$ y $c \neq 0$, el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} acx + bcy = cs & \text{(1) Multiplicado por } c. \\ acx + ady = at & \text{(2) Multiplicado por } a. \end{cases}$$

Al restar la primera ecuación a la segunda, se obtiene:

$$\begin{cases} acx + \qquad bcy = \quad cs & (1) \\ 0 \cdot x + (ad - bc)y = at - cs & (2) \end{cases}$$

Ahora, es posible reescribir la segunda ecuación utilizando la notación de determinantes.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}$$

Si $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, se despeja y para obtener:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{D} \qquad \textbf{(4)}$$

Las ecuaciones (3) y (4) nos conducen al siguiente resultado, llamado **regla de Cramer**.

Teorema

Regla de Cramer para dos ecuaciones con dos variables

La solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by = s & (1) \\ cx + dy = t & (2) \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

está dada por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad \textbf{(6)}$$

siempre que

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

En la deducción anterior de la regla de Cramer, se supuso que ninguno de los números a, b, c y d era 0. En el problema 60, se le pedirá que complemente la demostración en condiciones menos favorables que $D = ad - bc \neq 0$.

Ahora, observemos con cuidado el patrón de la regla de Cramer. El denominador en la solución (6) es el determinante de los coeficientes de las variables.

$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

En la solución de x, el numerador es el determinante, que se denota D_x, conformada al reemplazar las entradas de la primera columna (los coeficientes de x) de D por las constantes que están a la derecha del signo de igual.

$$D_x = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}$$

En la solución de y, el numerador es el determinante, que se denota D_y, conformada al reemplazar las entradas de la segunda columna (los coeficientes de y) de D por las constantes que están a la derecha del signo de igual.

$$D_y = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}$$

La regla de Cramer establece que, si $D \neq 0$,

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D} \tag{7}$$

EJEMPLO 2 Resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando determinantes

Usar la regla de Cramer, si es aplicable, para resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 & (1) \\ 6x + y = 13 & (2) \end{cases}$$

Solución El determinante D de los coeficientes de las variables es:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (6)(-2) = 15$$

Puesto que $D \neq 0$, se utiliza la regla de Cramer (7).

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix}}{15} = \frac{30}{15} = 2 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 13 \end{vmatrix}}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

La solución es $x = 2$, $y = 1$. ◄

Si, al tratar de utilizar la regla de Cramer, se encuentra que el determinante D de los coeficientes de las variables es igual a 0 (por lo que no es aplicable la regla de Cramer), entonces el sistema es incongruente o tiene infinidad de soluciones.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 15.

Determinantes de 3 por 3

3 Para utilizar la regla de Cramer con el fin de resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables, necesitamos definir un determinante de tres por tres.

Un determinante de **tres por tres** se representa por medio de:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \textbf{(8)}$$

donde $a_{11}, a_{12}, \ldots$, son números reales.

Al igual que con las matrices, utilizamos un doble subíndice para identificar una entrada, señalando sus números de fila y columna. Por ejemplo, la entrada a_{23} está en la fila 2, columna 3.

El valor de un determinante de 3 por 3 se define en términos de las determinantes de 2 por 2 mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \textbf{(9)}$$

Menos

Determinante de 2 por 2 que queda tras eliminar la fila y la columna que contienen a a_{11}

Determinante de 2 por 2 que queda tras eliminar la fila y la columna que contienen a a_{12}

Determinante de 2 por 2 que queda tras eliminar la fila y la columna que contienen a a_{13}

Los determinantes de 2 por 2 que se muestran en la fórmula (9) se llaman **menores** del determinante de 3 por 3. En un determinante de n por n, el **menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante que resulta de eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna.

EJEMPLO 3 Encontrar los menores de un determinante de 3 por 3

Para el determinante $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -9 \end{vmatrix}$, encuentre a) M_{12} b) M_{23}

Solución a) M_{12} es el determinante que resulta de eliminar la primera fila y la segunda columna de A.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -9 \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = (-2)(-9) - (0)(1) = 18$$

(b) M_{23} es el determinante que resulta de eliminar la segunda fila y la tercera columna de A.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -9 \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = (2)(6) - (0)(-1) = 12$$

◄

Si se consulta de nuevo la fórmula (9), se observa que cada elemento a_{ij} está multiplicado por su menor, pero algunas veces este término se suma y

en otras se resta. Para determinar si se suma o se resta el término, se debe tomar en cuenta el *cofactor*.

En un determinante A de n por n, el **cofactor** del elemento a_{ij}, que se denota con A_{ij}, se obtiene por medio de:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

donde M_{ij} es el menor del elemento a_{ij}.

El exponente de $(-1)^{i+j}$ es la suma de la fila y la columna del elemento a_{ij}, de manera que si $i + j$ es par, $(-1)^{i+j}$ será igual a 1, y si $i + j$ es impar, $(-1)^{i+j}$ será igual a -1.

Para encontrar el valor de un determinante, se multiplica cada elemento de cualquier fila o columna por su cofactor y se suman los resultados. Este proceso se conoce como *desarrollo a través de una fila* o *de una columna*. Por ejemplo, el valor del determinante de 3 por 3 de la fórmula (9) se encontró desarrollando a través de la columna 1.

Si se prefiere desarrollar a través de la columna 2, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Se desarrolla a través de la columna 2.

Si se prefiere desarrollar a través de la columna 3, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Se desarrolla a través de la columna 3.

Se demuestra que el valor del determinante no depende de la fila o columna seleccionada para desarrollarla. Sin embargo, desarrollar una fila o columna que tiene un elemento igual a 0 reduce la cantidad de trabajo necesario para calcular el valor del determinante.

EJEMPLO 4 Evaluar un determinante de 3 × 3

Encontrar el valor del determinante de 3 por 3: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Solución Se elige desarrollar a través de la columna 1.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 3(18 + 4) - 4(12 - 16) + (-1)(-8 - 48) \\ &= 3(22) - 4(-4) + (-1)(-56) \\ &= 66 + 16 + 56 = 138 \end{aligned}$$

◄

También se determina el valor del determinante de 3 por 3 del ejemplo 4 desarrollando la columna 3.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-8 - 48) - 2(-6 - 32) + 3(18 - 16)$$

$$= 56 + 76 + 6 = 138$$



COMENTARIO: Se puede utilizar una calculadora gráfica para evaluar determinantes. Revise el manual para ver cómo. Después verifique la respuesta que se obtuvo en el ejemplo 4. ■



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

Sistemas de tres ecuaciones con tres variables

4 Considerar el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres variables.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases} \quad \textbf{(10)}$$

Se demuestra que si el determinante D de los coeficientes de las variables no es 0, es decir, si

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces, la solución única del sistema (10) está dada por

Regla de Cramer para tres ecuaciones con tres variables

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}, \qquad D \neq 0$$

donde

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

La semejanza de este patrón con el previamente observado para un sistema de dos ecuaciones con dos variables resulta evidente.

EJEMPLO 5 Uso de la regla de Cramer

Usar la regla de Cramer, si es aplicable, para resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 & (1) \\ -x + 2y + 4z = -3 & (2) \\ x - 2y - 3z = 4 & (3) \end{cases}$$

Solución El valor del determinante D de los coeficientes de las variables es:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2) - 1(-1) + (-1)(0)$$

$$= 4 + 1 = 5$$

Ya que $D \neq 0$, procedemos a encontrar los valores de D_x, D_y, D_z.

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}1\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(2) - 1(-7) + (-1)(-2) = 15$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}2\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-7) - 3(-1) + (-1)(-1)$$

$$= -14 + 3 + 1 = -10$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}1\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2) - 1(-1) + 3(0) = 5$$

En consecuencia,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{5} = 3 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{5} = -2 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

La solución es $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$. ◀

Si el determinante de los coeficientes de las variables de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables es igual a 0, entonces no es aplicable en la regla de Cramer. En tal caso, el sistema es incongruente o tiene infinidad de soluciones.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 33.

Propiedades de las determinantes

5 Las determinantes tienen varias propiedades que a veces resultan útiles para calcular su valor. A continuación se mencionan algunas.

Teorema El valor de un determinante cambia de signo si se intercambian cualesquiera dos filas (o columnas). **(11)**

Demostración para determinantes de 2 por 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$ ■

EJEMPLO 6 **Demostración del teorema (11)**

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

◀

Teorema

Si todas las entradas de cualquier fila (o columna) son iguales a 0, el valor del determinante es igual a 0. **(12)**

Demostración Basta con desarrollar la fila (o columna) que contiene los ceros. ■

Teorema

Si cualesquiera dos filas (o columnas) de un determinante tienen entradas correspondientes iguales a cero, el valor del determinante es igual a 0. **(13)**

En el problema 63 se le pide que demuestre este resultado para un determinante de 3 por 3, en la que las entradas de la columna 1 son iguales a las de la columna 3.

EJEMPLO 7 **Demostración del teorema (13)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3)$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

◀

Teorema

Si se multiplica cualquier fila (o columna) de un determinante por un número k distinto de cero, el valor del determinante también cambia por un factor de k. **(14)**

En el problema 62 se le pide que demuestre este resultado para un determinante de 3 por 3, en la fila 2.

EJEMPLO 8 **Demostración del teorema (14)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$$

$$\begin{vmatrix} k & 2k \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6k - 8k = -2k = k(-2) = k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

◀

Teorema

Si se multiplican las entradas de cualquier fila (o columna) de un determinante por un número k distinto de cero, y el resultado se suma a las entradas correspondientes de otra fila (o columna); el valor del determinante no cambia. **(15)**

En el problema 64 se le pide que demuestre este resultado para un determinante de 3 por 3, utilizando las filas 1 y 2.

EJEMPLO 9 **Demostración del teorema (15)**

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -14 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

Se multiplica por 2 a la fila 2, y se suma a la fila 1. ◄

11.3 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. La regla de Cramer utiliza __________ para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

2. $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$ __________.

3. *Falso o verdadero:* Un determinante de 3 por 3 nunca puede ser igual a 0.

4. *Falso o verdadero:* El valor de un determinante no cambia si se intercambian cualesquiera dos filas o columnas.

Ejercicios

En los problemas 5-14, encuentre el valor de cada una de las determinantes.

5. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & -5 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 3 & -9 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

En los problemas 15-42, resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer, si es aplicable. Si no es aplicable, expréselo.

15. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x = 24 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x + 5y = -3 \\ -2y = -4 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x - 6y = 24 \\ 5x + 4y = 12 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 5y = -9 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 4x - 8y = 6 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 4x + 2y = \frac{8}{3} \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 10x + 10y = 5 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 5x + 10y = 4 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$

30. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = -2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 15x + 5y = 21 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases}$

33. $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = -5 \\ x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x - y + z = -4 \\ 2x - 3y + 4z = -15 \\ 5x + y - 2z = 12 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 4y + z = -7 \\ -2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x + 4y - 3z = -8 \\ 3x - y + 3z = 12 \\ x + y + 6z = 1 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 2 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y = 4 \\ -2x + 2y - 4z = -10 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} x + 4y - 3z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x + y + 6z = 0 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$

En los problemas 43-48, resuelva para x.

43. $\begin{vmatrix} x & x \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5$

44. $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix} = -2$

45. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2$

46. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & x & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

47. $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 0 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 7$

48. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4x$

En los problemas 49-56, utilice las propiedades de las determinantes para encontrar el valor de cada determinante, si se sabe que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

49. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$

50. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

51. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -3 & -6 & -9 \\ u & v & w \end{vmatrix}$

52. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x-u & y-v & z-w \\ u & v & w \end{vmatrix}$

53. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x-3 & y-6 & z-9 \\ 2u & 2v & 2w \end{vmatrix}$

54. $\begin{vmatrix} x & y & z-x \\ u & v & w-u \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

55. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & 2y & 2z \\ u-1 & v-2 & w-3 \end{vmatrix}$

56. $\begin{vmatrix} x+3 & y+6 & z+9 \\ 3u-1 & 3v-2 & 3w-3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

57. Geometría: Ecuación de una recta La ecuación de una recta que incluye a los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se expresa como el determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Demuestre este resultado desarrollando el determinante y comparando el resultado con la ecuación de una recta en su forma de 2 puntos.

58. Geometría: Puntos colineales Utilice el resultado obtenido en el problema 57 para demostrar que tres puntos distintos, (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son colineales (forman parte de la misma recta) si y sólo si:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

59. Demuestre que $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = (y-z)(x-y)(x-z)$.

60. Complete la demostración de la regla de Cramer para dos ecuaciones con dos variables.
[**Sugerencia:** En el sistema (5) de la página 874, si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ y $c \neq 0$, ya que $D = -bc \neq 0$. Ahora demuestre que la ecuación (6) proporciona una solución del sistema cuando $a = 0$. Entonces quedan tres casos: $b = 0$, $c = 0$ y $d = 0$].

61. Intercambie las columnas 1 y 3 de un determinante de 3 por 3. Demuestre que el valor de la nueva determinante es igual al valor del determinante original multiplicado por -1.

62. Multiplique por el número k, $k \neq 0$, cada una de las entradas de la fila 2 de un determinante de 3 por 3. Demuestre que el valor de la nueva determinante es igual al valor del determinante original multiplicado por k.

63. Demuestre que el resultado de un determinante de 3 por 3, en la que las entradas de la columna 1 son iguales a las de la columna 3 es igual a 0.

64. Demuestre que si se multiplica por k, $k \neq 0$, la fila 2 de un determinante de 3 por 3, y el resultado se suma a las entradas de la fila 1, no cambia el valor del determinante.

11.4 Álgebra matricial

OBJETIVOS
1 Encontrar la suma y diferencia de dos matrices
2 Encontrar múltiplos escalares de una matriz
3 Encontrar el producto de dos matrices
4 Encontrar el inverso de una matriz
5 Resolver sistemas de ecuaciones utilizando matrices inversas

En la sección 11.2 se definió una matriz como un arreglo rectangular de números reales y se utilizó una matriz aumentada para representar a un sistema de ecuaciones lineales. No obstante, existe una rama de las matemáticas,

llamada **álgebra lineal**, que trata a las matrices de tal manera que permite su manejo algebraico. En esta sección le proporcionamos un panorama de cómo se desarrolla el **álgebra matricial**.

Antes de comenzar, se reafirmará la definición de matriz.

Una **matriz** se define como un arreglo rectangular de números:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Fila } 1 \\ \text{Fila } 2 \\ \vdots \\ \text{Fila } i \\ \vdots \\ \text{Fila } m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{Columna } 1 & \text{Columna } 2 & & \text{Columna } j & & \text{Columna } n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Cada número a_{ij} de la matriz tiene dos índices: el **índice de fila** i y el **índice de columna** j. La matriz anterior tiene m filas y n columnas. Por lo general, los números a_{ij} se conocen como las **entradas** de la matriz. Por ejemplo, a_{23} se refiere a la entrada de la segunda fila, tercera columna.

Se comenzará con un ejemplo que ilustra cómo usar las matrices para representar de manera conveniente una variedad de información.

EJEMPLO 1 Arreglo de datos en una matriz

En una encuesta aplicada a 900 personas, se obtuvo la siguiente información:

200 hombres	Opinaron que los gastos militares del gobierno federal son muy altos
150 hombres	Opinaron que los gastos militares del gobierno federal son muy bajos
45 hombres	No opinaron
315 mujeres	Opinaron que los gastos militares del gobierno federal son muy altos
125 mujeres	Opinaron que los gastos militares del gobierno federal son muy bajos
65 mujeres	No opinaron

Se ordenan estos datos en forma rectangular, de la siguiente manera:

	Muy altos	Muy bajos	No opinó
Hombres	200	150	45
Mujeres	315	125	65

o como la matriz:

$$\begin{bmatrix} 200 & 150 & 45 \\ 315 & 125 & 65 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene dos filas (que representan a hombres y mujeres) y tres columnas (que representan a "muy altos", "muy bajos" y "no opinó"). ◄

La matriz desarrollada en el ejemplo 1 tiene 2 filas y 3 columnas. Por lo general, una matriz con m filas y n columnas se denomina como una **matriz de m por n**. La matriz desarrollada en el Ejemplo 1 es una matriz de 2 por 3, y contiene $2 \cdot 3 = 6$ entradas. Una matriz de m por n, tendrá $m \cdot n$ entradas.

Si una matriz de m por n tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, si $m = n$, entonces se denomina **matriz cuadrada**.

EJEMPLO 2 Ejemplos de matrices

a) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz cuadrada de 2 por 2 b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Matriz de 1 por 3

c) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz cuadrada de 3 por 3 ◀

Suma y diferencia de dos matrices

1 Se comenzará nuestro análisis del álgebra matricial definiendo primero lo que significa que dos matrices sean iguales y luego las operaciones de suma y resta. Es importante observar que estas definiciones requieren que cada una de las matrices tenga el mismo número de filas y el mismo número de columnas.

Por lo general, representamos las matrices por medio de letras mayúsculas, como A, B, C y así sucesivamente.

Se dice que dos matrices A y B, de m por n, son **iguales**, escrito:

$$A = B$$

siempre que cada entrada a_{ij} de A sea igual a la entrada b_{ij} correspondiente de B.

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & \sqrt{4} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt[3]{-8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$ Porque las entradas de la fila 1, columna 2, no son iguales

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$ Porque la matriz de la izquierda es de 2 por 3 y la matriz de la derecha es de 2 por 4

Supóngase que A y B representan a dos matrices de m por n. Se define su **suma** $\boldsymbol{A + B}$ como la matriz de m por n conformada mediante la suma de las entradas correspondientes a_{ij} de A y b_{ij} de B. La **diferencia** $\boldsymbol{A - B}$ se define como la matriz de m por n conformada mediante la resta de las entradas b_{ij} de B de las entradas a_{ij} correspondientes de A. Sólo se permite la suma y resta de matrices que tienen el mismo número m de filas y el mismo número n de columnas. Por ejemplo, no se pueden sumar o restar una matriz de 2 por 3 y una matriz de 2 por 4.

EJEMPLO 3 Suma y resta de matrices

Suponiendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

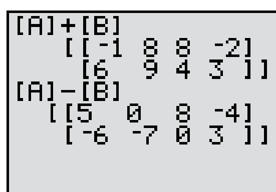
Encontrar: a) $A + B$ b) $A - B$

Solución Primero, se observa que tanto A como B tienen dos filas y cuatro columnas, por lo que es posible encontrar su suma y su diferencia.

a)
$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 + (-3) & 4 + 4 & 8 + 0 & -3 + 1 \\ 0 + 6 & 1 + 8 & 2 + 2 & 3 + 0 \end{bmatrix}$$ Se suman las entradas correspondientes.
$$= \begin{bmatrix} -1 & 8 & 8 & -2 \\ 6 & 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

b)
$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 - (-3) & 4 - 4 & 8 - 0 & -3 - 1 \\ 0 - 6 & 1 - 8 & 2 - 2 & 3 - 0 \end{bmatrix}$$ Se restan las entradas correspondientes.
$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 & -4 \\ -6 & -7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ ◀

Figura 7





Para ver el concepto

Las calculadoras gráficas realizan con facilidad el muchas veces tedioso proceso del álgebra matricial. De hecho, la mayoría de dichas calculadoras pueden manejar matrices hasta de 9 por 9 y algunas incluso mayores. Introduzcan las matrices en una calculadora gráfica. Asígneles el nombre de [*A*] y [*B*]. En la figura 7 se muestran los resultados de la suma y resta de [*A*] y [*B*].

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

Muchas de las propiedades algebraicas de la suma de los números reales también son válidas para las sumas de matrices. Supóngase que A, B y C son matrices de m por n. Entonces la suma de matrices es **conmutativa**. Es decir,

Propiedad conmutativa

$$A + B = B + A$$

La suma de matrices también es **asociativa.** Es decir,

Propiedad asociativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Aunque no vamos a probar estos resultados, las demostraciones se basan en las propiedades conmutativa y asociativa de los números reales, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Verificación de la propiedad conmutativa

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + (-1) & 3 + 2 & -1 + 1 \\ 4 + 5 & 0 + (-3) & 7 + 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 + 2 & 2 + 3 & 1 + (-1) \\ 5 + 4 & -3 + 0 & 4 + 7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ ◀

Una matriz cuyas entradas son todas iguales a cero, se denomina **matriz cero**. Cada una de las siguientes es una matriz cero.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Matriz cuadrada cero de 2 por 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Matriz cero de 2 por 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Matriz cero de 1 por 3

Las matrices cero tienen propiedades semejantes a las del número real cero. Si A es una matriz de m por n y cero es una matriz de m por n, entonces:

$$A + 0 = A$$

En otras palabras, en el álgebra matricial, la matriz cero es la identidad adición.

Múltiplos escalares de una matriz

2 Se puede multiplicar una matriz por número real. Si k es un número real y A es una matriz de m por n, la matriz kA es la matriz de m por n formada al multiplicar por k cada entrada a_{ij} de A. A veces, se conoce al número k como **escalar**, y la matriz kA se denomina **múltiplo escalar** de A.

EJEMPLO 5 Operaciones que utilizan matrices

Suponiendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Encontrar: a) $4A$ b) $\frac{1}{3}C$ c) $3A - 2B$

Solución

a) $$4A = 4\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 3 & 4\cdot 1 & 4\cdot 5 \\ 4(-2) & 4\cdot 0 & 4\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 20 \\ -8 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

b) $$\frac{1}{3}C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cdot 9 & \frac{1}{3}\cdot 0 \\ \frac{1}{3}(-3) & \frac{1}{3}\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{aligned} 3A - 2B &= 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\cdot 3 & 3\cdot 1 & 3\cdot 5 \\ 3(-2) & 3\cdot 0 & 3\cdot 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\cdot 4 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 8 & 2\cdot 1 & 2(-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 3 & 15 \\ -6 & 0 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 16 & 2 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9-8 & 3-2 & 15-0 \\ -6-16 & 0-2 & 18-(-6) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 15 \\ -22 & -2 & 24 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◄



COMPROBACIÓN: Introduzca las matrices $[A]$, $[B]$ y $[C]$ en una calculadora gráfica. Luego calcule $4A$, $\frac{1}{3}C$, y $3A - 2B$.



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

A continuación se enumeran algunas propiedades algebraicas de la multiplicación escalar. Sean h y k números reales, y sean A y B matrices de m por n. Entonces:

Propiedades de la multiplicación escalar

$$k(hA) = (kh)A$$
$$(k + h)A = kA + hA$$
$$k(A + B) = kA + kB$$

Producto de dos matrices

3 A diferencia de la definición directa para la suma de dos matrices, la definición para multiplicar dos matrices no es lo que cabría esperar. Como preparación para tal definición, necesitamos las siguientes definiciones:

Un **vector fila** R es una matriz de 1 por n

$$R = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n]$$

Un **vector columna** C es una matriz de n por 1

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

El **producto *RC*** de R multiplicado por C se define como el número:

$$RC = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = r_1c_1 + r_2c_2 + \cdots + r_nc_n$$

Observe que un vector fila y un vector columna sólo se multiplican si tienen el mismo número entradas.

EJEMPLO 6 Producto de un vector fila por un vector columna

Si $R = [3 \quad -5 \quad 2]$ y $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$, entonces

$$RC = [3 \quad -5 \quad 2]\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = 3 \cdot 3 + (-5)4 + 2(-5)$$
$$= 9 - 20 - 10 = -21$$

◀

Veamos una aplicación del producto de un vector fila por un vector columna.

EJEMPLO 7 Uso de matrices para calcular ingresos

Una tienda de ropa vende camisas a \$25, corbatas de seda a \$8, y trajes de lana a \$300. El mes pasado, la tienda vendió 100 camisas, 200 corbatas, y 50 trajes. ¿Cuáles fueron los ingresos totales por dichas ventas?

Solución Construimos un vector fila R para representar los precios de cada artículo y un vector columna C para representar el número correspondiente de artículos vendidos.

Entonces:

Precios: Camisas Corbatas Trajes; Número vendidos

$$R = [25 \quad 8 \quad 300] \qquad C = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Camisas} \\ \text{Corbatas} \\ \text{Trajes} \end{matrix}$$

Los ingresos totales obtenidos son el producto RC. Es decir,

$$RC = [25 \;\; 8 \;\; 300] \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix}$$

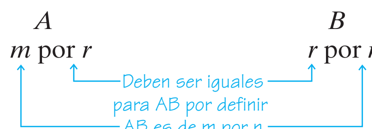
$$= \underbrace{25 \cdot 100}_{\text{Ingresos por camisas}} + \underbrace{8 \cdot 200}_{\text{Ingresos por corbatas}} + \underbrace{300 \cdot 50}_{\text{Ingresos por trajes}} = \underbrace{\$19{,}100}_{\text{Ingresos totales}}$$

◀

La definición de la multiplicación de dos matrices se basa en la definición de un vector fila por un vector columna.

> Sean A, que denota a una matriz de m por r, y B, que denota a una matriz de r por n. El **producto** AB se define como la matriz de m por n cuya entrada en la fila i, columna j es el producto de la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B.

La definición del producto AB de dos matrices A y B, en ese orden, exige que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B; de lo contrario, no se define el producto.



Un ejemplo ayudará a aclarar la definición.

EJEMPLO 8 Multiplicación de dos matrices

Encontrar el producto AB de dos matrices, si:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución Primero, se observa que A es de 2 por 3 y B es de 3 por 2, por lo que el producto AB está definido y será una matriz de 2 por 4.

Supóngase que se quiere la entrada de la fila 2, columna 3 de AB. Para encontrarla, se calcula el producto del vector fila a partir de la fila 2 de y el vector columna a partir de la columna 3 de B.

Fila 2 de A; Columna 3 de B

$$[5 \quad 8 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 5 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 0(-2) = 5$$

Hasta este punto, se tiene:

Columna 3 ↓

$$AB = \begin{bmatrix} __ & __ & __ & __ \\ __ & __ & 5 & __ \end{bmatrix} \leftarrow \text{Fila 2}$$

Ahora, para encontrar la entrada de la fila 1, columna 4 de AB, se calcula el producto de la fila uno de A y la columna 4 de B.

Columna 4 de B

Fila 1 de A

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + (-1)(-1) = 33$$

Si se continúa de esta manera, se encuentra AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Fila 1 de } A \text{ por Columna 1 de } B & \text{Fila 1 de } A \text{ por Columna 2 de } B & \text{Fila 1 de } A \text{ por Columna 3 de } B & \text{Fila 1 de } A \text{ por Columna 4 de } B \\ \text{Fila 2 de } A \text{ por Columna 1 de } B & \text{Fila 2 de } A \text{ por Columna 2 de } B & \text{Fila 2 de } A \text{ por Columna 3 de } B & \text{Fila 2 de } A \text{ por Columna 4 de } B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + (-1)(-3) & 2 \cdot 5 + 4 \cdot 8 + (-1)1 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-1)(-2) & 33 \text{ (del anterior)} \\ 5 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 0(-3) & 5 \cdot 5 + 8 \cdot 8 + 0 \cdot 1 & 5 \text{ (del anterior)} & 5 \cdot 4 + 8 \cdot 6 + 0(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 41 & 4 & 33 \\ 42 & 89 & 5 & 68 \end{bmatrix}$$

◀



COMPROBACIÓN: Introduzca las matrices [A] y [B]. Luego calcule AB (vea lo que ocurre si trata de calcular BA).



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA **23.**

Observe que, con las matrices utilizadas en el ejemplo 8, no está definido el producto BA, porque B es de 3 por 4 y A es de 3 por 2.

En el siguiente ejemplo se ilustra otro resultado que puede aparecer al multiplicar dos matrices.

EJEMPLO 9 Multiplicación de dos matrices

Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

encontrar: a) AB b) BA

Solución

a) $$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2 por 3 · 3 por 2 · 2 por 2

b) $$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

3 por 2 · 2 por 3 · 3 por 3 ◀

En este ejemplo, observe que AB es de 2 por 2 y BA es de 3 por 3. Es posible definir tanto AB como BA, aunque no sean iguales. De hecho, incluso si A y B son matrices n por n, de manera que tanto AB como BA estén definidas y sean de n por, por lo general serán distintas.

EJEMPLO 10 Multiplicación de dos matrices cuadradas

Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

encontrar: a) AB b) BA

Solución

a) $$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

b) $$BA = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$ ◀

Los ejemplos anteriores demuestran que las matrices no comparten una importante propiedad con los números reales: la propiedad conmutativa de la multiplicación. En general:

Teorema

La multiplicación de matrices no es conmutativa.

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 13 Y 15.

A continuación se verán dos propiedades de los números reales que comparten con las matrices. Suponiendo que cada uno de los productos y las sumas están definidos, se tiene lo siguiente:

Propiedad asociativa

$$A(BC) = (AB)C$$

Propiedad distributiva

$$A(B + C) = AB + AC$$

Matriz identidad

Para toda matriz cuadrada de n por n, las entradas de la fila i, columna i, $1 \le i \le n$, se denominan **entradas diagonales**. Una matriz cuadrada de n por n cuyas entradas diagonales son unos, mientras que las demás entradas son ceros, se conoce como **matriz identidad** $\boldsymbol{I_n}$. Por ejemplo,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y así por lo sucesivo.

EJEMPLO 11 Multiplicación por una matriz identidad

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontrar: a) AI_3 b) I_2A c) BI_2

Solución

a) $$AI_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

b) $$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

c) $$BI_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = B$$

◀

El ejemplo 11 demuestra la siguiente propiedad:

Propiedad de identidad

Si A es una matriz de m por n, entonces:

$$I_mA = A \quad \text{y} \quad AI_n = A$$

Si A es una matriz cuadrada de n por n, entonces $AI_n = I_nA - A$.

Una matriz identidad tiene propiedades análogas a las del número real 1. En otras palabras, en el álgebra matricial la matriz identidad es una identidad multiplicativa.

Inverso de una matriz

4 Sea A una matriz cuadrada de n por n. Si existe una matriz A^{-1}, que se lee "inverso de A", de n por n para la cual:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Entonces se dice que A^{-1} es el **inverso** de la matriz A.

Como pronto se verá, no todas las matrices cuadradas tienen inverso. Cuando una matriz A tiene un inverso A^{-1}, se dice entonces que A es **no singular**. Si una matriz A no tiene inverso, se le llama **singular**.*

EJEMPLO 12 Multiplicación de una matriz por su inverso

Demuestre que el inverso de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución Se debe demostrar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

◀

Ahora se muestra una manera de encontrar el inverso de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que A^{-1} está dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

donde x, y, z y w son cuatro variables. De acuerdo con la definición de un inverso, si A tiene de hecho un inverso, se tiene:

$$AA^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x + z & 3y + w \\ 2x + z & 2y + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que las entradas correspondientes deben ser iguales, se deduce que esta ecuación matricial equivale a cuatro ecuaciones ordinarias.

$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y + w = 0 \\ 2y + w = 1 \end{cases}$$

La matriz aumentada de cada sistema es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \textbf{(2)}$$

El procedimiento normal consistiría en transformar cada matriz aumentada a la forma de filas escalonadas reducida. Sin embargo, observe que los lados izquierdos de las matrices aumentadas son iguales, por lo que se pueden usar las mismas operaciones de fila (vea la sección 11.2) para reducir ambos

*Si el determinante de A es cero, entonces A es singular (consulte la sección 11.3).

lados. Encontramos que es más eficaz combinar las dos matrices aumentadas (2) en una sola matriz, como se muestra a continuación, y luego transformarla a forma de filas escalonadas reducida.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora tratamos de transformar el lado izquierdo en una matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_1 = -1r_2 + r_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2 = -2r_1 + r_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \qquad \textbf{(3)}$$

La matriz (3) está en forma de filas escalonadas reducida. Ahora invertimos el paso de combinar las dos matrices aumentadas del número (2) y escribimos la matriz (3) como dos matrices aumentadas.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

A partir de estas matrices, se concluye que $x = 1$, $z = -2$, y $y = -1$, $w = 3$. Si se sustituyen estos valores en la matriz (1), se encuentra que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que en el conjunto de matrices (3), la matriz de 2 por 2 que está a la derecha de la barra vertical es, de hecho, el inverso de A. Observe también que la matriz identidad I_2 es la matriz que aparece a la izquierda de la barra vertical. Las observaciones y procedimientos seguidos con anterioridad funcionan en general.

Procedimiento para encontrar el inverso de una matriz no singular

Para encontrar el inverso de una matriz A no singular de n por n, aplique el siguiente procedimiento:

Paso 1: Forme la matriz $[A|I_n]$.

Paso 2: Transforme la matriz $[A|I_n]$ a forma de filas escalonadas reducida

Paso 3: La forma de filas escalonadas reducida de $[A|I_n]$ tendrá a la matriz identidad I_n del lado izquierdo de la barra vertical; la matriz de n por n que se encuentra a la derecha de la barra vertical es el inverso de A.

En otras palabras, si A es no singular se comienza con la matriz $[A|I_n]$ y después de transformarla a la forma de filas escalonadas reducida se termina con la matriz $[I_n|A^{-1}]$.

Véase otro ejemplo.

EJEMPLO 13 **Encontrar el inverso de una matriz**

La matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

es no singular. Encontrar su inverso.

Solución Primero se forma la matriz:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Después se utilizan operaciones de fila para transformar $[A|I_3]$ a forma de filas escalonadas reducida.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_2 = r_1 + r_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_2 = \frac{1}{4}r_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{R_1 = -1r_2 + r_1 \\ R_3 = -4r_2 + r_3}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{R_3 = -1r_3}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{R_1 = r_3 + r_1 \\ R_2 = -1r_3 + r_2}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

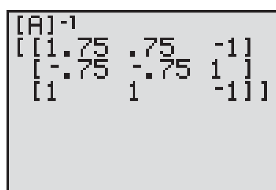
Ahora, la matriz $[A|I_3]$ está en forma de filas escalonadas reducida y la matriz identidad I_3 está a la izquierda de la barra vertical. De tal modo, el inverso de A es.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

◀

Usted puede (y debe) verificar que éste es el inverso correcto, demostrando que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

Figura 8





COMPROBACIÓN: Introduzca la matriz A en una calculadora gráfica. En la figura 8 se muestra A^{-1}.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

Si la transformación de la matriz $[A|I_n]$ a forma de fila escalonada reducida no tiene como resultado el que la matriz identidad I_n quede a la izquierda de la barra vertical, entonces A es singular y no tiene inverso. En el siguiente ejemplo se demuestra esta clase de matriz.

EJEMPLO 14 Demostración de que una matriz no tiene inverso

Demostrar que la siguiente matriz no tiene inverso.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución Procediendo como en el ejemplo 13, se forma la matriz:

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Luego se utilizan operaciones de fila para transformar $[A|I_2]$ a forma de fila escalonada reducida.

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_1 = \frac{1}{4}r_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_2 = -2r_1 + r_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

La matriz $[A|I_2]$ está reducida lo suficiente para que se vea que la matriz identidad no puede aparecer a la izquierda de la barra vertical. Se concluye que A es singular y, entonces, no tiene inverso. ◀



COMPROBACIÓN: Introduzca la matriz A. Trate de encontrar su inverso. ¿Qué es lo que ocurre?


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 59.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

5 Las matrices inversas se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones en los que el número de ecuaciones es igual al número de variables.

EJEMPLO 15 Uso de la matriz inversa para resolver un sistema de ecuaciones lineales

Resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + 3y + 4z = -3 \\ 4y + 3z = 2 \end{cases}$

Solución Si hacemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

entonces el sistema original de ecuaciones se escribe de manera compacta, como la ecuación matricial

$$AX = B \tag{4}$$

Gracias al ejemplo 13, se sabe que la matriz A tiene el inverso A^{-1}, por lo que se multiplica por A^{-1} ambos lados de la ecuación (4).

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B && \text{Multiplicando ambos lados por } A^{-1}. \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B && \text{Propiedad asociativa de la multiplicación.} \\ I_3X &= A^{-1}B && \text{Definición de matriz inversa.} \\ X &= A^{-1}B && \text{Propiedad de matriz identidad.} \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora, se utiliza (5) para encontrar $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

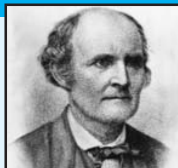
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 13

De esta manera, $x = 1, y = 2, z = -2$. ◀

El método utilizado en el ejemplo 15 para resolver un sistema de ecuaciones, es especialmente útil cuando se necesita resolver varios sistemas de ecuaciones en los que cambian las constantes que aparecen a la derecha del signo de igual, mientras que los coeficientes de las variables del lado izquierdo permanecen sin cambio. Vea algunos ejemplos en los problemas 39 al 58. Sea cuidadoso; este método se utiliza sólo si existe el inverso. Si no existe, se debe utilizar la reducción de filas, ya que el sistema es incongruente o dependiente.

ASPECTO HISTÓRICO



Arthur Cayley (1821–1895)

Las matrices fueron inventadas en 1857 por Arthur Cayley (1821-1895), como una manera de calcular con eficiencia el resultado de sustituir un sistema linear en otro (vea el problema histórico 2). El sistema resultante tenía una riqueza increíble, en el sentido de que se podía representar por medio de matrices una amplia variedad de sistemas matemáticos. Cayley y su amigo James J. Sylvester (1814-1897) se dedicaron gran parte del resto de sus vidas a elaborar la teoría. Después, tomó la estafeta Georg Frobenius (1849-1917), cuyas profundas investigaciones ubicaron a las matrices en un importante lugar dentro de las matemáticas modernas. En 1925, para sorpresa de los físicos, se descubrió que las matrices (con números complejos) eran la herramienta perfecta para describir el comportamiento de los sistemas atómicos. En la actualidad, las matrices se utilizan en una amplia variedad de aplicaciones.

Problemas históricos

1. **Matrices y números complejos** En sus investigaciones, Frobenius hizo hincapié en las maneras en las que es posible emplear las matrices para representar otros sistemas matemáticos. Aquí se representa el comportamiento de los números complejos utilizando matrices. Los matemáticos llaman a esta relación

Número complejo ⟷ Matriz

$$a + bi \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Observe que en la línea superior de la matriz se lee el número complejo.

$$2 + 3i \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longleftrightarrow 4 - 2i$$

a) Encuentre las matrices correspondientes a $2 - 5i$ y a $1 + 3i$.

b) Multiplique las dos matrices.

(*continúa en la página 897*)

c) Encuentre el número complejo correspondiente a la matriz calculada en el inciso b).

d) Multiplique $2 - 5i$ por $1 + 3i$. El resultado debe ser igual al encontrado en el inciso c).

El proceso también funciona para la suma y resta. Pruebe usted mismo.

2. Definición de multiplicación de matrices de Cayley Cayley inventó la multiplicación de matrices con el fin de simplificar el siguiente problema:

$$\begin{cases} u = ar + bs \\ v = cr + ds \end{cases} \qquad \begin{cases} x = ku + lv \\ y = mu + nv \end{cases}$$

a) Encuentre x y y en términos de r y s mediante la sustitución de u y v del primer sistema de ecuaciones en el segundo sistema de ecuaciones.

b) Utilice el resultado del inciso a) para encontrar la matriz A de 2 por 2 en:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

c) Ahora, observe la siguiente manera de hacerlo. Se escriben las ecuaciones en forma de matriz.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

¿Ve cómo definió Cayley la multiplicación de matrices?

11.4 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabularios

1. La matriz B para la que $AB = I_n$, la matriz identidad, se denomina el __________ de A.

2. Una matriz que tiene el mismo número de filas y de columnas se denomina matriz __________ .

3. En el álgebra matricial, la matriz que tiene propiedades semejantes a las del número 1 se conoce como la matriz __________ .

4. *Falso o verdadero:* Toda matriz cuadrada tiene un inverso.

5. *Falso o verdadero:* La multiplicación de matrices es conmutativa.

6. *Falso o verdadero:* Se puede multiplicar cualquier par de matrices.

Ejercicios

En los problemas 7-22, utilice las siguientes matrices para calcular la expresión dada.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

7. $A + B$ **8.** $A - B$ **9.** $4A$ **10.** $-3B$

11. $3A - 2B$ **12.** $2A + 4B$ **13.** AC **14.** BC

15. CA **16.** CB **17.** $C(A + B)$ **18.** $(A + B)C$

19. $AC - 3I_2$ **20.** $CA + 5I_3$ **21.** $CA - CB$ **22.** $AC + BC$

En los problemas 23-28, calcule los productos.

23. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

En los problemas 29-38, todas las matrices son no singulares. Encontrar el inverso de una matriz. Cerciórese de revisar su respuesta.

29. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & a \end{bmatrix}, \quad a \neq 0$

34. $\begin{bmatrix} b & 3 \\ b & 2 \end{bmatrix}, \quad b \neq 0$

35. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 39-58, utilice los inversos encontrados en los problemas 29 al 38 para resolver cada sistema de ecuaciones.

39. $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ **41.** $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$ **42.** $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$

43. $\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ **44.** $\begin{cases} -4x + y = 0 \\ 6x - 2y = 14 \end{cases}$ **45.** $\begin{cases} 6x + 5y = 13 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$ **46.** $\begin{cases} -4x + y = 5 \\ 6x - 2y = -9 \end{cases}$

47. $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ ax + ay = -a \end{cases} \quad a \neq 0$ **48.** $\begin{cases} bx + 3y = 2b + 3 \\ bx + 2y = 2b + 2 \end{cases} \quad b \neq 0$ **49.** $\begin{cases} 2x + y = \frac{7}{a} \\ ax + ay = 5 \end{cases} \quad a \neq 0$

50. $\begin{cases} bx + 3y = 14 \\ bx + 2y = 10 \end{cases} \quad b \neq 0$ **51.** $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -2y + z = -1 \\ -2x - 3y = -5 \end{cases}$ **52.** $\begin{cases} x + 2z = 6 \\ -x + 2y + 3z = -5 \\ x - y = 6 \end{cases}$

53. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -2y + z = 2 \\ -2x - 3y = \frac{1}{2} \end{cases}$ **54.** $\begin{cases} x + 2z = 2 \\ -x + 2y + 3z = -\frac{3}{2} \\ x - y = 2 \end{cases}$ **55.** $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 3x + 2y - z = 8 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$

56. $\begin{cases} 3x + 3y + z = 8 \\ x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$ **57.** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = \frac{7}{3} \\ 3x + y + 2z = \frac{10}{3} \end{cases}$ **58.** $\begin{cases} 3x + 3y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$

En los problemas 59-64, demuestre que cada una de las matrices no tiene inverso.

59. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **60.** $\begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ **61.** $\begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$

62. $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ **63.** $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **64.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 65-68, utilice una calculadora gráfica para calcular el inverso de cada matriz, si existe. Redondear las respuestas a dos decimales.

65. $\begin{bmatrix} 25 & 61 & -12 \\ 18 & -2 & 4 \\ 8 & 35 & 21 \end{bmatrix}$ **66.** $\begin{bmatrix} 18 & -3 & 4 \\ 6 & -20 & 14 \\ 10 & 25 & -15 \end{bmatrix}$ **67.** $\begin{bmatrix} 44 & 21 & 18 & 6 \\ -2 & 10 & 15 & 5 \\ 21 & 12 & -12 & 4 \\ -8 & -16 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ **68.** $\begin{bmatrix} 16 & 22 & -3 & 5 \\ 21 & -17 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 27 & 20 \\ 5 & 15 & -3 & -10 \end{bmatrix}$

En los problemas 69 al 72, utilice la idea subyacente en el ejemplo 15 con una calculadora gráfica, para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Redondear las respuestas a dos decimales.

69. $\begin{cases} 25x + 61y - 12z = 10 \\ 18x - 12y + 7y = -9 \\ 3x + 4y - z = 12 \end{cases}$ **70.** $\begin{cases} 25x + 61y - 12z = 15 \\ 18x - 12y + 7z = -3 \\ 3x + 4y - z = 12 \end{cases}$

71. $\begin{cases} 25x + 61y - 12z = 21 \\ 18x - 12y + 7z = 7 \\ 3x + 4y - z = -2 \end{cases}$ **72.** $\begin{cases} 25x + 61y - 12z = 25 \\ 18x - 12y + 7z = 10 \\ 3x + 4y - z = -4 \end{cases}$

73. Cálculo del costo de producción La compañía ACME Steel produce recipientes de acero inoxidable y aluminio. Un día se fabricaron los siguientes recipientes de acero inoxidable: 500 recipientes de 10 galones, 350 de cinco galones y 400 de un galón de capacidad. El mismo día se fabricaron los siguientes recipientes de aluminio: 700 recipientes de 10 galones, 500 de cinco galones, y 850 de un galón de capacidad.

a) Construya una matriz de 2 por 3 que represente a los datos anteriores. Construya una matriz de 3 por 2 que represente a los mismos datos.

b) Si la cantidad de material utilizado para los recipientes de 10 galones pesa 15 libras, la cantidad utilizada para los recipientes de 5 galones pesa 8 libras, y la cantidad utilizada para los recipientes de 1 galón es de 3 libras, construya una matriz de 3 por 1 que represente la cantidad de material.

c) Multiplique la matriz de 2 por 3 obtenida en inciso *a*) por la matriz de 3 por 1 del inciso *b*), para obtener una matriz de 2 por 1 que muestre el uso de material ese día.

d) Si a la empresa el acero inoxidable le cuesta $0.10 la libra y aluminio $0.05 la libra, construya una matriz de 1 por 2 que represente el costo.

e) Multiplique las matrices de los incisos *c*) y *d*), a fin de determinar el costo total de la producción del día.

74. Cálculo de utilidades Rizza Ford tiene dos tiendas, una en la ciudad y otra en las afueras. En enero, la tienda de la ciudad vendió 400 vehículos subcompactos, 250 medianos y 50 todo terreno; en febrero, vendió 350 subcompactos, 100 medianos y 30 todo terreno. En enero, la tienda ubicada en las afueras vendió 450 vehículos subcompactos, 200 medianos y 140 todo terreno. En febrero, vendió 350 subcompactos, 300 medianos y 100 todo terreno.

a) Construya las matrices de 2 por 3 que resumen los datos de las ventas de cada tienda durante enero y durante febrero (una matriz por mes).

b) Utilice la suma de matrices para obtener el total de ventas del periodo bimestral.

c) Si las utilidades de acuerdo con el tipo de automóvil son de $100 por subcompacto, $150 por mediano y $200 por todo terreno, construya una matriz de 3 por 1 que represente estas utilidades.

d) Multiplique las matrices de los incisos *b*) y *c*) para obtener una matriz de 2 por 1 que muestre las utilidades de cada tienda.

75. Considere la matriz cuadrada de 2 por 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Si $D = ad - bc \neq 0$, demuestre que A en no singular y que

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

76. Elabore una situación diferente de cualquiera de las que se encuentran el texto que se pueda representar por medio de una matriz.

11.5 Descomposición en fracciones parciales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Identidad (sección 1.1, p. 84)
- Funciones racionales propias e impropias (sección 4.3, pp. 335-336)
- Factorización de polinomios (repaso, sección R.5, pp. 43-50)
- Teorema fundamental del álgebra (sección 4.7, p. 377)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 906.

OBJETIVOS
1 Descomponer $\frac{P}{Q}$, donde Q tiene sólo factores lineales no repetidos
2 Descomponer $\frac{P}{Q}$, donde Q tiene factores lineales repetidos
3 Descomponer $\frac{P}{Q}$, donde Q tiene sólo factores cuadráticos irreducibles no repetidos
4 Descomponer $\frac{P}{Q}$, donde Q tiene factores cuadráticos irreducibles repetidos

Consideremos el problema de sumar las dos fracciones:

$$\frac{3}{x+4} \quad \text{y} \quad \frac{2}{x-3}$$

El resultado es:

$$\frac{3}{x+4} + \frac{2}{x-3} = \frac{3(x-3) + 2(x+4)}{(x+4)(x-3)} = \frac{5x-1}{x^2+x-12}$$

El procedimiento inverso, comenzando con una expresión racional $\frac{5x-1}{x^2+x-12}$ y escribirla como la suma (o diferencia) de dos fracciones más

simples $\frac{3}{x+4}$ y $\frac{2}{x-3}$, se conoce como **descomposición en fracciones parciales** y las dos fracciones más sencillas se denominan **fracciones parciales**. La descomposición de una expresión racional en una suma de fracciones parciales es relevante para resolver algunos tipos de problema de cálculo. En esta sección se presenta un método sistemático para descomponer expresiones racionales.



Se comenzará por recordar que una expresión racional es la razón de dos polinomios, digamos P y $Q \neq 0$. Se supone que P y Q no tiene factores comunes. Se recordará también que una expresión racional $\frac{P}{Q}$ se considera **propia** si el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio en el denominador. De lo contrario, la expresión racional se denomina **impropia**.

Puesto que, por medio de la división larga, toda expresión racional impropia se reduce a una forma mixta compuesta por la suma de polinomio y una expresión racional propia, se limitará nuestro siguiente análisis a las expresiones racionales propias.

La descomposición en fracciones parciales de la expresión racional $\frac{P}{Q}$ depende de los factores del denominador Q. Se recordará (de la sección 4.7) que todo polinomio cuyos coeficientes son números reales, se factoriza (en números reales) en productos de factores lineales o cuadráticos irreducibles. De esta manera, el denominador Q de la expresión racional $\frac{P}{Q}$ sólo tendrá factores de uno o ambos de los siguientes tipos:

1. *Factores lineales* de la forma $x - a$, donde a es un número real.
2. *Factores cuadráticos irreducibles* de la forma $ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales, $a \neq 0$, y $b^2 - 4ac < 0$ (lo que garantiza que $ax^2 + bx + c$ no se pueda escribir como el producto de dos factores lineales con coeficientes reales).



En consecuencia, existen cuatro casos por examinar. Se comenzará por el caso en el que Q sólo tiene factores lineales no repetidos.

Caso 1: Q tiene sólo factores lineales no repetidos

Dentro de la suposición de que Q sólo tiene factores lineales no repetidos, el polinomio Q tiene la forma

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \cdots \cdot (x - a_n)$$

donde ninguno de los números $a_1, a_2, \ldots a_n$, son iguales. En este caso, la forma de la descomposición en fracciones parciales de $\frac{P}{Q}$ es

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n} \qquad \textbf{(1)}$$

donde los números $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se van a determinar.

En el siguiente ejemplo se indica cómo encontrar esos números.

EJEMPLO 1 Factores lineales no repetidos

Escribir la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$

Solución Primero, se factoriza el denominador:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

y se concluye que el denominador contiene sólo factores lineales no repetidos. Luego se descompone la expresión racional de acuerdo con la ecuación (1):

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \qquad \textbf{(2)}$$

donde A y B se van a determinar. Para encontrar A y B, se elimina las fracciones multiplicando ambos lados por $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$. El resultado es:

$$x = A(x - 3) + B(x - 2) \qquad \textbf{(3)}$$

o

$$x = (A + B)x + (-3A - 2B)$$

Esta ecuación es una identidad en x. Se igualan los coeficientes de las potencias iguales de x, para obtener

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 0 = -3A - 2B \end{cases}$$

Si se igualan los coeficientes de x: $1x = (A + B)x$.
Si se igualan los coeficientes de x^0, las constantes: $0x^0 = (-3A - 2B)x^0$.

Este sistema de dos ecuaciones con dos variables, A y B, se resuelve utilizando cualquier método que desee. Resolviéndolo, se obtiene:

$$A = -2 \qquad B = 3$$

De la ecuación (2), la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-2}{x - 2} + \frac{3}{x - 3}$$ ◄

COMPROBACIÓN: La descomposición se revisa sumando las fracciones.

$$\frac{-2}{x - 2} + \frac{3}{x - 3} = \frac{-2(x - 3) + 3(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{x}{(x - 2)(x - 3)}$$
$$= \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

A veces se encuentran con mayor facilidad los números que se deben calcular en la descomposición en fracciones parciales, utilizando elecciones adecuadas para x (que pueden incluir a los números complejos) en la identidad obtenida luego de eliminar las fracciones. En el ejemplo 1, la identidad que queda tras eliminar las fracciones, ecuación (3), es:

$$x = A(x - 3) + B(x - 2)$$

Si en esta expresión hacemos a $x = 2$, se elimina el término que contiene a B, quedando $2 = A(-1)$ o $A = -2$. Del mismo modo, si hacemos a $x = 3$, se elimina el término que contiene a A, quedando $3 = B$. Al igual que antes, $A = -2$ y $B = 3$.

En el siguiente ejemplo se utiliza este método.



Caso 2: Q tiene factores lineales repetidos

Si el polinomio Q tiene un factor repetido, digamos $(x - a)^n$, $n \geq 2$ un entero, entonces, la descomposición de $\frac{P}{Q}$, en fracciones parciales contiene términos de la forma:

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a)^n}$$

donde los números $A_1, A_2, \ldots A_n$ se van a determinar.

EJEMPLO 2 Factores lineales repetidos

Escribir la descomposición en fracciones parciales de $\frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + x}$

Solución Primero se factoriza el denominador:

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$$

y se encuentra que el denominador tiene el factor lineal no repetido x y el factor lineal repetido $(x - 1)^2$. En la descomposición, por el caso 1, contiene un término $\frac{A}{x}$ y por el caso 2, contiene los términos $\frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$.

Escribimos

$$\frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Una vez más, se eliminan las fracciones multiplicando ambos lados por $x^3 - 2x^2 + x = x(x - 1)^2$. El resultado es la identidad:

$$x + 2 = A(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + Cx \qquad \textbf{(5)}$$

Si en esta expresión se hace a $x = 0$, se eliminan los términos que contienen a B y C, quedando $2 = A(-1)^2$ o $A = 2$. Del mismo modo, si se hace a $x = 1$, se eliminan los términos que contienen a A y B, quedando $3 = C$. Entonces, la ecuación (5) queda como:

$$x + 2 = 2(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + 3x$$

Ahora, se hace a $x = 2$ (también funciona cualquier elección distinta de 0 o 1). El resultado es:

$$\begin{aligned} 4 &= 2(1)^2 + B(2)(1) + 3(2) \\ 4 &= 2 + 2B + 6 \\ 2B &= -4 \\ B &= -2 \end{aligned}$$

Se tiene $A = 2$, $B = -2$ y $C = 3$.

De la ecuación (4), la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{2}{x} + \frac{-2}{x - 1} + \frac{3}{(x - 1)^2}$$



EJEMPLO 3 Factores lineales repetidos

Escribir la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x^3 - 8}{x^2(x-1)^3}$

Solución El denominador contiene al factor lineal repetido x^2 y al factor lineal repetido $(x-1)^3$. La descomposición en fracciones parciales toma la forma

$$\frac{x^3 - 8}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3} \qquad \textbf{(6)}$$

Al igual que antes, se eliminan las fracciones y se obtiene la identidad:

$$x^3 - 8 = Ax(x-1)^3 + B(x-1)^3 + Cx^2(x-1)^2 + Dx^2(x-1) + Ex^2 \qquad \textbf{(7)}$$

Sea $x = 0$ (¿Sabe por qué se eligió esta opción?) Entonces:

$$-8 = B(-1)$$
$$B = 8$$

Ahora, sea $x = 1$ en la ecuación (7). Entonces

$$-7 = E$$

Se usa $B = 8$ y $E = -7$ en la ecuación (7) y reunimos términos semejantes.

$$\begin{aligned}
x^3 - 8 &= Ax(x-1)^3 + 8(x-1)^3 \\
&\quad + Cx^2(x-1)^2 + Dx^2(x-1) - 7x^2 \\
x^3 - 8 - 8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 7x^2 &= Ax(x-1)^3 + Cx^2(x-1)^2 + Dx^2(x-1) \\
-7x^3 + 31x^2 - 24x &= x(x-1)[A(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx] \\
x(x-1)(-7x + 24) &= x(x-1)[A(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx] \\
-7x + 24 &= A(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx \qquad \textbf{(8)}
\end{aligned}$$

Ahora se trabaja con la ecuación (8). Sea $x = 0$. Entonces

$$24 = A$$

Ahora, sea $x = 1$ en la ecuación (8). Entonces

$$17 = D$$

Se usa $A = 24$ y $D = 17$ en la ecuación (8) y reunimos términos semejantes.

$$-7x + 24 = 24(x-1)^2 + Cx(x-1) + 17x$$

Ahora, sea $x = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
-14 + 24 &= 24 + C(2) + 34 \\
-48 &= 2C \\
-24 &= C
\end{aligned}$$

Ahora se conocen todos los números A, B, C, D y E, por lo que, a partir de la ecuación (6), se tiene la descomposición:

$$\frac{x^3 - 8}{x^2(x-1)^3} = \frac{24}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{-24}{x-1} + \frac{17}{(x-1)^2} + \frac{-7}{(x-1)^3}$$



El método utilizado en el ejemplo 3, aunque es un tanto tedioso, sigue siendo preferible que resolver el sistema de cinco ecuaciones con cinco variables al que conduce el desarrollo de la ecuación (6).

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

3 Los últimos dos casos incluyen factores cuadráticos irreducibles. Un factor cuadrático es irreducible cuando no es posible factorizarlo en factores lineales con coeficientes reales. La expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$ es irreducible siempre que $b^2 - 4ac < 0$. Por ejemplo, $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 4$ son irreducibles.

Caso 3: Q contiene un factor cuadrático irreducible no repetido

Si Q contiene un factor cuadrático irreducible no repetido con la forma $ax^2 + bx + c$, entonces la descomposición de $\frac{P}{Q}$, en fracciones parciales contiene al término

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

donde se van a determinar los números A y B.

EJEMPLO 4 Factor cuadrático irreducible no repetido

Escribir la descomposición en fracciones parciales de $\frac{3x - 5}{x^3 - 1}$

Solución Se factoriza el denominador,

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

y se encuentra que el denominador tiene un factor lineal no repetido $x - 1$ y un factor cuadrático irreducible no repetido $x^2 + x + 1$. Por el caso 1, contiene al término $\frac{A}{x - 1}$ y por el caso 3 contiene al término $\frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$. Se escribe

$$\frac{3x - 5}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \quad \textbf{(9)}$$

Se eliminan fracciones multiplicando ambos lados de la ecuación (9) por $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, para obtener la identidad:

$$3x - 5 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) \quad \textbf{(10)}$$

Ahora, sea $x = 1$. Entonces, la ecuación (10) de $-2 = -A(3)$ o $A = -\frac{2}{3}$. Se utiliza este valor de A en la ecuación (10) y se simplifica.

$$3x - 5 = -\frac{2}{3}(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

Se multiplican ambos lados por 3.

$$3(3x - 5) = -2(x^2 + x + 1) + 3(Bx + C)(x - 1)$$

$$9x - 15 = -2x^2 - 2x - 2 + 3(Bx + C)(x - 1)$$

Se reúnen términos semejantes.

$$2x^2 + 11x - 13 = 3(Bx + C)(x - 1)$$

$$(2x + 13)(x - 1) = 3(Bx + C)(x - 1)$$ Se factoriza el lado izquierdo.

$$2x + 13 = 3Bx + 3C$$ Se cancela $x - 1$ en ambos lados.

$$2 = 3B \quad \text{y} \quad 13 = 3C$$ Se igualan los coeficientes

$$B = \frac{2}{3} \qquad C = \frac{13}{3}$$

A partir de la ecuación (9), se ve que:

$$\frac{3x - 5}{x^3 - 1} = \frac{-\frac{2}{3}}{x - 1} + \frac{\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}}{x^2 + x + 1}$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

4

Caso 4: Q tiene factores cuadráticos irreducibles repetido

Si el polinomio Q tiene un factor cuadrático irreducible repetido $(ax^2 + bx + c)^n$, $n \geq 2$, y entero, entonces en la descomposición de $\frac{P}{Q}$, en fracciones parciales contiene los términos:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Donde se van a determinar los números $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n$ y B_n.

EJEMPLO 5 Factor cuadrático irreducible repetido

Escribir la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x^3 + x^2}{(x^2 + 4)^2}$

Solución El denominador contiene el factor cuadrático irreducible repetido $(x^2 + 4)^2$, por lo que se escribirá

$$\frac{x^3 + x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)^2} \qquad \textbf{(11)}$$

Se eliminarán fracciones para obtener:

$$x^3 + x^2 = (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D$$

Si se suman términos semejantes, se tiene

$$x^3 + x^2 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + D + 4B$$

Si se igualan coeficientes, se llega al sistema

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ 4A + C = 0 \\ D + 4B = 0 \end{cases}$$

La solución es $A = 1, B = 1, C = -4, D = -4$. De la ecuación (11),

$$\frac{x^3 + x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-4x - 4}{(x^2 + 4)^2}$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 35.

11.5 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. *Falso o verdadero:* La ecuación $(x - 1)^2 - 1 = x(x - 2)$ es un ejemplo de una identidad. (p. 84)
2. *Falso o verdadero:* La expresión racional $\frac{5x^2 - 1}{x^3 + 1}$ es propia. (pp. 335–336)
3. Factorice completamente: $3x^4 + 6x^3 = 3x^2$. (pp. 43-50)
4. *Falso o verdero:* Todo polinomio cuyos coeficientes son números reales se factoriza en productos de factores lineales y/o cuadráticos irreducibles. (p. 377)

Ejercicios

En los problemas 5-12, indique si la expresión racional dada es propia o impropia. Si es impropia, reescríbala como la suma de un polinomio y una expresión racional propia.

5. $\frac{x}{x^2 - 1}$ **6.** $\frac{5x + 2}{x^3 - 1}$ **7.** $\frac{x^2 + 5}{x^2 - 4}$ **8.** $\frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1}$

9. $\frac{5x^3 + 2x - 1}{x^2 - 4}$ **10.** $\frac{3x^4 + x^2 - 2}{x^3 + 8}$ **11.** $\frac{x(x - 1)}{(x + 4)(x - 3)}$ **12.** $\frac{2x(x^2 + 4)}{x^2 + 1}$

En los problemas 13-46, escriba la descomposición en fracciones parciales de cada expresión racional.

13. $\frac{4}{x(x - 1)}$ **14.** $\frac{3x}{(x + 2)(x - 1)}$ **15.** $\frac{1}{x(x^2 + 1)}$ **16.** $\frac{1}{(x + 1)(x^2 + 4)}$

17. $\frac{x}{(x - 1)(x - 2)}$ **18.** $\frac{3x}{(x + 2)(x - 4)}$ **19.** $\frac{x^2}{(x - 1)^2(x + 1)}$ **20.** $\frac{x + 1}{x^2(x - 2)}$

21. $\frac{1}{x^3 - 8}$ **22.** $\frac{2x + 4}{x^3 - 1}$ **23.** $\frac{x^2}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$ **24.** $\frac{x + 1}{x^2(x - 2)^2}$

25. $\frac{x - 3}{(x + 2)(x + 1)^2}$ **26.** $\frac{x^2 + x}{(x + 2)(x - 1)^2}$ **27.** $\frac{x + 4}{x^2(x^2 + 4)}$ **28.** $\frac{10x^2 + 2x}{(x - 1)^2(x^2 + 2)}$

29. $\frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)(x^2 + 2x + 4)}$ **30.** $\frac{x^2 - 11x - 18}{x(x^2 + 3x + 3)}$ **31.** $\frac{x}{(3x - 2)(2x + 1)}$ **32.** $\frac{1}{(2x + 3)(4x - 1)}$

33. $\frac{x}{x^2 + 2x - 3}$ **34.** $\frac{x^2 - x - 8}{(x + 1)(x^2 + 5x + 6)}$ **35.** $\frac{x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 4)^2}$ **36.** $\frac{x^3 + 1}{(x^2 + 16)^2}$

37. $\frac{7x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}$ **38.** $\frac{x^5 + 1}{x^6 - x^4}$ **39.** $\frac{x^2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ **40.** $\frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$

41. $\frac{x^3}{(x^2 + 16)^3}$ **42.** $\frac{x^2}{(x^2 + 4)^3}$ **43.** $\frac{4}{2x^2 - 5x - 3}$ **44.** $\frac{4x}{2x^2 + 3x - 2}$

45. $\frac{2x + 3}{x^4 - 9x^2}$ **46.** $\frac{x^2 + 9}{x^4 - 2x^2 - 8}$

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. Cierto **2.** Cierto **3.** $3x^2(x + 1)^2$ **4.** Cierto

11.6 Sistemas de ecuaciones no lineales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Rectas, (sección 2.4. pp. 181-190)
- Parábolas (sección 10.2, pp. 771-778)
- Hipérbolas (sección 10.4, pp. 791-802)
- Circunferencias (sección 2.3, pp. 175-179)
- Elipses (sección 10.3, pp. 781-788)


Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 912.

OBJETIVOS 1 Resolver un sistema de ecuaciones no lineales por sustitución
2 Resolver un sistema de ecuaciones no lineales por eliminación

1 En la sección 11.1 se observa que se puede encontrar de manera geométrica la solución de un sistema de ecuaciones lineales, determinando el o los puntos de intersección (si los hay) de las ecuaciones de sistema. De manera semejante, al resolver sistemas de ecuaciones no lineales la o las soluciones también representan el o los puntos de intersección (si los hay) de las gráficas de las ecuaciones.

No existe una metodología general para resolver los sistemas de ecuaciones no lineales. En ocasiones es mejor la sustitución; otras veces resulta mejor la eliminación; en otros casos, no funciona ninguno de estos métodos. En esta situación, sus aliados son la experiencia y cierto grado de imaginación.

Antes de comenzar, es conveniente hacer dos comentarios.

1. Si el sistema tiene dos variables y si las ecuaciones del sistema son fáciles de graficar, entonces hay que graficarlas. Al graficar cada una de las ecuaciones del sistema, usted podría darse una idea de cuántas soluciones tiene un sistema y dónde se localizan.
2. Al resolver sistemas no lineales, es posible que haya soluciones extrañas, por lo que resulta imperativo revisar todas las soluciones aparentes.

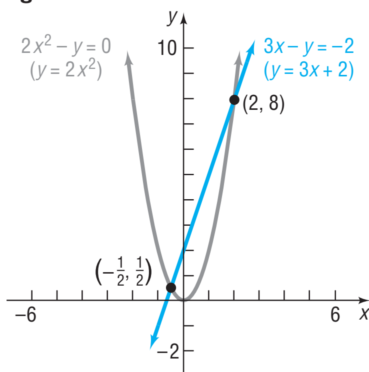
EJEMPLO 1 Solución de un sistema de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - y = -2 & \text{(1) Una recta} \\ 2x^2 - y = 0 & \text{(2) Una parábola} \end{cases}$$

Solución por sustitución

Figura 9



Primero, se observa que el sistema tiene dos variables y que se sabe cómo graficar cada ecuación. En la figura 9, se observa que el sistema parece tener dos soluciones.

Se utilizará la sustitución para resolver el sistema. En la ecuación (1) es fácil despejar y.

$$3x - y = -2 \quad (1)$$
$$y = 3x + 2$$

Se sustituye esta expresión en lugar de y en la ecuación (2). El resultado es una ecuación que sólo contiene a la variable x, la cual entonces se puede despejar.

$$\begin{aligned} 2x^2 - y &= 0 && \text{(2)} \\ 2x^2 - (3x + 2) &= 0 && \text{Se sustituye } y = 3x12. \\ 2x^2 - 3x - 2 &= 0 && \text{Se elimina el paréntesis.} \\ (2x + 1)(x - 2) &= 0 && \text{Se factoriza.} \\ 2x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 &= 0 && \text{Se aplica la propiedad del producto cero.} \\ x = -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x &= 2 \end{aligned}$$

Si se utilizan esos valores de x en $y - 3x + 2$, se encuentra

$$y = 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad y = 3(2) + 2 = 8$$

Las soluciones aparentes son $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ y $x = 2, y = 8$.

Comprobación: Para $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} 3\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2 & (1) \\ 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Para $x = 2, y = 8$:

$$\begin{cases} 3(2) - 8 = 6 - 8 = -2 & (1) \\ 2(2)^2 - 8 = 2(4) - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ambas soluciones se comprueban. Ahora se sabe que las gráficas de la figura 9 se cortan en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y en $(2, 8)$. ◀



Comprobación: Grafique $3x - y = -2$ $(Y_1 = 3x + 2)$ y $2x^2 - y = 0$ $(Y_2 = 2x^2)$ y compare lo que observa con la figura 9. Use INTERSECT (dos veces) para encontrar los dos puntos de intersección.



RESUELVA EL PROBLEMA 19 USANDO LA SUSTITUCIÓN.

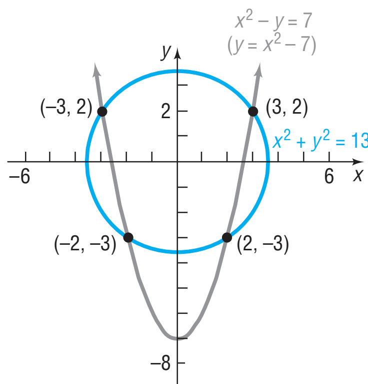
2 El siguiente ejemplo ilustra cómo funciona el método de eliminación en los sistemas no lineales.

EJEMPLO 2 Solución de un sistema de ecuaciones no lineales

Resolver: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 & (1) \text{ Un círculo} \\ x^2 - y = 7 & (2) \text{ Una parábola} \end{cases}$

Solución por eliminación

Figura 10



Primero se grafican ambas ecuaciones como se muestra en la figura 10. Con base en la gráfica, se esperan cuatro soluciones. Se puede eliminar la variable x restando la ecuación (2) a la ecuación (1).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y = 7 \end{cases}$$
$$y^2 + y = 6 \qquad \text{Se resta.}$$

Esta ecuación cuadrática en y se resuelve fácilmente por medio de factorización.

$$y^2 + y - 6 = 0$$
$$(y + 3)(y - 2) = 0$$
$$y = -3 \quad \text{o} \quad y = 2$$

Para calcular x, se utilizan estos valores de y en la ecuación (2).

Si $y = 2$, entonces $x^2 = y + 7 = 9$, por lo que $x = 3$ o -3.

Si $y = -3$, entonces $x^2 = y + 1 = 4$, por lo que $x = 2$ o -2.

Se tienen cuatro soluciones: $x = 3, y = 2$; $x = -3, y = 2$; $x = 2, y = -3$; y $x = -2, y = -3$.

Usted debe verificar que esas cuatro soluciones en realidad también satisfacen la ecuación (1), de tal manera que todas sean soluciones del sistema. Los cuatro puntos, $(3, 2), (-3, 2), (2, -3)$ y $(-2, -3)$, son los puntos de intersección de las gráficas. Observe de nuevo la figura 10. ◀



COMPROBACIÓN: Grafique $x^2 + y^2 = 13$ y $x^2 - y = 7$ (recuerde que para graficar $x^2 + y^2 = 13$ se necesitan dos funciones: $Y_1 = \sqrt{13 - x^2}$ y $Y_2 = -\sqrt{13 - x^2}$.) Compare lo que observa con la figura 10. Use INTERSECT para encontrar los cuatro puntos de intersección.

 RESUELVA EL PROBLEMA 13 USANDO LA ELIMINACIÓN.

EJEMPLO 3 Solución de un sistema de ecuaciones no lineales

Resolver: $\begin{cases} x^2 + x + y^2 - 3y + 2 = 0 & (1) \\ x + 1 + \dfrac{y^2 - y}{x} = 0 & (2) \end{cases}$

Solución por la eliminación

Primero, se multiplica la ecuación (12) por x con el fin de eliminar la fracción. El resultado es un sistema equivalente, porque x no puede ser igual a cero [observe la ecuación (2) para ver por qué].

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 - 3y + 2 = 0 & (1) \\ x^2 + x + y^2 - y = 0 & (2) \end{cases}$$

Ahora, se resta la ecuación (2) de la ecuación (1), con el fin de eliminar x. El resultado es:

$$-2y + 2 = 0$$

$$y = 1 \quad \text{Se despeja } y.$$

Para encontrar x, se sustituye hacia atrás $y = 1$ en la ecuación (1).

$$x^2 + x + 1 - 3 + 2 = 0$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Puesto que x no puede ser 0, el valor $x = 0$ anormal y se descarta. Se procede a verificar la solución $x = -1, y = 1$.

COMPROBACIÓN: $\begin{cases} (-1)^2 + (-1) + 1^2 - 3(1) + 2 = 1 - 1 + 1 - 3 + 2 = 0 & (1) \\ -1 + 1 + \dfrac{1^2 - 1}{-1} = 0 + \dfrac{0}{-1} = 0 & (2) \end{cases}$

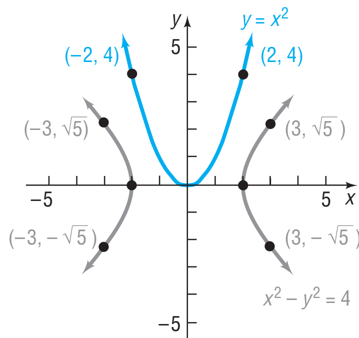
La única solución de sistema es $x = -1, y = 1$. ◀

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 29 Y 49.

EJEMPLO 4 Solución de un sistema de ecuaciones no lineales

Resolver: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 & (1) \\ y = x^2 & (2) \end{cases}$ (1) Una hipérbola; (2) Una parábola

Figura 11



Solución Aquí se utilizan tanto la sustitución como la eliminación. Se utiliza la sustitución y se reemplaza x^2 con y en la ecuación (1). El resultado es:

$$y - y^2 = 4$$
$$y^2 - y + 4 = 0$$

Ésta es una ecuación cuadrática cuya discriminante es $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 1 - 4 \cdot 4 = -15 < 0$. La ecuación no tiene soluciones reales, porque el sistema es incongruente. Las gráficas de estas dos ecuaciones no se cortan. Vea la figura 11. ◀

EJEMPLO 5 Solución de un sistema de ecuaciones no lineales

Resolver: $\begin{cases} 3xy - 2y^2 = -2 & (1) \\ 9x^2 + 4y^2 = 10 & (2) \end{cases}$

Solución Se multiplica por 2 a la ecuación (1) y el resultado se suma a la ecuación (2), con el fin de eliminar los términos de y^2.

$$\begin{cases} 6xy - 4y^2 = -4 & (1) \\ 9x^2 + 4y^2 = 10 & (2) \quad \text{Se suma.} \end{cases}$$
$$9x^2 + 6xy = 6$$
$$3x^2 + 2xy = 2 \quad \text{Se dividen ambos lados entre 3.}$$

Puesto que $x \neq 0$ (¿sabe por qué?), se despeja y de esta ecuación, para obtener:

$$y = \frac{2 - 3x^2}{2x}, \qquad x \neq 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Ahora se sustituye a y en la ecuación (2) del sistema.

$$9x^2 + 4y^2 = 10 \quad (2)$$
$$9x^2 + 4\left(\frac{2 - 3x^2}{2x}\right)^2 = 10 \quad \text{Se sustituye } y = \frac{2 - 3x^2}{2x}.$$
$$9x^2 + \frac{4 - 12x^2 + 9x^4}{x^2} = 10$$
$$9x^4 + 4 - 12x^2 + 9x^4 = 10x^2 \quad \text{Se multiplican ambos lados por } x^2.$$
$$18x^4 - 22x^2 + 4 = 0 \quad \text{Se resta } 10x^2 \text{ a ambos lados.}$$
$$9x^4 - 11x^2 + 2 = 0 \quad \text{Se dividem ambos lados entre 2.}$$

Se factoriza esta ecuación cuadrática (en x^2).

$$(9x^2 - 2)(x^2 - 1) = 0$$
$$9x^2 - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = \frac{2}{9} \quad \text{o} \quad x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{9}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{o} \quad x = \pm 1$$

Para encontrar y, se utiliza la ecuación (1):

$$\text{Si } x = \frac{\sqrt{2}}{3}: \quad y = \frac{2 - 3x^2}{2x} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Si } x = -\frac{\sqrt{2}}{3}: \quad y = \frac{2 - 3x^2}{2x} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{2\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)} = \frac{4}{-2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\text{Si } x = 1: \quad y = \frac{2 - 3x^2}{2x} = \frac{2 - 3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Si } x = -1: \quad y = \frac{2 - 3x^2}{2x} = \frac{2 - 3}{-2} = \frac{1}{2}$$

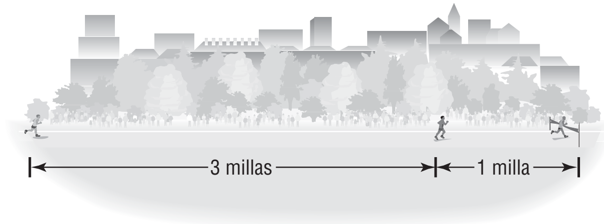
El sistema tiene cuatro soluciones. Realice usted la comprobación. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

EJEMPLO 6 Competencias de carrera de larga distancia

En una carrera de 50 millas, el ganador llega a la meta una milla por delante del segundo lugar y cuatro millas por delante del tercer lugar. Suponiendo que los corredores mantienen una velocidad constante a lo largo de la carrera, ¿por cuántas millas adelantará el segundo lugar al tercero?



Solución Sean v_1, v_2 y v_3 las velocidades de los corredores primero, segundo y tercer lugar, respectivamente. Sean t_1 y t_2 los tiempos (en horas) que les llevan a primer y segundo lugares terminar la carrera. Entonces, se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 50 = v_1 t_1 & \text{(1) El primer lugar corre 50 millas en } t_1 \text{ horas.} \\ 49 = v_2 t_1 & \text{(2) El segundo lugar corre 49 millas en } t_1 \text{ horas.} \\ 46 = v_3 t_1 & \text{(3) El tercer lugar corre 46 millas en } t_1 \text{ horas.} \\ 50 = v_2 t_2 & \text{(4) El segundo lugar corre 50 millas en } t_2 \text{ horas.} \end{cases}$$

Se busca la distancia a la que se encuentra de la meta del tercer lugar en el tiempo t_2. En el tiempo t_2, el corredor en tercer lugar ha recorrido una distancia de v_3t_2 millas, por lo que la distancia restante es $50 - v_3t_2$. Ahora:

$$\begin{aligned}
50 - v_3t_2 &= 50 - v_3\left(t_1 \cdot \frac{t_2}{t_1}\right) \\
&= 50 - (v_3t_1) \cdot \frac{t_2}{t_1} \\
&= 50 - 46 \cdot \frac{\frac{50}{v_2}}{\frac{50}{v_1}} && \begin{cases} \text{A partir de (3), } v_3t_1 = 46; \\ \text{A partir de (4), } t_2 = \frac{50}{v_2}; \\ \text{A partir de (1), } t_1 = \frac{50}{v_1}. \end{cases} \\
&= 50 - 46 \cdot \frac{v_1}{v_2} \\
&= 50 - 46 \cdot \frac{50}{49} && \text{A partir del cociente de (1) y (2).} \\
&\approx 3.06 \text{ millas}
\end{aligned}$$

Cuando el segundo lugar llega a la línea de meta, el tercer lugar está alrededor de 3.06 millas atrás. ◀

Aspecto histórico

Al principio de esta sección, dijimos que la imaginación y la experiencia son importantes para resolver ecuaciones simultáneas no lineales. En realidad, esta clase de problemas llevan hacia algunas de las partes más profundas y complicadas de las matemáticas modernas. Observe de nuevo las gráficas de los ejemplos 1 y 2 de esta sección (figuras 9 y 10). Se ve que el ejemplo 1 tuvo dos soluciones, y el ejemplo 2 tuvo 4 soluciones. Se puede suponer que el número de soluciones es igual al producto de los grados de las ecuaciones involucradas.

En realidad esta conjetura la planteó Etienne Bezout (1730-1783), pero llevó alrededor de 150 años afinar los detalles. Por último se dedujo que, para llegar al número de intersecciones correcto, no sólo se deben contar las intersecciones complejas, sino también las intersecciones que, en cierto sentido, quedan en el infinito. Por ejemplo, si una recta pasa por el eje de una parábola, ambas se cortan en el vértice y en el infinito. Este tema forma parte del estudio de la geometría algebraica.

Problema histórico

Un papiro fechado en el año 1950 aC contiene el siguiente problema: "Una superficie de 100 unidades de área se tiene que representar como la suma dos cuadrados cuyos lados tienen una relación $1 : \frac{3}{4}$." Encuentre los lados resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \frac{3}{4}y \end{cases}$$

11.6 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Graficar la ecuación: $3x + 2$. (pp. 181-190)
2. Graficar la ecuación: $y = x^2 - 4$. (pp. 771-778)
3. Graficar la ecuación: (791-802)
4. Graficar la ecuación: (781-788)

Ejercicios

En los problemas 5-24, grafique cada una de las ecuaciones del sistema. Después, resuelva el sistema para encontrar los puntos de intersección.

5. $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = \sqrt{36 - x^2} \\ y = 8 - x \end{cases}$

8. $\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2} \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2 - x \end{cases}$

10. $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 6 - x \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = 2y \\ x = y^2 - 2y \end{cases}$

12. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 + 4y = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = x + 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y^2 - x = 4 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 - 2y = 8 \end{cases}$

19. $\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2 = y \\ xy = 1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$

22. $\begin{cases} xy = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 6x - 13 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$

En los problemas 25-54, resuelva cada uno de los sistemas. Utilice el método que desee.

25. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 18 \\ xy = 4 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 7 \end{cases}$

27. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 16 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6y - x = -5 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 9y^2 = 15 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2y^2 - 3xy + 6y + 2x + 4 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 + 7 = 0 \\ 3x^2 + y^2 = 31 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + 5 = 0 \\ 2x^2 - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 7x^2 - 3y^2 + 5 = 0 \\ 3x^2 + 5y^2 = 12 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x^2 - 3y^2 + 1 = 0 \\ 2x^2 - 7y^2 + 5 = 0 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x^2 + 2xy = 10 \\ 3x^2 - xy = 2 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 5xy + 13y^2 + 36 = 0 \\ xy + 7y^2 = 6 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - 2y^2 + 8 = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} y^2 - x^2 + 4 = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 16 \\ 4x^2 - y^2 = 24 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 4 \\ 2x^2 - 6y^2 = -3 \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{2}{y^2} + 3 = 0 \\ \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 7 \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{y^2} + 1 = 0 \\ \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{7}{y^2} + 2 = 0 \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{6}{y^4} = 6 \\ \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{2}{y^4} = 19 \end{cases}$

46. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{y^4} = 1 \\ \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{y^4} = 4 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + xy = 6 \end{cases}$

48. $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ xy + x + 6 = 0 \end{cases}$

49. $\begin{cases} y^2 + y + x^2 - x - 2 = 0 \\ y + 1 + \dfrac{x - 2}{y} = 0 \end{cases}$

50. $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + y^2 + 3y - 4 = 0 \\ x - 2 + \dfrac{y^2 - y}{x^2} = 0 \end{cases}$

51. $\begin{cases} \log_x y = 3 \\ \log_x(4y) = 5 \end{cases}$

52. $\begin{cases} \log_x(2y) = 3 \\ \log_x(4y) = 2 \end{cases}$

53. $\begin{cases} \ln x = 4 \ln y \\ \log_3 x = 2 + 2 \log_3 y \end{cases}$

54. $\begin{cases} \ln x = 5 \ln y \\ \log_2 x = 3 + 2 \log_2 y \end{cases}$

En los problemas 55-60, grafique cada una de las ecuaciones y encuentre el o los puntos de intersección, si los hay.

55. La recta $x + 2y = 0$ y el círculo $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

56. La recta $x + 2y + 6 = 0$ y el círculo $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

57. El círculo $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ y la parábola $y^2 + 4y - x + 1 = 0$

58. El círculo $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ y la parábola $y^2 - 2y - x - 5 = 0$

59. La gráfica de $y = \dfrac{4}{x - 3}$ y el círculo $x^2 - 6x + y^2 + 1 = 0$

60. La gráfica de $y = \dfrac{4}{x + 2}$ y el círculo $x^2 + 4x + y^2 - 4 = 0$

En los problemas 61-68, utilice una calculadora gráfica para resolver cada sistema de ecuaciones. Exprese la o las soluciones redondeadas a dos decimales.

61. $\begin{cases} y = x^{2/3} \\ y = e^{-x} \end{cases}$

62. $\begin{cases} y = x^{3/2} \\ y = e^{-x} \end{cases}$

63. $\begin{cases} x^2 + y^3 = 2 \\ x^3y = 4 \end{cases}$

64. $\begin{cases} x^3 + y^2 = 2 \\ x^2y = 4 \end{cases}$

65. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 12 \\ xy^2 = 2 \end{cases}$

66. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 6 \\ xy = 1 \end{cases}$

67. $\begin{cases} xy = 2 \\ y = \ln x \end{cases}$

68. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \ln x \end{cases}$

69. La diferencia de dos números es 2 y la suma de sus cuadrados es 10. Encuentre los números.

70. La suma de dos números es 7 y la diferencia de sus cuadrados es 21. Encuentre los números.

71. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados es 10. Encuentre los números.

72. El producto de dos números es 10 y la diferencia de sus cuadrados es 21. Encuentre los números.

73. La diferencia de dos números es igual a su producto, y la suma de sus recíprocos es 5. Encuentre los números.

74. La suma de dos números es igual a su producto y la diferencia de sus recíprocos es 3. Encuentre los números.

75. La razón de a a b es $\frac{2}{3}$. La suma de a y b es 10. ¿Cuál es la relación de $a + b$ con respecto a $b - a$?

76. La razón de a a b es 4:3. La suma de a y b es 14. ¿Cuál es la relación de $a - b$ con respecto a $a + b$?

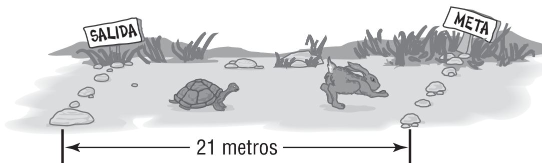
77. **Geometría** El perímetro de un rectángulo es de 16 pulgadas y su área es de 15 pulgadas cuadradas.¿Cuáles son sus dimensiones?

78. **Geometría** Dos cuadrados, cuyos lados están en la razón de 2:3, circundan un área de 52 pies cuadrados. Encuentre los lados de los cuadrados.

79. **Geometría** Dos círculos tienen circunferencias que suman 12π centímetros y áreas que suman 20π centímetros cuadrados. Encuentre el radio de cada uno de los círculos.

80. **Geometría** La altura de un triángulo isósceles es de 3 centímetros y su perímetro es de 18 centímetros. Encuentre la longitud de su base.

81. **La liebre y la tortuga** En una carrera de 21 metros celebrada entre una tortuga y una liebre, la tortuga parte 9 minutos antes que la liebre. La liebre, corriendo a una velocidad promedio de 0.5 metros por hora más rápido que la tortuga, llega a la meta 3 minutos antes que la tortuga.¿Cuáles son las velocidades promedio de la tortuga y la liebre?

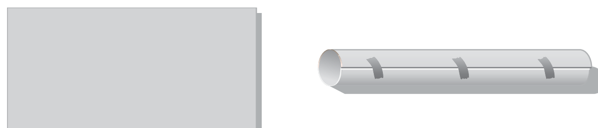


82. **Competencia de carrera** En una carrera de 1 milla, el ganador llega a la meta 10 pies por delante el segundo lugar y 20 pies por delante del tercer lugar. Suponiendo que los corredores mantienen una velocidad constante lo largo de la carrera, ¿por cuántos pies adelantará el segundo lugar al tercero?

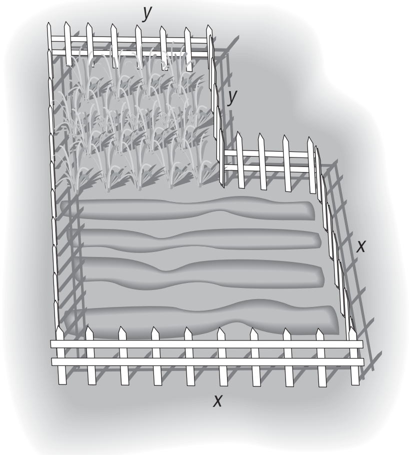
83. **Fabricación de una caja** Se elabora una caja a partir de una pieza de cartón cuya superficie es de 216 centímetros cuadrados, recortando un cuadrado de 2 centímetros en cada esquina y doblando hacia arriba las partes laterales. Si la caja tiene un volumen de 224 centímetros cúbicos, ¿de qué tamaño debe ser la pieza de cartón original?



84. **Fabricación de un tubo cilíndrico** Se elabora un tubo cilíndrico a partir de una pieza de cartón cuya superficie es de 216 centímetros cuadrados, uniendo ambos lados de rectángulo. Observe la figura. Si el tubo tiene un volumen de 224 centímetros cúbicos, ¿de qué tamaño debe ser la pieza de cartón original?



85. Cercado Un granjero dispone de 300 pies de cerca para rodear un terreno de 4500 pies cuadrados con forma de cuadrados contiguos, cuyos lados tienen una longitud de x y y, respectivamente. Observe la figura. Encuentre x y y.



86. Doblado de alambre Un alambre con 60 pies de largo se corta en dos pedazos. ¿Es posible doblar un pedazo en forma de un cuadrado y el otro en forma de un círculo, de manera que el área total encerrada por ambos pedazos sume 100 pies cuadrados? Si es posible, encuentre la longitud del lado del cuadrado y el radio de círculo.

87. Encuentre las fórmulas para la longitud l y la anchura W de un rectángulo en función de su área A y perímetro P.

88. Geometría Encuentre las fórmulas para la base b y uno de los lados iguales l de un triángulo isósceles en términos de su altura h y perímetro P.

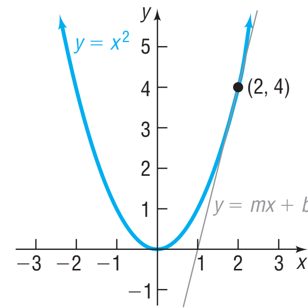
89. Método cartesiano de raíces iguales El método cartesiano para encontrar tangentes se basa en la idea de que, para muchas gráficas, la línea tangente en un punto dado es la *única* recta que corta a la gráfica sólo en ese punto. Se aplicará su método para encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$. Vea la figura. Primero, se sabe que la ecuación de la recta tangente debe tener la forma $y = mx + b$. Si se utiliza el hecho de que el punto $(2, 4)$ forma parte de la recta, se resuelve b en función de m y obtener la ecuación $y = mx + (4 - 2m)$. Ahora se quiere que $(2, 4)$ sea la solución *única* del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx + 4 - 2m \end{cases}$$

Para este sistema, tenemos $x^2 = mx + 4 - 2m$ o $x^2 - mx + (2m - 4) = 0$. Si se utiliza la fórmula cuadrática, se tiene:

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4(2m - 4)}}{2}$$

Para obtener una solución única de x, ambas raíces deben ser iguales; en otras palabras, la discriminante $m^2 - 4(2m - 4)$ debe ser igual a cero. Concluya el proceso para obtener m, y escriba la ecuación de la tangente.



En los problemas 90-96, utilice el método cartesiano del problema 89 para encontrar la ecuación de la recta tangente a cada una de las gráficas, en el punto dado.

90. $x^2 + y^2 = 10$; en $(1, 3)$

91. $y = x^2 + 2$; en $(1, 3)$

92. $x^2 + y = 5$; en $(-2, 1)$

93. $2x^2 + 3y^2 = 14$; en $(1, 2)$

94. $3x^2 + y^2 = 7$; en $(-1, 2)$

95. $x^2 - y^2 = 3$; en $(2, 1)$

96. $2y^2 - x^2 = 14$; en $(2, 3)$

97. Si r_1 y r_2 son dos soluciones de una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se demuestra que:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

Resuelva este sistema de ecuaciones para r_1 y r_2.

98. Un círculo y una recta se cortan a lo más dos veces. Un círculo y una parábola se cortan a lo más cuatro veces. Demuestre que un círculo y la gráfica de un polinomio de tercer grado se cortan a lo más seis veces. ¿Qué supone que pasa con un polinomio de cuarto grado? ¿Y con un polinomio de grado n? ¿Podría explicar sus conclusiones utilizando un argumento algebraico?

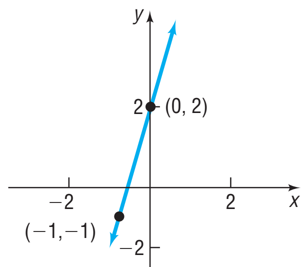
99. Suponga que usted es el gerente de una tienda de laminados. Un cliente le pide que fabrique 10,000 cajas, abiertas por la parte superior. Necesita que las cajas tengan una base cuadrada y una capacidad de 9 pies cúbicos. Usted construye las cajas recortando un cuadrado de cada esquina de una lámina cuadrada y doblando los bordes hacia arriba.

a) ¿Cuáles son las dimensiones de los cuadrados recortados, si el área de la pieza de lámina es de 100 pies cuadrados?

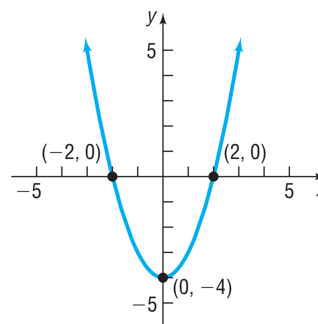
b) ¿Podría elaborar la caja utilizando una pieza de lámina más pequeña? Elabore una lista con las dimensiones de la caja para varias piezas de lámina.

Respuestas a "¿Está preparado?"

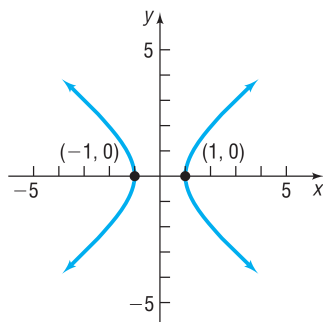
1.



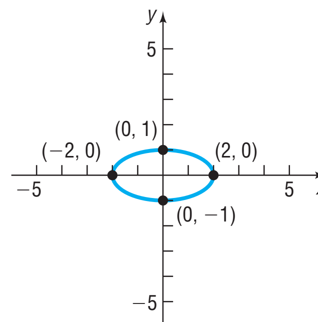
2.



3.



4.



11.7 Sistemas de desigualdades

PREPARACIÓN PARA LA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Solución de desigualdades (sección 1.5, pp. 127-133)
- Rectas (sección 2.4. pp. 181-190)
- Circunferencias (sección 2.3, pp. 175-179)
- Técnicas de graficación: Transformaciones (sección 3.5, pp. 262-271)

 Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 922.

OBJETIVOS 1 Graficar una desigualdad

2 Graficar un sistema de desigualdades

En el capítulo 1, se analizan las desigualdades con una variable. En esta sección, se analizan las desigualdades con dos variables.

EJEMPLO 1 Ejemplos de desigualdades con dos variables

(a) $3x + y \leq 6$ (b) $x^2 + y^2 < 4$ (c) $y^2 \leq x$ ◀

1 Un par ordenado (a, b) **satisface** una desigualdad con dos variables, x y y, si al reemplazar x con a y y con b, se obtiene una expresión verdadera. La **gráfica de una desigualdad con dos variables** x y y se compone de todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad.

Véase un ejemplo.

EJEMPLO 2 Graficar una desigualdad lineal

Graficar la desigualdad lineal: $3x + y \leq 6$

Solución Se comienza con el problema asociado de graficar la ecuación lineal:

$$3x + y = 6$$

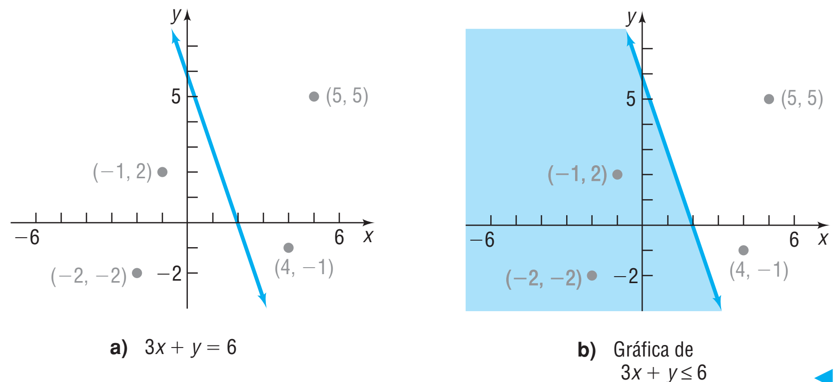
formada al reemplazar (por ahora) al símbolo $\leq$ con $=$. La gráfica de la ecuación lineal es una recta. Vea la figura 12*a*). Esta recta forma parte de la gráfica de la desigualdad que buscamos, porque la desigualdad es no estricta ¿Sabe por qué? Estamos buscando puntos para los que $3x + y$ es menor o *igual que* 6).

Ahora aprobamos unos cuantos puntos elegidos al azar, para ver si pertenecen a la gráfica de la desigualdad.

	$3x + y \leq 6$	**Conclusión**
$(4, -1)$	$3(4) + (-1) = 11 > 6$	No pertenece a la gráfica
$(5, 5)$	$3(5) + 5 = 20 > 6$	No pertenece a la gráfica
$(-1, 2)$	$3(-1) + 2 = -1 \leq 6$	Pertenece a la gráfica
$(-2, -2)$	$3(-2) + (-2) = -8 \leq 6$	Pertenece a la gráfica

Véase de nuevo la figura 12*a*). Observe que los dos puntos que pertenecen a la gráfica quedan del mismo lado de la recta y que los dos puntos que no pertenecen a la gráfica quedan del lado opuesto. Resulta que siempre sucede así. La gráfica que buscamos se compone de todos los puntos que quedan del mismo lado de la recta que $(-1, 2)$ y $(-2, 2)$. La gráfica que buscamos es la región sombreada de la figura 12*b*).

Figura 12



a) $3x + y = 6$ **b)** Gráfica de $3x + y \leq 6$

La gráfica de toda desigualdad con dos variables se puede obtener de manera semejante. Primero, se grafica la ecuación correspondiente a la desigualdad, utilizando una línea punteada si la desigualdad es estricta y una línea sólida si no es estricta. En casi todos los casos, esta gráfica dividirá el plano *xy* en dos o más zonas. Todos o ninguno de los puntos en cada una de esas regiones satisfacen la desigualdad. Basta con utilizar un punto de prueba en cada región para determinar si los puntos son parte de la gráfica. A continuación se describen los pasos utilizados.

Pasos para graficar una desigualdad

PASO 1: Reemplace el símbolo de desigualdad por un signo de igual y grafique la ecuación que resulte. Si la desigualdad es estricta, utilice una línea punteada; si no es estricta, utilice una sólida. Esta línea divide al plano xy en dos o más regiones.

PASO 2: Seleccione un punto de prueba P en cada una de las regiones.

a) Si las coordenadas de P satisfacen la desigualdad, lo mismo sucederá con todos los puntos de esa región. Indique esto sombreando la región.

b) Si las coordenadas de P no satisfacen la desigualdad, lo mismo sucederá con todos los puntos de esa región.

EJEMPLO 3 Gráfica de una desigualdad

Graficar: $x^2 + y^2 \leq 4$

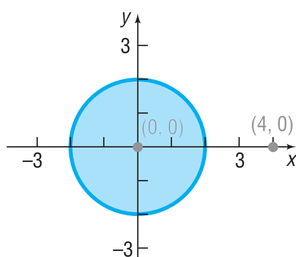
Solución Primero, se grafica la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, que es un círculo de radio 2 con centro en el origen. Se dibuja una linea sólida porque la desigualdad no es estricta. Se usan dos puntos de prueba, uno dentro y otro fuera del círculo.

Dentro (0, 0): $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0 \leq 4$ Pertenece a la gráfia

Fuera (4, 0): $x^2 + y^2 = 4^2 + 0^2 = 16 > 4$ No pertenece a la gráfia

Todos los puntos dentro y sobre el círculo satisfacen la desigualdad. Vea la figura 13. ◀

Figura 13





TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 17.

Las desigualdades lineales son desigualdades con una de las formas:

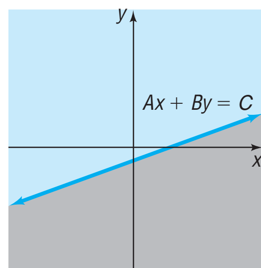
$$Ax + By < C \qquad Ax + By > C \qquad Ax + By \leq C \qquad Ax + By \geq C$$

donde A y B no son iguales a cero.

La gráfica de la ecuación correspondiente a una desigualdad lineal es una recta, la cual divide al plano xy en dos regiones, llamadas semiplanos. Vea la figura 14.

Como se observa, $Ax + By = C$ es la ecuación de la recta limítrofe que divide al plano en dos semiplanos: uno para el cual $Ax + By < C$ y otro para el cual $Ax + By > C$. Gracias a esto, con las desigualdades lineales sólo se requiere un punto de prueba.

Figura 14



EJEMPLO 4 Gráfica de desigualdades lineales

Graficar: a) $y < 2$ b) $y \geq 2x$

Solución

a) La gráfica de la ecuación $y = 2$ es una recta horizontal y no forma parte de la gráfica de la desigualdad. Puesto que (0, 0) satisface la desigualdad, la gráfica se compone del semiplano que se encuentra bajo la recta $y = 2$. Vea la figura 15.

b) La gráfica de la ecuación $y = 2x$ es una recta y forma parte de la gráfica de la desigualdad. Si se utiliza (3, 0) como punto de prueba, se encuentra que no satisface a la desigualdad $[0 < 2 \cdot 3]$. Los puntos del semiplano al lado opuesto de $y = 2x$ satisfacen la desigualdad. Vea la figura 16.

Figura 15

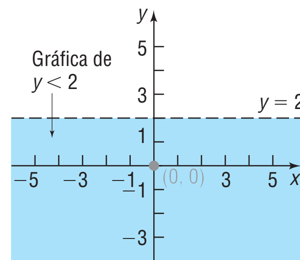
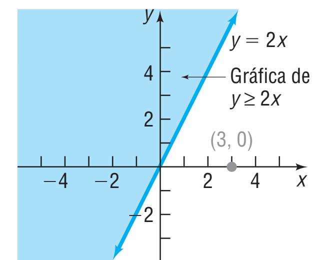


Figura 16





COMENTARIO: Se puede utilizar una calculadora gráfica para graficar desigualdades. Para aprender cómo, vea la sección 6 del apéndice. ■



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 13.

Sistemas de desigualdades con dos variables

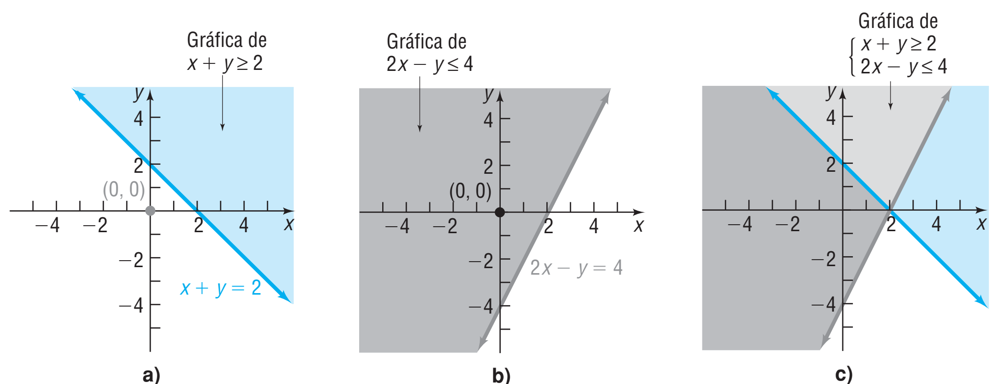
2 La **gráfica de un sistema de desigualdades** con dos variables x y y es el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen de manera simultánea *cada una* de las desigualdades del sistema. Se obtiene graficando cada desigualdad de forma individual y determinando luego dónde se cortan, si es que lo hacen.

EJEMPLO 5 Gráfica de un sistema de desigualdades lineales

Graficar el sistema: $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$

Solución Primero, se grafica la desigualdad $x + y \geq 2$, como la zona sombreada de la figura 17*a*). Después, se grafica la desigualdad $2x + y \leq 4$, como la zona sombreada de la figura 17*b*). Ahora, se sobreponen ambas gráficas, como se muestra en la figura 17*c*). Los puntos que están en ambas regiones sombreadas [la región empalmada, más oscura de la figura 17*c*)] son las soluciones del sistema que buscamos, porque satisfacen de manera simultánea cada desigualdad lineal.

Figura 17

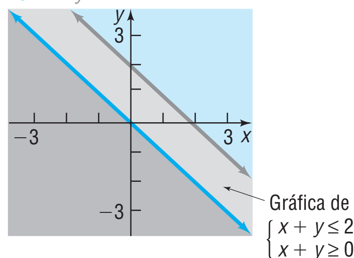


EJEMPLO 6 Gráfica de un sistema de desigualdades lineales

Graficar el sistema: $\begin{cases} x + y \le 2 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$

Solución Vea la figura 18. La gráfica del sistema es la región empalmada más oscura que se encuentra entre las dos líneas limítrofes.

Figura 18



◀



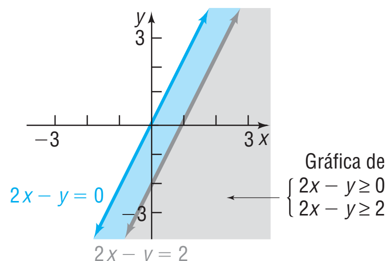
TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 35.

EJEMPLO 7 Gráfica de un sistema de desigualdades lineales

Graficar el sistema: $\begin{cases} 2x - y \ge 2 \\ 2x - y \ge 0 \end{cases}$

Solución Vea la figura 19. La gráfica del sistema es la región empalmada, más oscura que se encuentra entre las dos líneas limítrofes. Observe que la gráfica del sistema es idéntica a la gráfica de la sola desigualdad $2x - y \ge 2$.

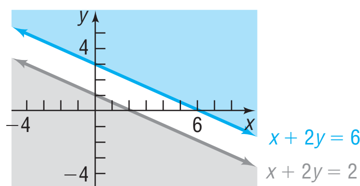
Figura 19



◀

EJEMPLO 8 Gráfica de un sistema de desigualdades lineales

Figura 20



Graficar el sistema: $\begin{cases} x + 2y \le 2 \\ x + 2y \ge 6 \end{cases}$

Solución Vea la figura 20. Puesto que no aparece ninguna región empalmada, no existen puntos en el plano xy que satisfagan en forma simultánea cada una de las desigualdades. Por lo tanto, el sistema no tiene solución. ◀



El ejemplo siguiente es importante para hacer algunas clases de problemas de cálculo.

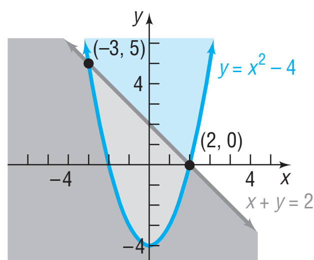
EJEMPLO 9 Gráfica de un sistema de desigualdades

Encontrar la región que se encuentra bajo la gráfica de $x + y = 2$ y sobre la gráfica de $y = x^2 - 4$ graficando el sistema:

$$\begin{cases} y \geq x^2 - 4 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$$

Encontrar todos los puntos de intersección.

Figura 21



Solución En la figura 21 se muestra la gráfica de la región que está sobre la gráfica de la parábola $y = x^2 - 4$ y bajo la gráfica de la recta $x + y = 2$. Los puntos de intersección se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Si se utiliza la sustitución, se encuentra:

$$\begin{aligned} x + (x^2 - 4) &= 2 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x + 3)(x - 2) &= 0 \\ x = -3 \qquad x &= 2 \end{aligned}$$

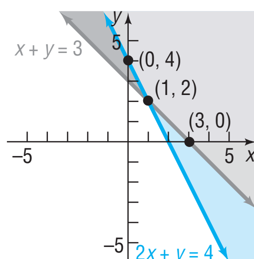
Los dos puntos de intersección son $(-3, 5)$ y $(2, 0)$. ◄



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 55.

EJEMPLO 10 Gráfica de un sistema de cuatro desigualdades lineales

Figura 22



Graficar el sistema: $\begin{cases} x + y \geq 3 \\ 2x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Solución Las dos desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$ indican que la gráfica del sistema deben estar en el primer cuadrante. Los concentramos en las otras dos desigualdades. La gráfica del sistema es la intersección de las gráfica de estas dos desigualdades y el cuadrante uno, que aparece sombreada con gris en la figura 22. ◄

EJEMPLO 11 Planeación financiera

Una pareja de jubilados dispone de hasta \$25,000 para invertir. Como su asesor financiero, usted les recomienda que inviertan un mínimo de \$15,000 en letras de la tesorería que rinden 6% y un máximo de \$5000 en bonos corporativos que rinden 9%.

a) Si se utiliza x para denotar la cantidad de dinero invertido en letras de la Tesorería y para la cantidad invertida en bonos corporativos, escriba un sistema de desigualdades lineales que describa los montos posibles de cada inversión. Se sopondrá que x y y están en miles de dólares.

b) Graficar el sistema.

Solución a) El sistema de desigualdades lineales es:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 25 \\ x \geq 15 \\ y \leq 5 \end{cases}$$

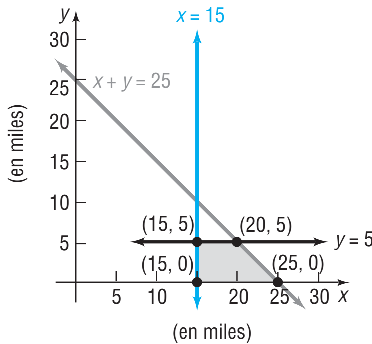
x y y son variables no negativas, ya que representan al dinero invertido en miles.

El total de ambas inversiones, $x + y$, no supera los $25,000.

Un mínimo de $15,000 en letras de la Tesorería.

Un máximo de $5000 en bonos corporativos.

Figura 23



b) Vea la región sombreada de la figura 23. Observe que, una vez más, las desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$ exigen que la gráfica del sistema se encuentre en el primer cuadrante. ◀

Se dice que la gráfica del sistema de desigualdades lineales que aparece en la figura 23 es **acotada**, porque se le puede rodear con un círculo que tenga el radio lo suficientemente grande. Se dice que una gráfica es **no acotada** cuando no queda dentro de algún círculo. Por ejemplo, la gráfica del sistema de desigualdades lineales de la figura 22 es no acotada, ya que se extiende de manera indefinida en una dirección en particular.

En las figuras 22 y 23, observe que se graficaron los puntos pertenecientes a la gráfica que también son puntos de intersección de las líneas limítrofes. Dichos puntos se conocen como **vértices** o **esquinas** de la gráfica. El sistema graficado en la figura 22 tiene tres esquinas: El sistema graficado en la figura 23 tiene cuatro esquinas:

Estas ideas se utilizarán en la siguiente sección al desarrollar un método para resolver problemas de programación lineal, que es una importante aplicación de las desigualdades lineales.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 43.

11.7 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Resolver la desigualdad: $3x + 4 < 8 - x$. (pp. 127−133)
2. Graficar la ecuación: (pp. 181-190)
3. Graficar la ecuación: $x^2 + y^2 = 9$. (pp. 175–179)
4. Graficar la ecuación: $y = x^2 + 4$. (pp. 262–271)
5. *Falso o verdadero:* Las rectas $2x + y = 4$ y $4x + 2y = 0$ son paralelas, (pp. 181−190)
6. La gráfica de $y = (x - 2)^2$ se obtiene desplazando la gráfica de ________ hacia la ¿izquierda o derecha? una distancia de ______ unidades. (pp. 262−271)

Conceptos y vocabulario

7. Una desigualdad con dos variables, x y y, es __________ por un par ordenado (a, b) si, al reemplazar x con a y y con b, se obtiene una expresión verdadera.
8. La gráfica de una desigualdad lineal se denomina _____.
9. *Falso o verdadero:* La gráfica de una desigualdad lineal es una recta.
10. *Falso o verdadero:* A veces, la gráfica de un sistema de desigualdades lineales es no acotada.

Ejercicios

En los problemas 11-22, grafique cada desigualdad.

11. $x \geq 0$ **12.** $y \geq 0$ **13.** $x \geq 4$ **14.** $y \leq 2$

15. $2x + y \geq 6$ **16.** $3x + 2y \leq 6$ **17.** $x^2 + y^2 > 1$ **18.** $x^2 + y^2 \leq 9$

19. $y \leq x^2 - 1$ **20.** $y > x^2 + 2$ **21.** $xy \geq 4$ **22.** $xy \leq 1$

En los problemas 23-40, grafique cada sistema de desigualdades.

23. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x + y \geq 4 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} 3x - y \geq 6 \\ x + 2y \leq 2 \end{cases}$ **25.** $\begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ 3x + 2y \geq -6 \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} 4x - 5y \leq 0 \\ 2x - y \geq 2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x - 3y \le 0 \\ 3x + 2y \le 6 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x - y \ge 2 \\ x + 2y \ge 2 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ x + y \ge 3 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 9 \\ x + y \le 3 \end{cases}$

31. $\begin{cases} y \ge x^2 - 4 \\ y \le x - 2 \end{cases}$

32. $\begin{cases} y^2 \le x \\ y \ge x \end{cases}$

33. $\begin{cases} xy \ge 4 \\ y \ge x^2 + 1 \end{cases}$

34. $\begin{cases} y + x^2 \le 1 \\ y \ge x^2 - 1 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x - 2y \le 6 \\ 2x - 4y \ge 0 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x + 4y \le 8 \\ x + 4y \ge 4 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x + y \ge -2 \\ 2x + y \ge 2 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x - 4y \le 4 \\ x - 4y \ge 0 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 2x + 3y \ge 6 \\ 2x + 3y \le 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2x + y \ge 0 \\ 2x + y \ge 2 \end{cases}$

En los problemas 41-50, grafique cada sistema de desigualdades lineales. Diga si la gráfica es acotada o no acotada, e identifique las esquinas.

41. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 2x + y \le 6 \\ x + 2y \le 6 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \ge 4 \\ 2x + 3y \ge 6 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \ge 2 \\ 2x + y \ge 4 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 3x + y \le 6 \\ 2x + y \le 2 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \ge 2 \\ 2x + 3y \le 12 \\ 3x + y \le 12 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \ge 2 \\ x + y \le 10 \\ 2x + y \le 3 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \ge 2 \\ x + y \le 8 \\ 2x + y \le 10 \end{cases}$

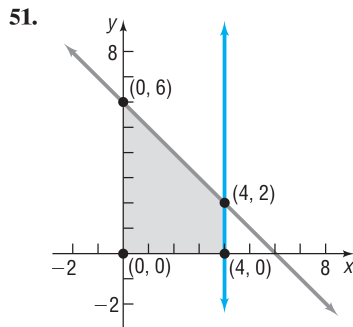
48. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \ge 2 \\ x + y \le 8 \\ x + 2y \ge 1 \end{cases}$

49. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + 2y \ge 1 \\ x + 2y \le 10 \end{cases}$

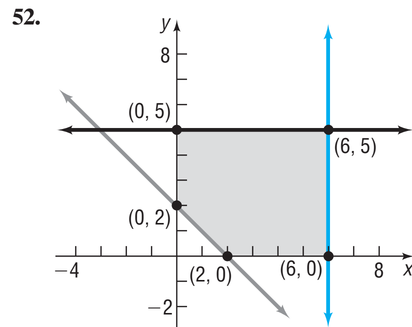
50. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + 2y \ge 1 \\ x + 2y \le 10 \\ x + y \ge 2 \\ x + y \le 8 \end{cases}$

En los problemas 51-54, escriba un sistema de desigualdades lineales que tenga la gráfica dada.

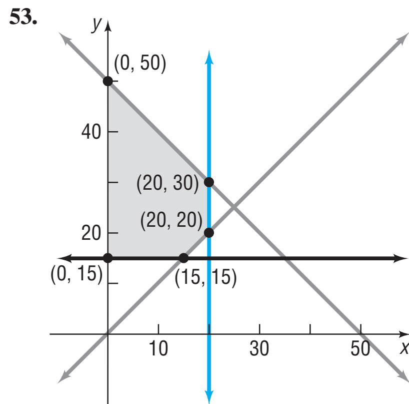
51.



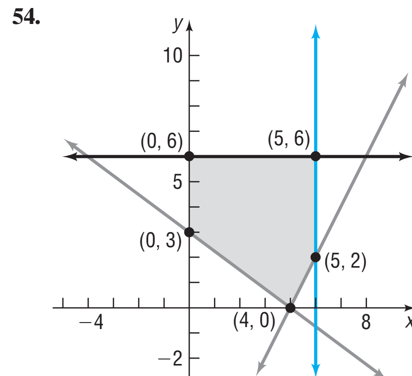
52.



53.



54.



En los problemas 55-60, encuentre la región señalada mediante la graficación del sistema de desigualdades. Identifique todos los puntos de intersección.

55. Arriba de $y = x + 2$ Abajo de $y = -x^2 + 4$ $\begin{cases} y \geq x + 2 \\ y \leq -x^2 + 4 \end{cases}$

56. Arriba de $y = x^2 + 1$ Abajo de $y = 1$ $\begin{cases} y \geq x^2 + 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$

57. Arriba de $y = x^2 - 3$ Abajo de $y = -2$ $\begin{cases} y \geq x^2 - 3 \\ y \leq -2 \end{cases}$

58. Arriba de $y = x^2 - 1$ Abajo de $y = x + 1$ $\begin{cases} y \geq x^2 - 1 \\ y \leq x + 1 \end{cases}$

59. Arriba de $y = (x - 2)^2$ Abajo de $y = -x^2 + 4$ $\begin{cases} y \geq (x - 2)^2 \\ y \leq -x^2 + 4 \end{cases}$

60. Arriba de $y = x^2 - 2$ Abajo de $y = -x^2$ $\begin{cases} y \geq x^2 - 2 \\ y \leq -x^2 \end{cases}$

---

61. Planeación financiera Una pareja de jubilados dispone de hasta \$50,000 para invertir. Como su asesor financiero, usted les recomienda que inviertan un mínimo de \$35,000 en letras de la tesorería que rinden 7% y un máximo de \$10,000 en bonos corporativos que rinden 10%.

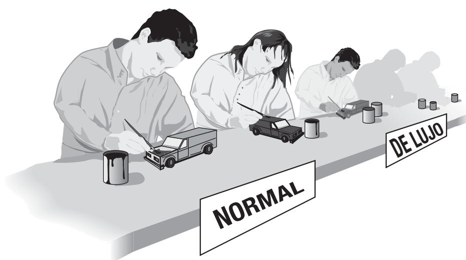
a) Si se utiliza x para denotar la cantidad de dinero invertido en letras de la tesorería y y para la cantidad invertida en bonos corporativos, escriba un sistema de desigualdades lineales que describa los montos posibles de cada inversión.

b) Grafique el sistema e identifique las esquinas.

62. Fabricación de camiones La Compañía Mike Toy Truck fabrica dos modelos de camión de juguete, el normal y el de lujo. Cada modelo normal necesita 2 horas para pintura y 3 para acabados; cada modelo de lujo necesita 3 horas para pintura y 4 para acabados. La empresa cuenta con 2 pintores y 3 encargados de acabados, cada uno de los cuales trabaja 40 horas a la semana.

a) Si se utiliza x para denotar el número de camiones normales y y para el número de camiones de lujo, escriba un sistema de desigualdades lineales que describa la posible cantidad de cada modelo de camión que se fabrica en una semana.

b) Grafique el sistema e identifique las esquinas.



63. Mezcla de café Bill Coffee House, tienda especializada en café, cuenta con 75 libras de café clase A y 120 libras de café clase B. Éstos se mezclarán y empacarán en paquetes de una libra de la siguiente manera: Una mezcla económica compuesta por cuatro onzas de café clase A y 12 onzas de café clase B, y una mezcla superior constituida por 8 onzas de café clase A y 8 onzas de café clase B.

a) Si se utiliza x para denotar el número de paquetes de mezcla económica y y para el número de paquetes de mezcla superior, escriba un sistema de desigualdades lineales que describa el posible número de paquetes de cada tipo de mezcla.

b) Grafique el sistema e identifique las esquinas.

64. Mezcla de semillas Nola Nuts es una tienda especializada en la venta de semillas, que dispone de 90 libras de almendras y 120 libras de cacahuates. Esto se mezclará y empacará en paquetes de 12 onzas de la siguiente manera: Un paquete económico compuesto por 8 onzas de cacahuates y 4 de almendras, y un paquete de calidad compuesto por 6 onzas de cacahuate y 6 de almendras.

a) Utilice x para denotar el número de paquetes económicos y y para el número de paquetes de calidad. Escriba un sistema de desigualdades lineales que describa el posible número de cada clase de paquete.

b) Grafique el sistema e identifique las esquinas.

65. Transporte de carga Un camión pequeño puede transportar hasta 1600 libras o 150 pies cúbicos de carga. Una impresora pesa 20 libras y ocupa 3 pies cúbicos. Un horno de microondas pesa 20 libras y ocupa 3 pies cúbicos.

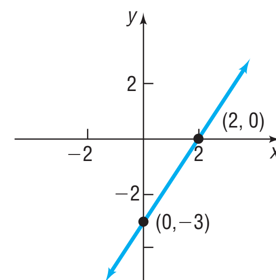
a) Si se utiliza x para denotar el número de hornos de microondas y y para el número de impresoras, escriba un sistema de desigualdades lineales que describa el número de hornos e impresoras que transporta el camión.

b) Grafique el sistema e identifique las esquinas.

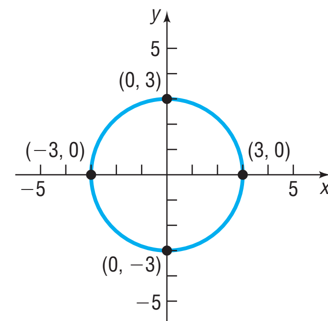
Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $\{x|x < 1\}$

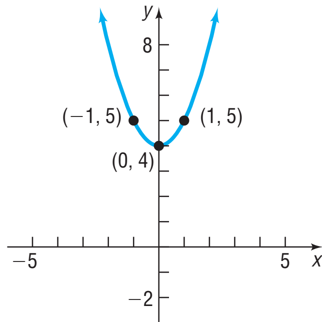
2.



3.



4.



5. Cierto **6.** $y = x^2$; derecha; 2

11.8 Programación lineal

OBJETIVOS 1 Estructurar problemas de programación lineal
2 Resolver problemas de programación lineal

1 Desde una perspectiva histórica, la programación lineal surgió durante la Segunda Guerra Mundial como técnica para resolver problemas relacionados con la distribución de mercancías y materiales en la fuerza aérea estadounidense. En la actualidad, se utilizan técnicas de programación lineal para resolver una amplia gama de problemas, como optimizar la programación de una aerolínea y colocar líneas telefónicas. Aunque la mayoría de los problemas prácticos de programación lineal involucran a varios cientos de desigualdades lineales con varios cientos de variables, nuestro análisis se limitará a los problemas con sólo dos variables, porque se pueden resolver utilizando técnicas de graficación.*

Para comenzar se retomará el ejemplo 11 de la sección anterior.

EJEMPLO 1 Planeación financiera

Una pareja de jubilados dispone de hasta $25,000 para invertir. Como su asesor financiero, usted les recomienda que inviertan un mínimo de $15,000 en letras de la tesorería que rinden 6% y un máximo de $5000 en bonos corporativos que rinden 9%.¿Cuánto dinero se debe asignar a cada inversión, a fin de incrementar los ingresos al máximo? ◀

El problema expuesto en el ejemplo 1 es un arquetipo de los *problemas de programación lineal*. Demanda que cierta expresión lineal, los ingresos, se incrementen al máximo. Si I representa a los ingresos, x a la cantidad invertida en letras de la tesorería al 6% y y a la cantidad invertida en bonos corporativos al 9%, entonces:

$$I = 0.06x + 0.09y$$

Se supondrá, al igual que antes, que I, x y y están en miles de dólares.

La expresión lineal $I = 0.06x + 0.09y$ se denomina **función objetivo.** Además, el problema pide que se obtenga el máximo de ingresos bajo cier-

*El **método simplex** es una manera de resolver problemas de programación lineal que contienen muchas desigualdades y variables. Desarrollado por George Dantzig en 1946, es especialmente apropiado para la informatización. En 1984, Narendra Karmarkar de los laboratorios Bell descubrió una manera de resolver problemas grandes de programación lineal que mejora al método simplex.

tas condiciones o **restricciones,** cada una de las cuales es una desigualdad lineal que comprende a las variables (vea el ejemplo 11 de la sección 11.7). El problema de programación lineal del ejemplo 1 se replantean como:

$$\text{Maximizar} \qquad I = 0.06x + 0.09y$$

apegándose a las condiciones:

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0$$
$$x + y \leq 25$$
$$x \geq 15$$
$$y \leq 5$$

En términos generales, todo problema de programación lineal tiene dos componentes:

1. Una función objetivo lineal que se va maximizar o minimizar.
2. Con la presión de desigualdades lineales que se debe satisfacer en forma simultánea.

Un **problema de programación lineal** con dos variables x y y, consiste en maximizar (o minimizar) una función objetivo lineal

$$z = Ax + By, \quad A \text{ y } B \text{ son números reales, nunca ambos iguales a } 0$$

Sujeta a ciertas condiciones, o restricciones, que se expresan como desigualdades lineales de x y y.

Para maximizar (o minimizar) la cantidad $z = Ax + By$, necesitamos identificar los puntos (x, y) que hacen a la expresión z lo más grande (o pequeña) posible. Pero no son elegibles todos los puntos (x, y); sólo se utilizan aquellos que también satisfacen cada una de las desigualdades lineales (restricciones). Todo punto (x, y) que satisface al sistema de desigualdades lineales (las restricciones) se conoce como **punto factible**. En un problema de programación lineal, buscamos el o los puntos factibles que maximizan (o minimizan) a la función objetivo.

Echemos de nuevo vistazo al programa de programación lineal del ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Análisis de un problema de programación lineal

Considerando el problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar} \qquad I = 0.06x + 0.09y$$

apegándose a las condiciones:

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0$$
$$x + y \leq 25$$
$$x \geq 15$$
$$y \leq 5$$

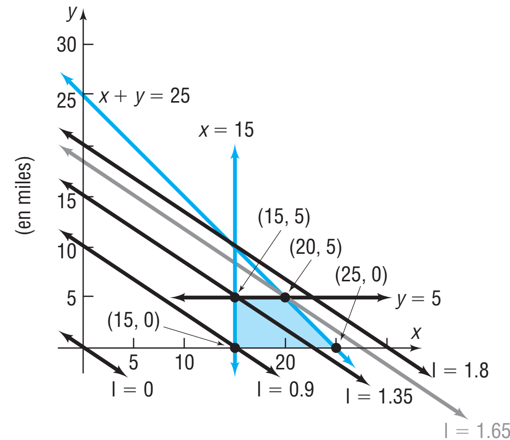
Graficar las restricciones. Después, graficar la función objetivo para $I = 0$, 0.9, 1.35, 1.65 y 1.8.

Solución En la figura 24 se muestra la gráfica de las restricciones. Se le sobrepondrá la gráfica de la función objetivo para los valores de I dados.

Para $I = 0$, la función objetivo es la recta $0 = 0.06x + 0.09y$.

Para $I = 0.9$, la función objetivo es la recta $0.9 = 0.06x + 0.09y$.

Figura 24



Para $I = 1.35$, la función objetivo es la recta $1.35 = 0.06x + 0.09y$.

Para $I = 1.65$, la función objetivo es la recta $1.65 = 0.06x + 0.09y$.

Para $I = 1.8$, la función objetivo es la recta $1.8 = 0.06x + 0.09y$. ◄

La **solución** a un problema de programación lineal se compone de un punto factible que maximiza (o minimiza) a la función objetivo, junto con el valor correspondiente de la función objetivo.

Una condición para que un problema de programación lineal con dos variables tenga solución es que la de los puntos factibles sea acotada (consulte la página 922).

Si ninguno de los puntos factibles maximiza (o minimiza) a la función objetivo, o si no existen puntos factibles, entonces el problema de programación lineal o tiene solución.

Se debe considerar de nuevo el problema de programación lineal planteado en el ejemplo 2, y se observa de nuevo la figura 24. Por ejemplo, (20, 3) es un punto factible, como lo son (15, 5), (20, 5), (18, 4), etcétera. Para encontrar la solución del problema es necesario que se encuentre un punto factible (x, y) que haga a $I = 0.06x + 0.09y$ tan grande como sea posible. Observe que, a medida que aumenta el valor de $I = 0$ a $I = 0.9$ a $I = 1.35$ a $I = 1.65$ a $I = 1.8$, se obtiene un conjunto de rectas paralelas. Observe además que el mayor valor de I que se obtiene utilizando los puntos factibles es $I = 1.65$, el cual corresponde la recta $1.65 = 0.06x + 0.09y$. Todo valor más grande de I tiene como resultado una recta que no pasa por ningún punto factible. Por último, observe el punto factible que nos da $I = 1.65$ es el punto (20, 5), una esquina. Estas observaciones conforman la base del siguiente resultado, el cual se plantea sin demostrar.

Teorema

Localización de la solución para un problema de programación lineal

Si un problema de programación lineal tiene solución, ésta se ubica en una esquina de la gráfica de los puntos factibles.

Si un problema de programación lineal tiene varias soluciones, al menos una se encuentra en una esquina de la gráfica de los puntos factibles.

En cualquier caso, el valor correspondiente de la función objetivo es único.

Aquí no se considerarán problemas de programación lineal que no tengan solución. En consecuencia, se esboza el procedimiento para resolver un problema de programación lineal como se muestra a continuación:

Procedimiento para resolver un problema de programación lineal

PASO 1: Escribir una expresión para la cantidad que se desea maximizar (o minimizar). Esta expresión es la función objetivo.

PASO 2: escribir todas las restricciones en forma de un sistema de desigualdades lineales y graficarlo.

PASO 3: Hacer una lista de las esquinas de la gráfica de los puntos factibles.

PASO 4: Hacer una lista de los valores correspondientes a la función objetivo en cada esquina. La solución es el mayor (o menor) de ellos.


2 **EJEMPLO 3** **Solución de un problema de programación lineal mínimo**

Minimizar la expresión:

$$z = 2x + 3y$$

Sujeta a las restricciones:

$$y \leq 5, \quad x \leq 6 \quad x + y \geq 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Solución La función objetivo es $z = 2x + 3y$. Se busca el menor valor de z que se pueda obtener si x y y son soluciones del sistema de desigualdades lineales.

$$\begin{cases} y \leq 5 \\ x \leq 6 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La gráfica de este sistema (el conjunto de puntos factibles) es la región que aparece sombreada en la figura 25. También se graficaron las esquinas. En la tabla 1 se listan las esquinas y los valores correspondientes a la función objetivo. A partir de esta tabla, se observa que el valor mínimo de z es 4 y se presenta en el punto (2, 0).

Figura 25

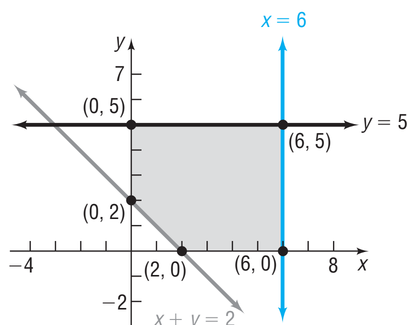


Tabla 1

Esquina	Valor de la función objetivo
(x, y)	**z = 2x + 3y**
(0, 2)	$z = 2(0) + 3(2) = 6$
(0, 5)	$z = 2(0) + 3(5) = 15$
(6, 5)	$z = 2(6) + 3(5) = 27$
(6, 0)	$z = 2(6) + 3(0) = 12$
(2, 0)	$z = 2(2) + 3(0) = 4$

◄


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 5 Y 11.

EJEMPLO 4 Maximización de utilidades

Al final de cada mes, tras satisfacer los pedidos de sus clientes regulares, una empresa cafetera se queda con algo de café colombiano y algo de mezcla especial de café. La empresa acostumbra empacar una mezcla de ambos cafés en paquetes de una libra, de la siguiente manera: Una combinación de menor calidad compuesta por 4 onzas de café colombiano y 12 onzas de mezcla especial y una combinación de mayor calidad, compuesta por 8 onzas de café colombiano y 8 de mezcla especial. Obtiene una ganancia de \$0.30 por paquete de menor calidad, mientras que obtiene una ganancia de \$0.40 por paquete de alta calidad. Este mes le quedaron 120 libras de mezcla especial y 100 libras de café colombiano puro. Suponiendo que se venden todos, ¿cuántos paquetes se deben preparar de cada mezcla, para obtener la mayor utilidad?

Solución Se comienza por asignar símbolos a las dos variables.

x = Número de paquetes de la combinación de menor calidad

y = Número paquetes de la mezcla de alta calidad

Si P denota la utilidad, entonces

$$P = \$0.30x + \$0.40y$$

Esta expresión es la función objetivo. Tenemos que maximizar P sometida a ciertas restricciones sobre x y y. Puesto que x y y representan una cantidad de paquetes, sus únicos valores significativos son los enteros positivos. De tal manera, tenemos las dos restricciones:

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0$$ Restricciones no negativas

También tenemos limitada la cantidad de cada tipo de café disponible. Por ejemplo, la cantidad total de café colombiano empleado en ambas combinaciones no puede superar 100 libras, o 1600 onzas. Como utilizamos 4 onzas en cada paquete de menor calidad y 8 en cada paquete de mayor calidad, llegamos a la restricción:

$$4x + 8y \leq 1600$$ Restricciones del café colombiano

Del mismo modo, el límite de 120 libras, o 1920 onzas, de mezcla especial nos conduce a la restricción

$$12x + 8y \leq 1920$$ Restricciones de la mezcla especial

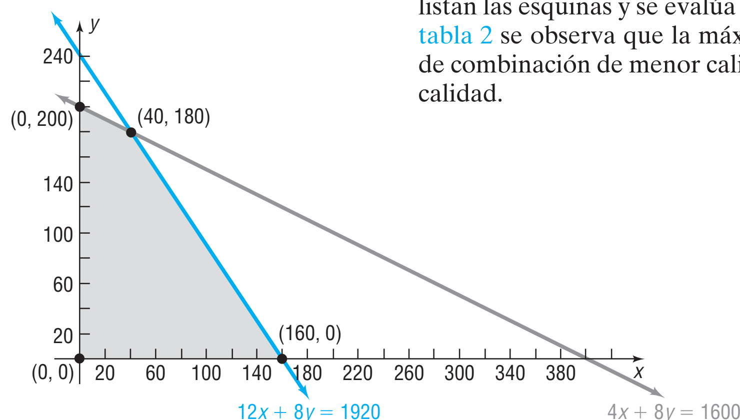
El problema de programación lineal se plantea como:

$$\text{Maximizar} \qquad P = 0.3x + 0.4y$$

Sujeta a las restricciones:

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad 4x + 8y \leq 1600, \qquad 12x + 8y \leq 1920$$

Figura 26



En la figura 26 se ilustra la gráfica de las restricciones (puntos factibles). Se listan las esquinas y se evalúa la función objetivo en cada uno de ellos. En la tabla 2 se observa que la máxima utilidad, \$84, se obtiene con 40 paquetes de combinación de menor calidad y 180 paquetes de combinación de mayor calidad.

Tabla 2

Esquina	Valor de la utilidad
(x, y)	$P = 0.3x + 0.4y$
(0, 0)	$P = 0$
(0, 200)	$P = 0.3(0) + 0.4(200) = \$80$
(40, 180)	$P = 0.3(40) + 0.4(180) = \$84$
(160, 0)	$P = 0.3(160) + 0.4(0) = \$48$



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 19.

11.8 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

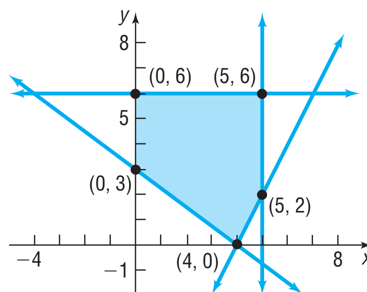
1. Un problema de programación lineal necesita que se maximice o minimice una expresión lineal, llamada __________ __________ .

2. *Falso o verdadero:* Si un problema de programación lineal tiene solución, ésta se ubica en una esquina de la gráfica de los puntos factibles.

Ejercicios

En los problemas 3-8, encuentre el valor máximo y mínimo de la función objetivo dada de un problema de programación lineal. En la figura se ilustra la gráfica de los puntos factibles.

3. $z = x + y$
4. $z = 2x + 3y$
5. $z = x + 10y$
6. $z = 10x + y$
7. $z = 5x + 7y$
8. $z = 7x + 5y$



En los problemas 9-18, resuelva cada problema de programación lineal.

9. Maximizar $z = 2x + y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$, $x + y \geq 1$
10. Maximizar $z = x + 3y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 3$, $x \leq 5$, $y \leq 7$
11. Minimizar $z = 2x + 5y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 2$, $x \leq 5$, $y \leq 3$
12. Minimizar $z = 3x + 4y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \geq 6$, $x + y \leq 8$
13. Maximizar $z = 3x + 5y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 2$, $2x + 3y \leq 12$, $3x + 2y \leq 12$
14. Maximizar $z = 5x + 3y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 2$, $x + y \leq 8$, $2x + y \leq 10$
15. Minimizar $z = 5x + 4y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 2$, $2x + 3y \leq 12$, $3x + y \leq 12$
16. Minimizar $z = 2x + 3y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 3$, $x + y \leq 9$, $x + 3y \geq 6$
17. Maximizar $z = 5x + 2y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 10$, $2x + y \geq 10$, $x + 2y \geq 10$
18. Maximizar $z = 2x + 4y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \geq 4$, $x + y \leq 9$

19. Maximización de utilidades Un fabricante de esquís los elabora de dos tipos: de descenso o de campo traviesa. Utilice la siguiente tabla para determinar cuántos esquís de cada clase debe producir para alcanzar la máxima ganancia.¿Cuánto es la máxima ganancia? ¿Cuál sería la ganancia máxima si el tiempo de manufactura disponible máximo se aumenta a 48 horas?

	Descenso	Campo traviesa	Tiempo disponible máximo
Tiempo de manufactura por esquí	2 horas	1 hora	40 horas
Tiempo de acabados por esquí	1 hora	1 hora	32 horas
Ganancia por esquí	$70	$50	

20. Administración de una granja Un granjero tiene 70 acres de tierra disponibles para plantar soya o trigo. En la siguiente tabla se muestran el costo de preparación del suelo, los días de trabajo necesarios y la ganancia esperada por acre plantado para cada tipo de cultivo:

	Soya	Trigo
Costo de preparación por acre	$60	$30
Días de trabajo necesarios por acre	3	4
Ganancias por acre	$180	$100

El granjero no puede gastar más de $1800 en costos de preparación ni utilizar más de un total de 120 días de trabajo. ¿Cuántos acres de cada cultivo debe plantar con el fin de maximizar la ganancia?¿De cuánto es la ganancia máxima? ¿De cuánto es la ganancia máxima si el granjero está dispuesto a gastar no más de $2400 en preparación?

21. Administración de una granja Una pequeña granja de Illinois dispone de 100 acres para cultivar maíz y soya. En la siguiente tabla se muestran el costo de cultivo por acre, el costo de mano de obra por acre y la ganancia esperada por acre. En la columna derecha se muestra la cantidad de dinero disponible para cada uno de esos gastos. Encuentre el número de acres que se deben plantar de cada cultivo, con el fin de maximizar la ganancia.

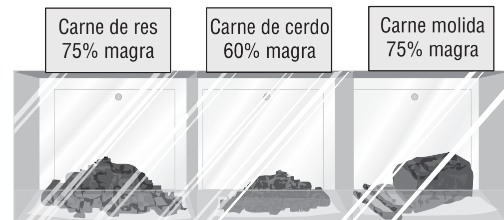
	Soya	Maíz	Dinero disponible
Costo de cultivo por acre	$40	$60	$1800
Costo de mano de obra por acre	$60	$60	$2400
Ganancias por acre	$200	$250	

22. Necesidades dietéticas Una dieta demanda un mínimo de 60 unidades de carbohidratos, 45 unidades de proteínas y 30 unidades de grasa diariamente. Cada onza del complemento *A* proporciona 5 unidades de carbohidratos, 3 unidades de proteínas, y 4 unidades de grasa. Cada onza del complemento *B* proporciona 2 unidades de carbohidratos, 2 unidades de proteínas y 1 unidad de grasa. Si el complemento *A* cuesta $1.50 la onza y el complemento *B* cuesta $1.00 la onza, ¿cuántas onzas se deben tomar diariamente de cada suplemento para minimizar el costo de la dieta?

23. Programa de producción En una fábrica, la máquina 1 produce alicates de 8 pulgadas con un ritmo de 60 unidades por hora y alicates de 6 pulgadas con un ritmo de 70 unidades por hora. La máquina dos produce alicates de 8 pulgadas con un ritmo de 40 unidades por hora y alicates de 6 pulgadas con un ritmo de 20 unidades por hora. El costo de operación por hora es de $50 para la máquina 1 y de $30 para la máquina 2. El programa de producción exige que se produzcan un mínimo de 240 alicates de 8 pulgadas y de 140 alicates de 6 pulgadas durante las 10 horas que dura la jornada diaria.¿Cual combinación de máquinas será la menos costosa?

24. Administración de una granja El propietario de un huerto contrata un equipo de trabajadores, para que poden al menos 25 de sus 50 árboles frutales. La poda de cada árbol joven requiere una hora, mientras que podar un árbol mayor consume una hora y media. El equipo se compromete a trabajar por un mínimo de 30 horas y cobra $15 por cada árbol joven y $20 por cada árbol mayor. Para minimizar sus costos, ¿cuántos árboles de cada tipo debe pedirles el propietario del huerto que poden? ¿Cual será el costo?

25. Administración de una carnicería En una carnicería mezclan carne de res y de cerdo en un mismo paquete de carne molida. La carne de res es 75% magra (75% carne, 25% grasa) y tiene un costo de $0.75 la libra. La carne de cerdo es 60% magra y tiene un costo de $0.45 la libra. La carne molida debe ser por lo menos 70% magra. Si la carnicería que utilizar un mínimo 50 libras de la carne de puerco disponible, pero no más de 200 libras de su carne de res disponible, ¿cuánta carne de res se debe mezclar con la carne de cerdo de manera que se minimice el costo?



26. Rendimiento Una corredora de inversiones recibe instrucciones de un cliente para invertir $20,000, parte en un bono chatarra que rinde 9% anual y parte en letras de la Tesorería que rinden 7% anual. El cliente quiere invertir por lo menos $8000 en letras de la Tesorería y no más de $12,000 en el bono chatarra.

a) ¿Cuánto debe recomendar la corredora que coloque el cliente en cada una de las inversiones, con el fin de maximizar los ingresos, si el cliente insiste en que la cantidad invertida en bonos de la tesorería debe ser igual o mayor que la cantidad invertida en bonos chatarra?
b) ¿Cuánto debe recomendar la corredora que coloque el cliente en cada una de las inversiones, con el fin de maximizar los ingresos, si el cliente insiste en que la cantidad invertida en bonos de la Tesorería no debe superar a la cantidad invertida en bonos chatarra?

27. Maximizar las ganancias por patines de hielo Una fábrica produce dos tipos de patines de hielo: para carrera y para patinaje artístico. Los patines para carrera requieren 6 horas de trabajo en el departamento de fabricación, mientras que los de patinaje artístico requieren 4 horas de trabajo ahí. Los patines para carrera pasan 1 hora de trabajo en el departamento de acabados, mientras que los de patinaje artístico pasan ahí 2 horas. El departamento de fabricación dispone de un máximo de 120 horas de trabajo diarias y el departamento de acabados tiene no más de 40 horas disponibles al día. Si las ganancias por cada patín de carreras son de $10 y las correspondientes a un patín de patinaje artístico son de $12, ¿cuántos de cada tipo se deben fabricar diariamente para maximizar las ganancias? (Suponga que se venden todos los patines fabricados).

28. Planeación financiera Una pareja de jubilados tiene $50,000 para invertir en títulos de rendimiento fijo. Su asesor financiero le sugiere dos títulos: uno es un bono AAA que rinde 8% anual; el otro es un certificado de depósito (CD) que rinde 4%. Después de considerar con cuidado las alternativas, la pareja decide colocar un máximo de $20,000 en el bono AAA y un mínimo de $15,000 en el CD. También ordenan a su asesor que coloque en el cd por lo menos tanto como en el bono AAA. ¿Cómo debe proceder el asesor financiero para maximizar el rendimiento de la inversión?

29. Diseño de producto Un empresario ordena a su grupo de diseño que elabore por lo menos 6 muestras del nuevo tipo de cierre que desea comercializar. Cuesta $9.00 producir cada cierre metálico y $4.00 producir cada cierre de plástico. Él quiere tener al menos 2 de cada una de las versiones de cierre y necesita contar con todas las muestras en 24 horas. Se necesitan 4 horas para producir cada una de las muestras metálicas y 2 horas para cada una de las muestras de plástico. Para minimizar el costo de las muestras, ¿cuántas de cada tipo debe pedir el empresario? ¿Cual será el costo de las muestras?

30. Nutrición animal Al perro de Kevin, Amadeus, le gustan dos tipos de comida en lata para perro. "Gourmet Dog" cuesta 40 centavos por lata y tiene 20 unidades de un complejo vitamínico; su contenido calórico es de 75 calorías. "Chow Hound" cuesta 32 centavos por lata y tiene 35 unidades de vitaminas y 50 calorías. Kevin quiere que Amadeus consuma al menos 1175 unidades de vitaminas y un mínimo de 2775 calorías al mes. Kevin sólo dispone de espacio para guardar 60 latas de comida a la vez. ¿Qué cantidad de cada tipo de comida para perro debe comprar Kevin cada mes, con el fin de minimizar su costo?

31. Ganancias de una aerolínea Una aerolínea brinda dos clases de servicio: primera clase y clase turista. La experiencia de la gerencia le dice que cada aeronave debe tener al menos 8, pero no más de 16 asientos de primera clase, y un mínimo de 80, pero no más de 120 asientos de clase turista.

a) Si la gerencia decide que la razón entre los asientos de primera clase y de clase turista nunca debe superar 1:12, ¿con cuántos asientos de cada tipo se debe arreglar una aeronave para maximizar las ganancias?
b) Si la gerencia decide que la razón entre los asientos de primera clase y de clase turista nunca debe superar 1:8, ¿con cuántos asientos de cada tipo se debe arreglar una aeronave para maximizar las ganancias?
c) ¿Qué haría usted si fuera el gerente?

[**Sugerencia:** Suponga que la aerolínea cobra $$C$ por asiento en clase turista y $$F$ por asiento en primera clase; $C > 0, F > C$].

32. Minimizar el costo Una granja especializada en engorda de pollos complementa con 4 vitaminas el alimento para pollos normal. El propietario quiere que la alimentación complementaria contenga al menos 50 unidades de vitamina I, 90 unidades de vitamina II, 60 unidades de vitamina III y 100 unidades de vitamina IV por cada 100 onzas de alimento. Existen disponibles dos complementos: el complemento A, que contiene 5 unidades de vitamina I, 25 unidades de vitamina II, 10 unidades de vitamina III y 35 unidades de vitamina IV por onza; y el complemento B que contiene 25 unidades de vitamina I, 10 unidades de vitamina II, 10 unidades de vitamina III y 20 unidades de vitamina IV por onza. Si la onza de complemento A cuesta $0.06 y la de complemento B cuesta $0.08, ¿cuánto complemento de cada tipo debe comprar el gerente de la granja, para añadirlo a cada 100 onzas de alimento, con el fin de conservar el costo total mínimo, en tanto satisface a la vez las especificaciones vitamínicas dictadas por el propietario?

33. Explique con sus propias palabras lo que es un problema de programación lineal y cómo se resuelve.

Repaso del capítulo

Conocimiento

Sistemas de ecuaciones (p. 842)

Sistemas sin soluciones son incongruentes. Sistemas con una solución son congruentes.

Los sistemas de ecuaciones lineales congruentes tienen ya sea una solución única o bien un número infinito soluciones.

Determinantes y regla de Cramer (pp. 874 y 878)

Matriz (pp. 856 y 883)	Arreglo rectangular de números, llamados entradas
Matriz de *m por n* (p. 883)	Matriz con *m* filas y *n* columnas
Matriz identidad *I* (p. 891)	Matriz cuadrada cuyas entradas diagonales son unos, mientras que las demás entradas son ceros
Inverso de una matriz (p. 891)	A^{-1} es el inverso de A si $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
Matriz no singular (p. 892)	Matriz cuadrada que tiene un inverso

Programación lineal (p. 926)

Maximiza (o minimiza) una función objetivo lineal, $z = Ax + By$, sujeta a ciertas condiciones, o restricciones, que se expresan como desigualdades lineales en términos de x y y. Un punto factible (x, y) es aquel que satisface las restricciones de un problema de programación lineal.

Localización de la solución (p. 927)

Si un problema de programación lineal tiene solución, ésta se ubica en una esquina de la gráfica de los puntos factibles.
Si un problema de programación lineal tiene varias soluciones, al menos una se encuentra en una esquina de la gráfica de los puntos factibles.
En cualquier caso, el valor correspondiente de la función objetivo es único.

Objetivos

Sección		Usted debe ser capaz de…	Ejercicios de repaso
11.1	1	Solución de sistemas de ecuaciones por sustitución (p. 843)	1–14, 99, 100, 103–105
	2	Solución de sistemas de ecuaciones por eliminación (p. 844)	1–14, 99, 100, 103–105
	3	Identificación de los sistemas de ecuaciones incongruentes con dos variables (p. 846)	9, 10, 13, 96
	4	Expresar la solución de un sistema de ecuaciones dependientes con dos variables (p. 847)	14, 95
	5	Solución de sistemas de tres ecuaciones con tres variables (p. 848)	15–18, 97, 98, 101
	6	Identificación de los sistemas de ecuaciones incongruentes con tres variables (p. 849)	18
	7	Expresar la solución de un sistema de ecuaciones dependientes con tres variables (p. 850)	17
11.2	1	Escribir la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales (p. 856)	35–44
	2	Escribir el sistema a partir de la matriz aumentada (p. 857)	19, 20
	3	Realizar operaciones de fila en una matriz (p. 858)	35–44
	4	Resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices (p. 860)	35–44
11.3	1	Evaluar determinantes de 2 por 2 (p. 872)	45, 46
	2	Utilizar la regla de Cramer para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables (p.873)	51–54
	3	Evaluar determinantes de 3 por 3 (p. 876)	47–50
	4	Utilizar la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables (p. 878)	55, 56
	5	Aprender las propiedades de las determinantes (p. 879)	57, 58
11.4	1	Encontrar la suma y diferencia de dos matrices (p. 884)	21, 22
	2	Encontrar los múltiplos escalares de una matriz (p. 886)	23, 24
	3	Encontrar el producto de dos matrices (p. 887)	25–28
	4	Encontrar el inverso de una matriz (p. 891)	29–34
	5	Resolver sistemas de ecuaciones utilizando matrices inversas (p. 895)	35–37, 39, 40, 43, 44

11.5	1	Descomponer $\frac{P}{Q}$, donde Q tiene sólo factores lineales no repetidos (p. 900)	59, 60
	2	Descomponer $\frac{P}{Q}$, donde Q tiene factores lineales repetidos (p. 902)	61, 62
	3	Descomponer $\frac{P}{Q}$, donde Q tiene factores cuadráticos irreducibles no repetidos (p. 904)	63, 64, 67, 68
	4	Descomponer $\frac{P}{Q}$, donde Q tiene factores cuadráticos irreducibles repetidos (p. 905)	65, 66
11.6	1	Resolver un sistema de ecuaciones no lineales usando la sustitución (p. 907)	69–78
	2	Resolver un sistema de ecuaciones no lineales usando la eliminación (p. 908)	69–78
11.7	1	Graficar una desigualdad (p. 916)	79, 80
	2	Graficar un sistema de desigualdades (p. 919)	81–90, 102
11.8	1	Estructurar problemas de programación lineal (p. 925)	106, 107
	2	Resolver problemas de programación lineal (p. 928)	91–94, 106, 107

Ejercicios de repaso

(Los problemas con asterisco indican que el autor los sugiere para usarse como examen de práctica).

En los problemas 1-18, resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución o el método de eliminación. Si el sistema no tiene solución, mencione que es incongruente.

1. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 7x - y = 3 \end{cases}$

***3.** $\begin{cases} 3x - 4y = 4 \\ x - 3y = \frac{1}{2} \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x - 4y = -\frac{13}{2} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ x = 3y + 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = 5y + 2 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{4}{3} = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 2 \\ y + 4x + 2 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + 3y - 13 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x + 5y = 21 \\ 5x + 6y = 42 \end{cases}$

***13.** $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x - \frac{2}{3}y = 12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 10y = 20 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x - y + 3z = -13 \\ 3x - 2y + 3z = -16 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + 5y - z = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ x - y + 2z = 11 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x - 4y + z = -15 \\ x + 2y - 4z = 27 \\ 5x - 6y - 2z = -3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x - 4y + 3z = 15 \\ -3x + y - 5z = -5 \\ -7x - 5y - 9z = 10 \end{cases}$

En los programas 19-20, escriba el sistema de ecuaciones correspondiente a las matrices aumentadas dadas.

19. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & -1 \end{array}\right]$

20. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -2 \\ 5 & 0 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

En los problemas 21-28, utilice las siguientes matrices para calcular cada expresión

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

21. $A + C$ **22.** $A - C$ **23.** $6A$ **24.** $-4B$

***25.** AB **26.** BA **27.** CB **28.** BC

En los problemas 29-34, encuentre el inverso de cada matriz, si lo hay. Si no existe un inverso, exprese que la matriz es singular.

29. $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

***31.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **33.** $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **34.** $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

En los problemas 35-44, resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando matrices. Si el sistema no tiene solución, mencione que es incongruente.

35. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 10x + 10y = 5 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ **37.** $\begin{cases} 5x + 6y - 3z = 6 \\ 4x - 7y - 2z = -3 \\ 3x + y - 7z = 1 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 4x - y - 3z = 1 \\ 8x + y - z = 5 \end{cases}$ **39.** $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ 2x + 3y = -3 \\ 4x - 3y - 4z = 3 \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ 6x + 4y + 3z = 5 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - 5z - 6 = 0 \\ 2x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$ **42.** $\begin{cases} 4x - 3y + 5z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 0 \\ 6x + 2y + z = 0 \end{cases}$ **43.** $\begin{cases} x - y - z - t = 1 \\ 2x + y - z + 2t = 3 \\ x - 2y - 2z - 3t = 0 \\ 3x - 4y + z + 5t = -3 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x - 3y + 3z - t = 4 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + 3z + 2t = 3 \\ x + y + 5z = 6 \end{cases}$

En los problemas 45-50, encuentre el valor de cada determinante.

***45.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ **46.** $\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ **47.** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

48. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **49.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ **50.** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

En los problemas 51-56, utilice la regla de Cramer, si es aplicable, para resolver cada sistema.

51. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ **52.** $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ **53.** $\begin{cases} 2x + 3y - 13 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

54. $\begin{cases} 3x - 4y - 12 = 0 \\ 5x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$ ***55.** $\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x - y + 3z = -13 \\ 3x - 2y + 3z = -16 \end{cases}$ **56.** $\begin{cases} x - y + z = 8 \\ 2x + 3y - z = -2 \\ 3x - y - 9z = 9 \end{cases}$

En los problemas 57 y 58, utilice las propiedades de las determinantes para encontrar el valor de cada determinante, si se sabe que

$$\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 8$$

57. $\begin{vmatrix} 2x & y \\ 2a & b \end{vmatrix}$ **58.** $\begin{vmatrix} y & x \\ b & a \end{vmatrix}$

En los problemas 59-68, escriba la descomposición en fracciones parciales de cada expresión racional.

***59.** $\dfrac{6}{x(x-4)}$ **60.** $\dfrac{x}{(x+2)(x-3)}$ **61.** $\dfrac{x-4}{x^2(x-1)}$ **62.** $\dfrac{2x-6}{(x-2)^2(x-1)}$ ***63.** $\dfrac{x}{(x^2+9)(x+1)}$

64. $\dfrac{3x}{(x-2)(x^2+1)}$ **65.** $\dfrac{x^3}{(x^2+4)^2}$ **66.** $\dfrac{x^3+1}{(x^2+16)^2}$ **67.** $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2-1)}$ **68.** $\dfrac{4}{(x^2+4)(x^2-1)}$

En los problemas 69-78, resuelva cada sistema de ecuaciones no lineales.

69. $\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ **70.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2x - y^2 = -8 \end{cases}$ ***71.** $\begin{cases} 2xy + y^2 = 10 \\ 3y^2 - xy = 2 \end{cases}$ **72.** $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 1 \\ 7x^2 - 2y^2 - 5 = 0 \end{cases}$

73. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6y \\ x^2 = 3y \end{cases}$ **74.** $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ **75.** $\begin{cases} 3x^2 + 4xy + 5y^2 = 8 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$ **76.** $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \\ xy - 2y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

77. $\begin{cases} x^2 - 3x + y^2 + y = -2 \\ \dfrac{x^2 - x}{y} + y + 1 = 0 \end{cases}$ **78.** $\begin{cases} x^2 + x + y^2 = y + 2 \\ x + 1 = \dfrac{2 - y}{x} \end{cases}$

En los problemas 79 y 80, grafique cada una de las desigualdades.

79. $3x + 4y \leq 12$ **80.** $2x - 3y \geq 6$

En los problemas 81-86, grafique cada sistema de desigualdades. Diga si la gráfica es acotada o no acotada, e identifique las esquinas.

81. $\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ **82.** $\begin{cases} x - 2y \leq 6 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$ ***83.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 6 \end{cases}$

84. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$ **85.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 8 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$ **86.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 9 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$

En los problemas 87-90, grafique cada sistema de desigualdades.

87. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ **88.** $\begin{cases} y^2 \leq x - 1 \\ x - y \leq 3 \end{cases}$ ***89.** $\begin{cases} y \leq x^2 \\ xy \leq 4 \end{cases}$ **90.** $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

En los problemas 91-94, resuelva cada problema de programación lineal.

91. Maximizar $z = 3x + 4y$ sujeta a $x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \geq 6, x + y \leq 8$

92. Maximizar $z = 2x + 4y$ sujeta a $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6, x \geq 2$

93. Minimizar $z = 3x + 5y$ sujeta a $x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1, 3x + 2y \leq 12, x + 3y \leq 12$

94. Minimizar $z = 3x + y$ sujeta a $x \geq 0, y \geq 0, x \leq 8, y \leq 6, 2x + y \geq 4$

---

95. Encuentre una A tal que el sistema de ecuaciones tenga infinidad de soluciones.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 4x + 10y = A \end{cases}$$

96. Encuentre una A tal que sistema del problema 95 sea incongruente.

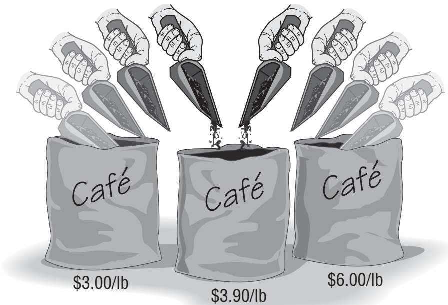
97. Ajuste de una curva Encuentre la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los tres puntos $(0, 1), (1, 0)$ y $(-2, 1)$.

98. Ajuste de una curva Encuentre la ecuación general del círculo que pasa por los tres puntos $(0, 1), (1, 0)$ y $(-2, 1)$.

[**Sugerencia:** La ecuación general del círculo es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$].

99. Mezcla de café Un distribuidor de café está preparando una combinación que cueste \$3.90 la libra. Estará compuesta por la mezcla de un tipo de café que cuesta \$3.00 la libra y otro tipo de café que cuesta \$6.00. ¿Qué cantidades de cada tipo de café debe mezclar para lograr la combinación deseada?

[**Sugerencia:** Suponga que el peso de café combinado es de 100 libras].



100. Cultivo Una granja que tiene 1000 acres se utiliza para sembrar maíz y soya. El costo de cultivo del maíz es de \$65 por acre, mientras que el correspondiente a la soya es de \$45. Si se elaboró un presupuesto de \$54,325 para cultivar toda la superficie, ¿cuántos acres de cada cultivo se deben sembrar?

101. Pedidos de galletas Una empresa galletera elabora tres tipos de galletas: de avena con pasas, con chispas de chocolate y de mantequilla; en cajas chica, mediana y grande. Las cajas chicas contienen 1 docena de galletas de avena y 1 docena de galletas con chispas de chocolate; la caja mediana tiene 2 docenas de galletas de avena,

1 docena de galletas con chispas de chocolate y 1 docena de galletas de mantequilla; la caja grande tiene 2 docenas de galletas de avena, 2 de galletas con chispas de chocolate y 3 de galletas de mantequilla. Si usted necesita exactamente 15 docena de galletas de avena, 10 de galletas con chispas de chocolate y 11 de galletas de mantequilla, ¿cuántas cajas de cada tamaño debe comprar?

102. Mezcla de semillas Una tienda especializada en la venta de semillas dispone de 72 libras de almendras y 120 libras de cacahuates. Éstas se mezclarán y empacarán en paquetes de 12 onzas de la siguiente manera: Un paquete económico compuesto por 8 onzas de cacahuates y 4 de almendras, y un paquete de calidad compuesto por 6 onzas de cacahuate y 6 de almendras.

a) Utilice x para denotar el número de paquetes económicos y y para el número de paquetes de calidad. Escriba un sistema de desigualdades lineales que describa el posible número de cada clase de paquete.

b) Grafique el sistema e identifique las esquinas.

103. Determinar la velocidad de la corriente del río Aguarico Durante un viaje a la reserva ecológica Cuyabeno, ubicada en la región amazónica de Ecuador, recorrí en lancha 100 kilómetros aguas abajo por el río Aguarico, desde Chiritza hasta el hotel Flotante Orellana. A medida que veía desplegarse al Amazonas, me pregunté qué tan rápido viajaba la lancha y qué tan rápida era la corriente de las blancas aguas del río. Observé que el viaje aguas abajo duró 2.5 horas y el regreso aguas arriba duró 3 horas.

104. Velocidad del viento En un viaje entre el aeropuerto Midway de Chicago y Ft. un jet Boeing 737 conserva una velocidad de 475 millas por hora. Si el viaje de Chicago a Ft. Lauderdale tarda 2 horas, 30 minutos, y el viaje de regreso tarda 2 horas, 50 minutos, ¿cuál es la velocidad del viento? (Suponga que la velocidad del viento permanece constante en las distintas alturas y que el avión vuela con el viento a favor en una dirección y con el viento en contra en la otra).

105. Trabajo con razón constante Si Bruce y Bryce trabajan juntos durante 1 hora y 20 minutos, terminarán cierto trabajo. Si Bryce y Marty trabajan juntos durante 1 hora y 36 minutos, pueden terminar el mismo trabajo. Si Marty y Bruce trabajan juntos, pueden terminar el mismo trabajo en 2 horas y 40 minutos.¿Cuánto le llevará a cada uno de ellos terminar esa faena trabajando a solas?

106. Maximizar las ganancias por elaboración de estatuillas Una fábrica produce dos tipos de estatuillas: una bailarina y una sirena. Cada una de ellas necesita de tres procesos: moldeado, pintado y vidriado. La mano de obra diaria disponible para moldeado, pintado y vidriado podría ser de hasta 90, 120 y 60 horas de trabajo, respectivamente. La bailarina requiere 3 horas de trabajo para moldeado, 6 horas de pintado y 2 horas de vidriado. La sirena requiere 3 horas de trabajo para moldeado, 4 horas de pintado y 3 horas de vidriado. Si las ganancias por cada estatuilla son de \$25 por bailarina y de \$30 por sirena, ¿cuántas estatuillas de cada tipo se deben producir todos los días para maximizar las ganancias? Si la gerencia decide producir el número de cada una de las estatuillas que maximiza las ganancias, determine cuál de los procesos tiene asignado un exceso de horas de trabajo.

107. Minimizar los costos de producción Una fábrica produce motores de gasolina y de diesel. Esta empresa debe entregar un mínimo de 20 motores de gasolina y 15 de diesel cada semana. Sin embargo, debido a limitantes físicas, no puede fabricar más de 60 motores de gasolina y 40 de diesel. Por último, para evitar despidos, debe producir un mínimo de 50 motores. Si producir un motor de gasolina cuesta \$450 y producir uno de diesel cuesta \$550, ¿cuántos de cada tipo debe elaborar a la semana para minimizar los costos? ¿Cuál es la capacidad en exceso de la fábrica? Es decir, ¿cuántos motores de cada tipo se están produciendo por encima del número que la fábrica está obligada a entregar?

108. Describa cuatro maneras de resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. ¿Cuál método prefiere? ¿Por qué?

Proyectos del capítulo



1. Cadenas de Markov Una **cadena de Markov** (o proceso) es aquélla en la que se determinan los resultados futuros por medio del estado actual. Los resultados futuros se basan en probabilidades. La probabilidad de pasar a cierto estado sólo depende del estado previo y no cambia con el tiempo. Un ejemplo de cadena de Markov es la escolaridad máxima alcanzada por los hijos con base en el grado de escolaridad de los padres, donde los estados son (1) Título universitario, (2) Preparatoria, (3) Secundaria. Si p_{ij} es la probabilidad de pasar del estado i al estado j, entonces la **matriz de transición** es la matriz $m \times m$:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

En la tabla que aparece más adelante se representan las probabilidades de mayor nivel escolar de los hijos con base en el nivel de escolaridad de sus padres. Por ejemplo, en la tabla se aprecia que la probabilidad p_{21} es 40% de que los padres con preparatoria (fila 2) tengan hijos con título universitario (columna 1).

a) Convierta los porcentajes a decimales.
b) ¿Cuál es la matriz de transición?
c) Sume las filas. ¿Qué es lo que se observa? ¿Qué cree que pueda obtener de este resultado?
d) Si P es la matriz de transición de una cadena de Markov, entonces la (i, j)-ésima entrada de P^n (n-ésima potencia de P) produce la probabilidad de pasar del estado i al j en n etapas. ¿Cuál es la probabilidad de que el nieto de un graduado universitario se titule?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que el nieto de un graduado de preparatoria termine una licenciatura?
f) El vector fila $v^{(0)} = [0.267\ 0.574\ 0.159]$ representa la proporción de población estadounidense que terminó licenciatura, preparatoria y secundaria, respectivamente, como máximo logro académico al 2002.* En una cadena de Markov, la distribución de probabilidad $v^{(k)}$ después de k etapas es $v^{(k)} = v^{(0)}P^k$, donde P^k es la k-ésima potencia de la matriz de transición. ¿Cuál será la distribución del máximo grado escolar de los nietos de la población actual?
g) Calcule $P^3, P^4, P^5, \ldots$ continúe hasta que la matriz no cambie. Esto se llama distribución a largo plazo. ¿Cuál es la distribución a largo plazo del máximo grado escolar de la población?

*FUENTE: Census Bureau.

Nivel escolar máximo de los padres	Escolaridad máxima obtenida por los hijos		
	Licenciatura	**Preparatoria**	**Secundaria**
Licenciatura	80%	18%	2%
Preparatoria	40%	50%	10%
Secundaria	20%	60%	20%

Los siguientes proyectos del capítulo están disponibles en www.prenhall.com/sullivan

2. **Project at Motorola** ***Error Control Codings***
3. **Using Matrices to Find the Line of Best Fit**
4. **CBL Experiment**

Repaso acumulativo

En los problemas 1-6, resuelva las ecuaciones.

1. $2x^2 - x = 0$
2. $\sqrt{3x + 1} = 4$
3. $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$
4. $3^x = 9^{x+1}$
5. $\log_3(x - 1) + \log_3(2x + 1) = 2$
6. $3^x = e$

7. Determine si la función $g(x) = \dfrac{2x^3}{x^4 + 1}$ es par, impar o ninguna de las dos. La gráfica de g, ¿es simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen?

8. Encuentre el centro y el radio del círculo $x^2 + y^2 - 2x + Ay - 11 = 0$. Grafíquelo.

9. Grafique $f(x) = 3^{x-2} + 1$ usando transformaciones. ¿Cuáles son el dominio, el rango y la asíntota horizontal de f?

10. La función $f(x) = \dfrac{5}{x + 2}$ es inyectiva. Encuentre f^{-1}. Encuentre el dominio y el rango de f y de f^{-1}.

11. Grafique cada una de las siguientes ecuaciones:
a) $y = 3x + 6$
b) $x^2 + y^2 = 4$
c) $x^2 - y^2 = 4$
d) $9x^2 + y^2 = 9$
e) $y^2 = 3x + 6$
f) $y = x^3$
g) $y = \dfrac{1}{x}$
h) $y = \sqrt{x}$
i) $y = e^x$
j) $y = \ln x$
k) $y = \text{sen } x$
l) $y = \cos x$

12. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:
a) $\text{sen } x = \dfrac{1}{2}, 0 \le x < 2\pi$
b) $\cos(3x) = \dfrac{1}{2}, 0 \le x < 2\pi$

12 Sucesiones; inducción; teorema del binomio

El futuro de la población mundial

Se calcula que para 2050, la población mundial crecerá 46%, la mayor parte en las zonas menos industrializadas del planeta.

Crecimiento poblacional proyectado por área, 2003-2050: América del Norte 41.8%; América Latina y zona del Caribe; 46.2%; Oceanía: 55.6%; Europa: −8.8%; Asia: 39.8%; África: 118.8%.

Nota: Las Naciones Unidas clasifican a los países de América Latina y el Caribe, Asia, Oceanía y África como los menos industrializados, con excepción de Australia, Nueva Zelanda y Japón.

WASHINGTON—De acuerdo con un nuevo informe, la población de África podría elevarse a más de 1000 millones durante los próximos 50 años, aumentando aún más la demanda de abastecimiento de alimentos, agua y servicios sociales en zonas donde ya escasean.

La última edición de la World Population Data Sheet estima que la población mundial aumentará 46% entre hoy y el 2050, hasta alcanzar cerca de los 9000 millones, mismo nivel que pronostican las Naciones Unidas y otros grupos.

Se espera que la población de los países europeos, más industrializados y prósperos, se reduzca debido a la caída de las tasas de natalidad y escasa inmigración.

Se calcula que la población estadounidense aumente 45%, alcanzando los 422 millones en el 2050, debido a una tasa de natalidad estable y elevados niveles de inmigración.

Pero el mayor crecimiento mundial se presentará en las naciones en desarrollo. Se estima que la población de la India crecerá 52%, alcanzando los 1600 millones en el 2050, sobrepasando a China como el país más poblado.

Se pronostica que la población africana llegará a más del doble, alcanzando los 1900 millones para mediados del siglo.

FUENTE: *The Houston Chronicle* (Houston, TX), 23 de julio del 2003, p. 12.

—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO

CONTENIDO

12.1 Sucesiones

12.2 Sucesiones aritméticas

12.3 Sucesiones geométricas; series geométricas

12.4 Inducción matemática

12.5 Teorema del binomio

Repaso del capítulo

Proyectos del capítulo

Repaso acumulativo



12.1 Sucesiones

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Funciones (sección 3.1, pp. 218-233)



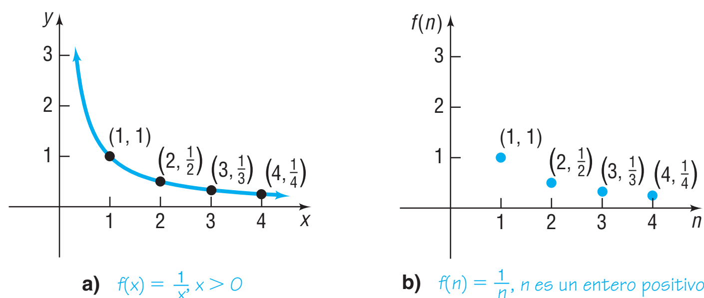
Trabaje ahora en los problemas "¿Está preparado?", de la página 947.

OBJETIVOS
1. Escribir los primeros términos de una sucesión
2. Escribir los términos de una sucesión, definida por una fórmula recursiva
3. Utilizar la notación de sumatoria
4. Encontrar la suma de una sucesión

Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.

Puesto que una sucesión es una función, debe tener una gráfica. En la figura 1*a*), reconocerá la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Si se eliminaran todos los puntos de esta gráfica, exceptuando aquellos cuyas abscisas son enteros positivos, es decir, si se eliminaran todos los puntos, excepto $(1, 1)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(3, \frac{1}{3}\right)$, y así sucesivamente, los puntos restantes representarían la gráfica de la sucesión $f(n) = \frac{1}{n}$, como se muestra en la figura 1*b*).

Figura 1



a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ **b)** $f(n) = \frac{1}{n}$, *n* es un entero positivo

Por lo general, una sucesión se representa enumerando sus valores en orden. Por ejemplo, la sucesión cuya gráfica aparece en la figura 1*b*), se pudiera presentar como:

$$f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots \quad \text{o} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

La lista nunca termina, como lo indica la elipse. Los números de esta lista ordenada se denominan **términos** de la sucesión.

1 Al tratar con sucesiones, por lo general se utilizan letras con subíndices, como a_1, para representar al primer término, a_2 para el segundo término, a_3 para el tercero, y así sucesivamente. Para la sucesión $f(n) = \frac{1}{n}$, escribimos:

$$a_1 = f(1) = 1, \quad a_2 = f(2) = \frac{1}{2}, \quad a_3 = f(3) = \frac{1}{3}, \quad a_4 = f(4) = \frac{1}{4}, \ldots, \quad a_n = f(n) = \frac{1}{n}, \ldots$$

En otras palabras, para sucesiones no utilizamos la notación tradicional de las funciones *f(n)*. Para esta sucesión en particular, tenemos una regla para el *n*-ésimo término, que es $a_n = \frac{1}{n}$, por lo que resulta fácil encontrar cualquier término de la sucesión.

Cuando se conoce la fórmula para el *n*-ésimo término (a veces llamado **término general**), en lugar de escribir los términos de la sucesión, se le representa colocando su fórmula entre llaves. Por ejemplo, la fórmula cuyo *n*-ésimo término es $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ se presenta como:

$$\{b_n\} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

o mediante:

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{4}, \quad b_3 = \frac{1}{8}, \ldots, \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots$$

EJEMPLO 1 Escribir los primeros términos de una sucesión

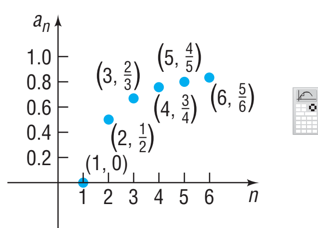
Escribir los primeros seis términos de la siguiente sucesión y graficarla.

$$\{a_n\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}$$

Solución Los primeros seis términos de la sucesión son:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{4}, \quad a_5 = \frac{4}{5}, \quad a_6 = \frac{5}{6}$$

Figura 2



En la figura 2 se muestra la gráfica. ◀

Comentario: Se emplean calculadoras gráficas para escribir y graficar los términos de una sucesión. En la figura 3 se muestra la sucesión proporcionada en el ejemplo 1, generada en una calculadora gráfica TI-83. En la ventana de visualización vemos los primeros términos de la sucesión. Se necesita oprimir la tecla de flecha a la derecha para desplazarse y poder ver los demás términos de la sucesión. En la figura 4 se muestra la gráfica de la sucesión. Observe que no es visible el primer término de la sucesión, porque queda sobre el eje *x*. Aplicar la función TRACE le permitirá ver los términos de la sucesión. También utiliza la función TABLE para generar los términos de la sucesión. Vea la tabla 1.

Figura 3

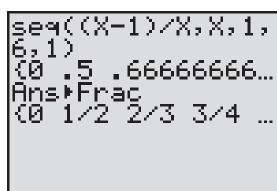


Figura 4

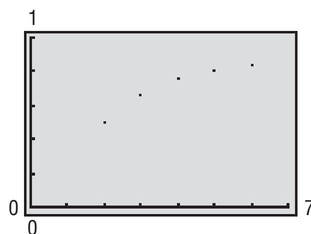


Tabla 1

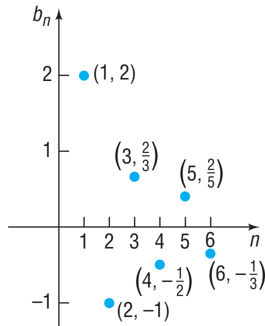
n	u(n)
1	0
2	.5
3	.66667
4	.75
5	.8
6	.83333
7	.85714

u(n)■(n−1)/n

■

EJEMPLO 2 Escribir los primeros términos de una sucesión

Figura 5



Escribir los primeros seis términos de la siguiente sucesión y graficarla.

$$\{b_n\} = \left\{(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{n}\right)\right\}$$

Solución Los primeros seis términos de la sucesión son:

$$b_1 = 2, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = \frac{2}{3}, \quad b_4 = -\frac{1}{2}, \quad b_5 = \frac{2}{5}, \quad b_6 = -\frac{1}{3}$$

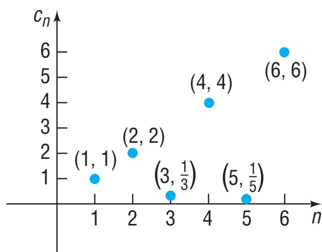
Vea la gráfica en la figura 5. ◀

Observe que en la sucesión $\{b_n\}$ del ejemplo 2, se **alterna** el signo de los términos. Cuando esto ocurre, se utilizan factores como $(-1)^{n+1}$, que es igual a 1 si n es impar y a -1 si n es par, o $(-1)^n$, que es igual a -1 si n es impar y a 1 si n es par.

EJEMPLO 3 Escribir los primeros términos de una sucesión

Escribir los primeros seis términos de la siguiente sucesión y graficarla.

Figura 6



$$\{c_n\} = \left\{\begin{array}{ll} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ is par} \end{array}\right\}$$

Solución Los primeros seis términos de la sucesión son:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \quad c_4 = 4, \quad c_5 = \frac{1}{5}, \quad c_6 = 6$$

Vea la gráfica en la figura 6. ◀

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 11 Y 13.

A veces, una sucesión se indica por medio de un patrón observado en sus primeros términos, que hace posible inferir el aspecto del n-ésimo término. En el ejemplo siguiente, se proporciona un número suficiente de términos de la sucesión, de manera que se sugiere una opción natural para el n-ésimo término.

EJEMPLO 4 Determinar una sucesión a partir de un patrón

a) $e, \frac{e^2}{2}, \frac{e^3}{3}, \frac{e^4}{4}, \ldots$ $\qquad a_n = \frac{e^n}{n}$

b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ $\qquad b_n = \frac{1}{3^{n-1}}$

c) $1, 3, 5, 7, \ldots$ $\qquad c_n = 2n - 1$

d) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ $\qquad d_n = n^2$

e) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ $\qquad e_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

El símbolo factorial

Si $n \geq 0$ es un entero, el **símbolo factorial** $\boldsymbol{n!}$ se define de la siguiente manera:

$$0! = 1 \qquad 1! = 1$$
$$n! = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \qquad \text{si } n \geq 2$$

Por ejemplo, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, y así sucesivamente. En la tabla 2 se enumeran los valores de $n!$ para $0 \leq n \leq 6$.

Tabla 2

n	0	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	1	2	6	24	120	720

Puesto que:

$$n! = n\underbrace{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{(n-1)!}$$

podemos usar la fórmula:

$$n! = n(n-1)!$$

para encontrar los factoriales sucesivos. Por ejemplo, si $6! = 720$, tenemos:

$$7! = 7 \cdot 6! = 7(720) = 5040$$

y

$$8! = 8 \cdot 7! = 8(5040) = 40{,}320$$



COMENTARIO: Su calculadora tiene una tecla para el factorial. Úsela para ver lo rápido que los factoriales aumentan su valor. Encuentre el valor de 69! ¿Qué pasa cuando trata de calcular 70!? De hecho, 70! es mayor que 10^{100} (un **googol),** el número más grande que pueden mostrar la mayoría de las calculadoras. ■

Fórmulas recursivas

2 Otra manera de definir una sucesión consiste en asignar un valor al (los) primer(os) (o uno de los primeros) término(s) y especificar el n-ésimo término mediante una fórmula o ecuación que incluya uno o más de los términos que lo anteceden en la sucesión. Se dice que las sucesiones definidas de esta manera se definen de **manera recursiva**, y la regla o fórmula se denomina **fórmula recursiva.**

EJEMPLO 5 Escribir los primeros términos de una sucesión definida de manera recursiva

Escribir los primeros cinco términos de la siguiente sucesión definida de manera recursiva.

$$s_1 = 1, \qquad s_n = 4s_{n-1}$$

Solución El primer término se da como $s_1 = 1$. Para obtener el segundo término, utilizamos en la fórmula $n = 2$, para obtener $S_2 = 4s_1 = 4 \cdot 1 = 4$. Para obtener el tercer término, utilizamos $n = 3$ en la fórmula, para obtener $S_3 = 4s_2 = 4 \cdot 4 = 16$. Para obtener un nuevo término, se requiere conocer el valor del término anterior. Los primeros cinco términos de la sucesión son:

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 4 \cdot 1 = 4$$
$$s_3 = 4 \cdot 4 = 16$$
$$s_4 = 4 \cdot 16 = 64$$
$$s_5 = 4 \cdot 64 = 256$$



EJEMPLO 6 **Escribir los términos de una sucesión definida de manera recursiva**

Escribir los primeros cinco términos de la siguiente sucesión definida de manera recursiva.

$$f_1 = 1, \qquad f_n = nf_{n-1}$$

Solución Aquí:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 2f_1 = 2 \cdot 1 = 2 \\ f_3 &= 3f_2 = 3 \cdot 2 = 6 \\ f_4 &= 4f_3 = 4 \cdot 6 = 24 \\ f_5 &= 5f_4 = 5 \cdot 24 = 120 \end{aligned}$$

◀

En el ejemplo 6, se debe reconocer a $n!$ como el n-ésimo término de la sucesión.

EJEMPLO 7 **Escribir los términos de una sucesión definida de manera recursiva**

Escribir los primeros cinco términos de la siguiente sucesión definida de manera recursiva.

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 1, \qquad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

Solución Se nos proporcionan los dos primeros términos. Para obtener el tercero, es necesario conocer cada uno de los dos términos previos. De esta manera,

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 1 \\ u_3 &= u_1 + u_2 = 1 + 1 = 2 \\ u_4 &= u_2 + u_3 = 1 + 2 = 3 \\ u_5 &= u_3 + u_4 = 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

◀

La sucesión definida en el ejemplo 7 se denomina **sucesión de Fibonacci,** y los números que la componen se llaman **números de Fibonacci.** Estos números aparecen en una amplia variedad de aplicaciones (vea los problemas 79-82).


TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **29** Y **37.**

Notación de sumatoria


Con frecuencia resulta importante poder encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión $\{a_n\}$, es decir:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

En lugar de escribir todos esos términos, introducimos una manera más concisa de expresar la suma, llamada **notación de sumatoria**. Utilizando esta notación, podemos escribir la suma como:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

El símbolo Σ (versión estilizada de la letra griega Sigma, que equivale a la S de nuestro abecedario) sencillamente es una instrucción de suma o adición,

los términos. El entero k se llama el **índice** de la suma; nos dice dónde inicia la suma y dónde termina. La expresión:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

es una instrucción para sumar los términos a_k de la sucesión $\{a_n\}$ desde $k = 1$ hasta $k = n$. Esta expresión se lee "la suma de a_k desde $k = 1$ hasta $k = n$".

EJEMPLO 8 Desarrollo de la notación de sumatoria

Escribir cada una de las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ b) $\sum_{k=1}^{n} k!$

Solución

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ b) $\sum_{k=1}^{n} k! = 1! + 2! + \cdots + n!$ ◀

EJEMPLO 9 Escribir una suma en notación de sumatoria

Expresar cada suma utilizando la notación de sumatoria.

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2$ b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$

Solución a) La suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2$ tiene nueve términos, todos con la forma k^2, y comienza en $k = 1$ y termina en $k = 9$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2$$

b) La suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

tiene n términos, todos con la forma $\frac{1}{2^{k-1}}$, y comienza en $k = 1$ y termina en $k = n$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$ ◀

El índice de la sumatoria no siempre debe comenzar en uno o terminar en n; por ejemplo, pudimos expresar la suma del ejemplo 9*b*) como:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Como índice se podrían utilizar otras letras además de la k. Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{n} j! \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} i!$$

ambas representan la misma suma que la utilizada en el ejemplo 8*b*).

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **57** Y **67**.

Sumar los primeros *n* términos de una sucesión

 A continuación se muestra una lista de propiedades de las sucesiones utilizando la notación de sumatoria. Estas propiedades son útiles para sumar los términos de una sucesión.

Teorema

Propiedades de las sucesiones

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones, y c es un número real, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n \text{ términos}} = cn \quad \textbf{(1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (ca_k) = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \textbf{(2)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \textbf{(3)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \textbf{(4)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_k, \quad \text{donde } 0 < j < n \quad \textbf{(5)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \textbf{(6)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \textbf{(7)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \textbf{(8)}$$

No demostraremos estas propiedades. Las demostraciones de las propiedades (1) a (5) se basan en las propiedades de los números reales; las demostraciones de (7) y (8) requieren inducción matemática, que se analiza hasta la sección 12.4. Vea en el problema 83 de la deducción de (6).

EJEMPLO 10 **Encontrar la suma de una sucesión**

Encontrar la suma de cada sucesión.

a) $\sum_{k=1}^{5} (3k)$ b) $\sum_{k=1}^{3} (k^3 + 1)$ c) $\sum_{k=1}^{4} (k^2 - 7k + 2)$

Solución

a) $$\sum_{k=1}^{5} (3k) = 3\sum_{k=1}^{5} k = 3\left(\frac{5(5+1)}{2}\right) = 3(15) = 45$$

↑ Propiedad (2) ↑ Propiedad (6)

b) $$\sum_{k=1}^{3} (k^3 + 1) = \sum_{k=1}^{3} k^3 + \sum_{k=1}^{3} 1 \qquad \text{Propiedad (3)}$$

$$= \left(\frac{3(3+1)}{2}\right)^2 + 1(3) \qquad \text{Propiedades (1) y (8)}$$

$$= 36 + 3$$

$$= 39$$

$$\text{(c)}\ \sum_{k=1}^{4}(k^2 - 7k + 2) = \sum_{k=1}^{4}k^2 - \sum_{k=1}^{4}(7k) + \sum_{k=1}^{4}2 \qquad \text{Propiedades (3) y (4)}$$

$$= \sum_{k=1}^{4}k^2 - 7\sum_{k=1}^{4}k + \sum_{k=1}^{4}2 \qquad \text{Propiedad (2)}$$

$$= \frac{4(4+1)(2\cdot 4+1)}{6} - 7\left(\frac{4(4+1)}{2}\right) + 2(4)$$

Propiedades (1), (6) y (7)

$$= 30 - 70 + 8$$

$$= -32$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

12.1 Evalúe su comprensión

"Está preparado" *Las respuestas están al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. Para la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$, encuentre $f(2)$ y $f(3)$. (pp. 218–228)

2. *Falso o verdadero:* Una función es una relación entre dos conjuntos D y R, *por lo que cada elemento* x del primer conjunto D se relaciona exactamente con un elemento y del segundo conjunto R. (pp. 218–228)

Conceptos y vocabulario

3. Una __________ (n) es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.

4. Para la sucesión $\{s_n\} = \{4n - 1\}$, el primer término es $s_1 =$ __________ y el cuarto término es $s_4 =$ __________.

5. $\sum_{k=1}^{4}(2k) =$ __________.

6. *Falso o verdadero:* A veces, las sucesiones se definen de manera recursiva.

7. *Falso o verdadero:* Una sucesión es una función.

8. *Falso o verdadero:* $\sum_{k=1}^{2}k = 3$

Ejercicios

En los problemas 9-20, escriba los primeros cinco términos de cada sucesión.

9. $\{n\}$

10. $\{n^2 + 1\}$

11. $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}$

12. $\left\{\dfrac{2n+1}{2n}\right\}$

13. $\{(-1)^{n+1}n^2\}$

14. $\left\{(-1)^{n-1}\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)\right\}$

15. $\left\{\dfrac{2^n}{3^n+1}\right\}$

16. $\left\{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\right\}$

17. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\right\}$

18. $\left\{\dfrac{3^n}{n}\right\}$

19. $\left\{\dfrac{n}{e^n}\right\}$

20. $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$

En los problemas 21-28 continúa el patrón proporcionado. Escriba el n*-ésimo término de cada sucesión sugerido por el patrón.*

21. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$

22. $\dfrac{1}{1\cdot 2}, \dfrac{1}{2\cdot 3}, \dfrac{1}{3\cdot 4}, \dfrac{1}{4\cdot 5}, \ldots$

23. $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots$

24. $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, \dfrac{16}{81}, \ldots$

25. $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

26. $1, \dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{4}, 5, \dfrac{1}{6}, 7, \dfrac{1}{8}, \ldots$

27. $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$

28. $2, -4, 6, -8, 10, \ldots$

En los problemas 29-42, la sucesión se define de manera recursiva. Escriba los cinco primeros términos.

29. $a_1 = 2; \quad a_n = 3 + a_{n-1}$

30. $a_1 = 3; \quad a_n = 4 - a_{n-1}$

31. $a_1 = -2; \quad a_n = n + a_{n-1}$

32. $a_1 = 1; \quad a_n = n - a_{n-1}$

33. $a_1 = 5; \quad a_n = 2a_{n-1}$

34. $a_1 = 2; \quad a_n = -a_{n-1}$

35. $a_1 = 3; \quad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$

36. $a_1 = -2; \quad a_n = n + 3a_{n-1}$

37. $a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

38. $a_1 = -1; \quad a_2 = 1; \quad a_n = a_{n-2} + na_{n-1}$

39. $a_1 = A; \quad a_n = a_{n-1} + d$

40. $a_1 = A; \quad a_n = ra_{n-1}, \quad r \neq 0$

41. $a_1 = \sqrt{2}; \quad a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$

42. $a_1 = \sqrt{2}; \quad a_n = \sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{2}}$

En los problemas 43-54, encuentre la suma de cada sucesión.

43. $\sum_{k=1}^{10} 5$

44. $\sum_{k=1}^{20} 8$

45. $\sum_{k=1}^{6} k$

46. $\sum_{k=1}^{4} (-k)$

47. $\sum_{k=1}^{5} (5k + 3)$

48. $\sum_{k=1}^{6} (3k - 7)$

49. $\sum_{k=1}^{3} (k^2 + 4)$

50. $\sum_{k=0}^{4} (k^2 - 4)$

51. $\sum_{k=1}^{6} (-1)^k 2^k$

52. $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k 3^k$

53. $\sum_{k=1}^{4} (k^3 - 1)$

54. $\sum_{k=0}^{3} (k^3 + 2)$

En los problemas 55-64, escriba cada suma.

55. $\sum_{k=1}^{n} (k + 2)$

56. $\sum_{k=1}^{n} (2k + 1)$

57. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{2}$

58. $\sum_{k=1}^{n} (k + 1)^2$

59. $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{3^k}$

60. $\sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{3}{2}\right)^k$

61. $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{3^{k+1}}$

62. $\sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1)$

63. $\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \ln k$

64. $\sum_{k=3}^{n} (-1)^{k+1} 2^k$

En los problemas 65-74, exprese cada suma utilizando la notación de sumatoria.

65. $1 + 2 + 3 + \cdots + 20$

66. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 8^3$

67. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \cdots + \dfrac{13}{13 + 1}$

68. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + [2(12) - 1]$

69. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \cdots + (-1)^6\left(\dfrac{1}{3^6}\right)$

70. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{27} - \cdots + (-1)^{11+1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{11}$

71. $3 + \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{3^3}{3} + \cdots + \dfrac{3^n}{n}$

72. $\dfrac{1}{e} + \dfrac{2}{e^2} + \dfrac{3}{e^3} + \cdots + \dfrac{n}{e^n}$

73. $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + nd)$

74. $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$

---

75. Deuda en tarjeta de crédito John tiene un saldo de \$3000 en su tarjeta Discover, que carga 1% de interés mensual sobre saldos insolutos. John puede pagar \$100 de su saldo cada mes. Su saldo mensual después de hacer un pago de \$100 está dado por la sucesión definida de manera recursiva:

$$B_0 = \$3000, \qquad B_n = 1.01B_{n-1} - 100$$

Determine el saldo de John después de hacer el primer pago, es decir, determine B_1.

76. Autofinanciamiento Phil compró un automóvil pidiendo un préstamo por \$18,500, al 0.5% de interés mensual. La mensualidad normal de Phil es de \$434.47, pero decide que puede pagar \$100 extra cada mes. Su saldo mensual está dado por la sucesión definida de manera recursiva:

$$B_0 = \$18{,}500, \qquad B_n = 1.005B_{n-1} - 534.47$$

Determine el saldo de Phil después de hacer el primer pago, es decir, determine B_1.

77. Población de truchas Un estanque tiene actualmente 2000 truchas. El propietario decide añadirle 20 truchas cada mes. Además, se sabe que la población está aumentando 3% mensual. El tamaño de la población después de n meses está dado por la sucesión definida de manera recursiva:

$$p_0 = 2000, \qquad p_n = 1.03p_{n-1} + 20$$

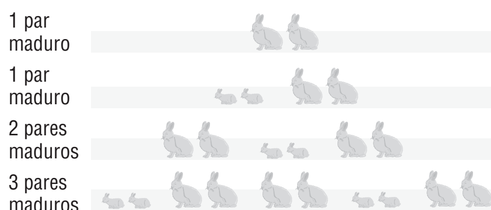
¿Cuántas truchas habrá en el estanque después de dos meses? Es decir, ¿cuánto es p_2?

78. Control ambiental La Agencia de Protección Ambiental (EPA) determina que, debido a los desechos industriales, el lago Maple tiene 250 toneladas de contaminantes, de los que cada año se neutraliza el 10% por medio de la oxidación solar. La EPA impone nuevas leyes para control de la contaminación, que tienen como resultado la entrada al lago de 15 toneladas de nuevos contaminantes al año. La cantidad de contaminantes en el lago luego de n años está dada por la sucesión definida de manera recursiva:

$$p_0 = 250, \qquad p_n = 0.9p_{n-1} + 15$$

Determine la cantidad de contaminantes en el lago tras dos años. Es decir, determine p_2.

79. Crecimiento de una colonia de conejos Una colonia de conejos comienza con un par de conejos fértiles, que tendrá un par de descendientes (un macho y una hembra) cada mes. Suponga que todos los conejos maduran en 1 mes y tienen un par de descendientes (un macho y una hembra) después de 2 meses. Si nunca muere ninguno, ¿cuántos pares de conejos habrá después de 7 meses? [**Sugerencia:** Esta colonia sigue un modelo de una sucesión de Fibonacci. ¿Sabe por qué?]



80. Sucesión de Fibonacci Sea:

$$u_n = \frac{\left(1 + \sqrt{5}\right)^n - \left(1 - \sqrt{5}\right)^n}{2^n \sqrt{5}}$$

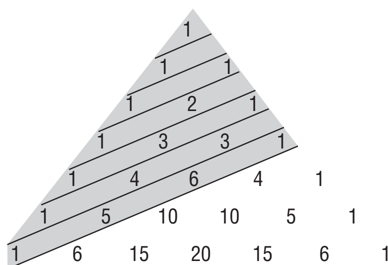
que define al n-ésimo término de una sucesión.

a) Demuestre que $u_1 = 1$ y $u_2 = 1$.

b) Demuestre que $u_{n+2} - u_{n+1} + u_n$.

c) Deduzca que $\{u_n\}$ es una sucesión de Fibonacci.

81. Triángulo de Pascal Divida el siguiente arreglo triangular (llamado triángulo de Pascal) utilizando líneas diagonales, como se indica. Encuentre la suma de los números que componen cada uno de esos trazos diagonales. ¿Reconoce esta sucesión?



82. Sucesión de Fibonacci Utilice el resultado del problema 80 para resolver los siguientes problemas:

a) Escriba los 10 primeros términos de la sucesión de Fibonacci.

b) Calcule la razón $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ para los 10 primeros términos.

c) ¿A qué número tiende la razón a medida que aumenta n? Este número de conoce como la **razón áurea**. Los griegos consideraban que los rectángulos cuyos lados mantienen esta razón eran agradables a la vista. Por ejemplo, la fachada del Partenón se construyó empleando la razón áurea.

d) Calcule la razón $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$ para los 10 primeros términos.

e) ¿A qué número tiende la razón a medida que aumenta n? Este número también se conoce como la **razón áurea**. Se cree que esta relación se utilizó para la construcción de la pirámide de Keops. Esta relación es igual a la suma de las áreas de sus cuatro caras triangulares dividida entre la superficie total de la pirámide.

83. Demuestre que:

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

[**Sugerencia:** Sea:

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n$$
$$S = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$$

Sume esas ecuaciones. Luego

$$2S = \underbrace{[1 + n] + [2 + (n - 1)] + \cdots + [n + 1]}_{n \text{ términos entre corchetes}}$$

Ahora complete la deducción].

84. Investigue varias aplicaciones que conduzcan a la sucesión de Fibonacci, como el arte, la arquitectura o los mercados financieros. Haga un trabajo sobre dichas aplicaciones.

Respuestas a "Está preparado"

1. $f(2) = \frac{1}{2}; f(3) = \frac{2}{3}$

2. Verdadero

12.2 Sucesiones aritméticas

OBJETIVOS
1 Determinar si una sucesión es aritmética
2 Encontrar una fórmula para una sucesión aritmética
3 Encontrar la suma de una sucesión aritmética

1 Cuando la diferencia entre términos consecutivos de una sucesión siempre es el mismo número, se dice que es una sucesión **aritmética**. Una **sucesión aritmética***

*A veces se llama progresión aritmética.

se define de manera recursiva como $a_1 = a, - a_n = a_{n-1} + d$ o como

$$a_1 = a, \qquad a_n = a_{n-1} + d \tag{1}$$

donde $a = a_1$ y d son números reales. El número a es el primer término y el número d se denomina la **diferencia común**.

Los términos de una sucesión aritmética con un primer término a y una diferencia común d, siguen el patrón

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \ldots$$

EJEMPLO 1 Determinar si una sucesión es aritmética

La sucesión

$$4, \quad 7, \quad 10, \quad 13, \ldots$$

es aritmética, porque la diferencia entre los términos consecutivos es 3. El primer término es 4, y la diferencia común es 3. ◀

EJEMPLO 2 Determinar si una sucesión es aritmética

Demostrar que la sucesión siguiente es aritmética. Encontrar el primer término y la diferencia común.

$$\{s_n\} = \{3n + 5\}$$

Solución El primer término es $s_1 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$. Los términos n-ésimo y $(n - 1)$-ésimo de la sucesión $\{s_n\}$ son:

$$s_n = 3n + 5 \quad \text{y} \quad s_{n-1} = 3(n - 1) + 5 = 3n + 2$$

Su diferencia es:

$$s_n - s_{n-1} = (3n + 5) - (3n + 2) = 5 - 2 = 3$$

Puesto que la diferencia de dos términos consecutivos es constante, la sucesión es aritmética y la diferencia común es 3. ◀

EJEMPLO 3 Determinar si una sucesión es aritmética

Demostrar que la sucesión $\{t_n\} = \{4 - n\}$ es aritmética. Encontrar el primer término y la diferencia común.

Solución El primer término es $t_1 = 4 - 1 = 3$. Los términos n-ésimo y $(n - 1)$-ésimo son:

$$t_n = 4 - n \quad \text{y} \quad t_{n-1} = 4 - (n - 1) = 5 - n$$

Su diferencia es:

$$t_n - t_{n-1} = (4 - n) - (5 - n) = 4 - 5 = -1$$

Puesto que la diferencia de dos términos consecutivos, $\{t_n\}$ es una sucesión aritmética cuya diferencia común es -1. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 5.

2 Suponiendo que a es el primer término de una sucesión aritmética con una diferencia común d. Buscamos la fórmula para el n-ésimo término, a_n. Para ver el patrón, escribimos los primeros términos.

$$\begin{aligned}
a_1 &= a \\
a_2 &= a_1 + d = a + 1 \cdot d \\
a_3 &= a_2 + d = (a + d) + d = a + 2 \cdot d \\
a_4 &= a_3 + d = (a + 2 \cdot d) + d = a + 3 \cdot d \\
a_5 &= a_4 + d = (a + 3 \cdot d) + d = a + 4 \cdot d \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + d = [a + (n-2)d] + d = a + (n-1)d
\end{aligned}$$

Por lo anterior, llegamos al siguiente:

Teorema

n-ésimo término de una sucesión aritmética

Para una sucesión aritmética $\{a_n\}$ cuyo primer término es a y tiene una diferencia común d, el n-ésimo término se determina mediante la fórmula:

$$a_n = a + (n-1)d \qquad \textbf{(2)}$$

EJEMPLO 4 Encontrar un término específico de una sucesión aritmética

Encontrar el décimo tercer término de la sucesión aritmética: 2, 6, 10, 14, 18, . . .

Solución El primer término de esta sucesión aritmética es $a = 2$ y la diferencia común es 4. Si se utiliza la fórmula (2), el n-ésimo término es:

$$a_n = 2 + (n-1)4$$

Por lo tanto, el décimo tercer término es:

$$a_{13} = 2 + 12 \cdot 4 = 50$$





Exploración

Utilice una calculadora gráfica para encontrar el décimo tercer término de la sucesión dada en el ejemplo 4. Utilícela para encontrar los términos vigésimo y quincuagésimo.

EJEMPLO 5 Encontrar una fórmula recursiva para una sucesión aritmética

El octavo término de una sucesión aritmética es 75 y el vigésimo término es 39. Encontrar el primer término y la diferencia común. Encontrar una fórmula recursiva para una sucesión. ¿Cuál es el n-ésimo término de la sucesión?

Solución Por medio de la fórmula (2), sabemos que $a_n = a + (n-1)d$. En consecuencia,

$$\begin{cases} a_8 = a + 7d = 75 \\ a_{20} = a + 19d = 39 \end{cases}$$

Éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, a y d, que podemos resolver por eliminación. Restando la segunda ecuación a la primera, obtenemos:

$$-12d = 36$$
$$d = -3$$

Con $d = -3$, encontramos que $a = 75 - 7d = 75 - 7(-3) = 96$. El primer término es $a = 96$ y la diferencia común es $d = -3$. Si se utiliza la fórmula (1), se encuentra una fórmula recursiva para esta sucesión.

$$a_1 = 96, \qquad a_n = a_{n-1} - 3$$

Con base en la fórmula (2), la fórmula para el n-ésimo término de la sucesión $\{a_n\}$ es:

$$a_n = a + (n-1)d = 96 + (n-1)(-3) = 99 - 3n$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 21 Y 27.



Exploración

Grafique la fórmula recursiva del ejemplo 5, $a_1 = 96$, $a_n = a_{n-1} - 3$, empleando una calculadora gráfica. Concluya si la gráfica de la fórmula recursiva se comporta como la gráfica de una función lineal. ¿Cómo es d, la diferencia común, respecto de m, la pendiente de la recta?

Suma de los primeros *n* términos de una sucesión aritmética



El resultado siguiente produce una fórmula para encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética.

Teorema

Suma de *n* términos de una sucesión aritmética

Sea $\{a_n\}$ una sucesión aritmética con un primer término a y una diferencia común d. La suma S_n de los primeros n términos de $\{a_n\}$ es:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + a_n) \qquad \textbf{(3)}$$

Demostración

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \qquad \text{Suma de los primeros } n \text{ términos}$$
$$= a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n-1)d] \qquad \text{Fórmula (2)}$$
$$= \underbrace{(a + a + \cdots + a)}_{n \text{ términos}} + [d + 2d + \cdots + (n-1)d] \qquad \text{Reordenando términos}$$
$$= na + d[1 + 2 + \cdots + (n-1)]$$
$$= na + d\left[\frac{(n-1)n}{2}\right] \qquad \text{Propiedad 6, sección 12.1}$$
$$= na + \frac{n}{2}(n-1)d$$
$$= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \qquad \text{Factorizando } \frac{n}{2} \qquad \textbf{(4)}$$
$$= \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}(a + a_n) \qquad \text{Fórmula (2)} \qquad \textbf{(5)}$$ ■

La fórmula (3) proporciona dos maneras de encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética. Observe que la fórmula (4) incluye al primer término y a la diferencia común, mientras que la fórmula (5) incluye los términos primero y n-ésimo. Es fácil utilizar cualquier forma.

EJEMPLO 6 Encontrar la suma de n términos de una sucesión aritmética

Encontrar la suma de S_n de los primeros n términos de una sucesión $\{3n + 5\}$; es decir, encontrar:

$$8 + 11 + 14 + \cdots + (3n + 5)$$

Solución La sucesión $\{3n + 5\}$ es una sucesión aritmética con primer término $a = 8$ y n-ésimo término $(3n + 5)$. Para encontrar la suma S_n, utilizamos la fórmula (5).

$$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n) = \frac{n}{2}[8 + (3n + 5)] = \frac{n}{2}(3n + 13)$$ ◀

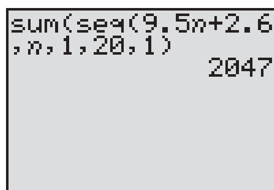
 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 35.



EJEMPLO 7 Emplear una calculadora gráfica para encontrar la suma de 20 términos de una sucesión aritmética

Emplear una calculadora gráfica para encontrar la suma de los 20 primeros términos de la sucesión $\{9.5n + 2.6\}$.

Figura 7



Solución En la figura 7 se muestran los resultados obtenidos utilizando una calculadora gráfica TI-83.

La suma de los primeros 20 términos de una sucesión $\{9.5n + 2.6\}$ es 2047. ◀

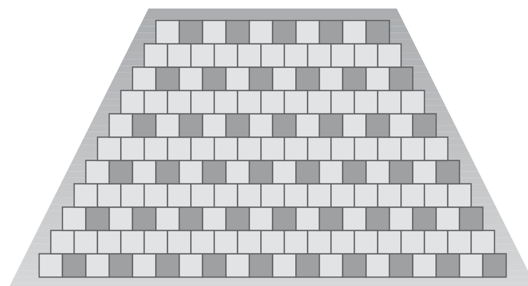
 RESUELVA EL PROBLEMA 7 USANDO LA FÓRMULA (3).

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 43.

EJEMPLO 8 Cómo hacer un diseño de piso

Un piso de baldosas de cerámica está diseñado con forma de un trapezoide de 20 pies en la base mayor y 10 pies en la base menor. Vea la figura 8. Las baldosas, de 12 por 12 pulgadas, se van a colocar de manera que cada línea tenga sólo una baldosa menos la anterior. ¿Cuántas baldosas serán necesarias?

Figura 8



Solución La línea inferior necesita 12 baldosas y la superior 10. Puesto que en cada una de las líneas sucesivas necesita sólo una baldosa menos, el número total de baldosas necesarias es:

$$S = 20 + 19 + 18 + \cdots + 11 + 10$$

Ésta es la suma de una sucesión aritmética; la diferencia común es -1. El número de términos por añadir es $n = 11$, donde el primer término $a = 20$ y el último término $a_{11} = 10$. La suma S es:

$$S = \frac{n}{2}(a + a_{11}) = \frac{11}{2}(20 + 10) = 165$$

En total, serán necesarias 165 baldosas. ◄

12.2 Evalúe su conocimiento

Conceptos y vocabulario

1. En una sucesión __________ (n), la diferencia entre términos consecutivos es una constante.

2. *Falso o verdadero:* En una sucesión aritmética, la suma del primero y último término es igual al doble de la suma de todos los términos.

Ejercicios

En los problemas 3-12, se da una sucesión aritmética. Encuentre la diferencia común y escriba los cuatro primeros términos.

3. $\{n + 4\}$ **4.** $\{n - 5\}$ **5.** $\{2n - 5\}$ **6.** $\{3n + 1\}$ **7.** $\{6 - 2n\}$

8. $\{4 - 2n\}$ **9.** $\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n\right\}$ **10.** $\left\{\frac{2}{3} + \frac{n}{4}\right\}$ **11.** $\{\ln 3^n\}$ **12.** $\{e^{\ln n}\}$

En los problemas 13-20, encuentre el n-*ésimo término de la sucesión aritmética cuyo término inicial* a *y la diferencia común* d *se dan. ¿Cuál es el quinto término?*

13. $a = 2;\quad d = 3$ **14.** $a = -2;\quad d = 4$ **15.** $a = 5;\quad d = -3$ **16.** $a = 6;\quad d = -2$

17. $a = 0;\quad d = \frac{1}{2}$ **18.** $a = 1;\quad d = -\frac{1}{3}$ **19.** $a = \sqrt{2};\quad d = \sqrt{2}$ **20.** $a = 0;\quad d = \pi$

En los problemas 21-26, encuentre el término indicado de cada sucesión aritmética.

21. 12° término de $2, 4, 6, \ldots$

22. 8° término de $-1, 1, 3, \ldots$

23. 10° término de $1, -2, -5, \ldots$

24. 9° término de $5, 0, -5, \ldots$

25. 8° término de $a, a + b, a + 2b, \ldots$

26. 7° término de $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, \ldots$

En los problemas 27-34, encuentre el primer término y la diferencia común de la sucesión aritmética descrita. Proporcione una fórmula recursiva para la sucesión.

27. 8° término es 8; 20° término es 44

28. 4° término es 3; 20° término es 35

29. 9° término es -5; 15° término es 31

30. 8° término es 4; 18° término es -96

31. 15° término es 0; 40° término es -50

32. 5° término es -2; 13° término es 30

33. 14° término es -1; 18° término es -9

34. 12° término es 4; 18° término es 28

En los problemas 35-42, encuentre la suma.

35. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$

36. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$

37. $7 + 12 + 17 + \cdots + (2 + 5n)$

38. $-1 + 3 + 7 + \cdots + (4n - 5)$

39. $2 + 4 + 6 + \cdots + 70$

40. $1 + 3 + 5 + \cdots + 59$

41. $5 + 9 + 13 + \cdots + 49$

42. $2 + 5 + 8 + \cdots + 41$

En los problemas 43-48, emplee una calculadora gráfica para encontrar la suma de cada sucesión.

43. $\{3.45n + 4.12\},\quad n = 20$

44. $\{2.67n - 1.23\},\quad n = 25$

45. $2.8 + 5.2 + 7.6 + \cdots + 36.4$

46. $5.4 + 7.3 + 9.2 + \cdots + 32$

47. $4.9 + 7.48 + 10.06 + \cdots + 66.82$

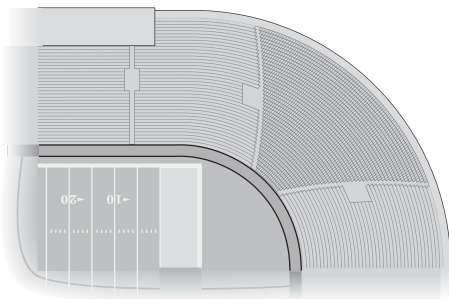
48. $3.71 + 6.9 + 10.09 + \cdots + 80.27$

49. Encuentre la x tal que $x + 3, 2x + 1$, y $5x + 2$ sean términos consecutivos de una sucesión aritmética.

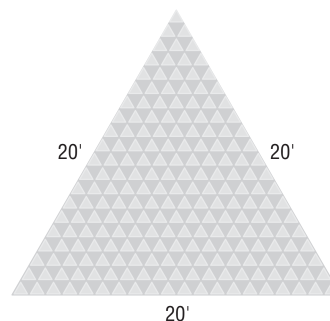
50. Encuentre la x tal que $2x, 3x + 2$ y $5x + 3$ sean términos consecutivos de una sucesión aritmética.

51. Teatro Drury Lane El teatro Drury Lane tiene 25 asientos en la primera fila y 30 filas en total. Cada fila sucesiva tiene un asiento adicional. ¿Cuántos asientos tiene el teatro?

52. Estadio de fútbol La sesión esquinada de una estadio de fútbol tiene 15 asientos en la primera fila y 40 filas en total (vea la figura). Cada fila sucesiva tiene dos asientos adicionales. ¿Cuántos asientos tiene esta sección?



53. Creación de un mosaico Se diseña un mosaico con forma de triángulo equilátero, con 20 pies de lado. Cada baldosa del mosaico tiene la forma de un triángulo equilátero, con 12 pulgadas de lado. El color de las baldosas se alterna, como se muestra en la figura. ¿Cuántas baldosas de cada color serán necesarias?



54. Construcción de una escalera de ladrillo Una escalera de ladrillo tiene un total de 30 escalones. El escalón inferior necesita 100 ladrillos. Cada escalón sucesivo necesita dos ladrillos menos que el anterior.

a) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para el escalón superior?

b) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para construir la escalera?

55. Construcción de un estadio ¿Cuántas filas hay en la sesión esquinada de un estadio que contiene 2040 asientos, si la primera fila tiene 10 asientos y cada una de las sucesivas tiene cuatro asientos adicionales?

56. Sueldo Suponga que acaba de recibir una oferta de trabajo con un sueldo inicial de $35,000 anuales y un aumento garantizado de $1400 por año. ¿Cuántos años tendrán que pasar para que su sueldo acumulado sea de $280,000? [**Sugerencia:** Su sueldo acumulado después de dos años es de $35,000 + ($35,000 + $1400)].

57. Elabore una sucesión aritmética. Entréguela a un compañero y pídale que obtenga el vigésimo término.

12.3 Sucesiones geométricas; series geométricas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Interés compuesto (sección 5.7 pp. 455-462)

OBJETIVOS
1. Determinar si una sucesión es geométrica
2. Encontrar una fórmula para una sucesión geométrica
3. Encontrar la suma de una sucesión geométrica
4. Encontrar la suma de una serie geométrica
5. Resolver problemas relativos a plazos anuales

1 Cuando la razón entre términos consecutivos de una sucesión siempre es el mismo número distinto de cero, la sucesión se denomina **geométrica**. Una **sucesión geométrica*** se define de manera recursiva como $a_1 = a$, $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = r$, o como:

$$a_1 = a, \qquad a_n = ra_{n-1} \tag{1}$$

*A veces se llama **progresión geométrica.**

donde $a_1 = a$ y $r \neq 0$ son números reales. El número a es el primer término y el número r distinto de cero se denomina **razón común**.

Los términos de una sucesión geométrica con un primer término a y una razón común r, siguen el patrón:

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \ldots$$

EJEMPLO 1 Determinar si una sucesión es geométrica

La sucesión:

$$2, 6, 18, 54, 162, \ldots$$

es geométrica porque la razón entre los términos consecutivos es $3\left(\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \cdots = 3\right)$. El primer término es 2 y la razón común es 3. ◀

EJEMPLO 2 Determinar si una sucesión es geométrica

Demostrar que la sucesión siguiente es geométrica. Encontrar el primer término y la razón común.

$$\{s_n\} = 2^{-n}$$

Solución El primer término es $s_1 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. Los términos n-ésimo y $(n - 1)$ésimo de la sucesión $\{s_n\}$ son:

$$s_n = 2^{-n} \quad \text{y} \quad s_{n-1} = 2^{-(n-1)}$$

Su razón es:

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{2^{-n}}{2^{-(n-1)}} = 2^{-n+(n-1)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Puesto que la razón de términos sucesivos es una constante distinta de cero, la sucesión $\{s_n\}$ es geométrica, con una razón de $\frac{1}{2}$. ◀

EJEMPLO 3 Determinar si una sucesión es geométrica

Demostrar que la sucesión siguiente es geométrica. Encontrar el primer término y la razón común.

$$\{t_n\} = \{4^n\}$$

Solución El primer término es $t_1 = 4^1 = 4$. Los términos n-ésimo y $(n - 1)$-ésimo son:

$$t_n = 4^n \quad \text{y} \quad t_{n-1} = 4^{n-1}$$

Su razón es:

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{4^n}{4^{n-1}} = 4^{n-(n-1)} = 4$$

Entonces, $\{t_n\}$ es una sucesión geométrica con una razón común de 4. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

2 Suponga que a es el primer término de una sucesión geométrica con una razón común $r \neq 0$. Buscamos la fórmula para el n-ésimo término a_n. Para ver el patrón, escribimos los primeros términos:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1a = ar^0 \\ a_2 &= ra_1 = ar^1 \\ a_3 &= ra_2 = r(ar) = ar^2 \\ a_4 &= ra_3 = r(ar^2) = ar^3 \\ a_5 &= ra_4 = r(ar^3) = ar^4 \\ &\vdots \\ a_n &= ra_{n-1} = r(ar^{n-2}) = ar^{n-1} \end{aligned}$$

Por lo anterior, nos vemos conducidos a lo siguiente:

Teorema

n-ésimo término de una sucesión geométrica

Para una sucesión geométrica $\{a_n\}$ cuyo primer término es a y tiene una razón común r, el n-ésimo término se determina mediante la fórmula:

$$a_n = ar^{n-1}, \qquad r \neq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

EJEMPLO 4 Encontrar un término específico de una sucesión geométrica

a) Encontrar el noveno término de la sucesión geométrica: $10, 9, \frac{81}{10}, \frac{729}{100} \ldots$

b) Encontrar una fórmula recursiva para esta sucesión.

Solución a) El primer término de esta sucesión geométrica es $a = 10$ y la razón común es $\frac{9}{10}$ (use $\frac{9}{10}$, o $\frac{\frac{81}{10}}{9} = \frac{9}{10}$, o cualesquiera términos consecutivos). Mediante la fórmula (2), el n-ésimo término es:

$$a_n = 10\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

El noveno término es:

$$a_9 = 10\left(\frac{9}{10}\right)^{9-1} = 10\left(\frac{9}{10}\right)^8 = 4.3046721$$

b) El primer término de la sucesión es 10 y la razón común es $r = \frac{9}{10}$. Si se utiliza la fórmula (1), la fórmula recursiva es $a_1 = 10$, $a_n = \frac{9}{10}a_{n-1}$. ◀



Exploración

Use una calculadora gráfica para encontrar el noveno término de la sucesión dada en el ejemplo 4. Utilícela para encontrar los términos vigésimo y quincuagésimo. Ahora use la calculadora gráfica para graficar la fórmula recursiva obtenida en el ejemplo 4*b*). Concluya si la gráfica de la fórmula recursiva se comporta como la gráfica de una función exponencial. ¿Cómo es *r*, la razón común, con respecto a *a*, la base de la función exponencial $y = a^x$?



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 33 Y 41.

Sumar los primeros *n* términos de una sucesión geométrica



3 El resultado siguiente produce una fórmula para encontrar la suma de los primeros *n* términos de una sucesión geométrica.

Teorema

Suma de *n* términos de una sucesión geométrica

Sea $\{a_n\}$ una sucesión geométrica con un primer término *a* y una razón común *r*, donde $r \neq 0, r \neq 1$. La suma S_n de los primeros *n* términos de $\{a_n\}$ es:

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}, \qquad r \neq 0, 1 \tag{3}$$

Demostración La suma S_n de los primeros *n* términos de $\{a_n\} = \{ar^{n-1}\}$ es:

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} \tag{4}$$

Si se multiplican ambos lados por *r*, se obtiene:

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n \tag{5}$$

Ahora, se resta (5) de (4). El resultado es:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$
$$(1 - r)S_n = a(1 - r^n)$$

Puesto que $r \neq 1$, Podemos despejar S_n.

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

■

EJEMPLO 5 **Encontrar la suma de *n* términos de una sucesión geométrica**

Encontrar la suma de S_n de los primeros *n* términos de la sucesión $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$; es decir, encontrar:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Solución Entonces, $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ es una sucesión geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$. La suma S_n buscada es la suma de los primeros *n* términos de la sucesión, por lo que usaremos la fórmula (3) para obtener:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right] \quad \text{Fórmula (3)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.



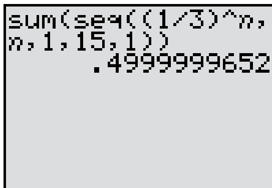
EJEMPLO 6 Emplear una calculadora gráfica para encontrar la suma de una sucesión geométrica

Emplear una calculadora gráfica para encontrar la suma de los 15 primeros términos de la sucesión $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$; es decir, encontrar:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{15}$$

Solución En la figura 9 se muestra el resultado obtenido utilizando una calculadora gráfica TI-83. La suma de los primeros 15 términos de la sucesión $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ es 0.4999999652. ◀

Figura 9



 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

Series geométricas

Una suma infinita de la forma:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

con un primer término a y una razón común r, se llama **serie geométrica infinita** y se denota:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

 Con base en la fórmula (3), la suma S_n de los primeros n términos de una serie geométrica es:

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r} \qquad \textbf{(6)}$$

Si esta suma finita S_n tiende a un número L cuando $n \to \infty$, entonces a L la llamamos la **suma de una serie geométrica infinita** y escribimos:

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

Teorema

Suma de una serie geométrica infinita

Si $|r| < 1$, la suma de una serie geométrica infinita $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ es:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r} \tag{7}$$

Demostración intuitiva Puesto que $|r| < 1$, se deduce que $|r^n|$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Entonces, de acuerdo con la fórmula (6), la suma S_n tiende a $\frac{a}{1-r}$ cuando $n \to \infty$. ■

EJEMPLO 7 Encontrar la suma de una serie geométrica

Encontrar la suma de la serie geométrica: $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots$

Solución El primer término es $a = 2$ y la razón común es:

$$r = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Puesto que $|r| < 1$, usamos la fórmula (7) para encontrar que

$$2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots = \frac{2}{1 - \frac{2}{3}} = 6$$

◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 59.



Exploración

Emplee una calculadora gráfica para graficar $U_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ en modo sucesión. TRACE la gráfica de valores grandes de *n*. ¿Qué sucede con el valor de U_n cuando *n* aumenta sin límite? ¿Qué concluiría acerca de $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{(n-1)}$?

EJEMPLO 8 Decimales repetitivos

Demostrar que el decimal repetitivo 0.999 ... es igual a 1.

Solución

$$0.999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$$

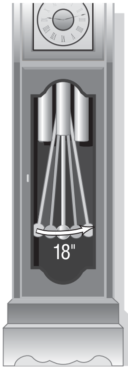
El decimal 0.999... es una serie geométrica con primer término de $\frac{9}{10}$ y una razón común de $\frac{1}{10}$. Si se utiliza la fórmula (7), tenemos:

$$0.999\ldots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

◄

EJEMPLO 9 **Balanceo de un péndulo**

Figura 10



Inicialmente, un péndulo se balancea formando un arco de 18 pulgadas. Vea la figura 10. En cada balanceo sucesivo, la longitud del arco es 0.98 veces la longitud previa.

a) ¿Cuál es la longitud del arco del décimo balanceo?
b) ¿En cuál balanceo la longitud del arco es menor que 12 pulgadas por primera vez?
c) Después de 15 balanceos, ¿qué distancia total se balancea el péndulo?
d) Al detenerse, ¿qué distancia total se habrá balanceado el péndulo?

Solución

a) La longitud del primer balanceo de es 18 pulgadas.
La longitud del segundo balanceo es 0.98(18) pulgadas.
La longitud del tercer balanceo es $0.98\,(0.98)(18) = 0.98^2(18)$ pulgadas.
La longitud del arco del décimo balanceo es:

$$(0.98)^9(18) = 15.007 \text{ pulgadas}$$

b) La longitud del arco del n-ésimo balanceo es $(0.98)^{n-1}(18)$. Para que esto sea exactamente 12 pulgadas, se requiere que:

$$(0.98)^{n-1}(18) = 12$$

$$(0.98)^{n-1} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \qquad \text{Se dividen ambos lados entre 18.}$$

$$n - 1 = \log_{0.98}\left(\frac{2}{3}\right) \qquad \text{Se expresa como logaritmo.}$$

$$n = 1 + \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{\ln 0.98} \approx 1 + 20.07 \approx 21.07 \qquad \text{Se despeja } n\text{; usando la fórmula de cambio de base.}$$

La longitud del arco supera 12 pulgadas en el 21° balanceo, y por primera vez es inferior a 12 pulgadas en el 22° balanceo.

c) Después de 15 balanceos, el péndulo se habrá balanceado la siguiente distancia total L:

$$L = \underset{1^o}{18} + \underset{2^o}{0.98(18)} + \underset{3^o}{(0.98)^2(18)} + \underset{4^o}{(0.98)^3(18)} + \cdots + \underset{15^o}{(0.98)^{14}(18)}$$

Ésta es la suma de una serie geométrica. La razón común es 0.98; el primer término es 18. La suma tiene 15 términos, entonces:

$$L = 18\frac{1 - 0.98^{15}}{1 - 0.98} \approx 18(13.07) \approx 235.3 \text{ pulgadas}$$

El péndulo se habrá balanceado 235.3 pulgadas después de 15 balanceos.

d) Al detenerse el péndulo, se habrá balanceado la siguiente distancia total T:

$$T = 18 + 0.98(18) + (0.98)^2(18) + (0.98)^3(18) + \cdots$$

Ésta es la suma de una serie geométrica. La razón común es $r = 0.98$; el primer término es $a = 18$. La suma es:

$$T = \frac{a}{1 - r} = \frac{18}{1 - 0.98} = 900$$

Cuando finalmente se detiene, el péndulo se habrá balanceado un total de 900 pulgadas. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 73.

Anualidades

5 En la sección 5.7 desarrollamos una fórmula para el interés compuesto que proporciona el valor futuro, al depositar una cantidad fija de dinero en una cuenta que paga intereses compuestos de manera periódica. Sin embargo, el dinero con frecuencia se invierte en pequeñas cantidades a intervalos periódicos. Una **anualidad** es una sucesión de depósitos periódicos iguales. Los depósitos periódicos se pueden realizar de manera anual, trimestral, mensual o diaria.

Cuando los depósitos se realizan al mismo tiempo que se acreditan los intereses, la anualidad se denomina **ordinaria**. Aquí sólo trataremos con anualidades ordinarias. El **monto de una anualidad** es la suma de todos los depósitos realizados, más todos los intereses devengados.

Suponga que los intereses que genera una cuenta son del i por ciento (expresado como decimal) por periodo de pago. Por ejemplo, si una cuenta paga el 12% compuesto mensual (12 veces al año), entonces $i = \frac{0.12}{12} = 0.01$. Si una cuenta paga el 8% compuesto trimestral (4 veces al año), entonces $i = \frac{0.08}{4} = 0.02$. Con el fin de desarrollar una fórmula para establecer el monto de una anualidad, supongamos que en una cuenta que rinde i por ciento cada periodo de pago, se depositan $\$P$ durante n periodos. Cuando se realiza el último depósito, en el n-ésimo periodo de pago, el primer depósito de $\$P$ ha devengado intereses compuestos durante $n - 1$ periodos de pago, el segundo depósito de $\$P$ ha devengado intereses compuestos por $n - 2$ periodos de pago, y así sucesivamente. En la tabla 3 se muestra el valor de cada uno de los depósitos, después de realizar n depósitos.

Tabla 3

Depósito	1	2	3	...	$n - 1$	n
Cantidad	$P(1 + i)^{n-1}$	$P(1 + i)^{n-2}$	$P(1 + i)^{n-3}$	...	$P(1 + i)$	P

El monto A de la anualidad es igual a la suma de las cantidades que se muestran en la tabla 3, es decir,

$$\begin{aligned} A &= P(1 + i)^{n-1} + P(1 + i)^{n-2} + \cdots + P(1 + i) + P \\ &= P[1 + (1 + i) + \cdots + (1 + i)^{n-1}] \end{aligned}$$

La expresión que está entre corchetes es la suma de una sucesión geométrica con n términos y una razón común de $(1 + i)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} A &= P[1 + (1 + i) + \cdots + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1}] \\ &= P\frac{1 - (1 + i)^n}{1 - (1 + i)} = P\frac{1 - (1 + i)^n}{-i} = P\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \end{aligned}$$

Así, hemos establecido el siguiente resultado:

Teorema

Monto de una anualidad

Considerando que P es el depósito en efectivo que se realiza en cada periodo de pago en una anualidad que remunera i por ciento de intereses por periodo de pago. La cantidad A de la renta anual después de n depósitos es:

$$A = P\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \qquad \textbf{(8)}$$

Nota: Al utilizar la fórmula (8), recuerde que cuando se hace el n-ésimo depósito, el primero ha devengado intereses por $n - 1$ periodos compuestos.

EJEMPLO 10 Determinar el monto de una anualidad

Con el fin de ahorrar para su retiro, Brett decide depositar en una administradora de ahorros para el retiro (Afore) $2000 cada año, durante los próximos 30 años. ¿Cuál será el valor de su Afore cuando Brett haga su 30° depósito? Supónga que la Afore rinde cada año 10% de interés anual compuesto.

Solución Ésta es una anualidad ordinaria con $n = 30$ depósitos anuales de $P = \$2000$. La tasa de interés por periodo de pago es $i = \frac{0.10}{1} = 0.10$. La cantidad A de la anualidad después de 30 depósitos es:

$$A = 2000\left\{\frac{(1 + 0.10)^{30} - 1}{0.10}\right\} = \$2000(164.494023) = \$328,988.05$$

◀

EJEMPLO 11 Determinar el monto de una anualidad

Con el fin de ahorrar para la educación universitaria de su hija, la señora Miranda decide guardar $50 mensuales, que deposita en una unión de crédito que rinde 10% de interés compuesto mensual. Inicia este programa de ahorro cuando su niña tiene 3 años de edad. ¿Cuánto tendrá ahorrado al momento de realizar su 180° depósito? ¿Qué edad tendrá su hija en ese momento?

Solución Ésta es una anualidad con $P = \$50, n = 180$, e $i = \frac{0.10}{12}$. La cantidad A ahorrada es:

$$A = 50\left[\frac{\left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{180} - 1}{\frac{0.10}{12}}\right] = \$50(414.47035) = \$20,723.52$$

Como realiza 12 depósitos al año, cuando realiza su 180° depósito, han pasado $\frac{180}{12} = 15$ años la hija de la Señora Miranda tiene 18 años de edad. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 77.

ASPECTO HISTÓRICO


Fibonacci

Las sucesiones se encuentran entre los objetos de investigación matemática más antiguos, estudiadas por más de 3500 años. Sin embargo, tras los primeros pasos, hubo pocos avances hasta cerca del año 1600 aC.

Las sucesiones aritméticas y geométricas aparecen en el papiro Rhind, texto matemático con 85 problemas, copiado de un trabajo anterior por el escriba egipcio Ahmes alrededor del año 1650 aC (vea el problema histórico 1). Fibonacci (1220 dC) escribió sobre problemas semejantes a los que se encuentran en el papiro Rhind, lo que hace sospechar que tuvo acceso a material que hoy está perdido. Dicho material pertenecería a la tradición griega no euclidiana de Herón (alrededor del año 75 dC) y Diofanto (alrededor del año 250 dC). Un problema, ligeramente modificado, todavía se utiliza en la familiar rima inglesa "Cuando iba para San Ives ..." (vea el problema histórico número 2).

El papiro Rhind indica que los antiguos egipcios sabían cómo sumar los términos de una sucesión aritmética o geométrica, como lo hicieron los babilonios. La regla para sumar una sucesión geométrica se encuentra en los *Elementos* (libro IX, 35, 36) de Euclides, donde, como toda el álgebra euclidiana, se presenta de forma geométrica.

En el siglo XVI, una vez que el álgebra se desarrolló lo suficiente para manejar problemas más complicados, comienzan las investigaciones sobre otras clases de sucesiones. El surgimiento del cálculo en el siglo XVII añadió una nueva y potente herramienta, sobre todo para encontrar la suma de las series infinitas, y el tema continúa desarrollándose hasta nuestros días.

Problemas históricos

1. *Problema de sucesión aritmética del papiro Rhind (el planteamiento está ligeramente modificado para hacerlo más claro)* Se van a repartir cien piezas de pan entre 5 personas, de tal manera que las cantidades que reciban formen una sucesión aritmética. Los 2 primeros reciben en total un séptimo de lo que reciben los 3 últimos. ¿Cuántas piezas de pan recibe cada 1?

   [*Respuesta parcial*: La primera persona recibe $1\frac{2}{3}$ panes.]

2. La siguiente antigua rima infantil inglesa se parece a uno de los problemas del papiro Rhind.

   Cuando iba hacia St. Ives
   Encontré un hombre con siete esposas
   Cada esposa tenía siete costales
   Cada costal tenía siete gatas
   Cada gata tenía siete cachorros
   Cachorros, gatas, sacos, esposas
   ¿Cuántos iban a St. Ives?

   a) Suponiendo que el narrador y los criadores de gatos se encontraron viajando direcciones opuestas, ¿cuál es la respuesta?
   b) ¿Cuántos cachorros llevan?
   c) Cachorros, gatos, costales, esposas; ¿cuántos son?

   [**Sugerencia**: Es más fácil incluir al hombre, encontrar la suma con la fórmula, y luego restar 1 correspondiente al hombre].

12.3 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas están dadas al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. Si se invierten \$1000 semestrales al 4% compuesto anual, ¿cuánto hay en la cuenta después de dos años? (pp. 455–462)

2. ¿Cuántos necesita invertir mensualmente a partir de hoy, al 5% anual compuesto, para tener \$10,000 en un año? (pp. 455–462)

Conceptos y vocabulario

3. En una sucesión __________ (n), la relación entre términos consecutivos es una constante.

4. Si $|r| < 1$, la suma de una serie geométrica infinita $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ es _________.

5. Una sucesión de depósitos periódicos iguales se denomina una __________.

6. *Falso o verdadero:* Una sucesión geométrica se puede definir de forma recursiva.

7. *Falso o verdadero:* En una sucesión geométrica, la razón común siempre es un número positivo.

8. *Falso o verdadero:* En una sucesión geométrica con un primer término a y una razón común r, donde $r \neq 0, r \neq 1$, la suma de los primeros n términos es $S_n = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$.

Ejercicios

En los problemas 9-18, se le da una sucesión geométrica. Encuentre la razón común y escriba los cuatro primeros términos.

9. $\{3^n\}$ **10.** $\{(-5)^n\}$ **11.** $\left\{-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ **12.** $\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^n\right\}$ **13.** $\left\{\frac{2^{n-1}}{4}\right\}$

14. $\left\{\frac{3^n}{9}\right\}$ **15.** $\{2^{n/3}\}$ **16.** $\{3^{2n}\}$ **17.** $\left\{\frac{3^{n-1}}{2^n}\right\}$ **18.** $\left\{\frac{2^n}{3^{n-1}}\right\}$

En los problemas 19-32, determine si la sucesión dada es aritmética, geométrica o ninguna de las dos. Si es aritmética, encuentre la diferencia común; si es geométrica, encuentre la razón común.

19. $\{n + 2\}$ **20.** $\{2n - 5\}$ **21.** $\{4n^2\}$ **22.** $\{5n^2 + 1\}$ **23.** $\left\{3 - \frac{2}{3}n\right\}$

24. $\left\{8 - \frac{3}{4}n\right\}$ **25.** $1, 3, 6, 10, \ldots$ **26.** $2, 4, 6, 8, \ldots$ **27.** $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ **28.** $\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\}$

29. $-1, -2, -4, -8, \ldots$ **30.** $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ **31.** $\{3^{n/2}\}$ **32.** $\{(-1)^n\}$

En los problemas 33-40, encuentre los términos quinto y n*-ésimo de la sucesión geométrica cuyo término inicial y razón común se le proporcionan.*

33. $a = 2;\ \ r = 3$ **34.** $a = -2;\ \ r = 4$ **35.** $a = 5;\ \ r = -1$ **36.** $a = 6;\ \ r = -2$

37. $a = 0;\ \ r = \frac{1}{2}$ **38.** $a = 1;\ \ r = -\frac{1}{3}$ **39.** $a = \sqrt{2};\ \ r = \sqrt{2}$ **40.** $a = 0;\ \ r = \frac{1}{\pi}$

En los problemas 41-46, encuentre el término señalado de cada sucesión geométrica.

41. 7° término de $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ **42.** 8° término de $1, 3, 9, \ldots$ **43.** 9° término de $1, -1, 1, \ldots$

44. 10° término de $-1, 2, -4, \ldots$ **45.** 8° término de $0.4, 0.04, 0.004, \ldots$ **46.** 7° término de $0.1, 1.0, 10.0, \ldots$

En los problemas 47-52, encuentre cada una de las sumas.

47. $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{4} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{4}$ **48.** $\frac{3}{9} + \frac{3^2}{9} + \frac{3^3}{9} + \cdots + \frac{3^n}{9}$ **49.** $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

50. $\sum_{k=1}^{n} 4 \cdot 3^{k-1}$ **51.** $-1 - 2 - 4 - 8 - \cdots - (2^{n-1})$ **52.** $2 + \frac{6}{5} + \frac{18}{25} + \cdots + 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

En los problemas 53-58, emplee una calculadora gráfica para calcular la suma de cada sucesión geométrica.

53. $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{4} + \cdots + \frac{2^{14}}{4}$ **54.** $\frac{3}{9} + \frac{3^2}{9} + \frac{3^3}{9} + \cdots + \frac{3^{15}}{9}$ **55.** $\sum_{n=1}^{15} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

56. $\sum_{n=1}^{15} 4 \cdot 3^{n-1}$ **57.** $-1 - 2 - 4 - 8 - \cdots - 2^{14}$ **58.** $2 + \frac{6}{5} + \frac{18}{25} + \cdots + 2\left(\frac{3}{5}\right)^{15}$

En los problemas 59-68, encuentre la suma de cada una de las series geométricas infinitas.

59. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$ **60.** $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots$ **61.** $8 + 4 + 2 + \cdots$ **62.** $6 + 2 + \frac{2}{3} + \cdots$

63. $2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} + \cdots$ **64.** $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \cdots$ **65.** $\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ **66.** $\sum_{k=1}^{\infty} 8\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

67. $\sum_{k=1}^{\infty} 6\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ **68.** $\sum_{k=1}^{\infty} 4\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

---

69. Encuentre la x tal que $x, x + 2$, y $x + 3$, sean términos consecutivos de una sucesión geométrica.

70. Encuentre la x tal que $x - 1$, y $x + 2$, sean términos consecutivos de una sucesión geométrica.

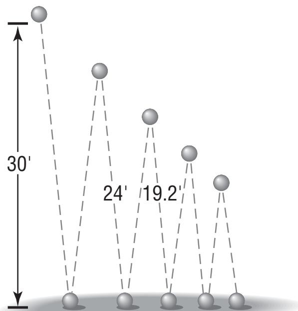
71. Aumento salarial Suponga que lo acaban de contratar con un sueldo anual de $18,000 y espera recibir aumentos anuales del 5%. ¿Cuál será su sueldo al comienzo del quinto año?

72. Depreciación de equipo Una pieza de equipo nuevo cuesta a la empresa $15,000. Cada año, por razones fiscales, la empresa deprecia el 15% del valor. ¿Qué valor debe dar la empresa a este tipo luego de 5 años?

73. Balanceo de un péndulo Inicialmente, un péndulo se balancea formando un arco de 2 pies. En cada balanceo sucesivo, la longitud del arco es 0.9 veces la longitud previa.

a) ¿Cuál es la longitud del arco del décimo balanceo?
b) ¿En cuál balanceo la longitud del arco es menor que 1 pie por primera vez?
c) Después de 15 balanceos, ¿qué distancia total se habrá balanceado el péndulo?
d) Al detenerse, ¿qué distancia total se habrá balanceado el péndulo?

74. Botando pelotas Se deja caer una pelota desde una altura de 30 pies. Cada vez que golpea el piso, rebota hasta alcanzar una altura de 0.8 veces la altura previa.



a) ¿Hasta qué altura rebotará la pelota después de golpear el piso por tercera vez?
b) ¿Hasta qué altura rebotará la pelota después de golpear el piso por n-ésima vez?
c) ¿Cuántas veces tiene que golpear antes de que el rebote sea menor a 6 pulgadas?
d) ¿Qué distancia total viaja la pelota antes de dejar de rebotar?

75. Jubilación Christine aporta $100 mensuales a su cuenta de ahorro para el retiro. ¿Cuál será el valor de la cuenta de ahorro para el retiro de Christine después del 360° depósito (30 años), si se supone que la tasa de rendimiento anual es de 12% compuesto mensual?

76. Ahorro para comprar casa Jolene quiere comprarse casa nueva. Suponga que ella invierte $400 mensuales en un fondo mutuo. Si se supone que la tasa de rendimiento anual de dicho fondo es de 10% compuesto mensual, ¿cuánto tendrá para retirar luego del 36º depósito (3 años)?

77. Fondo de rendimiento anual exento de impuestos Al final de cada trimestre, Don aporta $500 a un fondo de rendimiento anual exento de impuestos. ¿Cuál será el valor del fondo después del depósito número 80 (es decir, 20 años) si se supone que la tasa de rendimiento anual es de 8% trimestral compuesto?

78. Jubilación Ray aporta $1000 semestrales a una administradora de ahorro para el retiro (Afore). ¿Cuál será el valor de la Afore cuando Ray haga su depósito número 30 (tras 15 años), si se supone que la tasa de rendimiento anual es de 10% semestral compuesto?

79. Fondo de amortización Scott y Alice quieren comprar una casa de descanso a 10 años, pero necesitan $50,000 para el enganche. ¿Cuánto deben poner en su cuenta de ahorros cada mes si se supone que la tasa de rendimiento anual es de 6% mensual compuesto?

80. Fondo de amortización Se calcula que el costo de la educación universitaria para un niño nacido en 1996 será de $150,000. Suponiendo una tasa de rendimiento anual del 8% mensual compuesto. ¿Cuánto se debe aportar mensualmente al fondo educativo con el fin de tener $150,000 en 18 años, cuando el niño ingrese a la universidad?

81. Pensamiento crítico Usted está en una entrevista de trabajo y recibe dos ofertas:

A: $20,000 para empezar, con aumentos anuales garantizados de 6% durante los 5 primeros años
B: $22,000 para empezar, con aumentos anuales garantizados de 3% durante los 5 primeros años

¿Cuál oferta es mejor, si su objetivo es ganar tanto como sea posible después de 5 años? ¿Cuál es mejor, si su objetivo es ganar lo más posible durante el contrato (5 años)?

82. Pensamiento crítico ¿Cuál de las siguientes opciones, A o B, tiene como resultado más ingresos?

A: Recibir $1000 el día 1, $999 el día 2, $998 el día 3, y así sucesivamente, hasta terminar el proceso después de 1000 días
B: Recibir $1 el día 1, $2 el día 2, $4 el día 3, y así sucesivamente, durante 19 días

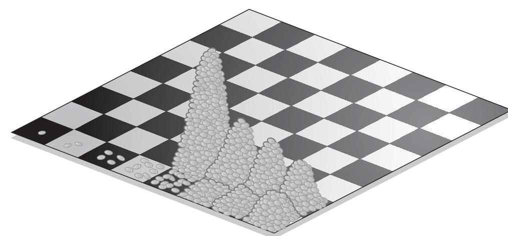
83. Pensamiento crítico Usted acaba de firmar un contrato por 7 años con un equipo de la liga profesional de fútbol, con un salario inicial de $2,000,000 al año. La gerencia le brinda las siguientes opciones respecto de su salario para los próximos 7 años:

1. Un bono de $100,000 cada año.
2. Un aumento anual de 4.5% cada año, comenzando después de 1 año.
3. Un aumento anual de $95,000 cada año, comenzando después de 1 año.

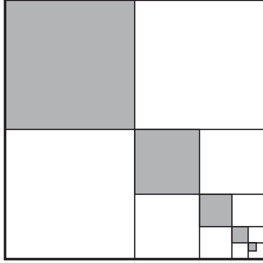
¿Cuál opción le genera más dinero durante el periodo de 7 años? ¿Cuál le rinde menos? ¿Cuál elegiría? ¿Por qué?

84. Promesa de millonario Un millonario promete regalarle $1000 el 1 de septiembre del 2001. Cada día subsiguiente, le regalará $\frac{9}{10}$ de lo que le entregó el día anterior. ¿Cuál es la primera fecha en la que usted recibirá una cantidad inferior a ¢1? ¿Cuánto habrá recibido cuando esto ocurra?

85. Granos de trigo en el tablero de ajedrez De acuerdo con una antigua fábula, un campesino salvó la vida del rey, por lo que se le dijo que pidiera cualquier cosa como recompensa. Como era un hombre astuto, el campesino dijo: "Una sencilla petición, mi señor. Coloque un grano de trigo en el primer cuadro de un tablero de ajedrez, dos granos en el segundo, cuatro en el tercero y así hasta llenar el tablero. Es todo lo que quiero". Calcule el número total de granos necesarios para ello y vea por qué esa petición de tan sencilla apariencia, no se pudo conceder. (Un tablero de ajedrez se compone de $8 \times 8 = 64$ cuadros).



86. Observe la figura que se encuentra más adelante. ¿Qué fracción del cuadrado eventualmente se sombrea si se continúa de manera indefinida con el proceso de sombreado indicado?



87. Multiplicador Suponiendo que, en toda la economía estadounidense, las personas gastan 90% de cada dólar adicional que ganan. Los economistas dirían que la **propensión marginal al consumo** de un individuo es de 0.90. Por ejemplo, si Jane gana un dólar adicional, gastará 0.9(1) = $0.90 de él. El individuo que gana los $0.90 (de Jane), gastará el 90% de él, o $0.81. Este proceso de gasto continúa y tiene como resultado la serie geométrica infinita que aparece a continuación:

$$1, 0.90, 0.90^2, 0.90^3, 0.90^4, \ldots$$

La suma de esta serie geométrica infinita se conoce como el **multiplicador**. ¿Cuál es el multiplicador si los individuos gastan 90% de cada dólar adicional que ganan?

88. Multiplicador Consulte el problema 87. Suponga que la propensión marginal al consumo en toda la economía estadounidense es de 0.95. ¿Cuál es el multiplicador para la economía estadounidense?

89. Precio de acciones Un método para definir el precio de una acción consiste en descontarle el flujo futuro de dividendos. Suponga que una acción paga $\$P$ anuales en dividendos e, históricamente, los dividendos han aumentado $i\%$ por año. Si desea una tasa de rendimiento de $r\%$, este método de asignación de precio establece que el precio que usted debe pagar es el valor presente de un flujo infinito de pagos:

$$\text{Precio} = P + P\frac{1+i}{1+r} + P\left(\frac{1+i}{1+r}\right)^2 + P\left(\frac{1+i}{1+r}\right)^3 + \cdots$$

El precio de la acción es la suma de una serie geométrica infinita. Suponga que una acción paga un dividendo anual de $4.00 que, históricamente, ha aumentado 3% por año. Usted desea una tasa de rendimiento anual de 9%. ¿Cuánto es lo máximo que debería paga por la acción?

90. Precio de acciones Consulte el problema 89. Suponga que una acción paga un dividendo anual de $2.50 que, históricamente, ha aumentado 4% por año. Usted desea una tasa de rendimiento anual de 11%. ¿Cuánto es lo máximo que pagaría por la acción?

91. ¿Una sucesión podría ser tanto aritmética como geométrica? Exponga las razones de su respuesta.

92. Elabore una sucesión geométrica. Entréguela a un compañero y pídale que obtenga el vigésimo término.

93. Elabore dos series geométricas infinitas, una con suma y otra sin suma. Entréguela a un compañero y dígale que obtenga la suma de ambas.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $1082.43 **2.** $9513.28

12.4 Inducción matemática

OBJETIVO 1 Demostrar enunciados utilizando la inducción matemática

1 *La inducción matemática* es un método para demostrar que los enunciados que incluyen números naturales son ciertos para todos los números naturales.* Por ejemplo, se demuestra que el enunciado "$2n$ siempre es un entero" es cierto para todos los números naturales n utilizando la inducción matemática. Además, el enunciado "la suma de los primeros enteros impares positivos n es igual a n^2", es decir:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \quad \textbf{(1)}$$

se puede demostrar para todos los números naturales n mediante el uso de la inducción matemática.

Antes de iniciar el método de la inducción matemática, tratemos de hacernos una idea de la potencia de este método. Para esto, usaremos la proposición de adecuación (1), reformulándola para varios valores de $n = 1, 2, 3, \ldots$.

*Recuerde que los números naturales son los números 1, 2, 3, 4, ... Es decir, los términos *números naturales* y *números enteros positivos* son sinónimos.

$n = 1$ La suma del primer entero impar positivo es 1^2;. $1 = 1^2$.

$n = 2$ La suma de los dos primeros enteros impares positivos es 2^2; $1 + 3 = 4 = 2^2$.

$n = 3$ La suma de los 3 primeros enteros impares positivos es 3^2; $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$.

$n = 4$ La suma de los 4 primeros enteros impares positivos es 4^2; $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.

Aunque a partir de este patrón podríamos presumir que el enunciado (1) es cierto para toda n, ¿cómo podemos estar realmente seguros de que no falle con alguna de las opciones para n? El método de demostración mediante inducción matemática comprobará que, de hecho, el enunciado es cierto para todas las n.

Teorema

Principio de inducción matemática

Si un enunciado relativo a los números naturales satisface las siguientes condiciones:

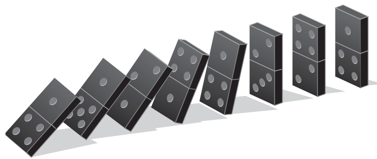
CONDICIÓN I: El enunciado es cierto para el número 1.

CONDICIÓN II: Si el enunciado es cierto para algún número natural k, también es cierto para el número natural siguiente $k + 1$.

Entonces, dicho enunciado es cierto para todos los números naturales.

No demostraremos este principio. Sin embargo, podemos apoyarnos en una interpretación física que nos ayudará a ver por qué funciona. Piense en una recopilación de números naturales que se apegan a lo dicho por un enunciado como una colección de fichas de dominó (vea la figura 11).

Figura 11



Ahora, suponga que establecemos dos hechos:

1. Se derriba a la primera ficha.
2. Si una ficha cae, digamos la ficha k-ésima, también lo hará la siguiente, la ficha $(k + 1)$ésima.

¿Es válido concluir que caerán *todas* las fichas de dominó? La respuesta es sí, porque si cae la primera (condición I), también lo hará la segunda (por la condición II); y si cae la segunda, entonces lo hará la tercera (por la condición II), y así sucesivamente.

Ahora, demostramos algunos enunciados sobre los números naturales utilizando la inducción matemática.

EJEMPLO 1 Usar la inducción matemática

Demostrar que el siguiente enunciado es cierto para todos los números naturales n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Solución Primero necesitamos ver que el enunciado (2) se aplica para $n = 1$. Puesto que $1 = 1^2$, el enunciado (2) es cierto para $n = 1$. Se apega a la condición I.

Después, necesitamos ver que la condición II se cumple. Supongamos que conocemos una k que:

$$1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad \textbf{(3)}$$

Queremos demostrar que, con base en la ecuación (3), el enunciado (2) es válido para $k + 1$. Observamos la suma $k + 1$ de los enteros impares positivos, para determinar si es igual a $(k + 1)^2$.

$$1 + 3 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = \underbrace{[1 + 3 + \cdots + (2k - 1)]}_{= k^2 \text{ por la ecuación (3)}} + (2k + 1)$$
$$= k^2 + (2k + 1)$$
$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Se satisfacen las condiciones I y II; mediante el principio de inducción matemática; el enunciado (2) es cierto para todos los números naturales n. ◄

EJEMPLO 2 Usar la inducción matemática

Demostrar que el siguiente enunciado es cierto para todos los números naturales n.

$$2^n > n$$

Solución Primero, veremos si el enunciado $2^n > n$ es válido cuando $n = 1$. Puesto que $2^1 = 2 > 1$, la desigualdad es cierta para $n = 1$. Se cumple la condición I.

Después, suponemos que $2^k > k$ para algún número natural k. Queremos demostrar que la fórmula es válida para $k + 1$, es decir, queremos ver que en $2^{k+1} > k + 1$. Ahora:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sabemos que} \\ 2^k > k.}}{>} 2 \cdot k = k + k \underset{\substack{\uparrow \\ k \geq 1}}{\geq} k + 1$$

Si $2^k > k$, entonces $2^{k+1} > k + 1$, con lo que se satisface la condición II del principio de inducción matemática. El enunciado $2^n > n$ es cierto para todos los números naturales n. ◄

EJEMPLO 3 Usar la inducción matemática

Demostrar que la siguiente fórmula es cierta para todos los números naturales n.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2} \tag{4}$$

Solución Primero demostramos que la fórmula (4) es cierta cuando $n = 1$. Puesto que

$$\frac{1(1 + 1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = 1$$

Es válida la condición I del principio de inducción matemática.

A continuación, suponemos que la fórmula (4) es válida para alguna k y luego determinamos si la fórmula es válida para $k + 1$. Suponemos que:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2} \quad \text{para alguna } k \tag{5}$$

Ahora necesitamos demostrar que:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 1 + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Lo hacemos de la siguiente manera:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \underbrace{[1 + 2 + 3 + \cdots + k]}_{= \frac{k(k+1)}{2} \text{ por la ecuación (5)}} + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$
$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

También se satisface la condición II. En consecuencia, la fórmula (4) es cierta para todos los números naturales n. ◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 1.

EJEMPLO 4 **Usar la inducción matemática**

Demostrar que $3^n - 1$ es divisible entre 2 para todos los números naturales n.

Solución Primero veremos si el enunciado es cierto cuando $n = 1$. Como $3^1 - 1 = 3 - 1 = 2$ es divisible entre 2, el enunciado es válido cuando $n = 1$. Se satisface la condición I.

A continuación, suponemos que el enunciado es válido para alguna k y luego determinamos si lo es para $k + 1$. Suponemos que para algunas k, $3^k - 1$ es divisible entre 2. Necesitamos demostrar que en $3^{k+1} - 1$ es divisible entre 2. Ahora:

$$3^{k+1} - 1 = 3^{k+1} - 3^k + 3^k - 1 \quad \text{Restando y sumando } 3^k.$$
$$= 3^k(3-1) + (3^k - 1) = 3^k \cdot 2 + (3^k - 1)$$

Como $3^k \cdot 2$ es divisible entre 2 y $3^k - 1$ también es divisible entre 2, se deduce que $3^k \cdot 2 + (3^k - 1) = 3^{k+1} - 1$ es divisible entre 2. También se satisface la condición II. En consecuencia, el enunciado "$3^n - 1$ es divisible entre 2" es cierto para todos los números naturales n. ◀

ADVERTENCIA: La conclusión de que un enunciado que involucra a los números naturales es cierto para todos los números naturales, sólo se toma una vez que se satisfacen *ambas* condiciones, I y II, del principio de inducción matemática. El problema 27 muestra un enunciado en el que se satisface sólo a la condición I, pero *no* es cierto para todos los números naturales. El problema 28 muestra un enunciado en el que se satisface sólo a la condición II, pero *no* es cierto para todos los números naturales. ■

12.4 Evalúe su comprensión

Ejercicios

En los problemas 1-26, utilice el principio de inducción matemática para demostrar que el enunciado dado es cierto para todos los números naturales n.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

2. $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$

3. $3 + 4 + 5 + \cdots + (n + 2) = \frac{1}{2}n(n + 5)$

4. $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n(n + 2)$

5. $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \frac{1}{2}n(3n + 1)$

6. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$

7. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

8. $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

9. $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

10. $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$

11. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

12. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

13. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

14. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

15. $4 + 3 + 2 + \cdots + (5 - n) = \frac{1}{2}n(9 - n)$

16. $-2 - 3 - 4 - \cdots - (n+1) = -\frac{1}{2}n(n+3)$

17. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

18. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n-1)(2n) = \frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)$

19. $n^2 + n$ es divisible entre 2.

20. $n^3 + 2n$ es divisible entre 3.

21. $n^2 - n + 2$ es divisible entre 2.

22. $n(n+1)(n+2)$ es divisible entre 6.

23. Si $x > 1$, entonces $x^n > 1$.

24. Si $0 < x < 1$, entonces $0 < x^n < 1$.

25. $a - b$ es divisible entre $a^n - b^n$.
[**Sugerencia:** $a^{k+1} - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a - b)$]

26. $a + b$ es factor de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

---

27. Demuestre que el enunciado "$n^2 - n + 41$ es un número primo" es cierto para $n = 1$, pero no es cierto para $n = 41$.

28. Demuestre que la fórmula:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 2$$

satisface la condición II del principio de inducción matemática. Es decir, demuestre que si la fórmula es cierta para alguna k, también lo es para $k + 1$. Luego demuestre que la fórmula es falsa para $n = 1$ (o cualquier otra opción de n).

29. Utilice la inducción matemática para demostrar que si $r \neq 1$, entonces:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

30. Utilice la inducción matemática para demostrar que:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n-1)d] = na + d\frac{n(n-1)}{2}$$

31. **Principio ampliado de inducción matemática.** El principio ampliado de inducción matemática establece que si las condiciones I y II son válidas, es decir:

(I) Un enunciado es cierto para el número natural j.

(II) Si el enunciado es cierto para algún número natural $k \geq j$, entonces también es cierto para el número natural siguiente $k + 1$.

entonces el enunciado es cierto para todos los números naturales $\geq$ j.

Utilice el principio ampliado de inducción matemática para demostrar que el número de diagonales en un polígono convexo con n lados es $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

[**Sugerencia**: Comience por demostrar que el resultado es cierto cuando $n = 4$ (Condición I)].

32. **Geometría** Utilice el principio ampliado de inducción matemática para demostrar que la suma de los ángulos internos de un polígono convexo con n lados es igual a $(n - 2) \cdot 180°$.

33. ¿Cómo le explicaría a un amigo el principio de inducción matemática?

12.5 Teorema del binomio

OBJETIVOS
1 Evaluar un coeficiente binomial
2 Desarrollar un binomio

Ya se proporcionaron fórmulas para desarrollar $(x + a)^n$ para $n = 2$ y $n - 3$. El *teorema del binomio** es una fórmula para desarrollar $(x + a)^n$ para todo entero positivo n. Si $n = 1, 2, 3$ y 4, el desarrollo de $(x + a)^n$ es directo.

*La palabra *binomio* se deriva del hecho de que $x + a$ *es un binomio, es decir, dos términos.*

$$(x + a)^1 = x + a$$ Dos términos, comienza con x^1 y termina con a^1

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$ Tres términos, comienza con x^2 y termina con a^2

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$ Cuatro términos, comienza con x^3 y termina con a^3

$$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$ Cinco términos, comienza con x^4 y termina con a^4

Observe que cada uno de los desarrollos de $(x + a)^n$ comienza con x^n y termina con a^n. A medida que lee de izquierda a derecha, disminuyen las potencias de x, mientras que aumentan las potencias de a. Además, el número de términos que aparece es igual a $n + 1$. Observe también que el grado de cada monomio de la expresión es igual a n. Por ejemplo, al desarrollar $(x + a)^3$, cada monomio $(x^3, 3ax^2, 3a^2x, a^3)$ es de tercer grado. En consecuencia, podríamos suponer que el desarrollo de $(x + a)^n$ tendría un aspecto como:

$$(x + a)^n = x^n + __ax^{n-1} + __a^2x^{n-2} + \cdots + __a^{n-1}x + a^n$$

donde los espacios en blanco representan a los números que debemos encontrar. De hecho, esto es cierto, como veremos pronto.

Pero antes, debemos presentarle un símbolo.

El símbolo $\binom{n}{j}$

1 El símbolo $\binom{n}{j}$, que se lee "n tomando j a la vez", se define como:

Si j y n son enteros, con $0 \leq j \leq n$, el símbolo $\binom{n}{j}$ se define como:

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \qquad \textbf{(1)}$$



COMENTARIO: En una calculadora gráfica, el símbolo $\binom{n}{j}$ se denota con la tecla nCr. ■

EJEMPLO 1 **Evaluar $\binom{n}{j}$**

Encontrar:

a) $\binom{3}{1}$ b) $\binom{4}{2}$ c) $\binom{8}{7}$ d) $\binom{65}{15}$

Solución

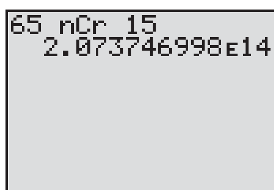
a) $\binom{3}{1} = \dfrac{3!}{1!(3-1)!} = \dfrac{3!}{1!\,2!} = \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1(2 \cdot 1)} = \dfrac{6}{2} = 3$

b) $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!\,2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = \dfrac{24}{4} = 6$

c) $\binom{8}{7} = \dfrac{8!}{7!(8-7)!} = \dfrac{8!}{7!\,1!} = \dfrac{8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 1!} = \dfrac{8}{1} = 8$

↑ $8! = 8 \cdot 7!$

Figura 12





d) En la figura 12 se muestra la solución obtenida utilizando una calculadora gráfica TI-83: $\binom{65}{15} = 2.073746998 \times 10^{14}$. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 5.

Cuatro fórmulas útiles que incluyen al símbolo $\binom{n}{j}$ son:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

Demostración

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$$

En el problema 45 se le pide que demuestre las dos fórmulas restantes. ■

Suponga que ordenamos los diversos valores del símbolo $\binom{n}{j}$ en un modelo triangular, como se muestra en la siguiente figura y en la figura 13.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

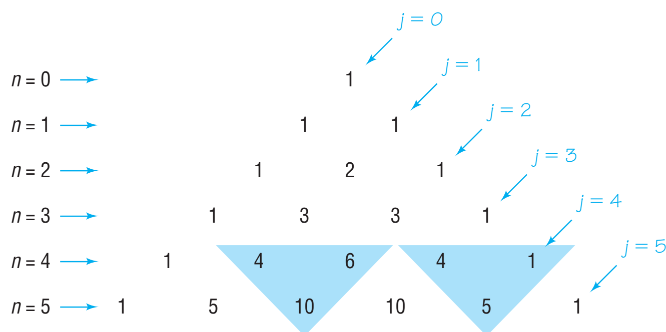
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Figura 13
Triángulo de Pascal



Esta representación se denomina **triángulo de Pascal**, en honor del matemático francés Blaise Pascal (1623-1662).

El triángulo de Pascal tiene números 1 en los lados. Para obtener la siguiente cifra, basta consumar las dos cifras más cercanas de la fila inmediata superior. Los triángulos sombreados de la figura 13 ilustran esta característica del triángulo de Pascal. Con base en ella, la fila correspondiente a $n = 6$ se encuentra de la siguiente manera:

$n = 5 \rightarrow$ 1 5 10 10 5 1

$n = 6 \rightarrow$ 1 6 15 20 15 6 1

Más adelante demostraremos que esta suma siempre funciona (vea el teorema que se encuentra la página 976).

Aunque el triángulo de Pascal brinda una interesante y organizada representación del símbolo $\binom{n}{j}$, en la práctica no es tan útil. Por ejemplo, si desean conocer el valor de $\binom{12}{5}$, necesitaría llegar hasta la fila 13 del triángulo para encontrar la respuesta. Es mucho más rápido utilizar la definición (1).

Teorema del binomio

2 Ahora estamos listos para exponer el **teorema del binomio**.

Teorema

Teorema del binomio

Sean x y a números reales. Para todo entero positivo n, tenemos:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \cdots + \binom{n}{j}a^j x^{n-j} + \cdots + \binom{n}{n}a^n$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} a^j \qquad \textbf{(2)}$$

Ahora entiende por qué fue necesario presentar antes el símbolo $\binom{n}{j}$; estos símbolos son coeficientes numéricos que aparecen al desarrollar $(x + a)^n$. Por lo anterior, el símbolo $\binom{n}{j}$ se denomina **coeficiente binomial.**

EJEMPLO 2 Desarrollo de un binomio

Usar el teorema del binomio para desarrollar $(x + 2)^5$.

Solución En el teorema del binomio, sean $a = 2$ y $n = 5$. Entonces:

$$(x + 2)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}2x^4 + \binom{5}{2}2^2x^3 + \binom{5}{3}2^3x^2 + \binom{5}{4}2^4x + \binom{5}{5}2^5$$

↑ Usando la ecuación (2).

$$= 1 \cdot x^5 + 5 \cdot 2x^4 + 10 \cdot 4x^3 + 10 \cdot 8x^2 + 5 \cdot 16x + 1 \cdot 32$$

↑ Usando la fila $n = 5$ del triángulo de Pascal o la fórmula (1) para $\binom{n}{j}$.

$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

◀

EJEMPLO 3 Desarrollo de un binomio

Desarrollar $(2y - 3)^4$ usando el teorema del binomio.

Solución Primero, reescribimos la expresión $(2y - 3)^4$ como $[2y + (-3)]^4$. Ahora empleamos el teorema del binomio con $n = 4, x = 2y$, y $a = 3$.

$$[2y + (-3)]^4 = \binom{4}{0}(2y)^4 + \binom{4}{1}(-3)(2y)^3 + \binom{4}{2}(-3)^2(2y)^2 + \binom{4}{3}(-3)^3(2y) + \binom{4}{4}(-3)^4$$

$$= 1 \cdot 16y^4 + 4(-3)8y^3 + 6 \cdot 9 \cdot 4y^2 + 4(-27)2y + 1 \cdot 81$$



Si se usa la fila $n = 4$ del triángulo de Pascal o la fórmula (1) para $\binom{n}{j}$.

$$= 16y^4 - 96y^3 + 216y^2 - 216y + 81$$

Observe que los signos alternan este desarrollo, debido al hecho de que $a = -3 < 0$. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

EJEMPLO 4 Encontrar un coeficiente específico en un desarrollo binomial

Encontrar el coeficiente de y^8 en el desarrollo de $(2y + 3)^{10}$.

Solución Escribimos la expresión utilizando el teorema del binomio.

$$(2y + 3)^{10} = \binom{10}{0}(2y)^{10} + \binom{10}{1}(2y)^9(3)^1 + \binom{10}{2}(2y)^8(3)^2 + \binom{10}{3}(2y)^7(3)^3 + \binom{10}{4}(2y)^6(3)^4 + \cdots + \binom{10}{9}(2y)(3)^9 + \binom{10}{10}(3)^{10}$$

Del tercer término en el desarrollo, el coeficiente de y^8 es:

$$\binom{10}{2}(2)^8(3)^2 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 2^8 \cdot 9 = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot \cancel{8!}} \cdot 2^8 \cdot 9 = 103{,}680$$ ◀

Como lo demuestra esta solución, podemos emplear el teorema del binomio para encontrar un término específico del desarrollo, sin escribir todo el desarrollo.

Con base en el desarrollo de $(x + a)^n$, el término que contiene x^j es:

$$\binom{n}{n - j}a^{n-j}x^j \qquad \textbf{(3)}$$

Por ejemplo, podemos resolver el ejemplo 4 utilizando la fórmula (3) con $n = 10, a = 3, x = 2y$ y $j = 8$. Entonces, el término que contiene a y^8 es:

$$\binom{10}{10 - 8}3^{10-8}(2y)^8 = \binom{10}{2} \cdot 3^2 \cdot 2^8 \cdot y^8 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 9 \cdot 2^8y^8$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot \cancel{8!}} \cdot 9 \cdot 2^8y^8 = 103{,}680y^8$$

EJEMPLO 5 **Encontrar un término específico en un desarrollo binomial**

Encontrar el sexto término en el desarrollo de $(x + 2)^9$.

Solución A Desarrollamos el binomio utilizando el teorema, hasta llegar al sexto término.

$$(x+2)^9 = \binom{9}{0}x^9 + \binom{9}{1}x^8 \cdot 2 + \binom{9}{2}x^7 \cdot 2^2 + \binom{9}{3}x^6 \cdot 2^3 + \binom{9}{4}x^5 \cdot 2^4 + \binom{9}{5}x^4 \cdot 2^5 + \cdots$$

El sexto término es:

$$\binom{9}{5}x^4 \cdot 2^5 = \frac{9!}{5!4!} \cdot x^4 \cdot 32 = 4032x^4$$

Solución B El sexto término en el desarrollo de $(x + 2)^9$, que tiene 10 términos en total, contiene x^4 (¿sabe por qué?). Por medio de la fórmula (3), el sexto término es:

$$\binom{9}{9-4}2^{9-4}x^4 = \binom{9}{5}2^5x^4 = \frac{9!}{5!4!} \cdot 32x^4 = 4032x^4$$

 TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **29** Y **35.**

A continuación le mostraremos que la característica de *adición triangular* del triángulo de Pascal, ilustrada en la figura 13, siempre funciona.

Teorema

Si j y n son enteros, con $0 \le j \le n$, entonces:

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j} \qquad \textbf{(4)}$$

Demostración

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \frac{n!}{(j-1)![n-(j-1)]!} + \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

$$= \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} + \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

$$= \frac{jn!}{j(j-1)!(n-j+1)!} + \frac{(n-j+1)n!}{j!(n-j+1)(n-j)!}$$

Multiplicando el primer término por $\frac{j}{j}$ y el segundo por $\frac{n-j+1}{n-j+1}$.

$$= \frac{jn!}{j!(n-j+1)!} + \frac{(n-j+1)n!}{j!(n-j+1)!}$$

Ahora los denominadores son iguales.

$$= \frac{jn! + (n-j+1)n!}{j!(n-j+1)!}$$

$$= \frac{n!(j+n-j+1)}{j!(n-j+1)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{j!(n-j+1)!} = \frac{(n+1)!}{j![(n+1)-j]!} = \binom{n+1}{j}$$



Aspecto histórico


Omar Khayyám (1050–1123)

El caso de $n = 2$ del teorema del binomio, $(a + b)^2$, fue descrito por Euclides en el año 300 aC, pero parece que la ley general fue descubierta por el astrónomo y matemático persa Omar Khayyám (1050-1123), al que también se reconoce como autor de la *Rubáiyát*, una colección de poemas de cuatro líneas en los que hacía observaciones de la condición humana. Omar Khayyám no estableció explícitamente el teorema del binomio, pero aseguró tener un método para obtener la tercera, cuarta, quinta, etcétera, raíces. Un pequeño estudio demuestra que se debe conocer el teorema del binomio para crear dicho método.

La fórmula para los coeficientes numéricos es el corazón del teorema del binomio y, como ya vimos, se pueden escribir en una forma triangular simétrica. El triángulo de Pascal aparece antes en los libros de Yang Hui (alrededor de 1270) y Chu Shih-chieh (1303). Se le relacionó con el nombre de Pascal debido a las múltiples aplicaciones que hizo de él, sobre todo para conteo y probabilidad. Al establecer esos resultados, él fue uno de los primeros en emplear la inducción matemática.

Muchas personas trabajaron en la demostración del teorema del binomio, que finalmente fue completado para todas las n (incluyendo los números complejos) por Niels Abel (1802-1829).

12.5 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. El __________ __________ es una representación triangular de los coeficientes binomiales.

2. $\binom{6}{2} =$ __________

3. *Falso o verdadero:* $\binom{n}{j} = \dfrac{j!}{(n-j)!n!}$

4. El __________ __________ se utiliza para desarrollar expresiones como $(2x + 3)^6$.

Ejercicios

En los problemas 5-16, evalúe cada expresión.

5. $\binom{5}{3}$ **6.** $\binom{7}{3}$ **7.** $\binom{7}{5}$ **8.** $\binom{9}{7}$

9. $\binom{50}{49}$ **10.** $\binom{100}{98}$ **11.** $\binom{1000}{1000}$ **12.** $\binom{1000}{0}$

13. $\binom{55}{23}$ **14.** $\binom{60}{20}$ **15.** $\binom{47}{25}$ **16.** $\binom{37}{19}$

En los problemas 17-28, desarrolle cada expresión utilizando el teorema del binomio.

17. $(x + 1)^5$ **18.** $(x - 1)^5$ **19.** $(x - 2)^6$ **20.** $(x + 3)^5$

21. $(3x + 1)^4$ **22.** $(2x + 3)^5$ **23.** $(x^2 + y^2)^5$ **24.** $(x^2 - y^2)^6$

25. $(\sqrt{x} + \sqrt{2})^6$ **26.** $(\sqrt{x} - \sqrt{3})^4$ **27.** $(ax + by)^5$ **28.** $(ax - by)^4$

En los problemas 29-42, utilice el teorema del binomio para encontrar el coeficiente o término señalado.

29. El coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(x + 3)^{10}$

30. El coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(x - 3)^{10}$

31. El coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(2x - 1)^{12}$

32. El coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(2x + 1)^{12}$

33. El coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(2x + 3)^9$

34. El coeficiente de x^2 en el desarrollo de $(2x - 3)^9$

35. El quinto término en el desarrollo de $(x + 3)^7$

36. Encontrar el tercer término en el desarrollo de $(x - 3)^7$

37. Encontrar el tercer término en el desarrollo de $(3x - 2)^9$

38. Encontrar el sexto término en el desarrollo de $(3x + 2)^8$

39. El coeficiente de x^0 en el desarrollo de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$

40. El coeficiente de x^0 en el desarrollo de $\left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^9$

41. El coeficiente de x^4 en el desarrollo de $\left(x - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

42. El coeficiente de x^2 en el desarrollo de $\left(\sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^8$

43. Use el teorema del binomio para encontrar el valor numérico de $(1.001)^5$, correcto hasta cinco decimales.
[**Sugerencia:** $(1.001)^5 = (1 + 10^{-3})^5$]

44. Use el teorema del binomio para encontrar el valor numérico de $(0.998)^6$, correcto hasta cinco decimales.

45. Demuestre que $\binom{n}{n-1} = n$ y $\binom{n}{n} = 1$.

46. Demuestre que si j y n son enteros, con $0 \leq j \leq n$, entonces

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$$

Concluya que el triángulo de Pascal es simétrico respecto de una línea vertical trazada desde la cifra superior.

47. Si n es un entero positivo, demuestre que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

[**Sugerencia:** $2^n = (1 + 1)^n$; ahora use el teorema del binomio].

48. Si n es un entero positivo, demuestre que:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

49. $$\binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5 = ?$$

50. Fórmula de Stirling Una aproximación de $n!$, cuando n es grande, nos da la fórmula:

$$n! \approx \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n - 1}\right)$$

Calcule 12!, 20! y 25! En su calculadora. Luego use la fórmula de Stirling para aproximar 12!, 20! y 25!.

Repaso del capítulo

Conceptos para recordar

Sucesión (p. 940)	Es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.
Factoriales (p. 943)	$0! = 1, 1! = 1, n! = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ si $n \geq 2$
Sucesión aritmética (pp. 950 y 951)	$a_1 = a$, $a_n = a_{n-1} + d$, donde a = primer término, d = diferencia común, $a_n = a + (n-1)d$
Suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética (p. 952)	$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + a_n)$
Sucesión geométrica (pp. 955 y 957)	$a_1 = a$, $a_n = ra_{n-1}$, donde a = primer término, r = razón común; $a_n = ar^{n-1}$, $r \neq 0$
Suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica (p. 958)	$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 0, 1$
Series geométricas infinitas (p. 959)	$a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$
Suma de una serie geométrica infinita (p. 960)	$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}$, $\lvert r\rvert < 1$
Monto de una anualidad (p. 962)	$A = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}$
Principio de inducción matemática (p. 968)	Suponga que se satisfacen las dos condiciones siguientes: Condición I: El enunciado es cierto para el número natural 1. Condición II: Si el enunciado es cierto para algún número natural k, también es cierto para $k + 1$. Entonces el enunciado es cierto para todos los números naturales n.
Coeficiente binomial (p. 972)	$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$
Triángulo de Pascal (p. 973)	Vea la figura 13.
Teorema del binomio (p. 974)	$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \cdots + \binom{n}{j}a^jx^{n-j} + \cdots + \binom{n}{n}a^n$

Objetivos

Sección		Usted debe ser capaz de . . .	Ejercicios de repaso
12.1	1	Escribir los primeros términos de una sucesión (p. 941)	1–4
	2	Escribir los primeros términos de una sucesión definida mediante una fórmula recursiva (p. 943)	5–8
	3	Utilizar la notación de sumatoria (p. 944)	9–12
	4	Encontrar la suma de una sucesión (p. 946)	25–30
12.2	1	Determinar si una sucesión es aritmética (p. 949)	13–24
	2	Encontrar una fórmula para una sucesión aritmética (p. 951)	31, 32, 35, 37–40, 63, 64
	3	Encontrar la suma de una sucesión aritmética (p. 952)	13, 14, 19, 20, 63, 64
12.3	1	Determinar si una sucesión es geométrica (p. 955)	13–24
	2	Encontrar una fórmula para una sucesión geométrica (p. 957)	33, 34, 36, 65, 68
	3	Encontrar la suma de una sucesión geométrica (p. 958)	17, 18, 21, 22
	4	Encontrar la suma de una serie geométrica (p. 959)	41–46, 65(d)
	5	Resolver los problemas relativos a plazos anuales (p.962)	66, 67
12.4	1	Demostrar enunciados utilizando la inducción matemática (p. 967)	47–52
12.5	1	Evaluar un coeficiente binomial (p. 972)	53, 54
	2	Desarrollar un binomio (p. 974)	55–62

Ejercicios de repaso

(Los problemas con asterisco indican que el autor los sugiere para usarse como examen de práctica).

En los problemas 1-8, escriba los primeros cinco términos de cada sucesión.

1. $\left\{(-1)^n\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)\right\}$ **2.** $\{(-1)^{n+1}(2n+3)\}$ ***3.** $\left\{\dfrac{2^n}{n^2}\right\}$ **4.** $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}$

5. $a_1 = 3;\quad a_n = \dfrac{2}{3}a_{n-1}$ **6.** $a_1 = 4;\quad a_n = -\dfrac{1}{4}a_{n-1}$ ***7.** $a_1 = 2;\quad a_n = 2 - a_{n-1}$ **8.** $a_1 = -3;\quad a_n = 4 + a_{n-1}$

En los problemas 9 y 10, escriba cada sumatoria.

9. $\sum_{k=1}^{4}(4k+2)$ **10.** $\sum_{k=1}^{3}(3-k^2)$

En los problemas 11 y 12, exprese cada suma utilizando la notación de sumatoria.

***11.** $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{13}$ **12.** $2 + \dfrac{2^2}{3} + \dfrac{2^3}{3^2} + \cdots + \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$

En los problemas 13-24, determine si la sucesión dada es aritmética, geométrica, o ninguna de las dos. Si la sucesión es aritmética encuentre la diferencia común y la suma de los primeros n términos. Si la sucesión es geométrica encuentre la razón común y la suma de los primeros n términos.

13. $\{n+5\}$ **14.** $\{4n+3\}$ **15.** $\{2n^3\}$ **16.** $\{2n^2-1\}$

***17.** $\{2^{3n}\}$ **18.** $\{3^{2n}\}$ ***19.** $0, 4, 8, 12, \ldots$ **20.** $1, -3, -7, -11, \ldots$

21. $3, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{3}{16}, \ldots$ **22.** $5, -\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{9}, -\dfrac{5}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots$ **23.** $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \ldots$ **24.** $\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{9}{8}, \dfrac{11}{10}, \ldots$

En los problemas 25-30, evalúe cada suma.

25. $\sum_{k=1}^{5}(k^2+12)$ **26.** $\sum_{k=1}^{3}(k+2)^2$ ***27.** $\sum_{k=1}^{10}(3k-9)$

28. $\sum_{k=1}^{9}(-2k+8)$ ***29.** $\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ **30.** $\sum_{k=1}^{10}(-2)^k$

En los problemas 31-36, encuentre el término indicado de cada sucesión.
[**Sugerencia:** Encuentre primero el término general].

31. 9° término de $3, 7, 11, 15, \ldots$ **32.** 8° término de $1, -1, -3, -5, \ldots$ **33.** 11° término de $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$

34. 11° término de $1, 2, 4, 8, \ldots$ **35.** 9° término de $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots$ **36.** 9° término de $\sqrt{2}, 2, 2^{3/2}, \ldots$

En los problemas 37-40, encuentre una fórmula general para cada sucesión aritmética.

37. 7° término es 31; 20° término es 96 **38.** 8° término es −20; 17° término es −47

***39.** 10° término es 0; 18° término es 8 **40.** 12° término es 30; 22° término es 50

En los problemas 41-46, encuentre la suma de cada una de las series geométricas infinitas.

41. $3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots$ **42.** $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ **43.** $2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots$

44. $6-4+\frac{8}{3}-\frac{16}{9}+\cdots$ ***45.** $\sum_{k=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ **46.** $\sum_{k=1}^{\infty}3\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

En los problemas 47-52, utilice el principio de inducción matemática para demostrar que el enunciado dado es cierto para todos los números naturales.

47. $3+6+9+\cdots+3n=\frac{3n}{2}(n+1)$ **48.** $2+6+10+\cdots+(4n-2)=2n^2$

49. $2+6+18+\cdots+2\cdot 3^{n-1}=3^n-1$ **50.** $3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=3(2^n-1)$

***51.** $1^2+4^2+7^2+\cdots+(3n-2)^2=\frac{1}{2}n(6n^2-3n-1)$ **52.** $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+n(n+2)=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

En los problemas 53-54, evalúe los coeficientes binomiales.

53. $\binom{5}{2}$ **54.** $\binom{8}{6}$

En los problemas 55-58, desarrolle cada expresión utilizando el teorema del binomio.

55. $(x+2)^5$ **56.** $(x-3)^4$ ***57.** $(2x+3)^5$ **58.** $(3x-4)^4$

---

59. Encuentre el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(x+2)^9$.

60. Encuentre el coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(x-3)^8$.

61. Encuentre el coeficiente de x^2 en el desarrollo de $(2x+1)^7$.

62. Encuentre el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(2x+1)^8$.

***63.** **Construcción de una escalera de ladrillo** Una escalera de ladrillo tiene un total de 25 escalones. El escalón inferior necesita 80 ladrillos. Cada escalón sucesivo necesita tres ladrillos menos que el anterior.
a) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para el escalón superior?
b) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para construir la escalera?

64. **Haciendo un diseño de piso** Un piso de baldosas de cerámica está diseñado con forma de un trapezoide de 30 pies en la base mayor y 15 pies en la base menor. Las baldosas, de 12 por 12 pulgadas, se van a colocar de manera que cada línea sucesiva tenga una baldosa menos la anterior. ¿Cuántas baldosas serán necesarias?
[**Sugerencia:** Consulte la figura 8].

65. **Botando pelotas** Se deja caer una pelota desde una altura de 20 pies. Cada vez que golpea el piso, rebota hasta alcanzar una altura de tres cuartas partes la altura del bote anterior.
a) ¿Hasta qué altura rebotará la pelota después de golpear el piso por tercera vez?

b) ¿Hasta qué altura rebotará la pelota después de golpear el piso por n-ésima vez?
c) ¿Cuántas veces tiene que golpear antes de que el rebote sea menor a 6 pulgadas?
d) ¿Qué distancia total viaja la pelota antes de dejar de rebotar?

66. Jubilación Chris recibe su sueldo de manera mensual, y en cada pago aporta $200 a su plan de retiro. Si Chris planea retirarse dentro de 20 años, ¿cuál será el valor de su plan de retiro si la tasa de rendimiento anual de su plan de retiro es de 10% mensual compuesto?

67. Jubilación Cada trimestre, Jacky aporta $500 a su Afore. Si planea retirarse dentro de 30 años, ¿cuál será el valor de su Afore si la tasa de rendimiento anual de su plan de retiro es de 8% trimestral compuesto?

68. Aumento salarial Una de sus amigas acaba de obtener un empleo en el que le pagan un salario de $20,000 anuales. Si ella espera recibir aumentos del 4% cada año, ¿cuál será su salario al comienzo de su quinto año?

Proyectos del capítulo



1. Crecimiento demográfico El tamaño de la población estadounidense depende fundamentalmente de su población actual, las tasas de natalidad y mortalidad, y la inmigración. Suponga que b representa la tasa de natalidad de la población estadounidense y d su tasa de mortalidad. Entonces, $r = b - d$ representa la tasa de crecimiento demográfico, donde r varía de un año a otro. Se puede hacer un modelo de la población estadounidense para dentro de n años, utilizando la función recursiva:

$$p_n = (1 + r)p_{n-1} + I$$

Donde I representa la inmigración neta hacia Estados Unidos.

a) Utilizando los datos del National Center for Health Statistics (*http://www.fedstats.gov*), determine las tasas de natalidad y mortalidad para todos los grupos, de acuerdo con los datos correspondientes al año más reciente. Las tasas de natalidad se expresan como el número de nacimientos por cada 1000 habitantes, mientras que las de natalidad se expresan como el número de fallecimientos por cada 100,000 habitantes. Debe calcular cada una de ellas como el número de nacimientos (o fallecimientos) por habitante. Por ejemplo, en 1990 la tasa de natalidad fue de 16.7 por cada 1000 habitantes, y la tasa de mortalidad fue de 863.8 por cada 100,000 habitantes, entonces: $b = \frac{16.7}{1000} = 0.0167$, mientras que $d = \frac{863.8}{100{,}000} = 0.008638$.

Después, utilizando los datos del Immigration and Naturalization Service (*http://www.fedstats.gov*), determine la inmigración hacia Estados Unidos durante el mismo año utilizada para obtener b y d en el inciso *a*).
b) Determine el valor de r, la tasa de crecimiento demográfico.
c) Encuentre una fórmula recursiva para la población estadounidense.
d) Use la fórmula recursiva para pronosticar la población estadounidense para el año siguiente. En otras palabras, si los datos disponibles corresponden al año 2003, pronostique la población estadounidense para el año 2004.
e) Compare su pronóstico con los datos reales.
f) ¿Le parece que la fórmula recursiva que elaboró para responder al inciso *c*) sería útil para pronosticar poblaciones futuras? ¿Por qué?

Los siguientes proyectos del capítulo están disponibles en www.prenhall.com/Sullivan

2. **Project at Motorola** ***Digital Wireless Communication***
3. **Economics**
4. **Standardized Tests**

Repaso acumulativo

1. Encuentre todas las soluciones, reales y complejas, de la ecuación $|x^2| = 9$.

2. a) Grafique el círculo $x^2 + y^2 = 100$ y la parábola $y = 3x^2$.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = 3x^2 \end{cases}$
c) ¿Dónde se cortan el círculo y la parábola?

3. Resuelva la ecuación $2e^x = 5$.

4. Encuentre la ecuación de la recta que tiene una pendiente de 5 y una intersección en $x = 2$.

5. Encuentre la ecuación general del círculo cuyo centro está en el punto $(-1, 2)$, si $(3, 5)$ es un punto del círculo.

6. $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$, $g(x) = 2x + 1$

Encuentre:
a) $(f \circ g)(2)$
b) $(g \circ f)(4)$
c) $(f \circ g)(x)$
d) El dominio de $(f \circ g)(x)$
e) $(g \circ f)(x)$
f) El dominio de $(g \circ f)(x)$
g) La función g^{-1} y su dominio
h) La función f^{-1} y su dominio

7. Encuentre la ecuación de la elipse con centro en el origen, un foco en $(0, 3)$, y un vértice en $(0, 4)$.

8. Encuentre la ecuación de la parábola con vértice en $(-1, 2)$ y foco en $(-1, 3)$.

9. Encuentre la ecuación polar de un círculo con centro en $(0, 4)$ que pasa por el polo. ¿Cuál es su ecuación rectangular?

10. Resuelva la ecuación $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 3 = 0, 0 < x < 2\pi$.

11. Encuentre el valor exacto de $\cos^{-1}(-0.5)$.

12. Si $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{1}{4}$ y θ está en el segundo cuadrante, encuentre:
a) $\cos \theta$
b) $\tan \theta$
c) $\operatorname{sen}(2\theta)$
d) $\cos(2\theta)$
e) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\theta\right)$

13 Conteos y probabilidad

El problema de los dos hijos

PROBLEMA: Una señora y un señor (sin relación entre sí) tienen cada uno dos hijos. Por lo menos uno de los hijos de la señora y el hijo mayor del señor son hombres. ¿Las posibilidades de que la señora tenga dos hombres son iguales a las posibilidades de que el señor tenga dos hombres?

Este problema se le planteó a Marilyn vos Savant en su columna *Ask Marilyn*. Su respuesta original, basada en las probabilidades teóricas, fue que las posibilidades de que la señora tenga dos hombres son de 1 en 3 y de que las posibilidades de que el señor tenga dos hombres son de 1 en 2. Esto se encuentra observando el espacio muestral de las familias con dos hijos: HH, HM, MH, MM. En el caso del señor, sabemos que su hijo mayor es hombre y el espacio muestral se reduce a HH y HM. Por lo tanto, la probabilidad de que tenga dos hijos varones es 1 en 2. En el caso de la señora, puesto que sólo sabemos que tiene por lo menos un hijo hombre, el espacio muestral se reduce a HH, HM y MH. De esta manera, sus posibilidades de tener dos hijos varones son 1 en 3.

La respuesta sobre las posibilidades de la señora generó cierta controversia, que tuvo como resultado muchas cartas refutando la exactitud de la respuesta (*Parade*, 27 de julio de 1997). Marilyn propuso que los lectores con sólo dos hijos y por lo menos un varón le escribieran y le dijeran el género de ambos. (Reimpreso con autorización de Parade y Marilyn vos Savant, copyright © 1997).

—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO.

C O N T E N I D O

13.1 Conjuntos y conteos

13.2 Permutaciones y combinaciones

13.3 Probabilidad

Repaso del capítulo

Proyectos del capítulo

Repaso acumulativo

13.1 Conjuntos y conteos

OBJETIVOS
1 Encontrar todos los subconjuntos de un conjunto
2 Encontrar la intersección y la unión de conjuntos
3 Encontrar el complemento de un conjunto
4 Contar el número de elementos en un conjunto

Conjuntos

Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos distintos. Los objetos en conjunto se conocen como sus **elementos**. Con **bien definida** queremos decir que existe una regla que nos permite determinar si un objeto dado es elemento del conjunto. Si un conjunto no tiene elementos, se conoce como **conjunto vacío**, o **nulo**, y se denota mediante el símbolo $\emptyset$.

Puesto que los elementos de un conjunto son distintos, nunca los repetimos. Por ejemplo, nunca escribiríamos $\{1, 2, 3, 2\}$; la escritura correcta es $\{1, 2, 3\}$. Debido a que un conjunto es una colección no tiene importancia el orden en el que se enumeran sus elementos. $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, y demás órdenes, todos representan al mismo conjunto.

EJEMPLO 1 **Escribir los elementos en conjunto**

Escribir el conjunto compuesto por los posibles resultados de lanzar dos veces una moneda. Usar K para la *cara* y Q para la *cruz*.

Solución Al lanzar dos veces una moneda, podemos obtener cara en ambas, KK; o cara en la primera y cruz en la segunda, KQ; o cruz en la primera y cara en la segunda, QK; o cruz en ambas, QQ. Como no existen más posibilidades, el conjunto de resultados es:

$$\{\text{HH, HT, TH, TT}\}$$ ◀



1 Ahora veremos las maneras de comparar los conjuntos, comenzando con la igualdad de conjuntos.

Si dos conjuntos, A y B, tienen exactamente los mismos elementos, decimos que A y B son **iguales** y escribimos $A = B$.

Si todo elemento de un conjunto A también es elemento del conjunto B, decimos que A es un **subconjunto** de B y escribimos $A \subseteq B$.

Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$, entonces decimos que A es un **subconjunto propio** de B y escribimos $A \subset B$.

Si $A \subseteq B$, todo elemento del conjunto A también está en el conjunto B, pero B podría no tener elementos adicionales. Si $A \subset B$, todo elemento de A también está en B, y B tiene por lo menos un elemento que no se encuentra en A.

Por último, convenimos que el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto, es decir:

$$\emptyset \subseteq A, \qquad \text{para todo conjunto } A$$

EJEMPLO 2 **Encontrar todos los subconjuntos de un conjunto**

Escribir todos los subconjuntos del conjunto $\{a, b, c\}$.

Solución Para organizar nuestro trabajo, escribimos primero todos los subconjuntos sin elementos, luego los que tienen un elemento, después los que tienen dos elementos y, por último, los que tienen tres elementos. Esto nos proporcionará todos los subconjuntos. ¿Sabe por qué?

0 Elementos	1 Elemento	2 Elementos	3 Elementos
$\varnothing$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	$\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$	$\{a, b, c\}$

◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.

2 Si A y B son conjuntos, la **intersección** de A con B, que se denota $A \cap B$, es el conjunto compuesto por los elementos que pertenecen a A y pertenecen a B. La **unión** de A con B, que se denota $A \cup B$, es el conjunto compuesto por los elementos que pertenecen a A o a B, o a ambos.

EJEMPLO 3 Encontrar la intersección y la unión de conjuntos

Sean $A = \{1, 3, 5, 8\}$, $B = \{3, 5, 7\}$, y $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Encontrar:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $B \cap (A \cup C)$

Solución

a) $A \cap B = \{1, 3, 5, 8\} \cap \{3, 5, 7\} = \{3, 5\}$

b) $A \cup B = \{1, 3, 5, 8\} \cup \{3, 5, 7\} = \{1, 3, 5, 7, 8\}$

c) $B \cap (A \cup C) = \{3, 5, 7\} \cap [\{1, 3, 5, 8\} \cup \{2, 4, 6, 8\}]$
$= \{3, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} = \{3, 5\}$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 9.

3 Por lo general, al trabajar con conjuntos se designa un **conjunto universal**, U, compuesto por todos los elementos que se desea tomar en cuenta. Una vez designado el conjunto universal, podemos tomar en cuenta cuáles de sus elementos no se encuentran en un conjunto dado.

Si A es un conjunto, su **complemento**, que se denota $\overline{A}$, es el conjunto compuesto por los elementos que pertenecen al conjunto universal que no se encuentran en A.

Nota: En algunos libros se utiliza la notación A' para el complemento de A.

EJEMPLO 4 Encontrar el complemento de un conjunto

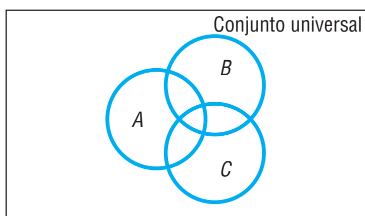
Si el conjunto universal es $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, entonces $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$. ◀

De donde se deduce que en $A \cup \overline{A} = U$ y $A \cap \overline{A} = \varnothing$. ¿Sabe por qué?

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 17.

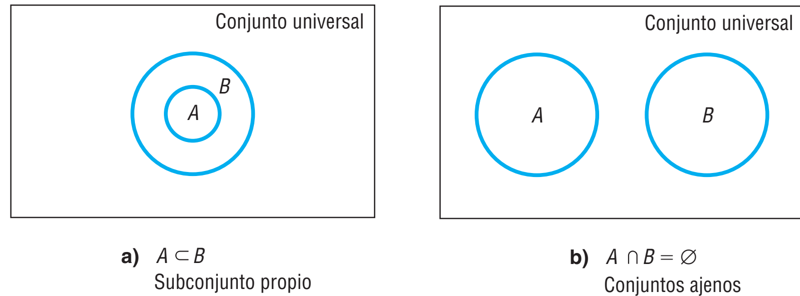
Con frecuencia resulta útil dibujar imágenes de los conjuntos. En estas imágenes, llamadas **diagramas de Venn**, los conjuntos representan como círculos dentro de un rectángulo, que a su vez representa al conjunto universal. Estos diagramas suelen ayudarnos a visualizar las diversas relaciones que existen entre conjuntos. Vea la figura 1.

Figura 1



Si sabemos que $A \subset B$, podemos usar el diagrama de Venn de la figura 2*a*). Si sabemos que A y B no tienen elementos en común, es decir, si $A \cap B = \varnothing$, podemos usar el diagrama de Venn de la figura 2*b*). Se dice que los conjuntos A y B de la figura 2*b*) son **ajenos**.

Figura 2

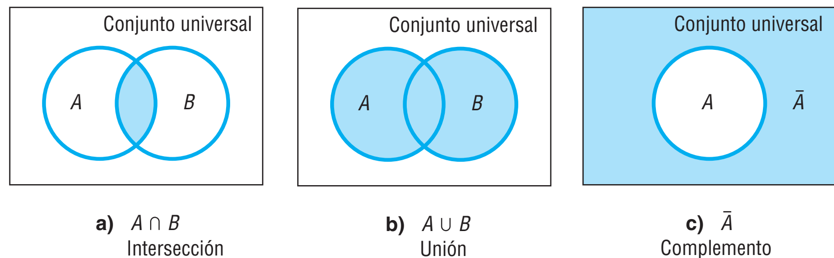


a) $A \subset B$
Subconjunto propio

b) $A \cap B = \varnothing$
Conjuntos ajenos

En las figuras 3*a*), 3*b*) y 3*c*) se utilizan diagramas de Venn para ilustrar las definiciones de intersección, unión y complemento, respectivamente.

Figura 3



a) $A \cap B$
Intersección

b) $A \cup B$
Unión

c) $\bar{A}$
Complemento

Conteos

4 Cuando se cuenta el número de alumnos en un salón de clases o el número de monedas en el bolsillo, lo que en realidad se hace es aparear, de manera biunívoca, cada uno de los objetos contados con el conjunto de los números enteros $1, 2, 3, \ldots, n$, para algún número n. Si un conjunto A se aparea de esta manera con el conjunto $\{1, 2, \ldots, 25\}$, se concluye que hay 25 elementos del conjunto A. Se utiliza la notación $n(A) = 25$ para indicar que existen 25 elementos en el conjunto A.

Puesto que el conjunto vacío no tiene elementos, escribimos:

$$n(\varnothing) = 0$$

Si el número de elementos de un conjunto es un entero no negativo, decimos que el conjunto es **finito**. De lo contrario, es **infinito**. Nos referimos sólo a los conjuntos finitos.

Veamos de nuevo el ejemplo 2. Un conjunto con tres elementos tiene $2^3 = 8$ subconjuntos. Este resultado se podría generalizar.

> Si A es un conjunto con n elementos, entonces A tiene 2^n subconjuntos.

Por ejemplo, el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ tiene $2^5 = 32$ subconjuntos.

EJEMPLO 5 **Analizar los datos de una encuesta**

En una encuesta aplicada a 100 estudiantes universitarios, 35 estaban inscritos en álgebra superior, 52 en informática I, y 18 en ambas materias.

a) ¿Cuántos estudiantes estaban inscritos en álgebra superior o informática I?

b) ¿Cuántos no estaban inscritos en alguno de estos cursos?

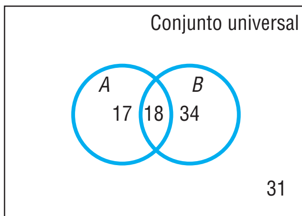
Solución a) Primero, sean A = conjunto de estudiantes en álgebra superior
B = conjunto de estudiantes en informática I

Entonces, la información proporcionada nos dice que:

$$n(A) = 35 \qquad n(B) = 52 \qquad n(A \cap B) = 18$$

Vea la figura 4. Puesto que $n(A \cap B) = 18$, sabemos que la parte común entre los círculos que representan a los conjuntos A y B tiene 18 elementos. También sabemos que el resto de la porción del círculo que representa al conjunto A tendrá $35 - 18 = 17$ elementos. De la misma manera, sabemos que el resto de la porción del círculo que representa al conjunto B tiene $52 - 18 = 34$ elementos. Concluimos que $17 + 18 + 34 = 69$ estudiantes estaban inscritos en álgebra superior o informática I.

Figura 4



b) Puesto que se entrevistaron 100 estudiantes, se deduce que $100 - 69 = 31$ no estaban inscritos en alguno de estos cursos. ◀



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39

La solución del ejemplo 5 contiene la base para una fórmula general de conteo. Si se cuentan los elementos de cada uno de los dos conjuntos A y B, necesariamente se contarán dos veces los elementos que están en ambos, es decir, los elementos en $A \cap B$. Para contar de manera correcta los elementos que están en A o en B, es decir, para encontrar $n(A \cup B)$, es necesario restar de $A \cap B$ los que se encuentran en $n(A) + n(B)$.

Teorema

Fórmula de conteo

Si A y B son conjuntos finitos, entonces:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \qquad \textbf{(1)}$$

Observe de nuevo el ejemplo 5. Utilizando la fórmula (1), se tiene:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 35 + 52 - 18 \\ &= 69 \end{aligned}$$

Hay 69 estudiantes inscritos en álgebra superior o informática I.

Un caso especial de la fórmula de conteo (1) aparece si A y B no tienen elementos en común. En este caso, $A \cap B = \emptyset$, de manera que $n(A \cap B) = 0$.

Teorema

Principio aditivo del conteo

Si dos conjuntos A y B no tienen elementos en común, es decir:

$$\text{si } A \cap B = \emptyset, \text{ entonces } n(A \cup B) = n(A) + n(B) \qquad \textbf{(2)}$$

Podemos generalizar la fórmula (2).

Teorema

Principio general aditivo del conteo

Si, para n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, no hay dos que tienen elementos en común, entonces:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_n) \qquad \textbf{(3)}$$

EJEMPLO 6 Conteo

De julio del 2002, las dependencias federales estadounidenses empleaban 93,466 personas de tiempo completo, autorizadas para realizar arrestos y portar armas de fuego. En la tabla 1 se clasifican el tipo de agente y el número de oficiales de tiempo completo correspondiente. Ningún oficial se considera en más de una de las clasificaciones.

Tabla 1

Tipo de agente	Número de oficiales federales de tiempo completo
Criminalística (investigación/cumplimiento de la ley)	37,208
Patrullaje y respuesta policiaca	20,955
Carcelario	16,915
No criminal (investigación/inspección)	12,801
Operaciones en tribunales	4,090
Seguridad/protección	1,320
Otros	156

FUENTE: Bureau of Justice Statistics

a) ¿Cuántos agentes estadounidenses con trabajo de tiempo completo se dedicaban a actividades de criminalística o carcelarias?

b) ¿Cuántos agentes estadounidenses con trabajo de tiempo completo se dedicaban actividades de criminalística, carcelarias o no criminales?

Solución Representemos con A al conjunto de oficiales con labores de criminalística, con B al conjunto de oficiales carcelarios y con C al conjunto de oficiales con actividades no criminales. De estos tres conjuntos, A, B y C, no hay dos con elementos en común, puesto que ningún agente se consideró en más de una clasificación. Entonces:

$$n(A) = 37{,}208 \qquad n(B) = 16{,}915 \qquad n(C) = 12{,}801$$

a) Si se utiliza la fórmula (2), tenemos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 37{,}208 + 16{,}915 = 54{,}123$$

Había 54,123 agentes dedicados a actividades de criminalística o carcelarias.

b) Si se utiliza la fórmula (3), tenemos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) = 37{,}208 + 16{,}915 + 12{,}801 = 66{,}924$$

Había 66,924 agentes dedicados a actividades de criminalística, carcelarias o no criminales. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 43

13.1 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. La __________ de A y B se compone de todos los elementos que están en A o B o ambos.
2. La __________ de A con B se compone de todos los elementos que están tanto en A como en B.
3. *Falso o verdadero*: la intersección de los conjuntos siempre es un subconjunto de su unión.
4. *Falso o verdadero*: si A es un conjunto, su complemento, es el conjunto compuesto por los elementos pertenecientes al conjunto universal que no se encuentran en A.

Ejercicios

En los problemas 5-14, use $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 5, 6, 7\}$, *y* $C = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ *para encontrar cada conjunto.*

5. $A \cup B$ **6.** $A \cup C$ **7.** $A \cap B$ **8.** $A \cap C$ **9.** $(A \cup B) \cap C$
10. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ **11.** $(A \cap B) \cup C$ **12.** $(A \cup B) \cup C$ **13.** $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ **14.** $(A \cap B) \cap C$

En los problemas 15-24, use $U =$ *conjunto universal* $= \{0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ *y* $C = \{1, 3, 4, 6\}$ *para encontrar cada conjunto.*

15. $\overline{A}$ **16.** $\overline{C}$ **17.** $\overline{A \cap B}$ **18.** $\overline{B \cup C}$ **19.** $\overline{A} \cup \overline{B}$
20. $\overline{B} \cap \overline{C}$ **21.** $\overline{A \cap \overline{C}}$ **22.** $\overline{\overline{B} \cup C}$ **23.** $\overline{A \cup B \cup C}$ **24.** $\overline{A \cap B \cap C}$

25. Escriba todos los subconjuntos de $\{a, b, c, d\}$.

26. Escriba todos los subconjuntos de $\{a, b, c, d, e\}$.

27. Si $n(A) = 15, n(B) = 20$, y $n(A \cap B) = 10$, encuentre $n(A \cup B)$.

28. Si $n(A) = 30, n(B) = 40$, y $n(A \cup B) = 45$, encuentre $n(A \cap B)$.

29. Si $n(A \cup B) = 50, n(A \cap B) = 10$, y $n(B) = 20$, encuentre $n(A)$.

30. Si $n(A \cup B) = 60, n(A \cap B) = 40$, y $n(A) = n(B)$, encuentre $n(A)$.

En los problemas 31-38, utilice la información que proporciona la figura.

31. ¿Cuántos elementos hay en el conjunto A?

32. ¿Cuántos elementos hay en el conjunto B?

33. ¿Cuántos elementos hay en A o B?

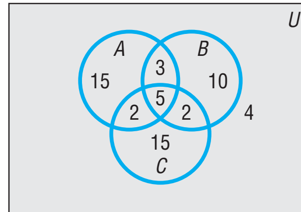
34. ¿Cuántos elementos hay en A y B?

35. ¿Cuántos están en el conjunto A pero no en C?

36. ¿Cuántos elementos no están en el conjunto A?

37. ¿Cuántos elementos están en A y B y C?

38. ¿Cuántos elementos están en A o B o C?



39. Análisis de los datos de una encuesta En una encuesta de consumo aplicada a 500 personas, 200 de ellas señalaron que comprarían mobiliario durante el mes próximo, 150 dijeron que comprarían un automóvil y 25 que adquirirían ambas cosas. ¿Cuántos no comprarán? ¿Cuántos sólo comprarán un automóvil?

40. Análisis de los datos de una encuesta En una encuesta estudiantil, 200 individuos señalaron que asistirán al curso de verano I y 150 que lo harán al curso de verano II. Si 75 estudiantes planean asistir a ambos y 275 señalaron que no tomarían cursos de verano, ¿cuántos alumnos participaron en la encuesta?

41. Análisis de los datos de una encuesta En una encuesta aplicada a 100 inversionistas de la bolsa de valores:

50 tienen acciones de IBM
40 tienen acciones de AT&T
45 tienen acciones de GE
20 tienen acciones de IBM y GE
15 tienen acciones de AT&T y GE
20 tienen acciones de IBM y AT&T
5 tienen acciones de las tres

a) ¿Cuántos de los inversionistas encuestados no tienen acciones de alguna de las tres compañías?
b) ¿Cuántos sólo tienen acciones de IBM?
c) ¿Cuántos sólo tienen acciones de GE?
d) ¿Cuántos no tienen acciones de IBM ni de GE?
e) ¿Cuántos no tienen acciones de IBM o de AT&T, pero no de GE?

42. Clasificación de tipos sanguíneos La sangre humana se clasifica como Rh+ o Rh−. También se clasifica por tipo: A, si contiene el antígeno A; B, si contiene el antígeno B; AB, si contiene ambos antígenos; y O, si no contiene antígenos. Dibuje un diagrama de Venn que ilustre los diversos tipos de sangre. Con base en esta clasificación, ¿cuántos tipos de sangre existen?

43. Los siguientes datos representan el estado civil de los varones estadounidenses de 18 años y mayores, en marzo de 1997.

Estado civil	Número (en miles)
Casados, viviendo con su cónyuge	54,654
Casados, cónyuge ausente	3,232
Viudos	2,686
Divorciados	8,208
Solteros	25,375

FUENTE: Current Population Survey

a) Determine el número de varones de 18 y mayores que están casados.
b) Determine el número de varones de 18 años y mayores que son viudos o divorciados.
c) Determine el número de varones de 18 años y mayores casados con cónyuge ausente, viudos o divorciados.

44. Los siguientes datos representan el estado civil de las mujeres estadounidenses de 18 años y mayores, en marzo de 1997.

Estado civil	Número (en miles)
Casadas, viviendo con su cónyuge	54,626
Casadas, cónyuge ausente	4,122
Viudas	11,056
Divorciadas	11,107
Solteras	20,503

FUENTE: Current Population Survey

a) Determine el número de mujeres de 18 y mayores que están casadas.
b) Determine el número de mujeres de 18 años y mayores que son viudas o divorciadas.
c) Determine el número de mujeres de 18 años y mayores casadas con cónyuge ausente, viudas o divorciadas.

45. Elabore un problema distinto a todos los que se encuentran en este libro, cuya solución requiera hacer uso del principio aditivo del conteo. Entréguelo a un amigo para que lo resuelva y lo juzgue.

46. Investigue la noción de conteo en relación con los conjuntos infinitos. Haga un trabajo sobre sus descubrimientos.

13.2 Permutaciones y combinaciones

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Factoriales (sección 12.1, p. 943)

Trabaje ahora en los problemas "¿Está preparado?", de la página 998.

OBJETIVOS
1. Resolver problemas de conteo utilizando el principio de la multiplicación
2. Resolver problemas de conteo utilizando permutaciones
3. Resolver problemas de conteo utilizando combinaciones
4. Resolver problemas de conteo utilizando permutaciones que incluyen *n* objetos no distintos.

1 El conteo desempeña un papel muy importante en áreas tan distintas como probabilidad, estadística e informática; las técnicas de conteo son parte de una rama de las matemáticas llamada **análisis combinatorio**. En esta sección se estudian problemas de conteo de tipo especial y se desarrollan las fórmulas para resolverlos.

Comenzaremos con un ejemplo que demostrará un principio general del conteo.

EJEMPLO 1 Contar el número de comidas posibles

El menú de precio fijo que sirven en el restaurante Mabenka tiene las siguientes opciones:

Primer plato: sopa o ensalada
Plato fuerte: pollo al horno, empanada de res, hígado de ternera o carne asada al gusto
Postre: helado o pay de queso

¿Cuántas comidas distintas habría?

Solución Pedir una comida exige tres distintas decisiones:

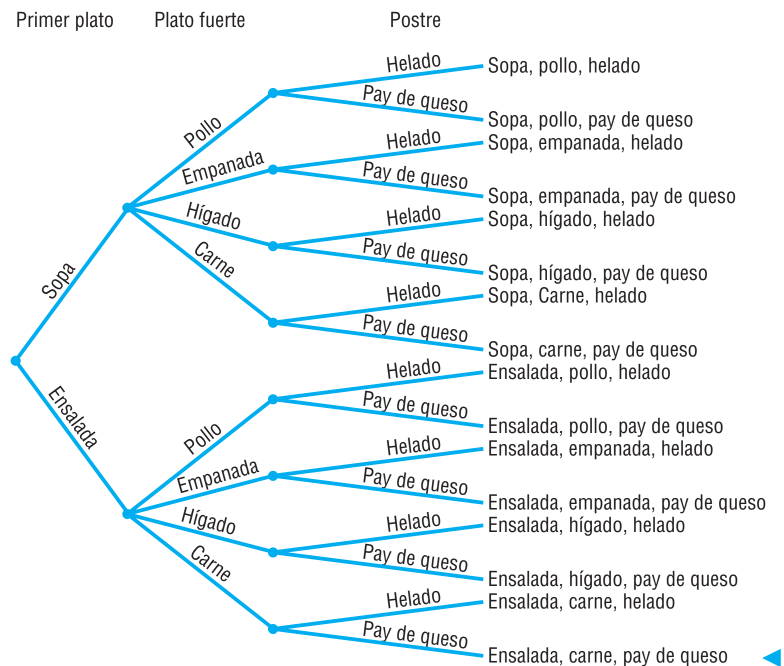
Elegir un primer plato	**Elegir un plato fuerte**	**Elegir un postre**
2 opciones	4 opciones	2 opciones

Observe el **diagrama de árbol** de la figura 5. Vemos que, por cada opción de primer plato, existen 4 opciones de plato fuerte. Y por cada una de esas $2 \cdot 4 = 8$ opciones, hay 2 opciones para postre. Se puede solicitar un total de

$$2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$$

comidas distintas.

Figura 5



◀

Teorema

Principio de la multiplicación de los conteos

Si una tarea se compone de una sucesión de elecciones en las que hay p opciones para la primera elección, q opciones para la segunda elección, r opciones para la tercera elección, y así sucesivamente, entonces la tarea de tomar esas elecciones se puede hacer en

$$p \cdot q \cdot r \cdot \ldots$$

maneras distintas.

EJEMPLO 2 **Elaboración de códigos**

¿Cuántas claves de dos caracteres se forman si el primer carácter es una letra (mayúscula) y el segundo un dígito?

Solución A veces resulta útil comenzar apuntando algunas de las posibilidades. El código se compone de una letra (mayúscula) seguida de un dígito, por lo que A1, A2, B3, X0 y demás son algunas posibilidades. Esta tarea consiste en hacer dos selecciones: la primera es elegir una letra mayúscula (26 opciones) y la segunda, elegir un dígito (10 opciones). Por el principio de la multiplicación, hay

$$26 \cdot 10 = 260$$

claves distintas del tipo descrito. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

Permutaciones

 Comencemos con una definición.

Una **permutación** es un arreglo ordenado de r objetos, seleccionados de entre n objetos.

Aquí analizamos tres tipos de permutaciones:

1. Los n objetos son distintos (diferentes), y se permite la repetición al seleccionar r de ellos. [Distintos, con repetición].
2. Los n objetos son distintos (diferentes), y no se permite la repetición al seleccionar r de ellos, donde $r \leq n$. [Distintos, sin repetición].
3. Los n objetos no son distintos, y los utilizamos todos en el arreglo. [No distintos].

Para empezar, abordaremos aquí los dos primeros tipos y dejaremos el tercero para el final de la sección.

El primer tipo de permutación se maneja utilizando el principio de la multiplicación.

EJEMPLO 3 **Conteo de los códigos de aeropuerto [Permutación: Distinta, con repetición]**

La Asociación Internacional de Transportación Aérea (IATA, por sus siglas en inglés) asigna códigos de tres letras que representan la ubicación de los aeropuertos. Por ejemplo, el código del aeropuerto de Ft. Lauderdale, Florida, es FLL. Observe que para formar este código se permiten las repeticiones. ¿Cuántos códigos de aeropuerto es posible formar?

Solución Estamos eligiendo 3 letras de entre 26 y arreglándolas en orden. En el arreglo ordenado, se puede repetir una letra. Éste es un ejemplo de una permutación con repetición, en la que se eligen 3 objetos de entre 26 objetos distintos.

Esta tarea de contar el número de dichos arreglos consiste en hacer tres selecciones. Cada selección requiere elegir una letra del abecedario (26 opciones). Por el principio de la multiplicación, hay

$$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17{,}576$$

códigos de aeropuerto distintos. ◀

Se generaliza la solución encontrada en el ejemplo 3.

Teorema

Permutaciones: Distintos objetos con repetición

El número de arreglos ordenados de r objetos, seleccionados de entre n objetos distintos y permitiendo la repetición, es de n^r.


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 35.

Comenzaremos con un ejemplo el análisis de las permutaciones en las que los objetos son distintos y no se permite la repetición.

EJEMPLO 4 Elaboración de códigos [Permutación: Distinta, sin repetición]

Suponiendo que queremos establecer un código de tres letras utilizando cualquiera de las 26 letras mayúsculas del abecedario, pero ninguna de ellas se podía utilizar más de una vez. ¿Cuántos códigos de tres letras distintas hay?

Solución Algunas de las posibilidades son: ABC, ABD, ABZ, ACB, CBA y así sucesivamente. Esta tarea consiste en hacer tres selecciones: La primera requiere elegir de entre 26 letras. Puesto que ninguna letra se puede usar más de una vez, la segunda selección requiere elegir de entre 25 letras. La tercera requiere elegir de entre 24 letras. (¿Sabe por qué?). De acuerdo con el principio de la multiplicación, hay

$$26 \cdot 25 \cdot 24 = 15{,}600$$

códigos de tres letras diferentes sin letras repetidas. ◀

Para el segundo tipo de permutación, le presentamos el siguiente símbolo.

La notación ***P(n, r)*** representa el número de arreglos ordenados de r objetos, seleccionados de entre n objetos distintos, donde $r \leq n$ y no se permite la repetición.

Por ejemplo, la pregunta planteada en el ejemplo 4 pide el número de maneras en que se podrían ordenar las 26 letras del abecedario, utilizando tres letras sin repetir. La respuesta es

$$P(26, 3) = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15{,}600$$

EJEMPLO 5 Fila de personas

¿De cuántas maneras se pueden formar 5 personas?

Solución Las 5 personas son distintas. Una vez que la persona está formada, no se repetirá en ningún lugar de la fila; al formar personas, el orden es importante. Tenemos una permutación de 5 objetos, tomando 5 a la vez. Podemos formar 5 personas de

$$P(5, 5) = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{5 factores}} = 120 \text{ maneras}$$

◀


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37.

Para obtener una fórmula para $P(n, r)$, observamos que la tarea de obtener un arreglo ordenado de n objetos en la que sólo se utiliza $r \le n$, sin repetir ninguno, requiere hacer r selecciones. Para la primera selección, hay n opciones; para la segunda, hay $n - 1$ opciones; para la tercera, hay $n - 2$ opciones; ...; para la r-ésima selección, hay $n - (r - 1)$ opciones. Mediante el principio de la multiplicación, tenemos:

$$\begin{aligned} P(n, r) &= \overset{1^{a}}{n} \cdot \overset{2^{a}}{(n-1)} \cdot \overset{3^{a}}{(n-2)} \cdot \ldots \cdot \overset{r\text{-ésima}}{[n-(r-1)]} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \end{aligned}$$

Esta fórmula para $P(n, r)$ se escribe de manera compacta usando la notación factorial*.

$$\begin{aligned} P(n, r) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot \frac{(n-r) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Teorema

Permutaciones de *r* objetos seleccionados de entre *n* objetos distintos, sin repetición

El número de arreglos de n objetos utilizando $r \le n$ de ellos, donde

1. los n objetos son distintos,
2. una vez utilizado un objeto no se puede usar de nuevo, y
3. el orden es importante,

está dada por la fórmula

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \textbf{(1)}$$

EJEMPLO 6 Cálculo de permutaciones

Evaluar: a) $P(7, 3)$ b) $P(6, 1)$ c) $P(52, 5)$

Solución Podemos desarrollar los incisos *a*) y *b*) de dos maneras.

a) $P(7, 3) = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}_{\text{3 factores}} = 210$

o

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$$

*Recuerde que $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \cdot 1, \ldots, n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Figura 6



b) $P(6, 1) = \underbrace{6}_{\text{1 factor}} = 6$

o

$$P(6, 1) = \frac{6!}{(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = \frac{6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 6$$



c) En la figura 6 se muestra la solución utilizando una calculadora gráfica TI-83: $P(52, 5) = 311{,}875{,}200$. ◄



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

EJEMPLO 7 El problema del cumpleaños

Todo lo que sabemos de Shannon, Patrick y Ryan es que tienen distintos cumpleaños. Si anotamos todas las maneras posibles en las que esto se presenta, ¿cuántas serían? Supongamos que hay 365 días en todos los años.

Solución Éste es un ejemplo de una permutación en la que se seleccionan 3 cumpleaños de entre 365 días posibles, y ninguno puede repetirse a sí mismo. El número de maneras en las que esto podría ocurrir es:

$$P(365, 3) = \frac{365!}{(365-3)!} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cancel{362!}}{\cancel{362!}} = 365 \cdot 364 \cdot 363 = 48{,}228{,}180$$

Existen 48,228,180 maneras en un grupo de 3 personas en el que cada una tiene distinto cumpleaños. ◄



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 53.

Combinaciones

3 En una permutación, el orden es importante. Por ejemplo, los grupos ABC, CAB, BAC,… se consideran distintos arreglos de las letras A, B y C. Sin embargo, en muchos casos el orden no es importante. Por ejemplo, en un juego de póquer no es importante el orden en el que se reciben, sino la *combinación* de las cartas.

Una **combinación** es un arreglo, en el que no importa el orden, de r objetos seleccionados de entre n objetos distintos sin repetir, donde $r \leq n$. La notación $\boldsymbol{C(n, r)}$ representa el número de combinaciones de n objetos distintos utilizando r de ellos.

EJEMPLO 8 Enumerar combinaciones

Enumerar todas las combinaciones de 4 objetos, a, b, c, d, tomando 2 a la vez. ¿Cuánto es $C(4, 2)$?

Solución Una combinación de a, b, c, d, tomando dos a la vez es:

$$ab$$

Descartamos de la lista a ba porque en una combinación el orden no es importante. La lista de todas estas combinaciones (convénzase de esto) es:

$$ab, \quad ac, \quad ad, \quad bc, \quad bd, \quad cd$$

entonces:

$$C(4, 2) = 6$$



Podemos encontrar una fórmula para $C(n, r)$ observando que la única diferencia entre una permutación de tipo 2 (distinta, sin repeticiones) y una combinación radica en que las combinaciones hacen caso omiso del orden. Para determinar $C(n, r)$, sólo se necesita eliminar de la fórmula para $P(n, r)$ el número de permutaciones que son simples reordenamientos de un conjunto dado de r objetos. Esto se determina a partir de la fórmula para $P(n, r)$ calculando $P(r, r) = r!$. Entonces, si dividimos $P(n, r)$ entre $r!$, tendremos la fórmula para $C(n, r)$:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

↑ usando fórmula (1).

Así, hemos demostrado lo siguiente:

Teorema

Número de combinaciones de n objetos distintos, tomando r a la vez

El número de arreglos de n objetos utilizando $r \leq n$ de ellos, donde

1. los n objetos son distintos,
2. una vez utilizado un objeto no se puede repetir, y
3. el orden no es importante,

está dado por la fórmula

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \qquad \textbf{(2)}$$

Con base en la fórmula (2), descubrimos que la notación $C(n, r)$ y la notación $\binom{n}{r}$ para los coeficientes binomiales son, de hecho, la misma. Se utiliza el triángulo de Pascal (vea la sección 12.5) para encontrar el valor de $C(n, r)$. Sin embargo, debido que es más práctico y conveniente, utilizaremos en su lugar la fórmula (2).

EJEMPLO 9 Uso de la fórmula (2)

Usar la fórmula (2) para encontrar el valor de cada expresión.

a) $C(3, 1)$ b) $C(6, 3)$ c) $C(n, n)$ d) $C(n, 0)$ e) $C(52, 5)$

Solución

a) $C(3, 1) = \dfrac{3!}{(3-1)!\,1!} = \dfrac{3!}{2!\,1!} = \dfrac{3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot 1} = 3$

b) $C(6, 3) = \dfrac{6!}{(6-3)!\,3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{3! \cdot \cancel{3!}} = \dfrac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{6}} = 20$

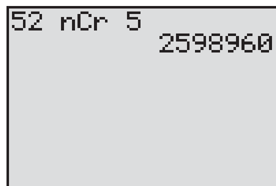
c) $C(n, n) = \dfrac{n!}{(n-n)!\,n!} = \dfrac{\cancel{n!}}{0!\,\cancel{n!}} = \dfrac{1}{1} = 1$

d) $C(n, 0) = \dfrac{n!}{(n-0)!\,0!} = \dfrac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,0!} = \dfrac{1}{1} = 1$



e) En la figura 7 se muestra la solución obtenida utilizando una calculadora gráfica TI-83: $C(52, 5) = 2{,}598{,}960$. ◀

Figura 7





TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 15.

EJEMPLO 10 **Formación de comités**

¿Cuántos comités distintos, integrados por 3 personas, se pueden formar a partir de un grupo de 7 personas?

Solución Las 7 personas son distintas. Sin embargo, es más importante la observación de que el orden de selección para un comité no es relevante. El problema pregunta por el número de combinaciones de 7 objetos, tomando 3 a la vez.

$$C(7,3) = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}3!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{6}} = 35$$

◀

EJEMPLO 11 **Formación de comités**

¿De cuántas maneras se puede formar un comité compuesto por 2 catedráticos y 3 alumnos, si existen 6 catedráticos y 10 alumnos elegibles para formar parte de él?

Solución El problema se divide en dos partes: El número de maneras en las que se podrían elegir los catedráticos, $C(6, 2)$, y el número de maneras en las que se pueden elegir los alumnos, $C(10, 3)$. Utilizando el principio de la multiplicación, el comité se puede formar de:

$$C(6,2) \cdot C(10,3) = \frac{6!}{4!\,2!} \cdot \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}2!} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}3!}$$

$$= \frac{30}{2} \cdot \frac{720}{6} = 1800 \text{ maneras}$$

◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 55.

Permutaciones que incluyen *n* objetos que no son distintos

 4 Comencemos con un ejemplo.

EJEMPLO 12 **Formando distintas palabras**

¿Cuántas palabras distintas (reales o imaginarias) se forman utilizando todas las letras de la palabra REGRANARE?

Solución Toda palabra formada tendrá 9 letras: 3 R, 2 A, 2 E, 1 N y 1 G. Para construir cada una de las palabras, debemos llenar 9 posiciones con las 9 letras.

$$\overline{1} \quad \overline{2} \quad \overline{3} \quad \overline{4} \quad \overline{5} \quad \overline{6} \quad \overline{7} \quad \overline{8} \quad \overline{9}$$

El proceso de formar una palabra se compone de cinco tareas:

Tarea 1: Elegir las posiciones de las 3 R's.
Tarea 2: Elegir las posiciones de las 2 A's.
Tarea 3: Elegir las posiciones de las 2 E's.
Tarea 4: Elegir la posición de 1 N.
Tarea 5: Elegir la posición de 1 G.

La tarea 1 se realiza de $C(9, 3)$ maneras. Entonces quedan 6 posiciones por llenar, por lo que la tarea 2 se realiza de $C(6, 2)$ maneras. Quedan 4 posiciones por llenar, por lo que la tarea 3 se realiza de $C(4, 2)$ maneras. Quedan 2 posiciones por llenar, por lo que la tarea 4 se realiza de $C(2, 1)$ maneras. La

última posición se podría llenar de $C(1, 1)$ manera. Utilizando el principio de la multiplicación, el número de palabras posibles que se forma es de:

$$C(9,3) \cdot C(6,2) \cdot C(4,2) \cdot C(2,1) \cdot C(1,1) = \frac{9!}{3! \cdot \cancel{6!}} \cdot \frac{\cancel{6!}}{2! \cdot \cancel{4!}} \cdot \frac{\cancel{4!}}{2! \cdot \cancel{2!}} \cdot \frac{\cancel{2!}}{1! \cdot \cancel{1!}} \cdot \frac{\cancel{1!}}{0! \cdot 1!}$$
$$= \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$$ ◀

La forma de la respuesta al ejemplo 12 sugiere un resultado general. Si cada una de las letras de REGRANARE fuera distinta, serían $P(9, 9) = 9!$ las posibles palabras. Pero éste es el numerador de la respuesta. La presencia de letras repetidas (3 R, 2 A y 2 E) produce el número de palabras diferentes, como lo ilustran los elementos del numerador. Por lo anterior, nos vemos conducidos a lo siguiente:

Teorema

Permutaciones que incluyen *n* objetos que no son distintos

El número de permutaciones de n en los que n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, . . . , y n_k son de un k-ésimo tipo, está dado por

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} \qquad \textbf{(3)}$$

donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

EJEMPLO 13 Ordenando banderas

¿Cuántos arreglos verticales diferentes existen para ocho banderas si 4 son blancas, 3 son azules, y 1 es roja?

Solución Buscamos el número de permutaciones de 8 objetos, de los que 4 son de una clase, 3 son de una segunda clase y 1 de una tercera clase. Utilizando la fórmula (3), encontramos que hay:

$$\frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3! \cdot 1!} = 280 \text{ órdenes diferentes}$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 57.

13.2 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas están dadas al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas entre paréntesis.*

1. $0! =$ __________; $1! =$ __________. (p. 943)

2. *Falso o verdadero:* $n! = \dfrac{(n+1)!}{n}$. (p. 943)

Conceptos y vocabulario

3. A(n) __________ es un arreglo ordenado de r objetos seleccionados de entre n objetos.

4. A(n) __________ es un arreglo de r objetos seleccionados de entre n objetos distintos, sin repetición y haciendo caso omiso del orden.

5. *Falso o verdadero:* en un problema de combinaciones, el orden no es importante.

6. *Falso o verdadero:* en algunos problemas de permutaciones, una vez utilizado un objeto, no se usa de nuevo.

Ejercicios

En los problemas 7-14, encuentre el valor de cada una de las permutaciones.

7. $P(6, 2)$ **8.** $P(7, 2)$ **9.** $P(4, 4)$ **10.** $P(8, 8)$

11. $P(7, 0)$ **12.** $P(9, 0)$ **13.** $P(8, 4)$ **14.** $P(8, 3)$

En los problemas 15-22, use la fórmula (2) para encontrar el valor de cada combinación.

15. $C(8, 2)$ **16.** $C(8, 6)$ **17.** $C(7, 4)$ **18.** $C(6, 2)$

19. $C(15, 15)$ **20.** $C(18, 1)$ **21.** $C(26, 13)$ **22.** $C(18, 9)$

23. Especifique todos los arreglos ordenados de 5 objetos a, b, c, d y e, seleccionando 3 a la vez sin repetición. ¿Cuánto es $P(5, 3)$?

24. Especifique todos los arreglos ordenados de 5 objetos a, b, c, d y e, seleccionando 2 a la vez sin repetición. ¿Cuánto es $P(5, 2)$?

25. Especifique todos los arreglos ordenados de cuatro objetos 1, 2, 3 y 4, seleccionando 3 a la vez sin repetición. ¿Cuánto es $P(4, 3)$?

26. Especifique todos los arreglos ordenados de seis objetos 1, 2, 3 4, 5 y 6, seleccionando 3 a la vez sin repetición. ¿Cuánto es $P(6,3)$?

27. Enumerar todas las combinaciones de 5 objetos, a, b, c, d y e tomando 3 a la vez. ¿Cuánto es $C(5, 3)$?

28. Enumerar todas las combinaciones de 5 objetos, a, b, c, d y e tomando 2 a la vez. ¿Cuánto es $C(5, 2)$?

29. Enumerar todas las combinaciones de cuatro objetos, 1, 2, 3 y 4 tomando 3 a la vez. ¿Cuánto es $C(4, 3)$?

30. Enumerar todas las combinaciones de seis objetos, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 tomando 3 a la vez. ¿Cuánto es $C(6, 3)$?

31. Camisas y corbatas Un señor tiene 5 camisas y 3 corbatas. ¿Cuántos arreglos de camisa y corbata diferentes puede vestir?

32. Blusas y faldas Una mujer tiene 3 blusas y 5 faldas. ¿Cuántos conjuntos diferentes podría vestir?

33. Elaboración de códigos ¿Cuántas claves de dos letras se pueden formar usando las letras A, B, C y D? Se permiten letras repetidas.

34. Elaboración de códigos ¿Cuántas claves de dos letras se forman usando las letras A, B, C, D y E? Se permiten letras repetidas.

35. Ordenando números ¿Cuántos números de tres dígitos se forman utilizando los dígitos 0 y 1? Se permiten dígitos repetidos.

36. Ordenando números ¿Cuántos números de tres dígitos se forman utilizando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9? Se permiten dígitos repetidos.

37. Formación de personas ¿De cuántas maneras se podrían formar 4 personas?

38. Apilando cajas ¿De cuántas maneras se pueden apilar 5 cajas distintas?

39. Formación de códigos ¿Cuántos códigos diferentes de tres letras hay si sólo se usan las letras A, B, C, D y E, y ninguna de ellas puede usarse más de una vez?

40. Formación de códigos ¿Cuántos códigos diferentes de cuatro letras hay si sólo se usan las letras A, B, C, D, E y F, y ninguna de ellas se puede usar más de una vez?

41. Acciones en la bolsa de valores El nombre de las empresas cuyas acciones se cotizan en la bolsa de valores de Nueva York (NYSE, por sus siglas en inglés) se representa por medio de 1, 2 o 3 letras (se permiten letras repetidas). ¿Cuál es el número máximo de compañías que pueden cotizar en la NYSE?

42. Acciones en el NASDAQ El nombre de las empresas cuyas acciones se cotizan en la bolsa de valores NASDAQ se representa por medio de 4 o 5 letras (se permiten letras repetidas). ¿Cuál es el número máximo de compañías que pueden cotizar en la NASDAQ?

43. Formación de comités ¿De cuántas maneras se podría establecer un comité integrado por 4 alumnos a partir de un grupo de 7 estudiantes?

44. Formación de comités ¿De cuántas maneras se puede establecer un comité integrado por 8 profesores a partir de un grupo de 8 catedráticos?

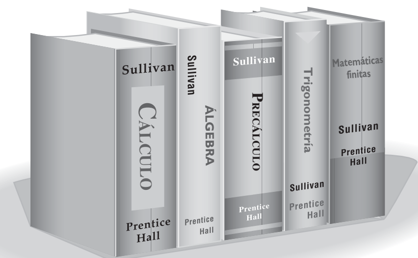
45. Respuestas posibles o un examen de falso o verdadero ¿Cuántos arreglos de respuestas habría en un examen de falso o verdadero con 10 preguntas?

46. Respuestas posibles o un examen de opción múltiple ¿Cuántos arreglos de respuestas habría en un examen de opción múltiple con 5 preguntas, cada una de las cuales con 4 respuestas posibles?

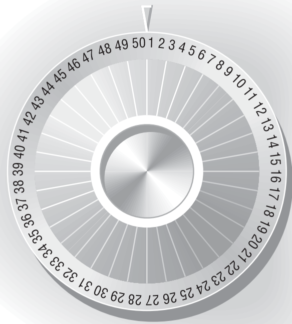
47. Números de cuatro dígitos ¿Cuántos números de cuatro dígitos se forman utilizando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, si el primer dígito no puede ser 0? Se permiten dígitos repetidos.

48. Números de cinco dígitos ¿Cuántos números de cinco dígitos se forman utilizando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, si el primer dígito no puede ser 0 o 1? Se permiten dígitos repetidos.

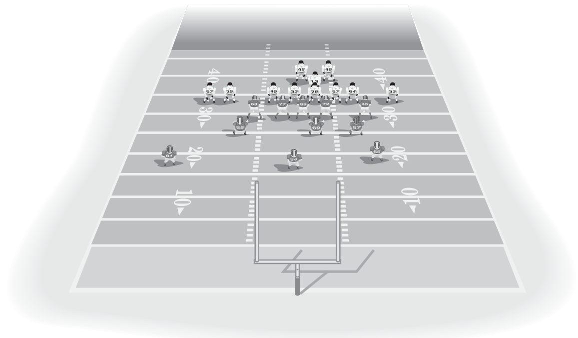
49. Ordenando libros Se van a ordenar 5 libros de matemáticas distintos sobre el escritorio de un estudiante. ¿Cuántos arreglos son posibles?



50. **Elaboración de números de matrícula** ¿Cuántos números de matrícula diferentes se podrían elaborar utilizando 2 letras, seguidas de 4 dígitos del 0 al 9, si:
    a) ¿Se permite repetir letras y dígitos?
    b) ¿Se permite repetir letras pero no repetir dígitos?
    c) ¿No se permite repetir letras ni dígitos?
51. **Cartera de acciones** Como planificador financiero, se le pide que seleccione una acción de cada uno de los siguientes grupos: 8 acciones DOW, 15 acciones NASDAQ y 4 acciones globales. ¿Cuántas carteras diferentes es posible formar?
52. **Candados de combinación** Un candado de combinación tiene 50 números. Para abrirlo, la perilla se posiciona en cierto número, luego se gira hacia la derecha hasta otro número y después hacia la izquierda hasta un tercer número. ¿Cuántas combinaciones diferentes tiene?



53. **Problema de cumpleaños** ¿Cuántas maneras pueden 2 personas tener distintos cumpleaños? Suponga que hay 365 días en todos los años.
54. **Problema de cumpleaños** ¿Cuántas maneras pueden 5 personas tener distintos cumpleaños? Suponga que hay 365 días en todos los años.
55. **Formación de un comité** Se va formar un comité de baile estudiantil, compuesto por 2 muchachos y 3 muchachas. Si para elegir a los miembros se va a seleccionar entre 4 muchachos y 8 muchachas, ¿cuántos comités distintos es posible formar?
56. **Formación de un comité** El comité de relaciones estudiantiles de una universidad se compone de 2 miembros administrativos, 3 catedráticos y 5 alumnos. Para integrarlo, son elegibles cuatro administrativos, 8 catedráticos y 20 alumnos. ¿Cuántos distintos comités es posible formar?
57. **Formación de palabras** ¿Cuántas palabras distintas (reales o imaginarias) de 9 letras se forman utilizando todas las letras de la palabra CINEMOSCO?
58. **Formación de palabras** ¿Cuántas palabras distintas (reales o imaginarias) de 11 letras se forman utilizando todas las letras de la palabra MATHEMATICS?
59. **Selección de objetos** Una urna contiene 7 pelotas blancas y 3 rojas. Se sacan 3 pelotas. ¿De cuántas maneras se pueden sacar 3 bolas de la 10 totales:
    a) Si 2 pelotas son blancas y una roja?
    b) Si las 3 pelotas son blancas?
    c) Si las 3 pelotas son rojas?
60. **Selección de objetos** Una urna contiene 15 pelotas rojas y 10 blancas. Se sacan cinco pelotas. ¿De cuántas maneras se podrían sacar 5 bolas de las 25 totales:
    a) Si las 5 pelotas son rojas?
    b) Si 3 pelotas son rojas y 2 blancas?
    c) Si por lo menos 4 pelotas son rojas?
61. **Comités del senado** El Senado estadounidense tiene 100 miembros. Suponga que se desea integrar a cada senador en exactamente 1 de 7 comités posibles. El primer comité tiene 22 miembros, el segundo tiene 13, el tercero tiene 10, el cuarto tiene 5, el quinto tiene 16, y el sexto y el séptimo tienen 17 cada uno. ¿De cuántas maneras se forman dichos comités?
62. **Equipos de fútbol americano** Un equipo defensivo se compone de 25 jugadores. De ellos, 10 son linieros, 10 son apoyadores y 5 son profundos. ¿Cuántos equipos distintos compuestos por 5 linieros, 3 apoyadores y 3 profundos se pueden formar?



63. **Béisbol** En la Liga Americana de Béisbol se utiliza un bateador designado. ¿Cuántos órdenes al bat es posible que utilice un entrenador? (En un equipo hay nueve jugadores regulares).
64. **Béisbol** En la Liga Nacional de Béisbol, el pitcher ocupa el noveno turno al bat. Siendo ése el caso, ¿cuántos órdenes al bat es posible que utilice un entrenador?
65. **Equipos de béisbol** Un equipo de béisbol tiene 15 miembros. Cuatro jugadores son pitcher y los 11 miembros restantes pueden jugar cualquier posición. ¿Cuántos equipos distintos de 9 jugadores se forman?
66. **Serie Mundial** La Serie Mundial, el campeón de la Liga Americana (A) y el campeón de la Liga Nacional (N) estadounidenses juegan hasta que alguno de ellos gana cuatro juegos. Denotando con letras la sucesión de ganadores (por ejemplo, *NAAAA* significa que el equipo de la Liga Nacional ganó el primer juego y el de la Americana ganó los siguientes cuatro), ¿cuántas sucesiones distintas es posible formar?
67. **Equipos de básquetbol** Un equipo de básquetbol tiene seis jugadores que juegan en la posición de guardia (2 de las 5 posiciones de inicio). ¿Cuántos equipos distintos es posible formar, suponiendo que ya están ocupadas las 3 posiciones restantes y no existe distinción entre guardia derecho y guardia izquierdo?

68. Equipos de básquetbol En un equipo de básquetbol con 12 jugadores, 2 sólo juegan de poste, 3 sólo juegan de guardia y los demás de delanteros (5 jugadores por equipo: 2 delanteros, 2 guardias y un poste). ¿Cuántos equipos distintos es posible formar, suponiendo que no existe distinción entre guardia derecho y guardia izquierdo, ni entre delantero izquierdo ni delantero derecho?

69. Elabore un problema, distinto a todos los que se encuentran en este libro, cuya solución requiera hacer uso del principio de la multiplicación. Entréguelo a un amigo para que lo resuelva y lo juzgue.

70. Elabore un problema, distinto a todos los que se encuentran en este libro, cuya solución requiera hacer uso de una permutación. Entréguelo a un amigo para que lo resuelva y lo juzgue.

71. Elabore un problema, distinto a todos los que se encuentran en este libro, cuya solución requiera hacer uso de una combinación. Entréguelo a un amigo para que lo resuelva y lo juzgue.

72. Expliquen la diferencia que existente entre una permutación y una combinación. Elabore un ejemplo que ilustre su explicación.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. 1; 1

2. Falso

13.3 Probabilidad

OBJETIVOS
1. Construir modelos de probabilidad
2. Calcular las probabilidades de resultados igualmente probables
3. Usar la regla de la adición para encontrar probabilidades
4. Utilizar la regla del complemento para encontrar probabilidades

La **probabilidad** es el área de las matemáticas que se encarga de tratar con experimentos que producen resultados aleatorios, aunque admiten cierta regularidad. Dichos experimentos no siempre generan el mismo resultado o producto, por lo que se pronostica el resultado de cualquier observación. Sin embargo, los resultados de un experimento desarrollado a largo plazo producen patrones regulares que nos permiten hacer pronósticos de notable exactitud.

EJEMPLO 1 Lanzar una moneda

Al lanzar una moneda, sabemos que el resultado será una cara o una cruz. En un lanzamiento específico, no podremos pronosticar lo que ocurrirá, pero si lanzamos la moneda muchas veces observaremos que el número de veces que cae cara es aproximadamente igual al número de veces que cae cruz. Por lo tanto, parece razonable asignar una probabilidad de $\frac{1}{2}$ a que cae cara y una probabilidad de $\frac{1}{2}$ a que cae cruz. ◀

Modelos de probabilidad

1 El análisis del ejemplo 1 constituye la elaboración de un **modelo de probabilidad** para el experimento de lanzar una moneda. Un modelo de probabilidad tiene dos componentes: un espacio muestral y una asignación de probabilidades. Un **espacio muestral** S es un conjunto cuyos elementos representan todas las posibilidades de que se presente un resultado del experimento. Los elementos de S se denominan **resultados**. A cada resultado se le asigna un número, denominado **probabilidad**, que tiene dos propiedades:

1. La probabilidad asignada a cada resultado nunca es negativa.
2. La suma de todas las probabilidades es igual a 1.

Si un modelo de probabilidad tiene el espacio muestral:

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

donde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son los resultados posibles y si $P(e_1), P(e_2), \ldots, P(e_n)$ denotan las probabilidades remotas de dichos resultados, entonces:

$$P(e_1) \geq 0, P(e_2) \geq 0, \ldots, P(e_n) \geq 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(e_i) = P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1 \quad \textbf{(2)}$$

EJEMPLO 2 Determinar modelos de probabilidad

En un paquete de lunetas, los dulces están pintados de rojo, verde, azul, café, amarillo y anaranjado. Supongamos que se saca un dulce del paquete y se registra el color. El espacio muestral del experimento es {rojo, verde, azul, café, amarillo, anaranjado}. Determine cuáles de los siguientes son modelos de probabilidad.

a)

Resultado	**Probabilidad**
{rojo}	0.3
{verde}	0.15
{azul}	0
{café}	0.15
{amarillo}	0.2
{anaranjado}	0.2

b)

Resultado	**Probabilidad**
{rojo}	0.1
{verde}	0.1
{azul}	0.1
{café}	0.4
{amarillo}	0.2
{anaranjado}	0.3

c)

Resultado	**Probabilidad**
{rojo}	0.3
{verde}	−0.3
{azul}	0.2
{café}	0.4
{amarillo}	0.2
{anaranjado}	0.2

d)

Resultado	**Probabilidad**
{rojo}	0
{verde}	0
{azul}	0
{café}	0
{amarillo}	1
{anaranjado}	0

Solución

a) Éste es un modelo de probabilidad porque todos los resultados tienen probabilidades no negativas y su suma es igual a 1.

b) Éste no es un modelo de probabilidad porque la suma de las probabilidades no es igual a 1.

c) Éste no es un modelo de probabilidad porque P(verde) es menor que 0. Recuerde que todas las probabilidades deben ser no negativas.

d) Éste es un modelo de probabilidad porque todos los resultados tienen probabilidades no negativas, y su suma es igual a 1. Observe que P(amarillo = 1, lo que significa que este resultado ocurrirá con 100% de certidumbre cada vez que se repita el experimento. Esto quiere decir que la bolsa de lunetas sólo tiene dulces amarillos. ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 7.

Veamos un ejemplo de construcción de un modelo de probabilidad.

EJEMPLO 3 Construcción de un modelo de probabilidad

Un experimento consiste en tirar un dado.* Construya un modelo de probabilidad para este experimento.

Solución Un espacio muestral S se compone de todas las posibilidades que se podrían presentar. Puesto que tirar un dado tendrá como resultado que una de las seis caras quede arriba, el espacio muestral S se compone de:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ya que se trata de un dado sin trampa, ninguna de sus caras tiene más posibilidades que las demás. En consecuencia, nuestra asignación de probabilidades es:

$$P(1) = \frac{1}{6} \qquad P(2) = \frac{1}{6}$$
$$P(3) = \frac{1}{6} \qquad P(4) = \frac{1}{6}$$
$$P(5) = \frac{1}{6} \qquad P(6) = \frac{1}{6}$$

◀

Supongamos ahora que un dado está cargado (con trampa), de manera que la asignación de probabilidades es

$$P(1) = 0, \quad P(2) = 0, \quad P(3) = \frac{1}{3}, \quad P(4) = \frac{2}{3}, \quad P(5) = 0, \quad P(6) = 0$$

Se haría esta asignación si el dado estuviera cargado de manera que sólo cayera 3 o 4, y que el 4 tuviera el doble de posibilidades que 3. Esta asignación es congruente con la definición, ya que no es negativa, y la suma de todas las probabilidades es igual a 1.

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 23.

EJEMPLO 4 Construcción de un modelo de probabilidad

Un experimento consiste en lanzar una moneda. La moneda está cargada de tal manera que la cara (H) tiene tres veces más posibilidades de caer que la cruz (T). Construya un modelo de probabilidad para este experimento.

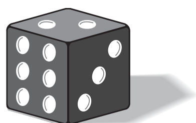
Solución El espacio muestral es $S = \{H, T\}$. Si x denota la probabilidad de que caiga cruz, entonces:

$$P(T) = x \quad \text{y} \quad P(H) = 3x$$

Puesto que la suma de las probabilidades de los resultados posibles debe ser igual a 1, tenemos:

$$P(T) + P(H) = x + 3x = 1$$
$$4x = 1$$
$$x = \frac{1}{4}$$

Figura 8



*Un dado es un cubo en el que cada una de sus caras tiene 1, 2, 3, 4, 5 o 6 puntos. Vea la figura 8.

Y asignamos las probabilidades:

$$P(\text{T}) = \frac{1}{4} \qquad P(\text{H}) = \frac{3}{4}$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 27.

Al trabajar con modelos de probabilidad, se utiliza el término **evento** para describir un conjunto de posibles resultados del experimento. Un evento E es un subconjunto del espacio muestral S. La **probabilidad de un evento** E, $E \neq \emptyset$, denotado mediante $P(E)$, se define como la suma de las probabilidades de los resultados en E. También se considera que la probabilidad de un evento E es la posibilidad de que ocurra dicho evento. Si $E = \emptyset$, entonces $P(E) = 0$; si $E = S$, entonces $P(E) = P(S) = 1$.

Resultados igualmente probables

 2 Cuando se asigna la misma probabilidad cada uno de los resultados del espacio muestral, se dice que el experimento tiene **resultados igualmente probables.**

Teorema

Probabilidad para resultados igualmente probables

Si un experimento tiene n resultados igualmente probables y m es el número de maneras en las que puede ocurrir un evento E, entonces la probabilidad de E es:

$$P(E) = \frac{\text{Número de maneras en las que ocurre } E}{\text{Número de todas posibilidades lógicas}} = \frac{m}{n} \quad \textbf{(3)}$$

Si S es el espacio muestral del experimento, entonces:

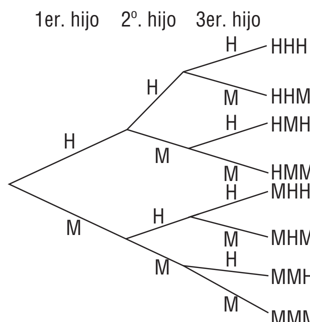
$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \quad \textbf{(4)}$$

EJEMPLO 5 Calcular las probabilidades de eventos que incluyen resultados igualmente probables

Calcular la probabilidad de que en una familia con tres niños 2 sean hombres (H) y 1 mujer (M). Suponga resultados igualmente probables.

Solución Comenzamos por construir un diagrama de árbol que nos ayude a enumerar los posibles resultados del experimento. Vea la figura 9, donde se utilizan H para los niños y M para las niñas. El espacio muestral S de este experimento es:

Figura 9



$$S = \{\text{BBB, BBG, BGB, BGG, GBB, GBG, GGB, GGG}\}$$

entonces $n\{S\} = 8$.

Queremos conocer la probabilidad del evento E: "dos sean hombres y 1 mujer". Observando la figura 9, concluimos que $E = \{HHG, HMH, MHH\}$, por lo que $n(E) = 3$. Puesto que los resultados son igualmente posibles, la probabilidad de E es:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$ ◀

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37.

Probabilidades compuestas

Hasta aquí hemos calculado las probabilidades de eventos sencillos. Ahora calcularemos las probabilidades de eventos múltiples, llamadas **probabilidades compuestas**.

EJEMPLO 6 Cálculo de probabilidades compuestas

Retomando el experimento de tirar un dado limpio. Sean E, que representa el evento "tirar un número impar", y F, que representa al evento "tirar un 1 o un 2".

a) Escriba el evento E y el evento F.
b) Escriba el evento E o el evento F.
c) Calcule $P(E)$ y $P(F)$.
d) Calcule $P(E \cap F)$.
e) Calcule $P(E \cup F)$.

Solución El espacio muestral S del experimento es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, por lo que $n(S) = 6$. Cómo se trata de un dado limpio, los resultados son igualmente probables. El evento E: "tirar un número impar", es $\{1, 3, 5\}$, y el evento F: "tirar un 1 o un 2", es $\{1, 2\}$, por lo que $n(E) = 3$ y $n(F) = 2$.

a) En probabilidad, la conjunción *y* implica la intersección de dos eventos. El evento E *y* F es:

$$E \cap F = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2\} = \{1\} \qquad n(E \cap F) = 1$$

b) En probabilidad, disyunción *o* implica la unión de dos eventos. El evento E o F es:

$$E \cup F = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 5\} \qquad n(E \cup F) = 4$$

c) Usando la fórmula (4).

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

d) $P(E \cap F) = \dfrac{n(E \cap F)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$

e) $P(E \cup F) = \dfrac{n(E \cup F)}{n(S)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ ◀



3 La **regla de la adición** sirve para encontrar la probabilidad de la unión de dos eventos.

Teorema

Regla de la adición

Para dos eventos cualquiera E y F,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \qquad \textbf{(5)}$$

Por ejemplo, podemos usar la regla de la adición para encontrar $P(E \cup F)$ del ejemplo 6e). Entonces:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

al igual que antes.

EJEMPLO 7 Calcular las probabilidades de eventos compuestos utilizando la regla de la adición

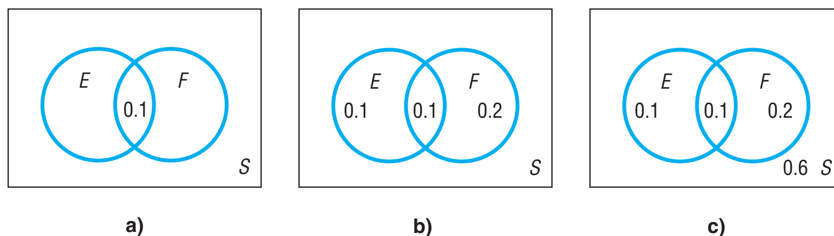
Si $P(E) = 0.2, P(F) = 0.3$ y $P(E \cap F) = 0.1$, encontrar la probabilidad de E o F, es decir, encontrar $P(E \cup F)$.

Solución Utilizamos la regla de la adición, fórmula (5).

$$\text{Probabilidad de } E \text{ o } F = P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$
$$= 0.2 + 0.3 - 0.1 = 0.4$$

A veces se utiliza un diagrama de Venn para obtener probabilidades. Para construir un diagrama de Venn que represente la información del ejemplo 7, trazamos dos conjuntos E y F. Comenzamos por el hecho de que $P(E \cap F) = 0.1$. Vea la figura 10*a*). Entonces, puesto que $P(E) = 0.2$ y $P(F) = 0.3$, completamos E con $0.2 - 0.1 = 0.1$ y F con $0.3 - 0.1 = 0.2$. Vea la figura 10*b*). Ya que $P(S) = 1$, completamos el diagrama incorporando $1 - (0.1 + 0.1 + 0.2) = 0.6$. Vea la figura 10*c*). Ahora resulta fácil observar, por ejemplo, que la probabilidad de F, pero no de E, es 0.2. También, la probabilidad para ni E ni F es 0.6.

Figura 10



 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 45.

Si los eventos E y F son ajenos, de manera que $E \cap F = \emptyset$, entonces decimos que son **mutuamente excluyentes**. En este caso, $P(E \cap F) = 0$, y la regla de la adición, la siguiente forma:

Teorema

Eventos mutuamente excluyentes

Si E y F son eventos **mutuamente excluyentes**, entonces:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) \quad \textbf{(6)}$$

EJEMPLO 8 Calcular las probabilidades compuestas de eventos mutuamente excluyentes

Si $P(E) = 0.4$ y $P(F) = 0.25$, y E y F son mutuamente excluyentes, encuentre $P(E \cup F)$.

Solución Puesto que E y F son mutuamente excluyentes, utilizamos la fórmula (6).

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) = 0.4 + 0.25 = 0.65$$

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

Complementos

4 Recordemos que si A es un conjunto, su complemento, que se denota $\overline{A}$, es el conjunto compuesto por los elementos que pertenecen al conjunto universal U que no se encuentran en A. Al complemento de un evento lo definimos de manera similar.

Complemento de un evento

Sean S, que denota el espacio muestral de un experimento, y E, que denota un evento. El **complemento de E**, denotado $\overline{E}$, es el conjunto de todos los resultados en el espacio muestral S, que no son resultado del evento E.

El complemento de un evento E, es decir, $\overline{E}$, en un espacio muestral S tiene las dos propiedades siguientes:

$$E \cap \overline{E} = \varnothing \qquad E \cup \overline{E} = S$$

Puesto que E y $\overline{E}$ son mutuamente excluyentes, a partir de la fórmula (6) concluimos que

$$P(E \cup \overline{E}) = P(S) = 1 \qquad P(E) + P(\overline{E}) = 1 \qquad P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Así, tenemos el siguiente resultado:

Teorema

Calcular las probabilidades de eventos complementarios

Si E representa un evento cualquiera y $\overline{E}$ representa al complemento de E, entonces:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) \qquad \textbf{(7)}$$

EJEMPLO 9 **Calcular probabilidades usando complementos**

En el noticiero local, el reportero del clima mencionó un 40% de probabilidades de lluvia para mañana. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un día sin lluvia?

Solución El complemento del evento “lluvia” es “sin lluvia ”.

$$P(\text{sin lluvia}) = 1 - P(\text{lluvia}) = 1 - 0.4 = 0.6$$

Existe una posibilidad del 60% de que mañana sea un día sin lluvia. ◄

 TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 51.

EJEMPLO 10 **Problema de cumpleaños**

¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 10 personas, por lo menos dos tengan la misma fecha de cumpleaños? Suponga que hay 365 días en todos los años.

Solución Suponemos que la probabilidad de que una persona nazca en un día o en otro es la misma, entonces tenemos resultados igualmente probables.

Primero determinamos el número de resultados en el espacio muestral S. Existen 365 posibilidades de fecha de cumpleaños para cada persona. Puesto que el grupo se compone de 10 personas, existen 365^{10} posibilidades de fecha de cumpleaños. [Para una persona del grupo, hay 365 días en las que puede caer su cumpleaños; para dos personas, hay (365) (365) $= 365^2$ pares de días; y, en general, utilizando el principio de la multiplicación, para n personas hay 365^n posibilidades]. Entonces

$$n(S) = 365^{10}$$

Queremos conocer la probabilidad del evento E: "por lo menos dos tengan la misma fecha de cumpleaños". Resulta complicado contar los elementos que conforman este conjunto, es mucho más fácil contar los elementos del evento complementario $\overline{E}$: "no hay dos personas con la misma fecha de cumpleaños".

Encontramos $n(\overline{E})$ de la siguiente manera: se selecciona una persona al azar. Existen 365 posibilidades para su fecha de cumpleaños. Se selecciona una segunda persona. Si no hay dos personas con la misma fecha de cumpleaños, hay 364 posibilidades para su fecha de cumpleaños. Se selecciona una tercera persona. Quedan 363 posibilidades para su fecha de cumpleaños. De esta manera, llegamos finalmente a la décima persona. Quedan 356 posibilidades para su fecha de cumpleaños. Mediante el principio de la multiplicación, el número total de posibilidades es:

$$n(\overline{E}) = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 356$$

Por lo tanto, la probabilidad del evento $\overline{E}$ es:

$$P(\overline{E}) = \frac{n(\overline{E})}{n(S)} \approx \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 356}{365^{10}} \approx 0.883$$

Entonces, la probabilidad de que en un grupo de 10 personas, por lo menos dos tengan la misma fecha de cumpleaños es

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) \approx 1 - 0.883 = 0.117$$ ◄

Es posible resolver este problema de cumpleaños para grupos de cualquier tamaño. En la siguiente tabla se encuentran las probabilidades de que dos o más personas tengan la misma fecha de cumpleaños en grupo de distintos tamaños. Observe que la probabilidad es mayor que $\frac{1}{2}$ para cualquier grupo de 23 personas o más.

	Número de personas															
	5	**10**	**15**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**
Probabilidad de de que dos o más tengan la misma fecha de cumpleaños	0.027	0.117	0.253	0.411	0.444	0.476	0.507	0.538	0.569	0.706	0.891	0.970	0.994	0.99916	0.99991	0.99999

 **TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 69.**

ASPECTO HISTÓRICO



Blas Pascal (1623–1662)

La teoría de conjuntos, el conteo y la probabilidad tomaron por primera vez la forma de una teoría sistemática un intercambio epistolar efectuado durante 1654 entre Pierre de Fermat (1601-1665) y Blas Pascal (1623-1662). Ellos analizaron el problema de cómo dividir las apuestas en una partida interrumpida antes de terminar, conociendo cuántos puntos le faltaban a cada jugador para ganar. Fermat resolvió el problema enumerando todas las posibilidades y contando las favorables, mientras que Pascal utilizó el triángulo que lleva su nombre. Como se menciona en el texto, los números del triángulo de Pascal son equivalentes a $C(n, r)$. Reconocer el papel que $C(n, r)$ desempeña en el conteo es el fundamento de todos los desarrollos subsiguientes.

El primer libro de probabilidad, obra de Christiaan Huygens (1629-1695), apareció en 1657. En él, se explora la noción de expectativa matemática. Ésta permite calcular las pérdidas o ganancias que puede esperar un apostador, conociendo las probabilidades involucradas en el juego (vea los siguientes problemas históricos).

A pesar de que Girolamo Cardano (1501-1576) escribió un tratado sobre la probabilidad, éste no se publicó sino hasta 1663, en la recopilación de los trabajos de Cardano, lo que fue demasiado tarde para influir de alguna manera en el desarrollo de la teoría.

En 1713, la obra *Ars Conjectandi* de Jakob Bernoulli (1654-1705), publicada de manera póstuma, dio a esta teoría la forma que conservaría hasta 1900. Recientemente, el análisis combinatorio (conteo) y la probabilidad han experimentado un rápido desarrollo, debido al uso de las computadoras.

Un último comentario acerca de la notación. Las notaciones $C(n, r)$ y $P(n, r)$ son variantes de una forma de notación desarrollada en Inglaterra después de 1830. La notación $\binom{n}{r}$ para $C(n, r)$ se debe a Leonhard Euler (1707-1783), pero actualmente está perdiendo terreno, porque no cuenta con simbolismos claramente relacionados del mismo tipo para las permutaciones. Los símbolos $\cup$ y $\cap$ para las operaciones de conjuntos, fueron presentados por Giuseppe Peano (1858-1932) en 1888, aunque en un contexto ligeramente distinto. La inclusión del símbolo $\subset$ se debe a E. Schroeder (1841-1902), alrededor de 1890. El tratamiento de la teoría de conjuntos en este texto se debe a George Boole (1815-1864), quien escribió $A + B$ para $A \cup B$ y AB para $A \cap B$ (las personas que se dedican a la estadística siguen usando AB para $A \cap B$).

Problemas históricos

1. **El problema analizado por Fermat y Pascal** Un juego entre dos jugadores igualmente hábiles, A y B, se ve interrumpido cuando A necesita 2 puntos y B necesita 3 puntos para ganar. ¿En qué proporción se deben dividir las apuestas?
   a) ***Solución de Fermat*** Enumerar todos los posibles resultados que se pueden presentar como consecuencia de cuatro manos más. Entonces, las probabilidades de que A gane y de que B gane determinan cómo se deben dividir las apuestas.
   b) ***Solución de Pascal*** Usar combinaciones para determinar el número de maneras en las que, en cuatro manos, se podrían presentar los 2 puntos que A necesita para ganar. Después, usar combinaciones para determinar el número de maneras en las que, se pueden presentar los 3 puntos que B necesita para ganar. Esto es más difícil de lo que parece, puesto que A puede ganar con 2 puntos en 2, 3 o 4 manos. Calcule las probabilidades y compare su resultado con el que se obtiene en el inciso *a*).

2. **Expectativa matemática de Huygen** En un juego con n resultados posibles con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, suponga que las ganancias *netas* son $w_1, w_2, \ldots, w_n$, respectivamente. Entonces, la expectativa matemática es:

$$E = p_1w_1 + p_2w_2 + \cdots + p_nw_n$$

   El número E representa la pérdida o ganancia por juego a largo plazo. Los siguientes problemas son una modificación del de Huygens.
   a) Lanzamiento de un dado limpio. Un jugador gana \$3 si tira un 6 y \$6 si tira un 5. ¿De cuánto es su expectativa? [**Sugerencia:** $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0$]
   b) Un jugador participa en el mismo juego descrito en el inciso *a*), pero ahora debe pagar \$1 por jugar. Esto significa que $w_5 = \$5$, $w_6 = \$2$, y $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = -\$1$. ¿De cuánto es la expectativa?

13.3 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Cuando se asigna la misma probabilidad a cada uno de los resultados de un espacio muestral se dice que el experimento tiene resultados __________ __________.
2. El _________ de un evento E es el conjunto de todos los resultados del espacio muestral S que no son resultados del evento E.
3. *Falso o verdadero*: la probabilidad de un evento nunca podría ser igual a 0.
4. *Falso o verdadero*: en un modelo de probabilidad, la suma de todas las probabilidades es 1.

Ejercicios

5. En un modelo de probabilidad, ¿cuál de los siguientes números será la probabilidad de un resultado:

$$0, \quad 0.01, \quad 0.35, \quad -0.4, \quad 1, \quad 1.4?$$

6. En un modelo de probabilidad, ¿cuál de los siguientes números será la probabilidad de un resultado:

$$1.5, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad 0, \quad -\frac{1}{4}?$$



7. Determine si lo siguiente es un modelo de probabilidad.

Resultado	Probabilidad
{1}	0.2
{2}	0.3
{3}	0.1
{4}	0.4

8. Determine si lo siguiente es un modelo de probabilidad.

Resultado	Probabilidad
{Jim}	0.4
{Bob}	0.3
{Faye}	0.1
{Patricia}	0.2

9. Determine si lo siguiente es un modelo de probabilidad.

Resultado	Probabilidad
{Linda}	0.3
{Jean}	0.2
{Grant}	0.1
{Ron}	0.3

10. Determine si lo siguiente es un modelo de probabilidad.

Resultado	Probabilidad
{Lanny}	0.3
{Joanne}	0.2
{Nelson}	0.1
{Rich}	0.5
{Judy}	−0.1

En los problemas 11-16, elabore un modelo de probabilidad para cada experimento.

11. Lanzar una moneda dos veces.

12. Lanzar dos monedas una vez.

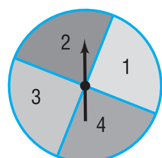
13. Lanzar dos monedas y luego un dado.

14. Lanzar una moneda, un dado y luego una moneda.

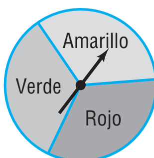
15. Lanzar tres monedas una vez.

16. Lanzar una moneda tres veces.

En los problemas 17-22, utilice las siguientes ruletas con el fin de elaborar un modelo de probabilidad para cada experimento.



Ruleta I



Ruleta II



Ruleta III

17. Gire la ruleta I y después la II. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2 o un 4, seguido de rojo?

18. Gire la ruleta III y después la II. ¿Cuál es la probabilidad de obtener Adelante, seguido de amarillo?

19. Gire la ruleta I, después la II y luego la III. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1, seguido de rojo o verde, seguido de Atrás?

20. Gire la ruleta II, después la I y luego la III. ¿Cuál es la probabilidad de obtener amarillo, seguido de un 2 o un 4, seguido de Adelante?

21. Gire la ruleta I dos veces y después la II. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2, seguido de un 2 o un 4, seguido de rojo o verde?

22. Gire la ruleta II, y luego la I dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener Adelante, seguido de un 1 o un 3, seguido de un 2 o un 4?

En los problemas 23-26, considere el experimento de lanzar dos veces una moneda. En la siguiente tabla se enumeran seis asignaciones posibles de las probabilidades de este experimento (K y Q denotan cara y cruz, respectivamente). Utilizando la tabla, responda a las siguientes preguntas.

	Espacio muestral			
Asignaciones	**HH**	**HT**	**TH**	**TT**
A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
B	0	0	0	1
C	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$
D	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
E	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
F	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

23. ¿Cuáles de las asignaciones de probabilidad son congruentes con la definición de un modelo de probabilidad?

24. ¿Cuál de las asignaciones de probabilidad se debe usar, si se sabe que la moneda está limpia (sin trampa)?

25. ¿Cuál de las asignaciones de probabilidad se debe usar, si se sabe que la moneda siempre cae en cruz?

26. ¿Cuál de las asignaciones de probabilidad se debe usar, si cruz tiene el doble de posibilidades que cara?

27. **Asignación de probabilidades** Una moneda se carga de tal manera que es cuatro veces más probable que caiga cara que cruz. ¿Qué probabilidad se debe asignar a cara? ¿Y a cruz?
28. **Asignación de probabilidades** Una moneda se carga de tal manera que es dos veces más probable que caiga cruz que cara. ¿Qué probabilidad se debe asignar a cara? ¿Y a cruz?
29. **Asignación de probabilidades** Un todo se carga de tal manera que es dos veces más probable que caiga en un número impar que en número par. ¿Qué probabilidad se debe asignar a cada cara?
30. **Asignación de probabilidades** Un dado se carga de tal manera que no pueda caer en seis. Las demás caras tienen la misma probabilidad. ¿Qué probabilidad se debe asignar a cada cara?

En los problemas 31-34, sea el espacio muestral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Suponga que los resultados son igualmente probables.*

31. Calcule la probabilidad del evento $E = \{1, 2, 3\}$.
32. Calcule la probabilidad del evento $F = \{3,5, 9,10\}$.
33. Calcule la probabilidad del evento E: "Un número par".
34. Calcule la probabilidad del evento F: "Un número impar".

Para los problemas 35-36, una urna contiene 5 canicas blancas, 10 canicas verdes, 8 canicas amarillas y 7 canicas negras.

35. Si se saca una canica, determine la probabilidad de que sea blanca.
36. Si se saca una canica, determine la probabilidad de que sea negra.

En los problemas 37-40, suponga que hay resultados igualmente posibles.

37. Determine la probabilidad de tener 3 niños en una familia con 3 hijos.
38. Determine la probabilidad de tener 3 niñas en una familia con 3 hijos.
39. Determine la probabilidad de tener 1 niña y 3 niños en una familia con 4 hijos.
40. Determine la probabilidad de tener 2 niñas y 2 niños en una familia con 4 hijos.

En los problemas 41-44, se tiran dos dados sin cargar.

41. Determine la probabilidad de que la suma de los dos dados sea 7.
42. Determine la probabilidad de que la suma de los dos dados sea 11.
43. Determine la probabilidad de que la suma de los dos dados sea 3.
44. Determine la probabilidad de que la suma de los dos dados sea 12.

En los problemas 45-48, encuentre la probabilidad del evento indicado, si $P(A) = 0.25$ *y* $P(B) = 0.45$.

45. $P(A \cup B)$ si $P(A \cap B) = 0.15$
46. $P(A \cap B)$ si $P(A \cup B) = 0.6$
47. $P(A \cup B)$ si A, B son mutuamente excluyentes
48. $P(A \cap B)$ si A, B son mutuamente excluyentes
49. Si $P(A) = 0.60$, $P(A \cup B) = 0.85$, y $P(A \cap B) = 0.05$, encuentre $P(B)$.
50. Si $P(B) = 0.30$, $P(A \cup B) = 0.65$, y $P(A \cap B) = 0.15$, encuentre $P(A)$.
51. De acuerdo con la oficina federal de investigaciones estadounidense (FBI, por sus siglas en inglés), en 2002 hubo 26.5% de probabilidades de robo de automóvil. Si se selecciona al azar una víctima, ¿cuál es la probabilidad de que no fuese víctima de robo de su vehículo?
52. De acuerdo con la Oficina Federal de Investigaciones estadounidense (FBI, por sus siglas en inglés), en 2002 hubo 3.9% de probabilidades de robo relacionado con una bicicleta. Si se selecciona al azar una víctima, ¿cuál es la probabilidad de que no fuese víctima de robo de su bicicleta?
53. En Chicago hay 30% de probabilidades de que el Memorial Day tenga una temperatura alta, que ronda los 21ºC. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo Memorial Day no tenga una temperatura alta cercana a los 21ºC en Chicago?
54. En Chicago hay 4% de probabilidades de que el Memorial Day tenga una temperatura baja, cercana a los 0ºC. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo Memorial Day no tenga una temperatura baja, cercana a los 21ºC en Chicago?

En los problemas 55-58, se selecciona al azar una pelota de golf del recipiente. Si el recipiente tiene 9 pelotas blancas, 8 verdes y 3 anaranjadas, encuentre la probabilidad de cada evento.

55. La pelota de golf es blanca o verde.
56. La pelota de golf es blanca o anaranjada.
57. La pelota de golf no es blanca.
58. La pelota de golf no es verde.
59. En la televisión hay un juego en el que se ponen en una bolsa 3 fichas de error y 5 números. Digamos que los números en la bolsa son 0, 1, 3, 6 y 9. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha de error o el número 1?
60. Otro juego televisivo requiere que el concursante gire una rueda con los números 5, 10, 15, 20, . . . , 100. ¿Cuál es la probabilidad de que el concursante obtenga 100 o 30?

Los problemas 61-64 se basan en una encuesta de ingresos anuales aplicada a 100 familias. En la siguiente tabla se muestran los datos.

Ingresos	$0–9999	$10,000–19,999	$20,000–29,999	$30,000–39,999	$40,000 o más
Número de integrantes	5	35	30	20	10

61. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga ingresos anuales de $30,000 o más?

62. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga ingresos anuales de entre $10,000 y 29,999, inclusive?

63. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga ingresos anuales menores que $20,000?

64. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga ingresos anuales de $20,000 o más?

65. Encuestas Tras una encuesta sobre el número de televisores por casa, se construyó la siguiente tabla de probabilidad:

Número de televisores	0	1	2	3	4 o más
Probabilidad	0.05	0.24	0.33	0.21	0.17

Encuentre la probabilidad de que una casa tenga:

a) 1 o 2 televisores
b) 1 o más televisores
c) 3 o menos televisores
d) 3 o más televisores
e) Menos de 2 televisores
f) Menos de 1 televisor
g) 1,2 o 3 televisores
h) 2 o más televisores

66. Filas en las cajas Por medio de la observación, se ha determinado que la probabilidad para un número dado de personas esperando en la fila de las "cajas rápidas" de las tiendas de autoservicio es:

Número esperando en la fila	0	1	2	3	4 o más
Probabilidad	0.10	0.15	0.20	0.24	0.31

Encuentre la probabilidad de que haya:

a) Cuando mucho, 2 personas en la fila
b) Por lo menos, 2 personas en la fila
c) Por lo menos, 1 persona en la fila

67. En una clase de álgebra y trigonometría hay 18 alumnos de primer año y 15 de segundo. De los 18 de primero, 10 son hombres; de los 15 de segundo, 8 son hombres. Encuentre la probabilidad de que un estudiante elegido al azar sea:

a) De primero o mujer
b) De segundo u hombre

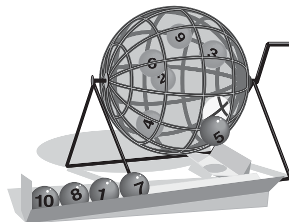
68. El cuerpo docente del Departamento de Matemáticas de la Joliet Junior College se compone de 4 mujeres y 3 hombres. De todos ellos, 2 mujeres y 3 hombres tienen menos de 40 años. Encuentre la probabilidad de que un integrante del cuerpo docente elegido al azar sea:

a) Mujer o menor de 40 años
b) Hombre o mayor de 40 años

69. Problema de cumpleaños ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 12 personas, por lo menos 2 tengan la misma fecha de cumpleaños? Suponga que hay 365 días en todos los años.

70. Problema de cumpleaños ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 35 personas, por lo menos 2 tengan la misma fecha de cumpleaños? Suponga que hay 365 días en todos los años.

71. Ganar la lotería En cierta lotería, hay 10 bolas, numeradas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. De ellas, se sacan cinco en orden. Si selecciona cinco números que concuerden con las que se sacan, en el orden correcto, gana $1,000,000. ¿Cuál es la probabilidad de ganarse ese premio?



Repaso del capítulo

Conceptos para recordar

Conjunto (p. 984)		Colección bien definida de objetos distintos, llamados elementos.
Conjunto nulo (p. 984)	$\varnothing$	Conjunto que carece de elementos.
Igualdad (p. 984)	$A = B$	A y B tienen los mismos elementos.
Subconjunto (p. 984)	$A \subseteq B$	Todo elemento de A también es elemento de B.
Intersección (p. 985)	$A \cap B$	Conjunto compuesto por elementos que pertenecen tanto a A como a B
Unión (p. 985)	$A \cup B$	Conjunto compuesto por elementos que pertenecen a A o B o a ambos
Conjunto universal (p. 985)	U	Conjunto formado por todos los elementos que deseamos tomar en cuenta.
Complemento (p. 985)	$\overline{A}$	Conjunto compuesto por los elementos pertenecientes al conjunto universal que no se encuentran en A.
Conjunto finito (p. 986)		El número de elementos en el conjunto es un entero no negativo.
Conjunto infinito (p. 986)		Un conjunto que no es finito

Fórmula de conteo (p. 987)	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
Principio de la adición (p. 987)	Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
Principio de la multiplicación (p. 991)	Si una tarea se compone de una sucesión de elecciones en las que hay p opciones para la primera elección, q opciones para la segunda elección, r opciones para la tercera elección y así sucesivamente; entonces la tarea de tomar esas elecciones se puede hacer de $p \cdot q \cdot \ldots$ maneras distintas.
Permutación (p. 992)	Es un arreglo ordenado de r objetos seleccionados de entre n objetos.
Permutación: Distinta, con repetición (p. 993)	n^r Los n objetos son distintos (diferentes), y se permite la repetición al seleccionar r de ellos.
Permutación: Distinta, sin repetición (p. 994)	$P(n, r) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot [n - (r-1)] = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ Es un arreglo ordenado de n objetos distintos, sin repetición.
Combinación (p. 996)	$C(n, r) = \dfrac{P(n, r)}{r!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ Es un arreglo de n objetos distintos, sin repetición y haciendo caso omiso del orden.
Permutación: No distinta, con repetición (p. 998)	$\dfrac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}$ El número de permutaciones de n en los que n_1 son de una clase, n_2 son de una segunda clase, . . . , y n_k son de una k-ésima clase, donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$
Espacio muestral (p. 1001)	Conjunto cuyos elementos representan a todas las posibilidades lógicas que se pueden presentar como resultado de un experimento.
Probabilidad (p. 1001)	Número no negativo que se asigna a cada resultado de un espacio muestral; la suma de las probabilidades de todos los resultados es igual a 1.
Resultados igualmente posibles (p. 1004)	$P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$ A cada uno de los resultados se les asigna la misma probabilidad.
Regla de la adición (p. 1005)	$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
Complemento de una evento (p. 1007)	$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

Objetivos

Sección		Usted debe ser capaz de . . .	Ejercicios de repaso
13.1	1	Encontrar todos los subconjuntos de un conjunto (p. 984)	1, 2
	2	Encontrar la intersección y la unión de conjuntos (p. 985)	3–6
	3	Encontrar el complemento de un conjunto (p. 985)	7–10
	4	Contar el número de elementos de un conjunto (p. 986)	11–18
13.2	1	Resolver problemas de conteo utilizando el principio de la multiplicación (p. 990)	23–26, 32–36
	2	Resolver problemas de conteo utilizando permutaciones (p. 992)	19, 20, 27, 28, 41(a)
	3	Resolver problemas de conteo utilizando combinaciones (p. 995)	21, 22, 29–31, 39–40
	4	Resolver problemas de conteo utilizando permutaciones que incluyen n objetos no distintos (p. 997)	37, 38
13.3	1	Construir modelos de probabilidad (p. 1001)	41(b)
	2	Calcular las probabilidades resultados igualmente probables (p. 1004)	41(b), 42(a), 43(a), 44–47
	3	Usar la regla de la adición para encontrar probabilidades (p. 1005)	48
	4	Utilizar la regla del complemento para encontrar probabilidades (p. 1007)	41(c), 42(b), 43(b), 44

Ejercicios de repaso

(Los problemas con asterisco indican que el autor los sugiere para usarse como examen de práctica).

1. Escriba todos los subconjuntos del conjunto {Dave, Joanne, Erica}.

2. Escriba todos los subconjuntos del conjunto {verde, azul, rojo}.

En los problemas 3-10, use U = *conjunto universal* = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 5, 6, 7, 8\}$, *y* $C = \{2, 3, 7, 8, 9\}$ *para encontrar cada conjunto.*

*__3.__ $A \cup B$

4. $B \cup C$

5. $A \cap C$

6. $A \cap B$

7. $\overline{A} \cup \overline{B}$

8. $\overline{B} \cap \overline{C}$

*__9.__ $\overline{B \cap C}$

10. $\overline{A \cup B}$

11. Si $n(A) = 8$, $n(B) = 12$, y $n(A \cap B) = 3$, encuentre $n(A \cup B)$.

12. Si $n(A) = 12$, $n(A \cup B) = 30$, y $n(A \cap B) = 6$, encuentre $n(B)$.

En los problemas 13-18, utilice la información que proporciona la figura:

13. ¿Cuántos elementos hay en A?

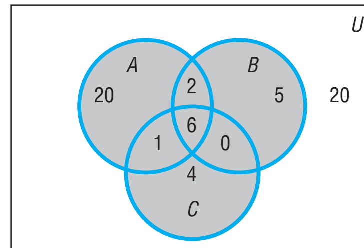
14. ¿Cuántos elementos hay en A o B?

*__15.__ ¿Cuántos elementos hay en A y C?

16. ¿Cuántos elementos no están en el conjunto B?

17. ¿Cuántos no están en A ni en C?

18. ¿Cuántos están en B, pero no en C?



En los problemas 19-22, calcule la expresión dada.

*__19.__ $P(8, 3)$

20. $P(7, 3)$

21. $C(8, 3)$

22. $C(7, 3)$

*__23.__ Una tienda de ropa vende trajes de lana pura y lana-poliéster. Cada traje viene en 3 colores y 10 tallas. ¿Cuántos trajes se necesitan para tener un surtido completo?

24. Para conectar cierto dispositivo eléctrico, se conectan 5 cables a cinco terminales distintas. ¿Cuántos cableados diferentes son posibles, si a cada terminal se conecta un cable?

25. **Béisbol** En un día dado, la Liga Americana de Béisbol programa siete juegos. ¿Cuántos resultados distintos son posibles, suponiendo que cada uno de los juegos se juega hasta terminarlo?

26. **Béisbol** En un día dado, la Liga Nacional de Béisbol programa 6 juegos. ¿Cuántos resultados distintos son posibles, suponiendo que cada uno de los juegos se juega hasta terminarlo?

*__27.__ Si 4 personas suben a un autobús que tiene 9 vacíos, ¿de cuantas maneras pueden sentarse?

28. ¿Cuántos arreglos distintos de las letras de la palabra ROSE existen?

29. ¿De cuántas maneras se podría elegir un equipo de 4 corredores de relevo a partir de un equipo de pista de 8 corredores?

30. Una maestra tiene 10 problemas semejantes, de los que va a poner 3 en un examen. ¿Cuántos exámenes diferentes puede diseñar?

31. **Béisbol** ¿De cuantas maneras se pueden elegir 2 equipos de los 14 que conforman la Liga Americana, haciendo caso omiso de cuál de ellos juega de local?

32. **Ordenando libros en un anaquel** Hay 5 libros de francés distintos y otros 5 de español, también distintos. ¿Cuántas maneras existen de ordenarlos sobre un anaquel si:

a) Los libros del mismo lenguaje se deben mantener juntos, los de francés a la izquierda, los de español a la derecha?

b) Los libros de francés y español se deben alternar, comenzando con un libro en francés?

*__33.__ **Números telefónicos** Utilizando los dígitos $0, 1, 2, \ldots, 9$, ¿cuántos números de 7 dígitos se formarían, si el primer dígito no puede ser 0 o 9, y si el último dígito es mayor o igual a 2 y menor o igual que 3? Se permiten dígitos repetidos.

34. **Opciones para el hogar** Un contratista que construye casas plantea cinco distintas opciones de acabado exterior, 3 disposiciones diferentes del techo, y 4 diseños de ventana distintos. ¿Cuántos tipos de casa distintos podría construir?

35. **Posibilidades de número de matrícula** Una matrícula se compone de una letra, excluyendo O e I, seguida por número de cuatro dígitos que no puede tener al 0 en la posición inicial. ¿Cuántas matrículas diferentes es posible formar?

36. Utilizando los dígitos 0 y 1, ¿cuántos números de 8 dígitos diferentes se forman?

*__37.__ **Formación de distintas palabras** ¿Cuántas palabras distintas, reales o imaginarias, se forman utilizando todas las letras de la palabra MISSING?

38. **Ordenando banderas** ¿Cuántos arreglos verticales diferentes existen para 10 banderas, si 4 son blancas, 3 son azules, y 2 son verdes?

39. **Formación de comités** Un grupo de 9 personas se va a dividir en comités de 4, 3 y 2 personas. ¿Cuántos comités se forman si:

a) Una persona puede pertenecer a cualquier número de comités?

b) Ninguna persona puede pertenecer a más de un comité?

40. **Formación de comités** Un grupo se compone de 5 hombres y 8 mujeres. A partir de este grupo, se va formar un comité de 4, y las políticas dictan que en él debe haber por lo menos una mujer.

a) ¿Cuántos comités con sólo 1 hombre se pueden formar?

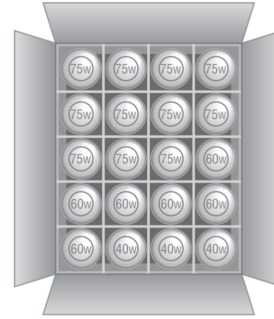
b) ¿Cuántos comités con sólo 2 mujeres se pueden formar
c) ¿Cuántos comités con al menos 1 hombre se pueden formar?

41. Problema de cumpleaños Para este problema, suponga que un año tiene 365 días.
a) ¿De cuántas maneras tienen cumpleaños distintos 18 personas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 18 personas, nadie tenga la misma fecha de cumpleaños?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 18 personas, por lo menos 2 tengan la misma fecha de cumpleaños?

42. Tasas de mortalidad De acuerdo con el National Center for Health Statistics estadounidense, 29% de todas las muertes acaecidas en 2001 se debieron a enfermedades cardiacas.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un fallecido en 2001, seleccionado al azar, haya muerto de una enfermedad cardiaca?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un fallecido en 2001, seleccionado al azar, no haya muerto de una enfermedad cardiaca?

43. Desempleo De acuerdo con la Bureau of Labor Statistics, 5.8% de la fuerza laboral estadounidense estuvo desempleada en 2002.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro de la fuerza laboral seleccionado al azar haya estado desempleado en 2002?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro de la fuerza laboral seleccionado al azar no haya estado desempleado en 2002?

44. En una caja hay tres focos de 4 watts, seis de 60 watts y 11 de 75 watts; se saca uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el foco sea de 40 watts?¿Cuál es la probabilidad de que no sea un foco de 75 watts?



45. Usted tiene en su cartera cuatro billetes de $1, tres de $5 y dos de $10. Si saca un billete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de $1?

46. Cada una de las letras de la palabra ROSA se escribe en una tarjeta y luego se revuelven las tarjetas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al repartir las tarjetas, formen la palabra ROSA?

47. Cada uno de los números del 1 al 100 se escribe en una tarjeta y luego se revuelven las tarjetas. Si se elige una carta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el número escrito en ella sea múltiplo de 5? ¿Cuál es la probabilidad de que el número escrito en ella sea 1 o un número primo?

48. El gerente del taller de afinación y frenos Milex encontró que un automóvil tiene una probabilidad de 0.6 de necesitar afinación, de 0.1 de necesitar ajuste de frenos y de 0.02 de necesitar ambas cosas.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el automóvil requiera afinación o ajuste de frenos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el automóvil requiera afinación, pero no ajuste de frenos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el automóvil no requiera afinación ni ajuste de frenos?

Proyectos del capítulo



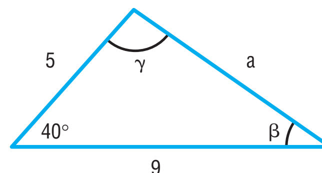
1. Simulación En la edición invierno de 1998 de *Eightysomething*!, Mike Koehler utiliza la simulación para calcular las siguientes probabilidades: "Una señora y un señor (sin relación entre sí) tienen cada uno dos hijos. Por lo menos uno de los hijos de la señora y el hijo mayor del señor son hombres. ¿Las posibilidades de que la señora tenga dos hombres son iguales a las posibilidades de que el señor tenga dos hombres? Realice una simulación para responder la pregunta.

Los siguientes Proyectos del capítulo están disponibles en www.prenhall.com/Sullivan

2. Project at Motorola ***Probability of Error in Digital Wireless Communications***
3. Surveys
4. Law of Large Numbers

Repaso acumulativo

1. Resuelva $3x^2 - 2x = -1$.
2. Grafique $f(x) = x^2 + 4x - 5$ determinando si la gráfica se abre hacia arriba o abajo, y encuentre el vértice, el eje de simetría y las intersecciones.
3. Grafique $f(x) = 2(x + 1)^2 - 4$ usando transformaciones.
4. Resuelva $|x - 4| \leq 0.01$.
5. Encuentre los ceros complejos de: $f(x) = 5x^4 - 9x^3 - 7x^2 - 31x - 6$.
6. Grafique $g(x) = 3^{x-1} + 5$ usando transformaciones. Determine el dominio, rango y asíntota horizontal de g.
7. ¿Cuál es el valor exacto de $\log_3 9$?
8. Resuelva $\log_2(3x - 2) + \log_2 x = 4$.
9. Resuelva el sistema: $\begin{cases} x - 2y + z = 15 \\ 3x + y - 3z = -8 \\ -2x + 4y - z = -27 \end{cases}$
10. ¿Cuál es el 33º término de la sucesión $-3, 1, 5, 9, \ldots$? ¿Cuál es la suma de los primeros 20 términos?
11. Grafique $y = 3 \operatorname{sen}(2x + \pi)$.
12. Resuelva el siguiente triángulo y determine su área.



Apéndice Calculadoras gráficas

Contenido

1 El rectángulo de visualización
2 Uso de una calculadora gráfica para representar ecuaciones
3 Uso de una calculadora gráfica para localizar intersecciones y verificar la simetría
4 Uso de una calculadora gráfica para resolver ecuaciones
5 Pantallas cuadradas
6 Uso de una calculadora gráfica para representar desigualdades
7 Uso de una calculadora gráfica para resolver sistemas de ecuaciones lineales
8 Uso de una calculadora gráfica para representar una ecuación polar
9 Uso de una calculadora gráfica para graficar ecuaciones paramétricas

1 El rectángulo de visualización

Figura 1
$y = 2x$

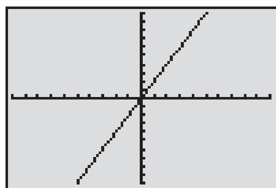
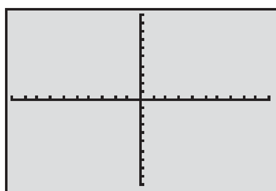


Figura 2



Todas las utilidades gráficas, es decir, todas las calculadoras gráficas y todos los programas de graficación, representan las ecuaciones mediante el trazo de puntos sobre una pantalla. En realidad, la pantalla en sí se compone de pequeños rectángulos, llamados **píxeles**. Cuantos más píxeles tiene la pantalla, es mejor la resolución. La mayoría de las calculadoras gráficas tiene 2048 píxeles por pulgada cuadrada; la mayor parte de las pantallas de computadora tienen de 4096 a 8192 píxeles por pulgada cuadrada. Cuando el punto a trazar queda dentro de un píxel, éste se enciende (ilumina). La gráfica de una ecuación es una colección de píxeles. En la figura 1 se muestra cómo se ve la gráfica de $y = 2x$ en una calculadora gráfica TI-83.

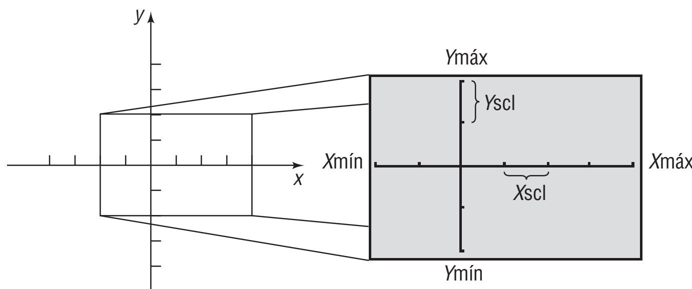
La pantalla de una calculadora gráfica muestra los ejes coordenados de un sistema de coordenadas rectangulares. Sin embargo, es necesario configurar la escala de cada eje. También se deben incluir los valores menor y mayor de x y y que desea incluir en la gráfica. Esto se denomina **configurar el rectángulo** o **la ventana de visualización**. En la figura 2 se muestra una ventana de visualización típica.

Para seleccionar la ventana de visualización, se deben proporcionar los valores de las siguientes expresiones:

*X*mín:	el valor menor de x
*X*máx:	el valor mayor de x
*X*scl:	el número de unidades por marca sobre el eje x
*Y*mín:	el valor menor de y
*Y*máx:	el valor mayor de y
*Y*scl:	el número de unidades por marca sobre el eje y

En la figura 3 se ilustran estas configuraciones y su relación con el sistema de coordenadas cartesianas.

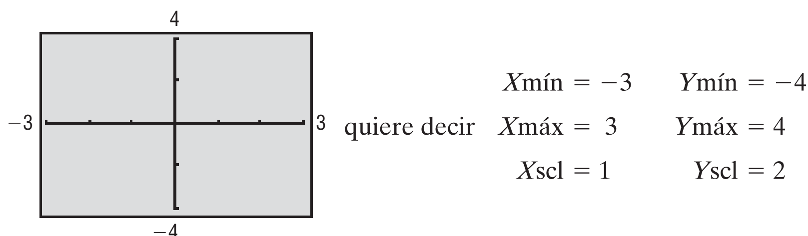
Figura 3



Si se conoce la escala usada en cada uno de los ejes, contando las marcas se pueden determinar los valores máximo y mínimo de x y y que aparecen en la pantalla. Véase de nuevo la figura 2. Considerando una escala de 1 en cada uno de los ejes, los valores máximo y mínimo de x son -10 y 10, respectivamente; los valores máximo y mínimo de y también son -10 y 10. Si en ambos ejes se utiliza una escala de 2, los valores máximo y mínimo de x son -20 y 20, mutuamente; y los valores máximo y mínimo de y son -20 y 20, respectivamente.

De manera inversa, si se conocen los valores mínimo y máximo de x y y, se pueden determinar las escalas utilizadas contando el número de marcas en pantalla. Se acostumbrará mostrar en las ilustraciones los valores mínimo y máximo de x y y, de manera que usted pueda observar cómo se configuró la ventana de visualización. Vea la figura 4.

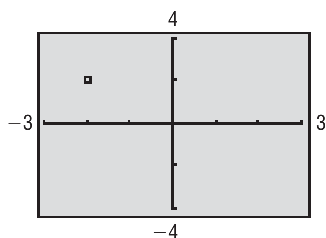
Figura 4



EJEMPLO 1 Encontrar las coordenadas de un punto que aparece en la pantalla de una calculadora gráfica

Encuentre las coordenadas del punto que se muestra en la figura 5. Suponga que las coordenadas son enteras.

Figura 5



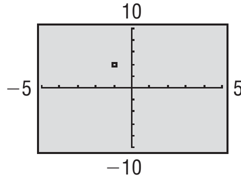
Solución Primero, se observa que la ventana de visualización utilizada en la figura 5 es

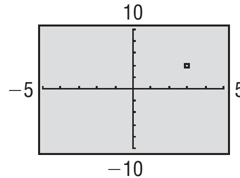
$$X\text{mín} = -3 \qquad Y\text{mín} = -4$$
$$X\text{máx} = 3 \qquad Y\text{máx} = 4$$
$$X\text{scl} = 1 \qquad Y\text{scl} = 2$$

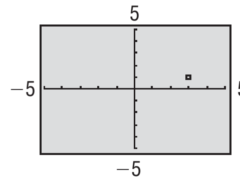
El punto está dos marcas a la izquierda sobre el eje horizontal (escala = 1) y una hacia arriba sobre el eje vertical (escala = 2). Las coordenadas de este punto son $(-2, 2)$. ◄

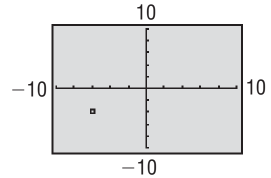
1 Ejercicios

En los problemas 1-4, determine las coordenadas de los puntos que se muestran. Mencione en qué cuadrante queda cada punto. Suponga que las coordenadas son enteras.

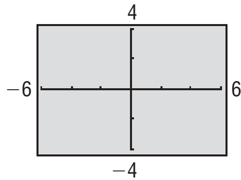
1.


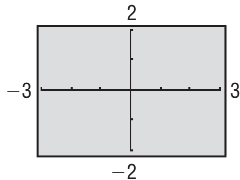
2.


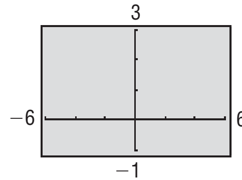
3.


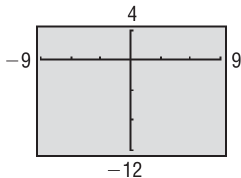
4.


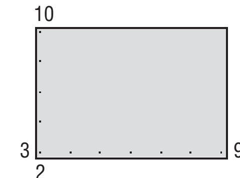
En los problemas 5-10, determine cuál ventana de visualización se utiliza.

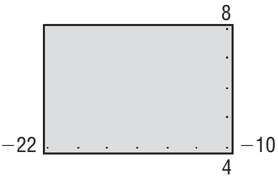
5.


6.


7.


8.


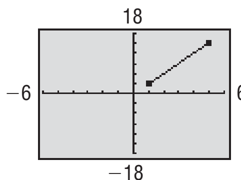
9.


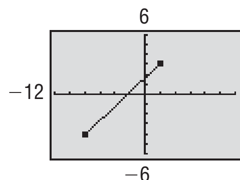
10.


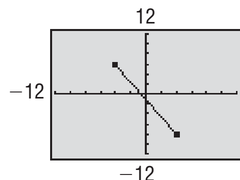
En los problemas 11-16, seleccione una configuración que permita que cada uno de los puntos dados aparezca dentro del rectángulo de visualización.

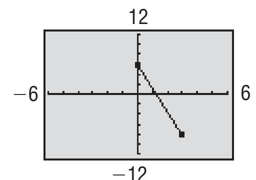
11. $(-10, 5), (3, -2), (4, -1)$
12. $(5, 0), (6, 8), (-2, -3)$
13. $(40, 20), (-20, -80), (10, 40)$
14. $(-80, 60), (20, -30), (-20, -40)$
15. $(0, 0), (100, 5), (5, 150)$
16. $(0, -1), (100, 50), (-10, 30)$

En los problemas 17-20, encuentre la longitud del segmento de recta. Suponga que los extremos de cada segmento tienen coordenadas enteras.

17.


18.


19.


20.


2 Uso de una calculadora gráfica para representar ecuaciones

En los ejemplos 2 y 3 de la sección 2.2 se observa que es posible obtener una gráfica trazando los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y uniéndolos. Las calculadoras gráficas realizan estos mismos pasos al graficar una ecuación. Por ejemplo, la calculadora TI-83 determina 95 valores de entrada separados de manera uniforme comenzando por *X*mín y terminando en *X*máx,* usa la ecuación para especificar los valores de salida, los reproduce en la pantalla y luego (si está en el modo Connected-conexión poligonal de puntos), traza una línea siguiendo los puntos consecutivos.

*Estos valores de entrada dependen de los valores de *X*mín y *X*máx. Por ejemplo, si *X*mín $= -10$ y *X*máx $= 10$, entonces el primer valor de entrada será -10 y la siguiente entrada será $-10 + \dfrac{10 - (-10)}{94} = -9.7872$, y así sucesivamente.

Para graficar una ecuación con dos variables x y y utilizando una calculadora gráfica, es necesario escribir la ecuación con la forma $y = \{\text{expresión de } x\}$. Si la ecuación original no tiene dicha apariencia, reemplácela por ecuaciones equivalentes hasta obtener la forma $y = \{\text{expresión de } x\}$. En general, existen cuatro maneras de obtener ecuaciones equivalentes.

Procedimientos que generan ecuaciones equivalentes

1. Intercambiar los dos lados de la ecuación:

   Reemplazar $3x + 5 = y$ por $y = 3x + 5$

2. Simplificar ambos lados de la ecuación mediante la unión de términos semejantes, eliminación de paréntesis y demás:

   Reemplazar $(2y + 2) + 6 = 2x + 5(x + 1)$

   por $2y + 8 = 7x + 5$

3. Sumar o restar la misma expresión a ambos lados de la ecuación:

   Reemplazar $y + 3x - 5 = 4$

   por $y + 3x - 5 + 5 = 4 + 5$

4. Multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por la misma expresión distinta de cero:

   Reemplazar $3y = 6 - 2x$

   por $\frac{1}{3} \cdot 3y = \frac{1}{3}(6 - 2x)$

EJEMPLO 1 Enunciar una ecuación con la forma $y = \{\text{expresión de } x\}$

Despejar y de: $2y + 3x - 5 = 4$

Solución Se reemplaza la ecuación original por una sucesión de ecuaciones equivalentes.

$$2y + 3x - 5 = 4$$

$$2y + 3x - 5 + 5 = 4 + 5 \quad \text{Se suma 5 en ambos lados.}$$

$$2y + 3x = 9 \quad \text{Se simplifica.}$$

$$2y + 3x - 3x = 9 - 3x \quad \text{Se resta } 3x \text{ a ambos lados.}$$

$$2y = 9 - 3x \quad \text{Se simplifica.}$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{9 - 3x}{2} \quad \text{Se dividen ambos lados entre 2.}$$

$$y = \frac{9 - 3x}{2} \quad \text{Se simplifica.}$$

◀

Ahora se está listo para graficar ecuaciones empleando una calculadora gráfica. La mayoría de estos dispositivos requiere que se realicen los siguientes pasos:

Pasos para graficar una ecuación utilizando una calculadora gráfica

PASO 1: Despejar y para obtener una ecuación en términos de x.

PASO 2: Poner la calculadora gráfica en el modo de representación gráfica. Por lo general, la pantalla muestra $Y =$, solicitando que se introduzca la expresión que incluye a x encontrada en el paso 1. (Consulte en el manual la forma correcta de introducir la expresión; por ejemplo, $y = x^2$ se puede introducir como x^2 o x*x o x x^y 2).

PASO 3: Seleccionar la ventana de visualización. Si no se conoce de antemano el comportamiento de la gráfica de la ecuación, se suele seleccionar inicialmente la **ventana de visualización estándar.*** Entonces la ventana de visualización se ajusta con base en la gráfica que resulta. En este libro, la ventana de visualización estándar es

$$X\text{mín} = -10 \qquad Y\text{mín} = -10$$
$$X\text{máx} = 10 \qquad Y\text{máx} = 10$$
$$X\text{scl} = 1 \qquad Y\text{scl} = 1$$

PASO 4: Graficar.

PASO 5: Ajustar la ventana de visualización hasta que se tenga la gráfica completa.

EJEMPLO 2

Graficar una ecuación en una calculadora gráfica

Graficar la ecuación: $6x^2 + 3y = 36$

Solución

PASO 1: Se despeja y, para dejarla representada en términos de x.

$$6x^2 + 3y = 36$$
$$3y = -6x^2 + 36 \quad \text{Se resta } 6x^2 \text{ a ambos lados de la ecuación.}$$
$$y = -2x^2 + 12 \quad \text{Se dividen ambos lados de la ecuación entre 3 y se simplifica.}$$

PASO 2: En la pantalla $Y =$, se introduce la expresión $-2x^2 + 12$ después de la petición $Y_1 =$.

PASO 3: Se configura la ventana a visualización estándar.

PASO 4: Se grafica. La pantalla se debe ver como la figura 6.

PASO 5: La gráfica de $y = -2x^2 + 12$ no está terminada. Se debe aumentar el valor de Ymáx, para que quede a la vista la parte superior de la gráfica. Después de aumentar a 12 el valor de Y más, se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 7. Ahora sí, la gráfica está concluida.

Figura 6

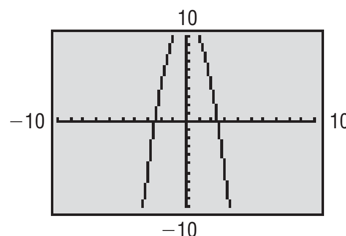
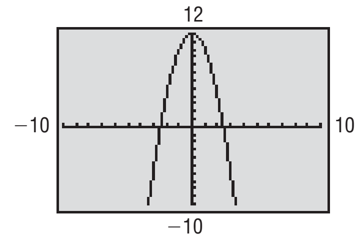


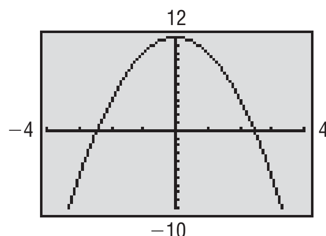
Figura 7



*Algunas calculadoras gráficas tienen una función ACERCAMIENTO-NORMAL (ZOOM-STANDARD) que configura de manera automática la ventana de visualización a su modo normal y grafican la ecuación.

Véase de nuevo la figura 7. A pesar de que se muestra una gráfica completa, se puede mejorar ajustando los valores de Xmín y Xmáx. En la figura 8 se muestra la gráfica de $y = -2x^2 + 12$ utilizando Xmín $= -4$ y Xmáx $= 4$. ¿Le parece que ésta es una mejor opción para la ventana de visualización?

Figura 8



EJEMPLO 3 Elaborar una tabla y graficar una ecuación

Elabore una tabla y grafique la ecuación: $y = x^3$

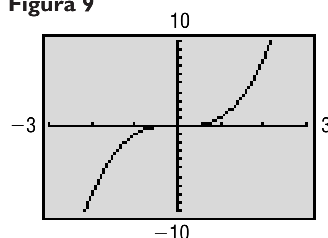
Solución La mayoría de las calculadoras gráficas tiene la capacidad de elaborar una tabla de valores para una ecuación (Revise el manual para ver si su calculadora gráfica cuenta con esta opción). En la tabla 1 se ilustra la tabla de valores para $y = x^3$ elaborada por una TI-83. En la figura 9 se muestra la gráfica.

Tabla 1

X	Y1
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

Y1 ■ X^3

Figura 9



◀

2 Ejercicios

En los problemas 1-16, grafique cada una de las ecuaciones utilizando las siguientes ventanas de visualización.

a)	b)	c)	d)
Xmín $= -5$	Xmín $= -10$	Xmín $= -10$	Xmín $= -5$
Xmáx $= 5$	Xmáx $= 10$	Xmáx $= 10$	Xmáx $= 5$
Xscl $= 1$	Xscl $= 1$	Xscl $= 2$	Xscl $= 1$
Ymín $= -4$	Ymín $= -8$	Ymín $= -8$	Ymín $= -20$
Ymáx $= 4$	Ymáx $= 8$	Ymáx $= 8$	Ymáx $= 20$
Yscl $= 1$	Yscl $= 1$	Yscl $= 2$	Yscl $= 5$

1. $y = x + 2$ **2.** $y = x - 2$ **3.** $y = -x + 2$ **4.** $y = -x - 2$

5. $y = 2x + 2$ **6.** $y = 2x - 2$ **7.** $y = -2x + 2$ **8.** $y = -2x - 2$

9. $y = x^2 + 2$ **10.** $y = x^2 - 2$ **11.** $y = -x^2 + 2$ **12.** $y = -x^2 - 2$

13. $3x + 2y = 6$ **14.** $3x - 2y = 6$ **15.** $-3x + 2y = 6$ **16.** $-3x - 2y = 6$

17–32. *Elabore una tabla,* $-3 \leq x \leq 3$, *para cada una de las ecuaciones anteriores e indique los puntos sobre la gráfica.*

3 Uso de una calculadora gráfica para localizar intersecciones y verificar la simetría

Valor y cero (o raíz)

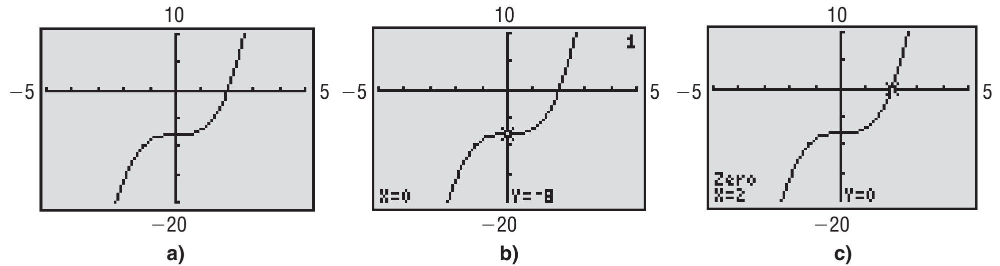
La mayoría de las calculadoras gráficas tiene una función para evaluar (VALUE) que, dado un valor de x, determina el valor de y para una ecuación. Esta función se puede utilizar para evaluar una función en $x = 0$, con el fin de determinar la intersección con y. La mayoría de las calculadoras gráficas también tiene una función cero o raíz (ZERO o ROOT) que se puede emplear para establecer la(s) intersección(es) en x de una ecuación.

EJEMPLO 1 **Encontrar las intersecciones usando una calculadora gráfica**

Utilice una calculadora gráfica para encontrar las intersecciones de la ecuación $y = x^3 - 8$.

Solución En la figura 10a) se muestra la gráfica de $y = x^3 - 8$.

Figura 10



La función evaluar (VALUE) de una calculadora gráfica TI-83 acepta la entrada de un valor de x y determina el valor de y. Si se parte de que $x = 0$, se encuentra que la intersección con y se encuentra en -8. Vea la figura 10b).

La función cero (ZERO) de la TI-83 se utiliza para encontrar la o las intersecciones en x. Vea la figura 10c). La intersección con x está en 2. ◄

Rastreo (TRACE)

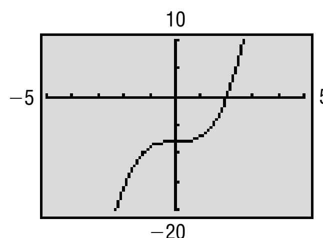
La mayor parte de las calculadoras gráficas le permiten moverse de un punto a otro a lo largo en la gráfica, mostrando en pantalla las coordenadas de cada punto. Esta función se llama rastreo (TRACE).

EJEMPLO 2 **Utilizar el rastreo (TRACE) para localizar las intersecciones**

Grafique la ecuación $y = x - 8$. Utilice la función de rastreo (TRACE) para localizar las intersecciones.

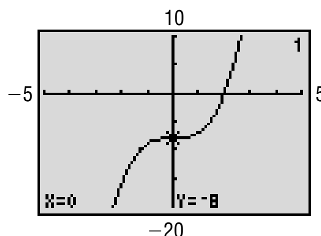
Solución En la figura 11 se muestra la gráfica de $y = x^3 - 8$.

Figura 11



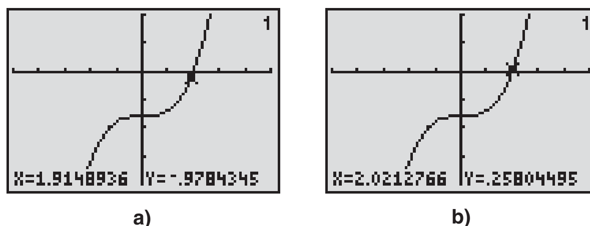
Active la función TRACE. A medida que mueve el cursor a lo largo de la gráfica, verá las coordenadas de cada uno de los puntos que se muestran. Cuando el cursor está sobre el eje y, se encuentra que la intersección con y se presenta en -8. Vea la figura 12.

Figura 12



Continúe moviendo el cursor a lo largo de la gráfica. Justo antes de llegar al eje x, la pantalla se verá como la que se aprecia en la figura 13a) (debido a las diferencias de las calculadoras gráficas, su pantalla puede ser ligeramente distinta a la que aquí se muestra).

Figura 13

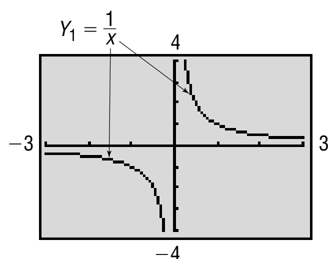


a) **b)**

En la figura 13a), el valor negativo de la coordenada y indica que todavía se está abajo del eje x. En la figura 13b) se muestra la siguiente posición del cursor. El valor positivo de la coordenada indica que ahora se está por encima del eje x. Esto significa que se cruzó el eje x entre esos dos puntos. La intersección con x está entre 1.9148936 y 2.0212766. ◀

EJEMPLO 3 Graficar la ecuación $y = \frac{1}{x}$

Figura 14



Grafique la ecuación: $y = \dfrac{1}{x}$

Con la ventana de visualización configurada con

$$X\text{mín} = -3 \qquad Y\text{mín} = -4$$
$$X\text{máx} = 3 \qquad Y\text{máx} = 4$$
$$X\text{scl} = 1 \qquad Y\text{scl} = 1$$

utilice TRACE para deducir información sobre las intersecciones y la simetría.

Solución En la figura 14 se ilustra la gráfica. De ella se concluye que no hay intersecciones; también se deduce que es posible que exista simetría con respecto al origen. La función TRACE de una calculadora gráfica puede proporcionar más evidencias de simetría con respecto al origen. Al utilizar TRACE, se observa que para todo par ordenado (x, y), el par ordenado $(-x, -y)$ también es un punto en la gráfica. Por ejemplo, los puntos (0.95744681, 1.0444444) y (−0.95744681, −1.0444444) están, ambos, en la gráfica. ◀

3 Ejercicios

En los problemas 1-6, utilice la función cero (ZERO o ROOT) para calcular el valor aproximado de la menor de las dos intersecciones con x de cada ecuación. Exprese la respuesta redondeando a dos decimales.

1. $y = x^2 + 4x + 2$

2. $y = x^2 + 4x - 3$

3. $y = 2x^2 + 4x + 1$

4. $y = 3x^2 + 5x + 1$

5. $y = 2x^2 - 3x - 1$

6. $y = 2x^2 - 4x - 1$

En los problemas 7-14, utilice la función cero (ZERO o ROOT) para calcular el valor aproximado de las intersecciones ***positivas*** *con x de cada ecuación. Exprese cada respuesta redondeando a dos decimales.*

7. $y = x^3 + 3.2x^2 - 16.83x - 5.31$

8. $y = x^3 + 3.2x^2 - 7.25x - 6.3$

9. $y = x^4 - 1.4x^3 - 33.71x^2 + 23.94x + 292.41$

10. $y = x^4 + 1.2x^3 - 7.46x^2 - 4.692x + 15.2881$

11. $y = \pi x^3 - (8.88\pi + 1)x^2 - (42.066\pi - 8.88)x + 42.066$

12. $y = \pi x^3 - (5.63\pi + 2)x^2 - (108.392\pi - 11.26)x + 216.784$

13. $y = x^3 + 19.5x^2 - 1021x + 1000.5$

14. $y = x^3 + 14.2x^2 - 4.8x - 12.4$

4 Uso de una calculadora gráfica para resolver ecuaciones

En muchas ecuaciones, no existen técnicas algebraicas que puedan conducir a una solución. En tales casos, con frecuencia se puede utilizar una calculadora gráfica para investigar las posibles soluciones. Cuando se utiliza una calculadora gráfica para resolver una ecuación, se suelen obtener soluciones *aproximadas*. A menos que se establezca lo contrario, nos apegaremos a la práctica de expresar las soluciones *redondeando a dos decimales*.

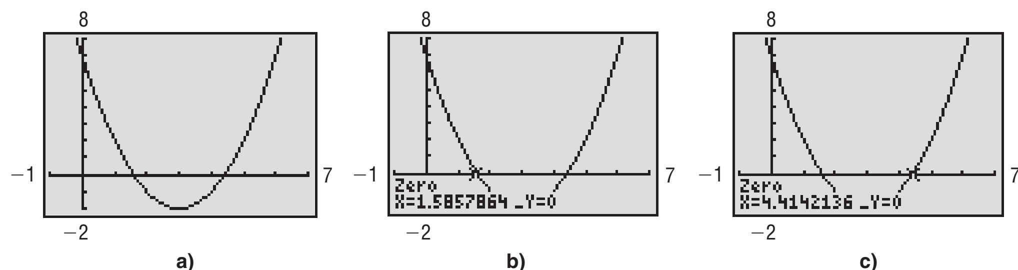
La función cero (ZERO o ROOT) de una calculadora gráfica se puede utilizar para encontrar las soluciones de una ecuación, cuando uno de sus lados es 0. Al utilizar esta función para resolver ecuaciones, se parte del hecho de que las intersecciones con x (o ceros) de la gráfica de una ecuación se encuentran haciendo a $y = 0$ y despejando x. Resolver la x de una ecuación cuando uno de sus lados es 0 equivale a encontrar el lugar donde la gráfica de dicha ecuación atraviesa o toca al eje x.

EJEMPLO 1 Usar la función cero (ZERO o ROOT) para calcular soluciones aproximadas de una ecuación

Encuentre la(s) solución(es) de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$. Redondee las respuestas a dos decimales.

Solución Las soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$ son iguales a las intersecciones con x de la gráfica de $Y_1 = x^2 - 6x + 7$. Se comienza por graficar la ecuación. Vea la figura 15a).

Figura 15



De acuerdo con la gráfica, parecen existir dos intersecciones con x (soluciones a la ecuación): una entre uno y dos, otra entre 4 y 5.

Se utiliza la función cero (ZERO o ROOT) de nuestra calculadora gráfica, se determina que las intersecciones con x, y por lo tanto las soluciones de la ecuación, redondeadas a dos decimales, son $x = 1.59$ y $x = 4.41$. Vea las figuras 15b) y c). ◀

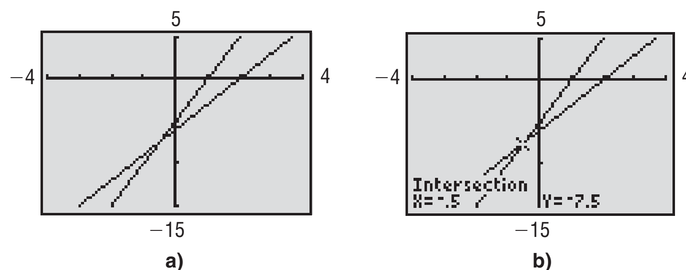
Un segundo método para resolver ecuaciones utilizando una calculadora gráfica implica el uso de la función intersección (INTERSEC) de la calculadora gráfica. Esta función se utiliza con mayor eficacia cuando un lado de la ecuación no es 0.

EJEMPLO 2 Utilizar la función intersección (INTERSEC) para calcular las soluciones aproximadas de una ecuación

Encuentre la(s) solución(es) de la ecuación $3(x - 2) = 5(x - 1)$. Redondee las respuestas a dos decimales.

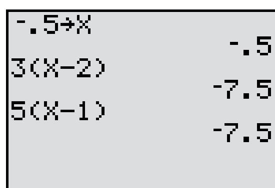
Solución Se comienza por graficar cada lado de la ecuación de la siguiente manera: gráfica de $Y_1 = 3(x - 2)$ y $Y_2 = 5(x - 1)$. Vea la figura 16a).

Figura 16



En el punto de intersección de las gráficas, el valor de la coordenada y es el mismo. Entonces se concluye que la coordenada x del punto de intersección representa la solución de la ecuación. ¿Puede usted ver por qué? La función INTERSECT de una calculadora gráfica determina el punto de intersección de las gráficas. Utilizando esta función, se encuentra que las gráficas se intersecan en $(-0.5, -7.5)$. Vea la figura 16b). Por lo tanto, la solución de la ecuación es $x = -0.5$.

Figura 17



COMPROBACIÓN: Se puede verificar nuestra solución evaluando ambos lados de la ecuación con -0.5 guardado (STO) en x. Vea la figura 17. Puesto que el lado izquierdo de la ecuación es igual al lado derecho de la misma, se verifica la solución. ◀

Resumen

A continuación se describen los pasos a seguir para calcular soluciones aproximadas de ecuaciones.

Pasos para calcular soluciones aproximadas de ecuaciones usando la función cero (ZERO o ROOT)

Paso 1: Enunciar la ecuación con la forma $y = \{\text{expresión de } x\} = 0$.

Paso 2: Graficar $Y_1 = \{\text{expresión de } x\}$.
Cerciórese de que la gráfica está completa. Es decir, asegúrese de que todas las intersecciones se muestran en pantalla.

Paso 3: Utilizar la función cero (ZERO o ROOT) para determinar cada una de las intersecciones con x de la gráfica.

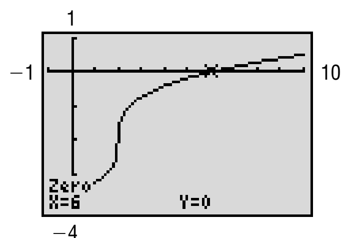
Pasos para calcular soluciones aproximadas de ecuaciones usando la función intersección (INTERSEC)

Paso 1: Graficar $Y_1 = \{\text{expresión de } x \text{ en el lado izquierdo de la ecuación}\}$.
Graficar $Y_2 = \{\text{expresión de x en el lado derecho de la ecuación}\}$.

Paso 2: Usar INTERSEC para determinar cada coordenada x de los puntos de intersección, si los hay.
Cerciórese de que las gráficas están completas. Es decir, asegúrese de que todos los puntos de intersección aparezcan en pantalla.

EJEMPLO 3 **Solución de una ecuación radical**

Figura 18

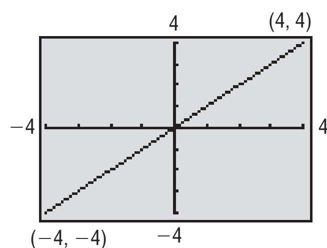


Encuentre las soluciones reales de la ecuación $\sqrt[3]{2x-4} - 2 = 0$.

Solución En la figura 18 se muestra la gráfica de la ecuación $Y_1 = \sqrt[3]{2x-4} - 2$. En dicha gráfica, se observa una intersección con x cerca de 6. Si se utiliza ZERO (o ROOT), se encuentra que la intersección con x es 6. La única solución es $x = 6$. ◀

5 Pantallas cuadradas

Figura 19



La mayoría de las calculadoras gráficas tiene pantalla rectangular. Por ello, utilizar la misma configuración para x y para y tendrá como resultado una visualización distorsionada. Por ejemplo, en la figura 19 se muestra la gráfica de la recta $y = x$ conectando los puntos $(-4, -4)$ y $(4, 4)$.

Sería de esperar que la recta bisecara los cuadrantes primero y tercero, pero no es así. Es necesario ajustar las selecciones de Xmín, Xmáx, Ymín, y Ymáx, de tal manera que originen una **pantalla cuadrada**. En la mayor parte de las calculadoras gráficas, esto se logra configurando la razón x a y como 3:2.* Por ejemplo, si

$$X\text{mín} = -6 \qquad Y\text{mín} = -4$$
$$X\text{máx} = 6 \qquad Y\text{máx} = 4$$

*Algunas calculadoras gráficas tienen incluida una función que hace la pantalla cuadrada de manera automática. Por ejemplo, la TI-85 tiene la función ZSQR, que se encarga de hacerlo. Algunas calculadoras gráficas necesitan una relación distinta a la 3:2 para mostrar una pantalla cuadrada. Por ejemplo, la HP 48G requiere que la relación x a y sea de 2:1 para mostrar una pantalla cuadrada. Consulte su manual.

entonces la razón x a y es

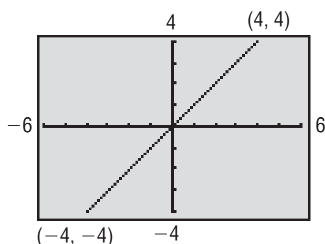
$$\frac{X\text{máx} - X\text{mín}}{Y\text{máx} - Y\text{mín}} = \frac{6 - (-6)}{4 - (-4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

para una razón 3:2, originando una pantalla cuadrada

EJEMPLO 1 **Ejemplos de rectángulos de visualización que tienen como resultado pantallas cuadradas**

a)		b)		c)	
Xmín =	−3	Xmín =	−6	Xmín =	−6
Xmáx =	3	Xmáx =	6	Xmáx =	6
Xscl =	1	Xscl =	1	Xscl =	1
Ymín =	−2	Ymín =	−4	Ymín =	−4
Ymáx =	2	Ymáx =	4	Ymáx =	4
Yscl =	1	Yscl =	1	Yscl =	2

Figura 20



En la figura 20 se muestra la gráfica de la recta $y = x$ en una pantalla cuadrada, utilizando el rectángulo de visualización dado en el ejemplo b). Observe que la línea ahora sí biseca los cuadrantes primero y tercero. Compare esta ilustración con la figura 19.

5 Ejercicios

En los problemas 1-8, determine cuáles de los rectángulos de visualización tienen como resultado una pantalla cuadrada.

	1.	2.	3.	4.
Xmín =	−3	−5	0	−6
Xmáx =	3	5	9	6
Xscl =	2	1	3	1
Ymín =	−2	−4	−2	−4
Ymáx =	2	4	4	4
Yscl =	2	1	2	2

	5.	6.	7.	8.
Xmín =	−6	−6	0	−6
Xmáx =	6	6	9	6
Xscl =	1	2	1	2
Ymín =	−2	−4	−2	−4
Ymáx =	2	4	4	4
Yscl =	0.5	1	1	2

(En el problema 8 aparecen impresos "Ymin" y "Ymax" sin tilde.)

9. Si Xmín $= -4$, Xmáx $= 8$, y Xscl $= 1$, ¿qué valores de Ymín, Ymáx y Yscl se deben seleccionar para que el rectángulo de visualización incluya al punto (4, 8) y la pantalla sea cuadrada?

10. Si Xmín $= -6$, Xmáx $= 12$, y Xscl $= 2$, ¿qué valores de Ymín, Ymáx y Yscl se deben seleccionar para que el rectángulo de visualización incluya al punto (4, 8) y la pantalla sea cuadrada?

6 Uso de una calculadora gráfica para representar desigualdades

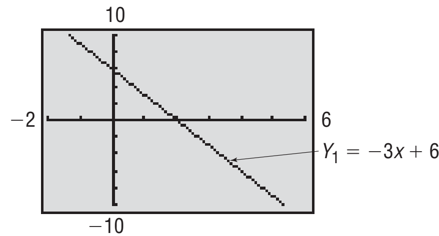
Resulta más sencillo comenzar con un ejemplo.

EJEMPLO 1 **Graficar una desigualdad utilizando una calculadora gráfica**

Use una calculadora gráfica para representar: $3x + y - 6 \leq 0$

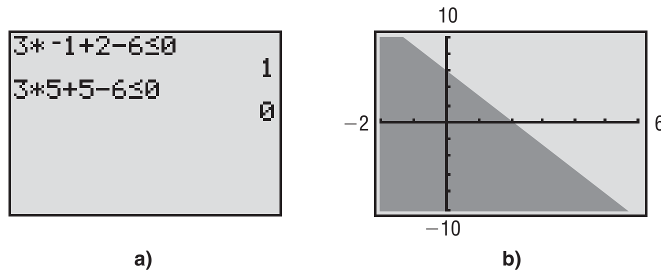
Solución Se comienza por graficar la ecuación $3x + y - 6 = 0$ ($Y_1 = -3x + 6$). Vea la figura 21.

Figura 21



Con la representación gráfica a mano, se deben probar varios puntos seleccionados de cada región, y determinar si satisfacen la desigualdad. Por ejemplo, para probar el punto $(-1, 2)$, se introduce $3(-1) + 2 - 6 \leq 0$. Vea la figura 22a). El 1 que aparece a la derecha de la pantalla indica que la expresión introducida (la desigualdad) es verdadera. Cuando se prueba el punto $(5, 5)$, aparece un 0, señalando que la expresión introducida es falsa. De esta manera, $(-1, 2)$ es parte de la gráfica de la desigualdad y $(5, 5)$ no lo es. En la figura 22b) se muestra la gráfica de la desigualdad en una calculadora gráfica TI-83.*

Figura 22



a) b)

A continuación se describen los pasos para graficar una desigualdad utilizando una calculadora gráfica.

> **Pasos para graficar una desigualdad usando una calculadora gráfica**
>
> **Paso 1:** Reemplace el símbolo desigualdad por un signo de igual, despeje y grafique la ecuación.
>
> **Paso 2:** En cada una de las regiones, seleccione un punto de prueba P y determine si sus coordenadas satisfacen la desigualdad.
>
> a) Si el punto de prueba satisface la desigualdad, entonces lo harán todos los puntos de esa región. Esto se indica utilizando la calculadora gráfica para sombrear la región.
>
> b) Si las coordenadas de P no satisfacen la desigualdad, lo mismo sucederá con los puntos de esa región.

*Consulte las técnicas de sombreado en su manual del propietario.

7 Uso de una calculadora gráfica para resolver sistemas de ecuaciones lineales

La mayoría de las calculadoras gráficas tiene la capacidad para transformar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales en su forma de fila escalonada. En el siguiente ejemplo, ejemplo 6 de la sección 11.2, se demuestra esta característica utilizando una calculadora gráfica TI-83.

EJEMPLO 1 Resolver un sistema de ecuaciones lineales usando una calculadora gráfica

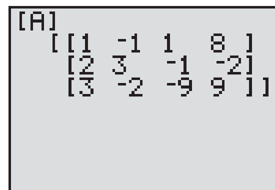
Resuelva:
$$\begin{cases} x - y + z = 8 & (1) \\ 2x + 3y - z = -2 & (2) \\ 3x - 2y - 9z = 9 & (3) \end{cases}$$

Solución La matriz aumentada del sistema es

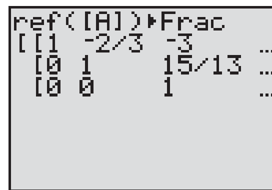
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -9 & 9 \end{array}\right]$$

Se introdujo esta matriz en la calculadora gráfica y se nombró A. Vea la figura 23a). Si se utiliza el comando REF (forma de fila escalonada, por sus siglas en inglés) en la matriz A, se obtienen los resultados que se muestran en la figura 23b). Puesto que en la pantalla no cabe toda la matriz, se necesita desplazarse hacia la derecha para ver el resto de ella. Vea la figura 23c).

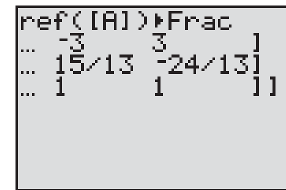
Figura 23



a)



b)



c)

El sistema de ecuaciones representado por la matriz en forma de fila escalonada es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{2}{3} & -3 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{15}{13} & -\frac{24}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x - \frac{2}{3}y - 3z = 3 & (1) \\ y + \frac{15}{13}z = -\frac{24}{13} & (2) \\ z = 1 & (3) \end{cases}$$

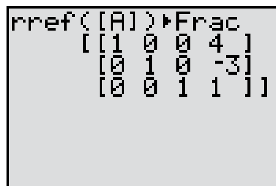
Si se sustituye $z = 1$, se obtiene

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}y - 3(1) = 3 & (1) \\ y + \frac{15}{13}(1) = -\frac{24}{13} & (2) \end{cases} \xrightarrow{\text{Se simplifica.}} \begin{cases} x - \frac{2}{3}y = 6 & (1) \\ y = \frac{-39}{13} = -3 & (2) \end{cases}$$

Si se despeja y en la segunda ecuación, se encuentra que $y = -3$. Si se sustituye $y = -3$ en $x - \frac{2}{3}y = 6$, se encuentra que $x = 4$. La solución del sistema es $x = 4, y = -3, z = 1$. ◀

Observe que la forma de fila escalonada de la matriz aumentada si se utiliza una calculadora gráfica es distinta de la forma de fila escalonada que se muestra en nuestra solución (p. 863), aún así, ¡ambas matrices proporcionan la misma solución! Esto se debe a que las dos soluciones utilizan distintas operaciones de fila para obtener la forma de fila escalonada. Con toda probabilidad, estas soluciones separan su camino en el paso 4 de la solución algebraica, donde se evita la introducción de fracciones intercambiando las filas 2 y 3.

Figura 24



La mayoría de las calculadoras gráficas también tiene la capacidad para convertir una matriz a su forma de fila escalonada reducida. En la figura 24 se muestra la forma de fila escalonada reducida de la matriz aumentada del ejemplo 1, generada utilizando el comando RREF en una calculadora gráfica TI-83. Al emplear este comando, se observa que la solución del sistema es $x = 4, y = -3, z = 1$.

8 Uso de una calculadora gráfica para representar una ecuación polar

La mayoría de las calculadoras gráficas requiere los siguientes pasos para obtener la gráfica de una ecuación polar. Cerciórese de estar en el modo POLar.

Uso de una calculadora gráfica para representar una ecuación polar

Paso 1: Cambiar la configuración de la calculadora a modo polar. Despejar r para obtener una ecuación en términos de θ.

Paso 2: Seleccionar el modo polar para el rectángulo de visualización. Además de configurar Xmín, Xmáx, Xscl, y demás, el rectángulo de visualización en modo polar requiere que se establezcan los valores máximo y mínimo de θ y la configuración del incremento para θ (θstep). Además, se deben emplear pantalla cuadrada y medición en radianes.

Paso 3: Introducir la expresión que incluye a θ obtenida en el paso 1 (consulte en el manual la manera correcta de introducir esta expresión).

Paso 4: Graficar.

EJEMPLO 1

Graficar una ecuación polar utilizando una calculadora gráfica

Use una calculadora gráfica para graficar ecuación polar $r \text{ sen } \theta = 2$.

Solución

Paso 1: Se despeja r para obtener una ecuación en términos de θ.

$$r \text{ sen } \theta = 2$$
$$r = \frac{2}{\text{sen } \theta}$$

Paso 2: Desde el modo polar, se selecciona el rectángulo de visualización. Se utilizará el que se describe a continuación.

$$\theta\text{mín} = 0 \qquad X\text{mín} = -9 \qquad Y\text{mín} = -6$$
$$\theta\text{máx} = 2\pi \qquad X\text{máx} = 9 \qquad Y\text{máx} = 6$$
$$\theta\text{step} = \frac{\pi}{24} \qquad X\text{scl} = 1 \qquad Y\text{scl} = 1$$

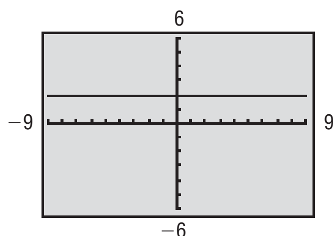
θstep determina el número de puntos que graficará la calculadora gráfica. Por ejemplo, si θstep es $\frac{\pi}{24}$, entonces la calculadora gráfica evaluará a r en $\theta = 0(\theta\text{mín}), \frac{\pi}{24}, \frac{2\pi}{24}, \frac{3\pi}{24}$, y así sucesivamente, hasta 2π (θmáx). Cuánto más pequeño es θstep, más puntos trazará la calculadora gráfica. Se recomienda al alumno experimentar con distintos valores de θmín, θmáx y θstep, para observar cómo influyen en la gráfica.

PASO 3: Se introduce la expresión $\frac{2}{\text{sen}\,\theta}$ después del símbolo $r_1 =$.

PASO 4: Se grafica.

En la figura 25 se muestra la gráfica. ◀

Figura 25



9 Uso de una calculadora gráfica para graficar ecuaciones paramétricas

La mayoría de las calculadoras gráficas tiene la capacidad para graficar ecuaciones paramétricas. Por lo general, se requieren los siguientes pasos para obtener la gráfica de ecuaciones paramétricas. Revise el manual para ver cómo funciona su calculadora gráfica.

Uso de una calculadora gráfica para gráficar ecuaciones paramétricas

PASO 1: Cambiar la configuración de la calculadora a modo PARamétrico. Introducir $x(t)$ y $y(t)$.

PASO 2: Seleccionar la ventana de visualización. Además de configurar Xmín, Xmáx, Xscl, y demás, la ventana de visualización en modo paramédico requiere que se establezcan los valores máximo y mínimo del parámetro t y la configuración del incremento para t (Tstep).

PASO 3: Graficar.

EJEMPLO 1 **Gráfica de una curva definida por ecuaciones paramétricas utilizando una calculadora gráfica.**

Grafique la curva definida por las ecuaciones paramétricas:

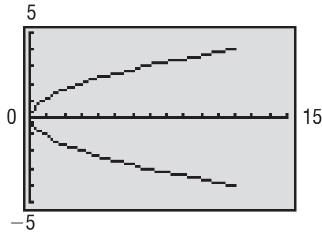
$$x = 3t^2, \qquad y = 2t, \qquad -2 \le t \le 2$$

Solución **PASO 1:** Introducir las ecuaciones $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 2t$ con la calculadora gráfica en modo PARamétrico.

PASO 2: Seleccionar la ventana de visualización. Puesto que el intervalo es $-2 \le t \le 2$, se selecciona la siguiente ventana cuadrada de visualización:

$$T\text{mín} = -2 \qquad X\text{mín} = 0 \qquad Y\text{mín} = -5$$
$$T\text{máx} = 2 \qquad X\text{máx} = 15 \qquad Y\text{máx} = 5$$
$$T\text{step} = 0.1 \qquad X\text{scl} = 1 \qquad Y\text{scl} = 1$$

Figura 26



Se elige Tmín $= -2$ y Tmáx $= 2$ porque $-2 \le t \le 2$. Por último, la elección para Tstep determinará el número de puntos que trazará la calculadora gráfica. Por ejemplo, con Tstep en 0.1, la calculadora gráfica evaluará a x y y en $t = -2, -1.9, -1.8$, y así sucesivamente. Cuánto más pequeño sea Tstep, más puntos trazará la calculadora gráfica. Se recomienda al lector experimentar con distintos valores de Tstep, para observar cómo influye en la gráfica.

PASO 3: Graficar. Observe la dirección en la que se traza la gráfica. Tal dirección muestra la orientación de la curva.

En la figura 26 se muestra la gráfica completa. ◀

Exploración

Grafique las siguientes ecuaciones paramétricas utilizando una calculadora gráfica con Xmín $= 0$, Xmáx $= 15$, Ymín $= -5$, Ymáx $= 5$ y Tstep $= 0.1$.

1. $x = \dfrac{3t^2}{4}, \quad y = t, \quad -4 \le t \le 4$

2. $x = 3t^2 + 12t + 12, \quad y = 2t + 4, \quad -4 \le t \le 0$

3. $x = 3t^{2/3}, \quad y = 2\sqrt[3]{t}, \quad -8 \le t \le 8$

Compare estas gráficas con la que se muestra en la figura 26. Se concluye que las ecuaciones paramétricas que definen una curva no son únicas; es decir, ecuaciones paramétricas distintas pueden representar la misma gráfica.

Exploración

En el modo función (FUNCT), grafique $x = \dfrac{3y^2}{4}\left(Y_1 = \sqrt{\dfrac{4x}{3}} \text{ y } Y_2 = -\sqrt{\dfrac{4x}{3}}\right)$ con Xmín $= 0$, Xmáx $= 15$, Ymín $= -5$, Ymáx $= 5$. Compare esta gráfica con la figura 26.

¿Por qué son distintas?

RESPUESTAS

CAPÍTULO R Repaso

Problemas históricos *(página 15)*

1. a) 1,20 **b)** 2,50 **2. a)** $\frac{7}{3} = 2.333\ldots$ **b)** $\frac{39}{8} = 4.875$ **c)** $\frac{84,823}{27,000} = 3.141592592\ldots$

R.1 Conceptos y vocabulario *(página 15)*

1. racional **2.** 31 **3.** Distributiva **4.** $5(x + 3) = 6$ **5.** Verdadero **6.** Falso **7.** Falso **8.** Verdadero

R.1 Ejercicios *(página 15)*

9. a) $\{2, 5\}$ **b)** $\{-6, 2, 5\}$ **c)** $\left\{-6, \frac{1}{2}, -1.333..., 2, 5\right\}$ **d)** $\{\pi\}$ **e)** $\left\{-6, \frac{1}{2}, -1.333..., \pi, 2, 5\right\}$ **11. a)** $\{1\}$ **b)** $\{0, 1\}$ **c)** $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ **d)** Ninguno **e)** $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ **13. a)** Ninguno **b)** Ninguno **c)** Ninguno **d)** $\left\{\sqrt{2}, \pi, \sqrt{2} + 1, \pi + \frac{1}{2}\right\}$ **e)** $\left\{\sqrt{2}, \pi, \sqrt{2} + 1, \pi + \frac{1}{2}\right\}$ **15. a)** 18.953 **b)** 18.952 **17. a)** 28.653 **b)** 28.653 **19. a)** 0.063 **b)** 0.062 **21. a)** 9.999 **b)** 9.998 **23. a)** 0.429 **b)** 0.428 **25. a)** 34.733 **b)** 34.733 **27.** $3 + 2 = 5$ **29.** $x + 2 = 3 \cdot 4$ **31.** $3 \cdot y = 1 + 2$ **33.** $x - 2 = 6$ **35.** $\frac{x}{2} = 6$ **37.** 7 **39.** 6 **41.** 1 **43.** $\frac{13}{3}$ **45.** -11 **47.** 11 **49.** -4 **51.** 1 **53.** 6 **55.** $\frac{2}{7}$ **57.** $\frac{4}{45}$ **59.** $\frac{23}{20}$ **61.** $\frac{79}{30}$ **63.** $\frac{13}{36}$ **65.** $-\frac{16}{45}$ **67.** $\frac{1}{60}$ **69.** $\frac{15}{22}$ **71.** $6x + 24$ **73.** $x^2 - 4x$ **75.** $x^2 + 6x + 8$ **77.** $x^2 - x - 2$ **79.** $x^2 - 10x + 16$ **81.** $x^2 - 4$ **83.** $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$ **85.** $2(3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$; $(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) = 6 \cdot 8 = 48$ **87.** No; $2 - 3 \neq 3 - 2$ **89.** No; $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$ **91.** Propiedad de símetría **93.** No; no **95.** 1

R.2 Conceptos y vocabulario *(página 26)*

1. variable **2.** origen **3.** estricta **4.** base; exponente o potencia **5.** 1.2345678×10^3 **6.** Verdadero **7.** Falso **8.** Falso **9.** Falso **10.** Falso

R.2 Ejercicios *(página 26)*

11. [recta numérica: -2.5, -1, 0, 0.25, $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{5}{2}$] **13.** $>$ **15.** $>$ **17.** $>$ **19.** $=$ **21.** $<$ **23.** $x > 0$ **25.** $x < 2$ **27.** $x \leq 1$

29. [recta numérica: -2] **31.** [recta numérica: -1] **33.** 1 **35.** 2 **37.** 6 **39.** 4 **41.** -28 **43.** $\frac{4}{5}$ **45.** 0 **47.** 1 **49.** 5 **51.** 1 **53.** 22 **55.** 2 **57.** $x = 0$ **59.** $x = 3$ **61.** Ninguno **63.** $x = 1, x = 0, x = -1$ **65.** $\{x|x \neq 5\}$ **67.** $\{x|x \neq -4\}$ **69.** 0°C **71.** 25°C **73.** 16 **75.** $\frac{1}{16}$ **77.** $\frac{1}{9}$ **79.** 9 **81.** 5 **83.** 4 **85.** $64x^6$ **87.** $\frac{x^4}{y^2}$ **89.** $\frac{x}{y}$ **91.** $-\frac{8x^3z}{9y}$ **93.** $\frac{16x^2}{9y^2}$ **95.** -4 **97.** 5 **99.** 4 **101.** 2 **103.** $\sqrt{5}$ **105.** $\frac{1}{2}$ **107.** 10; 0 **109.** 81 **111.** 304,006.671 **113.** 0.004 **115.** 481.890 **117.** 0.000 **119.** 4.542×10^2 **121.** 1.3×10^{-2} **123.** 3.2155×10^4 **125.** 4.23×10^{-4} **127.** 61,500 **129.** 0.001214 **131.** 110,000,000 **133.** 0.081 **135.** $A = lw$ **137.** $C = \pi d$ **139.** $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ **141.** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ **143.** $V = x^3$ **145. a)** \$6000 **b)** \$8000 **147. a)** $2 \leq 5$ **b)** $6 > 5$ **149. a)** Sí **b)** No **151.** 400,000,000 m **153.** 0.0000005 m **155.** 5×10^{-4} pulg. **157.** 5.865696×10^{12} mi **159.** No; $\frac{1}{3}$ es mayor que; 0.000333... **161.** No

R.3 Conceptos y vocabulario *(página 33)*

1. rectángulo; hipotenusa **2.** $A = \frac{1}{2}bh$ **3.** $C = 2\pi r$ **4.** Verdadero **5.** Verdadero **6.** Falso

R.3 Ejercicios *(página 33)*

7. 13 **9.** 26 **11.** 25 **13.** Triángulo rectángulo; 5 **15.** No es un triángulo rectángulo **17.** Triángulo rectángulo; 25 **19.** No es un triángulo rectángulo **21.** 8 pulg.^{2}

23. 4 pulg.^{2} **25.** $A = 25\pi$ m^2; $C = 10\pi$ m **27.** $V = 224$ pies^3; $S = 232$ pies^2 **29.** $V = \frac{256}{3}\pi$ cm^3; $S = 64\pi$ cm^2 **31.** $V = 648\pi$ pulg.^{3}; $S = 306\pi$ pulg.^{2}

33. π unidades cuadradas **35.** 2π unidades cuadradas **37.** Alrededor de 16.8 pies **39.** 64 pies^2 **41.** $24 + 2\pi \approx 30.28$ pies^2; $16 + 2\pi \approx 22.28$ pies^2 **43.** Alrededor de 5.477 millas **45.** De 100 pies: 12.247 millas; de 150 pies: 15.000 millas

R.4 Conceptos y vocabulario *(página 42)*

1. 4; 3 **2.** $x^2 - 16$ **3.** $x^3 - 8$ **4.** Falso **5.** Verdadero **6.** Falso

R.4 Ejercicios *(página 42)*

7. Monomio; variable: x; coeficiente: 2; grado: 3 **9.** No es un monomio **11.** Monomio; variables: x, y; coeficiente: -2; grado: 3 **13.** No es un monomio **15.** No es un monomio **17.** Sí; 2 **19.** Sí; 0 **21.** No **23.** Sí; 3 **25.** No **27.** $x^2 + 7x + 2$ **29.** $x^3 - 4x^2 + 9x + 7$ **31.** $6x^5 + 5x^4 + 3x^2 + x$ **33.** $7x^2 - x - 7$ **35.** $-2x^3 + 18x^2 - 18$ **37.** $2x^2 - 4x + 6$ **39.** $15y^2 - 27y + 30$ **41.** $x^3 + x^2 - 4x$ **43.** $-8x^5 - 10x^2$ **45.** $x^3 + 3x^2 - 2x - 4$ **47.** $x^2 + 6x + 8$ **49.** $2x^2 + 9x + 10$ **51.** $x^2 - 2x - 8$ **53.** $x^2 - 5x + 6$ **55.** $2x^2 - x - 6$ **57.** $-2x^2 + 11x - 12$ **59.** $2x^2 + 8x + 8$ **61.** $x^2 - xy - 2y^2$ **63.** $-6x^2 - 13xy - 6y^2$ **65.** $x^2 - 49$ **67.** $4x^2 - 9$ **69.** $x^2 + 8x + 16$ **71.** $x^2 - 8x + 16$ **73.** $9x^2 - 16$ **75.** $4x^2 - 12x + 9$ **77.** $x^2 - y^2$ **79.** $9x^2 - y^2$ **81.** $x^2 + 2xy + y^2$ **83.** $x^2 - 4xy + 4y^2$ **85.** $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ **87.** $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

R.5 Conceptos y vocabulario *(página 50)*

1. $3x(x - 2)(x + 2)$ **2.** Primo **3.** Verdadero **4.** Falso

R.5 Ejercicios *(página 51)*

5. $3(x + 2)$ **7.** $a(x^2 + 1)$ **9.** $x(x^2 + x + 1)$ **11.** $2x(x - 1)$ **13.** $3xy(x - 2y + 4)$ **15.** $(x - 1)(x + 1)$ **17.** $(2x + 1)(2x - 1)$ **19.** $(x + 4)(x - 4)$ **21.** $(5x + 2)(5x - 2)$ **23.** $(x + 1)^2$ **25.** $(x + 2)^2$ **27.** $(x - 5)^2$ **29.** $(2x + 1)^2$ **31.** $(4x + 1)^2$ **33.** $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ **35.** $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ **37.** $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$ **39.** $(x + 2)(x + 3)$ **41.** $(x + 6)(x + 1)$ **43.** $(x + 5)(x + 2)$ **45.** $(x - 8)(x - 2)$ **47.** $(x - 8)(x + 1)$ **49.** $(x + 8)(x - 1)$ **51.** $(x + 2)(2x + 3)$ **53.** $(x - 2)(2x + 1)$ **55.** $(2x + 3)(3x + 2)$ **57.** $(3x + 1)(x + 1)$ **59.** $(z + 1)(2z + 3)$ **61.** $(x + 2)(3x - 4)$ **63.** $(x - 2)(3x + 4)$ **65.** $(x + 4)(3x + 2)$ **67.** $(x + 4)(3x - 2)$ **69.** $(x + 6)(x - 6)$ **71.** $2(1 + 2x)(1 - 2x)$ **73.** $(x + 2)(x + 5)$ **75.** $(x - 7)(x - 3)$ **77.** $4(x^2 - 2x + 8)$ **79.** Primo **81.** $-(x - 5)(x + 3)$ **83.** $3(x + 2)(x - 6)$ **85.** $y^2(y + 5)(y + 6)$ **87.** $(2x + 3)^2$ **89.** $2(3x + 1)(x + 1)$ **91.** $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$ **93.** $(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2$ **95.** $x^5(x - 1)(x + 1)$ **97.** $(4x + 3)^2$ **99.** $-(4x - 5)(4x + 1)$ **101.** $(2y - 5)(2y - 3)$ **103.** $-(3x - 1)(3x + 1)(x^2 + 1)$ **105.** $(x + 3)(x - 6)$ **107.** $(x + 2)(x - 3)$ **109.** $(3x - 5)(9x^2 - 3x + 7)$ **111.** $(x + 5)(3x + 11)$ **113.** $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$ **115.** $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$ **117.** $2(3x + 4)(9x + 13)$ **119.** $2x(3x + 5)$ **121.** $5(x + 3)(x - 2)^2(x + 1)$ **123.** $3(4x - 3)(4x - 1)$ **125.** $6(3x - 5)(2x + 1)^2(5x - 4)$ **127.** Las posibilidades son $(x \pm 1)(x \pm 4) = x^2 \pm 5x + 4$ o $(x \pm 2)(x \pm 2) = x^2 \pm 4x + 4$, ninguna de las cuales es igual a $x^2 + 4$.

R.6 Conceptos y vocabulario *(página 57)*

1. Cociente; divisor; residuo **2.** $-3\overline{)2 \ \ 0 \ \ -5 \ \ 1}$ **3.** Verdadero **4.** Verdadero

R.6 Ejercicios *(página 58)*

5. $4x^2 - 11x + 23$; residuo -45 **7.** $4x - 3$; residuo $x + 1$ **9.** $5x^2 - 13$; residuo $x + 27$ **11.** $2x^2$; residuo $-x^2 + x + 1$ **13.** $x^2 - 2x + \frac{1}{2}$; residuo $\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ **15.** $-4x^2 - 3x - 3$; residuo -7 **17.** $x^2 - x - 1$; residuo $2x + 2$ **19.** $x^2 + ax + a^2$; residuo 0 **21.** $x^2 + x + 4$; residuo 12 **23.** $3x^2 + 11x + 32$; residuo 99 **25.** $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 15x + 46$; residuo -138 **27.** $4x^5 + 4x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2$; residuo 7 **29.** $0.1x^2 - 0.11x + 0.321$; residuo -0.3531 **31.** $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; residuo 0 **33.** No **35.** Sí **37.** Sí **39.** No **41.** Sí **43.** $a = 1, b = -4, c = 11, d = -17$; $a + b + c + d = -9$

R.7 Conceptos y vocabulario *(página 68)*

1. menores términos **2.** mínimo común múltiplo **3.** Verdadero **4.** Falso

R.7 Ejercicios *(página 68)*

5. $\frac{3}{x - 3}$ **7.** $\frac{x}{3}$ **9.** $\frac{4x}{2x - 1}$ **11.** $\frac{y + 5}{2(y + 1)}$ **13.** $\frac{x + 5}{x - 1}$ **15.** $-(x + 7)$ **17.** $\frac{3}{5x(x - 2)}$ **19.** $\frac{2x}{x + 4}$ **21.** $\frac{8}{3x}$ **23.** $\frac{x - 3}{x + 7}$

25. $\frac{4x}{(x - 2)(x - 3)}$ **27.** $\frac{4}{5(x - 1)}$ **29.** $\frac{(4 - x)(x - 4)}{4x}$ **31.** $\frac{(x + 3)^2}{(x - 3)^2}$ **33.** $\frac{(x - 4)(x + 3)}{(x - 1)(2x + 1)}$ **35.** $\frac{x + 5}{2}$ **37.** $\frac{(x - 2)(x + 2)}{2x - 3}$

39. $\dfrac{3x-2}{x-3}$ **41.** $\dfrac{x+9}{2x-1}$ **43.** $\dfrac{4-x}{x-2}$ **45.** $\dfrac{2(x+5)}{(x-1)(x+2)}$ **47.** $\dfrac{3x^2-2x-3}{(x+1)(x-1)}$ **49.** $\dfrac{-11x-2}{(x+2)(x-2)}$ **51.** $\dfrac{2(x^2-2)}{x(x-2)(x+2)}$

53. $(x-2)(x+2)(x+1)$ **55.** $x(x-1)(x+1)$ **57.** $x^3(2x-1)^2$ **59.** $x(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ **61.** $\dfrac{5x}{(x-6)(x-1)(x+4)}$

63. $\dfrac{2(2x^2+5x-2)}{(x-2)(x+2)(x+3)}$ **65.** $\dfrac{5x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}$ **67.** $\dfrac{-x^2+3x+13}{(x-2)(x+1)(x+4)}$ **69.** $\dfrac{x^3-2x^2+4x+3}{x^2(x+1)(x-1)}$ **71.** $\dfrac{-1}{x(x+h)}$

73. $\dfrac{x+1}{x-1}$ **75.** $\dfrac{(x-1)(x+1)}{2x(2x+1)}$ **77.** $\dfrac{2(5x-1)}{(x-2)(x+1)^2}$ **79.** $\dfrac{-2x(x^2-2)}{(x+2)(x^2-x-3)}$ **81.** $\dfrac{-1}{x-1}$ **83.** $\dfrac{19}{(3x-5)^2}$ **85.** $\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

87. $\dfrac{x(3x+2)}{(3x+1)^2}$ **89.** $-\dfrac{3x^2+8x-3}{(x^2+1)^2}$ **91.** $f=\dfrac{R_1\cdot R_2}{(n-1)(R_1+R_2)}$; $\dfrac{2}{15}$ m

R.8 Conceptos y vocabulario *(página 75)*

1. índice **2.** raíz cúbica **3.** Verdadero **4.** Falso

R.8 Ejercicios *(página 75)*

5. 3 **7.** −2 **9.** $2\sqrt{2}$ **11.** $-2x\sqrt[3]{2}$ **13.** x^3y^2 **15.** x^2y **17.** $6\sqrt{x}$ **19.** $6x\sqrt{x}$ **21.** $15\sqrt[3]{3}$ **23.** $12\sqrt{3}$ **25.** $7\sqrt{2}$ **27.** $\sqrt{2}$

29. $2\sqrt{3}$ **31.** $-\sqrt[3]{2}$ **33.** $x-2\sqrt{x}+1$ **35.** $(2x-1)\sqrt[3]{2x}$ **37.** $(2x-15)\sqrt{2x}$ **39.** $-(x+5y)\sqrt[3]{2xy}$ **41.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **43.** $-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

45. $\dfrac{(5+\sqrt{2})\sqrt{3}}{23}$ **47.** $-\dfrac{19+8\sqrt{5}}{41}$ **49.** $\dfrac{5\sqrt[3]{4}}{2}$ **51.** $\dfrac{2x+h-2\sqrt{x}\sqrt{x+h}}{h}$ **53.** 4 **55.** −3 **57.** 64 **59.** $\dfrac{1}{27}$ **61.** $\dfrac{27\sqrt{2}}{32}$ **63.** $\dfrac{27\sqrt{2}}{32}$

65. $x^{7/12}$ **67.** xy^2 **69.** $x^{4/3}y^{5/3}$ **71.** $\dfrac{8x^{3/2}}{y^{1/4}}$ **73.** $\dfrac{3x+2}{(1+x)^{1/2}}$ **75.** $\dfrac{x(3x^2+2)}{(x^2+1)^{1/2}}$ **77.** $\dfrac{22x+5}{10\sqrt{x-5}\sqrt{4x+3}}$ **79.** $\dfrac{2+x}{2(1+x)^{3/2}}$ **81.** $\dfrac{4-x}{(x+4)^{3/2}}$

83. $\dfrac{1}{x^2(x^2-1)^{1/2}}$ **85.** $\dfrac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(1+x^2)^2}$ **87.** $\dfrac{1}{2}(5x+2)(x+1)^{1/2}$ **89.** $2x^{1/2}(3x-4)(x+1)$ **91.** $(x^2+4)^{1/3}(11x^2+12)$

93. $(3x+5)^{1/3}(2x+3)^{1/2}(17x+27)$ **95.** $\dfrac{3(x+2)}{2x^{1/2}}$ **97.** **a)** 15,660.4 gal **b)** 390.7 gal **99.** $2\sqrt{2}\pi\approx 8.89$ seg. **101.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}\approx 0.91$ seg.

Ejercicios de repaso *(página 79)*

1. **a)** Ninguno **b)** $\{-10\}$ **c)** $\left\{-10, 0.65, 1.343434\ldots, \dfrac{1}{9}\right\}$ **d)** $\{\sqrt{7}\}$ **e)** $\left\{-10, 0.65, 1.343434\ldots, \sqrt{7}, \dfrac{1}{9}\right\}$ **3.** 14 **5.** $\dfrac{3}{4}$ **7.** 3 **9.** $4x-12$

11. 3 **13.** 5 **15.** −10 **17.** −49 **19.** 5 **21.** $\{x|x\neq 6\}$ **23.** $4\sqrt{2}$ **25.** $-2\sqrt[3]{2}$ **27.** $2\sqrt{2}$ **29.** $\dfrac{1}{x^5y}$ **31.** $\dfrac{125}{x^2y}$

33. 5.0625 **35.** Coeficientes: 3, 4, −2, 0, 5, −12; grado: 5 **37.** $2x^4-2x^3+x^2+5x+3$ **39.** $6x^2-7x-5$ **41.** $16x^2-1$
43. x^3-7x-6 **45.** $3x^2+8x+25$; residuo 79 **47.** $-3x^2+4$; residuo −2 **49.** $x^4-x^3+x^2-x+1$; residuo 0
51. $(x+7)(x-2)$ **53.** $(3x+2)(2x-3)$ **55.** $3(x+2)(x-7)$ **57.** $(2x+1)(4x^2-2x+1)$ **59.** $(2x+3)(x-1)(x+1)$

61. $(5x-2)(5x+2)$ **63.** Primo **65.** $(x+4)^2$ **67.** $\dfrac{2x+7}{x-2}$ **69.** $\dfrac{3(3x-1)}{(x+3)(3x+1)}$ **71.** $\dfrac{4x}{(x+1)(x-1)}$ **73.** $\dfrac{x^2+17x+2}{(x-2)(x+2)^2}$

75. $\dfrac{x-1}{x-3}$ **77.** $\dfrac{3x}{5y^2}$ **79.** $3xy^4\sqrt[3]{x}$ **81.** $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ **83.** $-2(1+\sqrt{2})$ **85.** $-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ **87.** $\dfrac{2(1+x^2)}{(2+x^2)^{1/2}}$ **89.** $\dfrac{x(3x+16)}{2(x+4)^{3/2}}$ **91.** $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

93. $(x^2+4)^{1/3}(11x^2+12)$ **95.** 2.81421906×10^8 **97.** Sí **99.** \$0.35 por acción **101.** 216 pies^2; 84 pies **103.** Sí, alrededor de 229.2 millas

C A P Í T U L O 1 Ecuaciones y desigualdades

1.1 Conceptos y vocabulario *(página 93)*

4. equivalente **5.** identidad **6.** lineal; primer grado **7.** Falso **8.** Verdadero

1.1 Ejercicios *(página 94)*

9. $\{3\}$ **11.** $\{-5\}$ **13.** $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ **15.** $\left\{\dfrac{5}{4}\right\}$ **17.** $\{-2\}$ **19.** $\{3\}$ **21.** $\{-1\}$ **23.** $\{-2\}$ **25.** $\{-18\}$ **27.** $\{-4\}$ **29.** $\left\{-\dfrac{3}{4}\right\}$ **31.** $\{-20\}$

33. $\{2\}$ **35.** $\{0.5\}$ **37.** $\left\{\dfrac{29}{10}\right\}$ **39.** $\{2\}$ **41.** $\{8\}$ **43.** $\{2\}$ **45.** $\{-1\}$ **47.** $\{3\}$ **49.** No tiene solución **51.** No tiene solución **53.** $\{-6\}$

55. $\{34\}$ **57.** $\left\{-\frac{20}{39}\right\}$ **59.** $\{-1\}$ **61.** $\left\{-\frac{11}{6}\right\}$ **63.** $\{-6\}$ **65.** $\{5.91\}$ **67.** $\{0.41\}$ **69.** $x = \frac{b + c}{a}$ **71.** $x = \frac{abc}{a + b}$ **73.** $x = a^2$

75. $a = 3$ **77.** $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ **79.** $R = \frac{mv^2}{F}$ **81.** $r = \frac{S - a}{S}$ **83.** Se invertirán \$11,500 en bonos y \$8500 en certificados de depósito.

85. Scott recibirá \$400,000; Alice \$300,000 y Tricia \$200,000. **87.** La tarifa regular por hora es de \$8.50. **89.** Brooke necesita una calificación de 85. **91.** El precio original era de \$147,058.82; adquirir el modelo ahorra \$22,058.82. **93.** La librería pagó \$41.48 por el libro. **95.** Había 3260 adultos. **97.** La longitud es de 19 pies; la anchura de 11 pies. **99.** Para obtener el paso (7), se divide entre $x - 2$. Puesto que de acuerdo con el paso (1) $x = 2$, en realidad se divide entre 0.

Problemas históricos *(página 106)*

1. El área de cada uno de los cuadrados sombreados es 9, por lo que el cuadrado grande tendrá un área de $85 + 4(9) = 121$. El área del cuadrado más grande también se encuentra mediante la expresión $(x + 6)^2$, de manera que $(x + 6)^2 = 121$. Tomando la raíz cuadrada de cada uno de sus lados, $x + 6 = 11$ o $x = 5$.

2. Sea $z = -6$, así $z^2 + 12z - 85 = -121$. Se obtiene la ecuación $u^2 - 121 = 0$ o $u^2 = 121$. Así $u = \pm 11$, o $x = \pm 11 - 6$. $x = -17$ o $x = 5$.

3.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ or } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.2 Conceptos y vocabulario *(página 106)*

5. Añadir; $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ **6.** Discriminante; negativa **7.** Falso **8.** Falso

1.2 Ejercicios *(página 107)*

9. $\{0, 9\}$ **11.** $\{-5, 5\}$ **13.** $\{-3, 2\}$ **15.** $\left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$ **17.** $\{-4, 4\}$ **19.** $\{2, 6\}$ **21.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **23.** $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ **25.** $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ **27.** $\left\{-\frac{3}{4}, 2\right\}$

29. $\{-5, 5\}$ **31.** $\{-1, 3\}$ **33.** $\{-3, 0\}$ **35.** 16 **37.** $\frac{1}{16}$ **39.** $\frac{1}{9}$ **41.** $\{-7, 3\}$ **43.** $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$ **45.** $\left\{\frac{-1 - \sqrt{7}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{7}}{6}\right\}$

47. $\{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$ **49.** $\{2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\}$ **51.** $\left\{1, \frac{3}{2}\right\}$ **53.** No tiene solución real. **55.** $\left\{\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right\}$ **57.** $\left\{0, \frac{9}{4}\right\}$

59. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$ **61.** $\left\{-\frac{2}{3}, 1\right\}$ **63.** $\left\{\frac{1 - \sqrt{33}}{8}, \frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right\}$ **65.** No tiene solución real. **67.** $\{0.63, 3.47\}$ **69.** $\{-2.80, 1.07\}$ **71.** $\{-0.85, 1.17\}$

73. $\{-8.16, -0.22\}$ **75.** $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$ **77.** $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ **79.** $\left\{-\frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right\}$ **81.** $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ **83.** $\left\{\frac{-\sqrt{2} + 2}{2}, \frac{-\sqrt{2} - 2}{2}\right\}$

85. $\left\{\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right\}$ **87.** No tiene solución real. **89.** Solución real repetida. **91.** Dos soluciones desiguales reales.

93. Las dimensiones son 11 por 13 pies. **95.** Las dimensiones son 5 por 8 metros. **97.** Las dimensiones deben ser 4 por 4 pies.
99. a) La bola golpea el suelo después de 6 segundos. **b)** En su trayectoria, la bola pasa por arriba del edificio después de 5 segundos.
101. La dimensiones deben ser 11.55 por 6.55 cm. **103.** El borde tendrá 2.71 pies de ancho. **105.** El borde tendrá 2.56 pies de ancho.

107. Se deben añadir 36 enteros consecutivos. **109.** $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$ **111.** $k = \frac{1}{2}$ o $k = -\frac{1}{2}$

113. $ax^2 + bx + c = 0, x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $ax^2 - bx + c = 0, x = \frac{b \pm \sqrt{(-b)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

115. b)

1.3 Conceptos y vocabulario *(página 117)*

4. Real; imaginaria; unidad imaginaria **5.** $\{-2i, 2i\}$ **6.** Falso **7.** Verdadero **8.** Falso

1.3 Ejercicios *(página 117)*

9. $8 + 5i$ **11.** $-7 + 6i$ **13.** $-6 - 11i$ **15.** $6 - 18i$ **17.** $6 + 4i$ **19.** $10 - 5i$ **21.** 37 **23.** $\frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$ **25.** $1 - 2i$ **27.** $\frac{5}{2} - \frac{7}{2}i$ **29.** $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **31.** $2i$ **33.** $-i$ **35.** i **37.** -6 **39.** $-10i$ **41.** $-2 + 2i$ **43.** 0 **45.** 0 **47.** $2i$ **49.** $5i$ **51.** $5i$ **53.** $\{-2i, 2i\}$ **55.** $\{-4, 4\}$ **57.** $\{3 - 2i, 3 + 2i\}$ **59.** $\{3 - i, 3 + i\}$ **61.** $\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right\}$ **63.** $\left\{\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right\}$ **65.** $\left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ **67.** $\{2, -1 - \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i\}$ **69.** $\{-2, 2, -2i, 2i\}$ **71.** $\{-3i, -2i, 2i, 3i\}$ **73.** Dos soluciones complejas, conjugadas entre sí **75.** Dos soluciones reales desiguales **77.** Una solución real repetida **79.** $2 - 3i$ **81.** 6 **83.** 25

85. $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a; z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$

87. $\overline{z + w} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$

1.4 Conceptos y vocabulario *(página 123)*

4. Extraña **5.** De forma cuadrática **6.** Verdadero

1.4 Ejercicios *(página 123)*

7. $\{1\}$ **9.** No tiene solución real **11.** $\{-13\}$ **13.** $\{4\}$ **15.** $\{-1\}$ **17.** $\{0, 64\}$ **19.** $\{3\}$ **21.** $\{2\}$ **23.** $\left\{-\frac{8}{5}\right\}$ **25.** $\{8\}$ **27.** $\{-1, 3\}$ **29.** $\{1, 5\}$ **31.** $\{1\}$ **33.** $\{5\}$ **35.** $\{2\}$ **37.** $\{-4, 4\}$ **39.** $\{0, 3\}$ **41.** $\{-2, -1, 1, 2\}$ **43.** $\{-1, 1\}$ **45.** $\{-2, 1\}$ **47.** $\{-6, -5\}$ **49.** $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ **51.** $\left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$ **53.** $\left\{0, \frac{1}{16}\right\}$ **55.** $\{16\}$ **57.** $\{1\}$ **59.** $\left\{\left(\frac{9 - \sqrt{17}}{8}\right)^4, \left(\frac{9 + \sqrt{17}}{8}\right)^4\right\}$ **61.** $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ **63.** $\{-4, 1\}$ **65.** $\left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$ **67.** $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ **69.** $\left\{-\frac{1}{8}, 27\right\}$ **71.** $\left\{-2, -\frac{4}{5}\right\}$ **73.** $\{-3, 0, 3\}$ **75.** $\left\{0, \frac{3}{4}\right\}$ **77.** $\{-5, 0, 4\}$ **79.** $\{-1, 1\}$ **81.** $\{-2, 2, 3\}$ **83.** $\left\{-2, \frac{1}{2}, 2\right\}$ **85.** $\left\{\frac{2}{5}\right\}$ **87.** $\{0.34, 11.66\}$ **89.** $\{-1.03, 1.03\}$ **91.** $\{-1.85, 0.17\}$ **93.** $\{1.5, 5\}$ **95.** La profundidad del pozo que es 229.94 pies.

1.5 Conceptos y vocabulario *(página 133)*

3. Negativo **4.** Intervalo cerrado **5.** Propiedades de la multiplicación **6.** Verdadero **7.** Verdadero **8.** Verdadero **9.** Falso **10.** Verdadero

1.5 Ejercicios *(página 133)*

11. $[0, 2]; 0 \le x \le 2$ **13.** $(-1, 2); -1 < x < 2$ **15.** $[0, 3); 0 \le x < 3$ **17. a)** $6 < 8$ **b)** $-2 < 0$ **c)** $9 < 15$ **d)** $-6 > -10$

19. a) $7 > 0$ **b)** $-1 > -8$ **c)** $12 > -9$ **d)** $-8 < 6$ **21. a)** $2x + 4 < 5$ **b)** $2x - 4 < -3$ **c)** $6x + 3 < 6$ **d)** $-4x - 2 > -4$

23. $[0, 4]$ (0, 4)

25. $[4, 6)$ (4, 6)

27. $[4, \infty)$ (4)

29. $(-\infty, -4)$ (−4)

31. $2 \le x \le 5$ (2, 5)

33. $-3 < x < -2$ (−3, −2)

35. $x \ge 4$ (4)

37. $x < -3$ (−3)

39. $<$ **41.** $>$ **43.** $\ge$ **45.** $<$ **47.** $\le$ **49.** $>$ **51.** $\ge$

53. $\{x|x < 4\}$ o $(-\infty, 4)$ (4)

55. $\{x|x \ge -1\}$ o $[-1, \infty)$ (−1)

57. $\{x|x > 3\}$ o $(3, \infty)$ (3)

59. $\{x|x \ge 2\}$ o $[2, \infty)$ (2)

61. $\{x|x > -7\}$ o $(-7, \infty)$ (−7)

63. $\left\{x \middle| x \le \frac{2}{3}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ ($\frac{2}{3}$)

65. $\{x|x < -20\}$ o $(-\infty, -20)$ (−20)

67. $\left\{x \middle| x \ge \frac{4}{3}\right\}$ o $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$ ($\frac{4}{3}$)

69. $\{x|3 \le x \le 5\}$ o $[3, 5]$ (3, 5)

71. $\left\{x \middle| \frac{2}{3} \le x \le 3\right\}$ o $\left[\frac{2}{3}, 3\right]$ ($\frac{2}{3}$, 3)

73. $\left\{x \middle| -\frac{11}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}$ o $\left(-\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ($-\frac{11}{2}$, $\frac{1}{2}$)

75. $\{x|-6 < x < 0\}$ o $(-6, 0)$ (−6, 0)

77. $\{x|x < -5\}$ o $(-\infty, -5)$ (−5)

79. $\{x|x \ge -1\}$ o $[-1, \infty)$ (−1)

81. $\left\{x \middle| \frac{1}{2} \le x < \frac{5}{4}\right\}$ o $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ **83.** $\left\{x \middle| x < -\frac{1}{2}\right\}$ o $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ **85.** $\left\{x \middle| x > \frac{10}{3}\right\}$ o $\left(\frac{10}{3}, \infty\right)$ **87.** $\{x|x > 3\}$ o $(3, \infty)$

$\frac{1}{2}$ $\frac{5}{4}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{10}{3}$ 3

89. $a = 3, b = 5$ **91.** $a = -12, b = -8$ **93.** $a = 3, b = 11$ **95.** $a = \frac{1}{4}, b = 1$ **97.** $a = 4, b = 16$ **99.** $\{x|x \ge -2\}$

101. $21 <$ Edad < 30 **103. a)** Hombre ≥ 73.4 **b)** Mujer ≥ 79.7 **c)** Una mujer puede esperar vivir 6.3 años más.
105. La comisión del agente varía de $45,000 hasta $95,000 inclusive. Como porcentaje del precio de venta, la comisión va del 5 a 8.6%, inclusive. **107.** La cantidad retenida varía desde 76.35 hasta 126.35, inclusive. **109.** El consumo varía desde 675.41 hasta 2500.91 kW por h, inclusive. **111.** El costo del distribuidor va desde 7457.63 hasta 7857.14, inclusive. **113.** Necesita por lo menos 74 en el quinto examen.

115. $\frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2} > 0$; por lo tanto, $a < \frac{a+b}{2}$.
$b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0$; por lo tanto, $b > \frac{a+b}{2}$.

117. $(\sqrt{ab})^2 - a^2 = ab - a^2 = a(b-a) > 0$; entonces, $(\sqrt{ab})^2 > a^2$ y $\sqrt{ab} > a$.
$b^2 - (\sqrt{ab})^2 = b^2 - ab = b(b-a) > 0$; entonces $b^2 > (\sqrt{ab})^2$ y $b > \sqrt{ab}$.

119. $h - a = \frac{2ab}{a+b} - a = \frac{ab - a^2}{a+b} = \frac{a(b-a)}{a+b} > 0$; entonces, $h > a$.
$b - h = b - \frac{2ab}{a+b} = \frac{b^2 - ab}{a+b} = \frac{b(b-a)}{a+b} > 0$; entonces $h < b$.

1.6 Conceptos y vocabulario *(página 139)*

3. $\{-5, 5\}$ **4.** $\{x|-5 < x < 5\}$ **5.** Verdadero **6.** Verdadero

1.6 Ejercicios *(página 139)*

7. $\{-3, 3\}$ **9.** $\{-4, 1\}$ **11.** $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$ **13.** $\{-4, 4\}$ **15.** $\{2\}$ **17.** $\left\{-\frac{27}{2}, \frac{27}{2}\right\}$ **19.** $\left\{-\frac{36}{5}, \frac{24}{5}\right\}$ **21.** No tiene solución **23.** $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

25. $\{-3, 3\}$ **27.** $\{-1, 3\}$ **29.** $\{-2, -1, 0, 1\}$ **31.** $\{x|-4 < x < 4\}$; $(-4, 4)$ **33.** $\{x|x < -4$ o $x > 4\}$; $(-\infty, -4)$ o $(4, \infty)$

35. $\{x|1 < x < 3\}$; $(1, 3)$ **37.** $\left\{x \middle| -\frac{2}{3} \le x \le 2\right\}$; $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$ **39.** $\{x|x \le 1$ o $x \ge 5\}$; $(-\infty, 1]$ o $[5, \infty)$ **41.** $\left\{x \middle| -1 < x < \frac{3}{2}\right\}$; $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

43. $\{x|x < -1$ o $x > 2\}$; $(-\infty, -1)$ o $(2, \infty)$ **45.** No tiene solución **47.** $\left\{x \middle| x < -\frac{3}{2}\text{ o } x > \frac{3}{2}\right\}$; $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ o $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

49. $\{x|-1 \le x \le 2\}$; $[-1, 2]$ **51.** No tiene solución **53.** Todos los números reales; $(-\infty, \infty)$ **55.** $|x - 98.6| \ge 1.5$; $x \le 97.1$ o $x \ge 100.1$

57. $|x - 3| < \frac{1}{2}$; $\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$ **59.** $|x + 3| > 2$; $x < -5$ o $x > -1$ **61.** $a = 2, b = 8$ **63.** $a = -15, b = -7$ **65.** $a = -1, b = -\frac{1}{15}$

67. $(b - a) = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$. Puesto que $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$, $\sqrt{a} > 0$, $\sqrt{b} > 0$, entonces $b - a > 0$, de manera que $a < b$

69. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$; entonces, $|a + b| \le |a| + |b|$. **71.** $x^2 - a < 0$; $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) < 0$; por lo tanto, $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$. **73.** $\{x|-1 < x < 1\}$ **75.** $\{x|x \le -3$ o $x \ge 3\}$ **77.** $\{x|-4 \le x \le 4\}$ **79.** $\{x|x < -2$ or $x > 2\}$ **81.** $\{-1, 5\}$

1.7 Conceptos y vocabulario *(página 147)*

1. Modelo matemático **2.** Interés **3.** Movimiento uniforme **4.** Falso **5.** Verdadero **6.** $100 - x$

1.7 Ejercicios *(página 148)*

7. $A = \pi r^2$; $r =$ radio, $A =$ área **9.** $A = s^2$; $A =$ área, $s =$ longitud de un lado. **11.** $F = ma$; $F =$ fuerza, $m =$ masa, $a =$ aceleración
13. $W = Fd$; $W =$ trabajo, $F =$ fuerza, $d =$ distancia **15.** $C = 150x$; $C =$ costo variable total, $x =$ número de lavavajillas.
17. 31,250 en bonos y 18,750 certificados. **19.** $11,600 al 8%. **21.** 75 libras de té Eatrly Gray con 25 libras de té Orange Pekoe.
23. Mezclar 40 libras de almendra con los cacahuates. **25.** La velocidad de la corriente es 2.286 millas/h. **27.** La velocidad de la corriente es de 5 millas/h. **29.** Trabajando juntos, lleva 12 minutos. **31. a)** la dimensiones son 10 por 5 pies. **b)** el área es 50 pies cuadrados. **c)** de dimensiones serían 7.5 por 7.5 pies **d)** el área sería de 56.25 pies cuadrados **33.** El defensivo atrapa la ala cerrada en su lleva 45.

35. Añadir $\frac{2}{3}$ galones de punto. **37.** Evaporar 10.67. **39.** Se deben mezclar 40 gramos de oro de 12 quilates con 20 gramos de oro puro.

41. Mike rebasa a Dan a $\frac{1}{3}$ milla de la salida, 2 minutos después de haber comenzado correr. **43.** Arrancar la bomba auxiliar a las 9:45 A.M.

45. La tina se llenará en una hora. **47.** Se ordenaron 175 cajas. **49.** Lewis le ganaría a Burke por 16.75 m. **53.** La velocidad promedio es de 49.5 millas por hora.

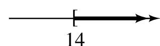
Ejercicios de repaso *(página 152)*

1. $\{-18\}$ **3.** $\{6\}$ **5.** $\left\{\frac{1}{5}\right\}$ **7.** $\{6\}$ **9.** No tiene solución real **11.** $\left\{\frac{11}{8}\right\}$ **13.** $\left\{-2, \frac{3}{2}\right\}$ **15.** $\left\{\frac{1-\sqrt{13}}{4}, \frac{1+\sqrt{13}}{4}\right\}$ **17.** $\{-3, 3\}$

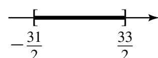
19. No tiene solución real **21.** $\{-2, -1, 1, 2\}$ **23.** $\{2\}$ **25.** $\left\{\frac{13}{2}\right\}$ **27.** $\left\{\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$ **29.** $\left\{\frac{9}{4}\right\}$ **31.** $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ **33.** $\left\{\frac{m}{1-n}, \frac{m}{1+n}\right\}$

35. $\left\{-\frac{9b}{5a}, \frac{2b}{a}\right\}$ **37.** $\left\{-\frac{9}{5}\right\}$ **39.** $\{-5, 2\}$ **41.** $\left\{-\frac{5}{3}, 3\right\}$ **43.** $\left\{0, \frac{3}{2}\right\}$ **45.** $\left\{-\frac{5}{2}, -2, 2\right\}$

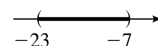
47. $\{x|x \geq 14\}; [14, \infty)$



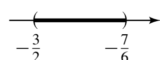
49. $\left\{x\middle|-\frac{31}{2} \leq x \leq \frac{33}{2}\right\}; \left[-\frac{31}{2}, \frac{33}{2}\right]$



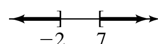
51. $\{x|-23 < x < -7\}; (-23, -7)$



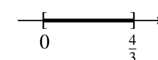
53. $\left\{x\middle|-\frac{3}{2} < x < -\frac{7}{6}\right\}; \left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{6}\right)$



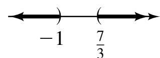
55. $\{x|x \leq -2 \text{ o } x \geq 7\}; (-\infty, -2] \text{ o } [7, \infty)$



57. $\left\{x\middle|0 \leq x \leq \frac{4}{3}\right\}; \left[0, \frac{4}{3}\right]$



59. $\left\{x\middle|x < -1 \text{ o } x > \frac{7}{3}\right\}; (-\infty, -1) \text{ o } \left(\frac{7}{3}, \infty\right)$



61. 9 **63.** $\frac{4}{9}$ **65.** $4 + 7i$ **67.** $-3 + 2i$ **69.** $\frac{9}{10} - \frac{3}{10}i$

71. -1 **73.** $-46 + 9i$ **75.** $\left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

77. $\left\{\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right\}$ **79.** $\left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i\right\}$ **81.** $\left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}i\right\}$ **83.** $p = 2l + 2w$ **85.** Los intereses son $630.

87. La tormenta está a 3300 pies. **89.** El avión de rescate puede alcanzar hasta 616 millas. **91.** El helicóptero llegará al bote salvavidas en poco menos de 1 hora 35 minutos. **93.** El tren Metra promedia 30 millas por hora; el Amtrak promedia 80 millas por hora. **95.** Trabajando sola, Clarissa tardará 10 días.

97. Mezclar 90 cm^3 de HCl al 15% para obtener 150 cm^3 de HCl al 25%. **99.** Añadir 256 onzas de agua. **101.** 5 y 12 cm. **103.** El tren de carga tiene 190.67 pies de largo. **105.** La bomba menos potente tardará 2 horas. **107.** 36 fueron al viaje; cada uno cerca de $13.40.

109. a) No **b)** Todd gana de nuevo. **c)** Todd gana por $\frac{1}{4}$ m. **d)** Todd debe comenzar 5.26 m detrás de salida. **e)** Sí

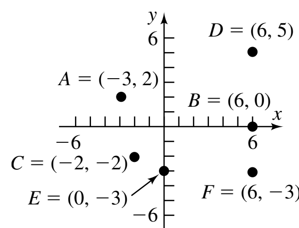
CAPÍTULO 2 Gráficas

2.1 Conceptos y vocabulario *(página 163)*

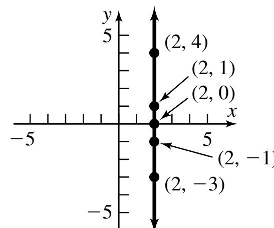
4. Coordenada x o abscisa; coordenada y u ordenada. **5.** Cuadrantes **6.** Medio **7.** x **8.** Falso **9.** Falso **10.** Verdadero

2.1 Ejercicios *(página 163)*

11. a) Segundo cuadrante **b)** Eje x positivo **c)** Tercera cuadrante **d)** Primer cuadrante **e)** Eje y negativo **f)** Cuarto cuadrante

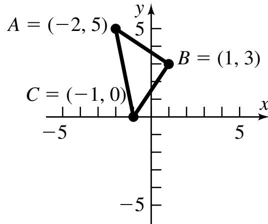


13. Los puntos estarán en una línea vertical que se encuentra dos unidades a la derecha del eje y.

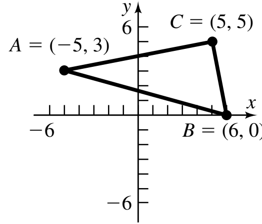


15. $\sqrt{5}$ **17.** $\sqrt{10}$ **19.** $2\sqrt{17}$ **21.** $\sqrt{85}$ **23.** $\sqrt{53}$ **25.** $\sqrt{6.89} \approx 2.625$ **27.** $\sqrt{a^2 + b^2}$

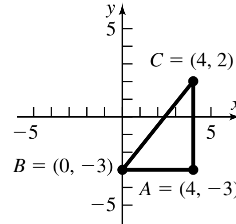
29. $d(A, B) = \sqrt{13}$
$d(B, C) = \sqrt{13}$
$d(A, C) = \sqrt{26}$
$(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = (\sqrt{26})^2$
Área $= \dfrac{13}{2}$ unidades cuadradas



31. $d(A, B) = \sqrt{130}$
$d(B, C) = \sqrt{26}$
$d(A, C) = 2\sqrt{26}$
$(\sqrt{26})^2 + (2\sqrt{26})^2 = (\sqrt{130})^2$
Área $= 26$ unidades cuadradas



33. $d(A, B) = 4$
$d(B, C) = \sqrt{41}$
$d(A, C) = 5$
$4^2 + 5^2 = (\sqrt{41})^2$
Área $= 10$ unidades cuadradas



35. $(2, 2); (2, -4)$ **37.** $(0, 0); (8, 0)$ **39.** $(4, -1)$ **41.** $\left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$ **43.** $(5, -1)$ **45.** $(1.05, 0.7)$ **47.** $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ **49.** $\sqrt{17}; 2\sqrt{5}; \sqrt{29}$

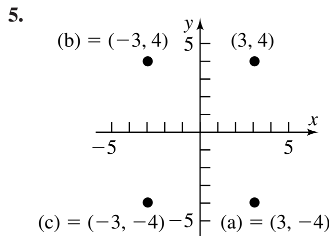
51. $d(P_1, P_2) = 6; d(P_2, P_3) = 4; d(P_1, P_3) = 2\sqrt{13}$; triángulo rectángulo **53.** $d(P_1, P_2) = 2\sqrt{17}; d(P_2, P_3) = \sqrt{34}; d(P_1, P_3) = \sqrt{34}$; triángulo rectángulo isósceles **55.** $4\sqrt{10}$ **57.** $2\sqrt{65}$ **59.** $\left(\dfrac{s}{2}, \dfrac{s}{2}\right)$ **61.** $90\sqrt{2} \approx 127.28$ pies **63. a)** Primera base $(90, 0)$; segunda base $(90, 90)$; tercera base $(0, 90)$ **b)** $5\sqrt{2161}$ pies o ≈ 232.4 pies **c)** $30\sqrt{149}$ pies o ≈ 366.2 pies **65.** $d = 50t$

2.2 Conceptos y vocabulario *(página 174)*

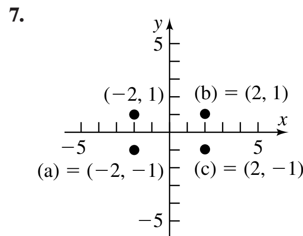
1. Intercepciones **2.** Ceros; raíces **3.** Verdadero **4.** $(3, -4)$

2.2 Ejercicios *(página 174)*

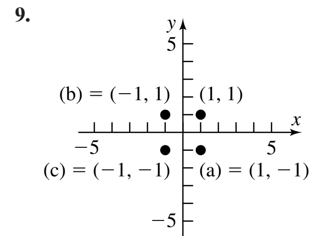
5.



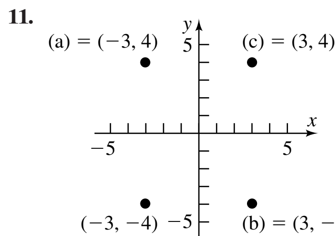
7.



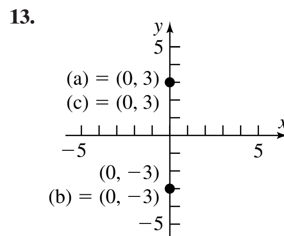
9.



11.



13.



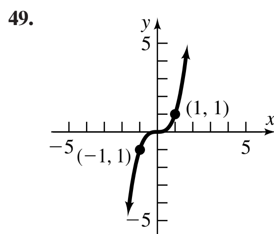
15. a) $(-1, 0), (1, 0)$ **b)** eje x, eje y, origen
17. a) $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right), (0, 1), \left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ **b)** eje y
19. a) $(0, 0)$ **b)** eje x **21. a)** $(1, 0)$ **b)** ninguno
23. a) $(-1, 0), (0, -1), (1, 0)$ **b)** eje y
25. a) ninguno **b)** origen **27.** $(0, 0)$ está en la gráfica.
29. $(0, 3)$ está en la gráfica. **31.** $(0, 2)$ y $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ están en la gráfica. **33.** $(0, 0)$; simétrica con respecto al eje y.

35. $(0, 0)$; simétrica con respecto al origen. **37.** $(0, 9), (3, 0), (-3, 0)$; simétrica con respecto al eje y

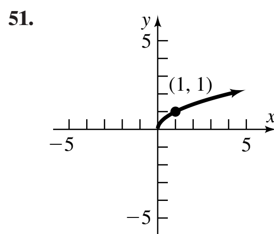
39. $(-2, 0), (2, 0), (0, -3), (0, 3)$; simétrica con respecto al eje x, al eje y, y al origen. **41.** $(0, -27), (3, 0)$; no hay simetría

43. $(0, -4), (4, 0), (-1, 0)$; no hay simetría **45.** $(0, 0)$; simétrica con respecto al origen **47.** $(0, 0)$; simétrica con respecto al eje y

49.

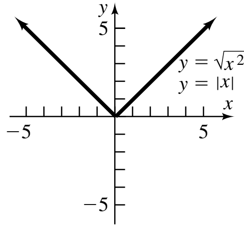


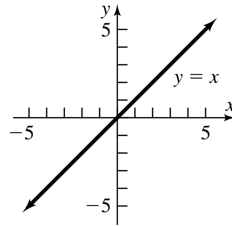
51.

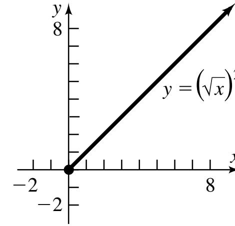


53. $a = -1$ **55.** $2a + 3b = 6$

57. a)







b) Puesto que para todas las x $\sqrt{x^2} = |x|$, las gráficas de $y = \sqrt{x^2}$ y de $y = |x|$ son iguales.

c) Para $y = (\sqrt{x})^2$, el dominio de la variable x es $x \geq 0$; para $y = x$, el dominio de la variable x son todos los números reales. De manera que $(\sqrt{x})^2 = x$ solo para $x \geq 0$.

d) Para $y = \sqrt{x^2}$, el rango de la variable y es $y \geq 0$; para $y = x$, el rango de la variable y son todos los números reales, Además, $\sqrt{x^2} = |x|$, lo cual es igual a x sólo si $x \geq 0$.

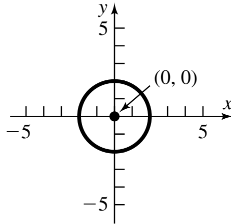
2.3 Conceptos y vocabulario *(página 179)*

4. Radio **5.** Verdadero **6.** $(2, -5)$; 6

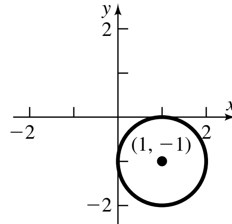
2.3 Ejercicios *(página 179)*

7. Centro $(2, 1)$; Radio 2; $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ **9.** Centro $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$; Radio $\frac{3}{2}$; $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{4}$

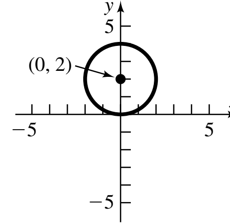
11. $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 4 = 0$



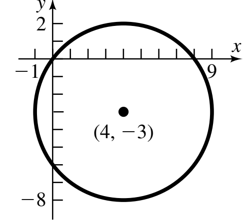
13. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$; $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$



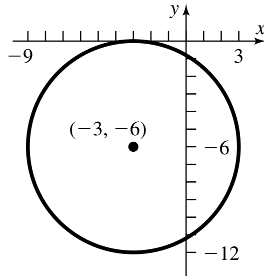
15. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 4y = 0$



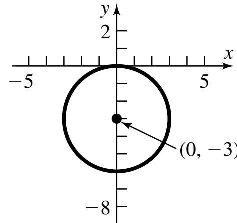
17. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$; $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$



19. $(x + 3)^2 + (y + 6)^2 = 36$; $x^2 + y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$

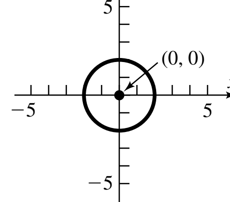


21. $x^2 + (y + 3)^2 = 9$; $x^2 + y^2 + 6y = 0$



23. a) $(h, k) = (0, 0); r = 2$

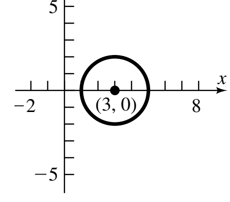
b)



c) $(\pm 2, 0); (0, \pm 2)$

25. a) $(h, k) = (3, 0); r = 2$

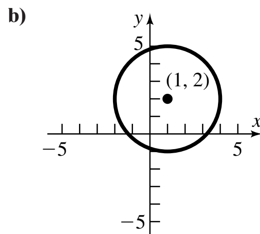
b)



c) $(1, 0); (5, 0)$

27. a) $(h, k) = (1, 2); r = 3$

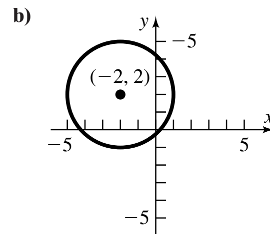
b)



c) $(1 \pm \sqrt{5}, 0); (0, -2 \pm 2\sqrt{2})$

29. a) $(h, k) = (-2, 2); r = 3$

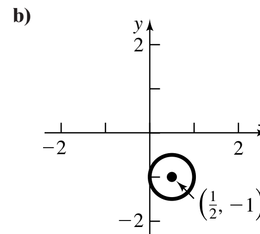
b)



c) $(-2 \pm \sqrt{5}, 0); (0, 2 \pm \sqrt{5})$

31. a) $(h, k) = \left(\frac{1}{2}, -1\right); r = \frac{1}{2}$

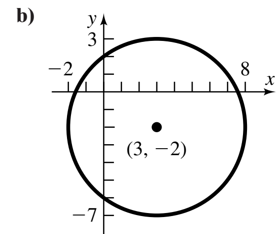
b)



c) $(0, -1)$

33. a) $(h, k) = (3, -2); r = 5$

b)



c) $(3 \pm \sqrt{21}, 0); (0, -6), (0, 2)$

35. $x^2 + y^2 - 13 = 0$ **37.** $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ **39.** $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ **41.** c) **43.** b) **45.** $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$ **47.** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$ **49.** b **51.** $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4168.16 = 0$

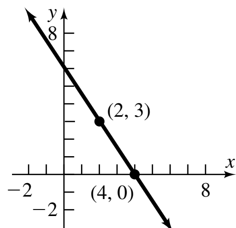
2.4 Conceptos y vocabulario *(página 190)*

1. No definida; cero **2.** 3; 2 **3.** $y = b$; intercepción en y **4.** Verdadero **5.** Falso **6.** Verdadero

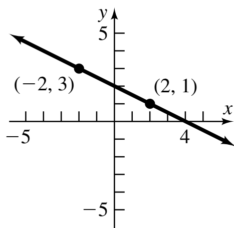
2.4 Ejercicios *(página 191)*

7. a) $\frac{1}{2}$ **b)** Por cada aumento de dos unidades en x, y aumentará en 1 unidad. **9. a)** $-\frac{1}{3}$ **b)** Por cada aumento de 3 unidades en x, y disminuirá en 1 unidad.

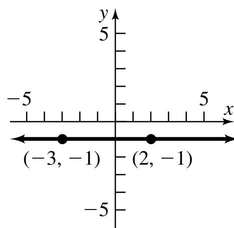
11. Pendiente $= -\frac{3}{2}$



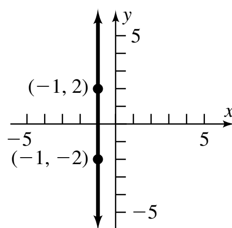
13. Pendiente $= -\frac{1}{2}$



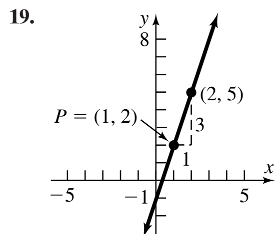
15. Pendiente



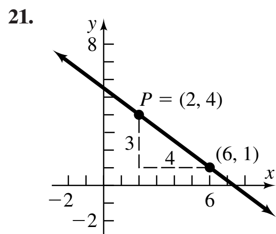
17. Pendiente no definida



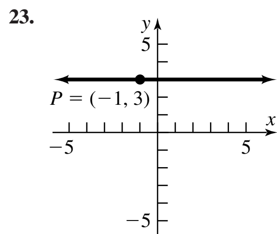
19.



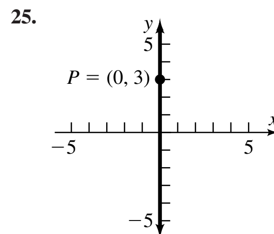
21.



23.



25.

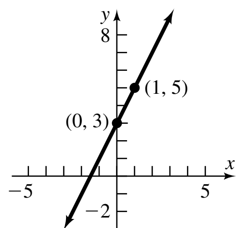


27. (2, 6); (3, 10); (4, 14) **29.** (4, −7); (6, −10); (8, −13) **31.** (−1, −5); (0, −7); (1, −9) **33.** $x - 2y = 0$ o $y = \frac{1}{2}x$

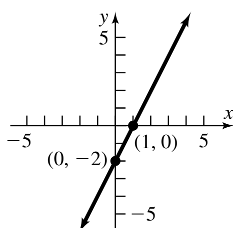
35. $x + 3y = 4$ o $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ **37.** $3x - y = -9$ o $y = 3x + 9$ **39.** $2x + 3y = -1$ o $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

41. $x - 2y = -5$ o $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ **43.** $3x + y = 3$ o $y = -3x + 3$ **45.** $x - 2y = 2$ o $y = \frac{1}{2}x - 1$ **47.** No tiene forma pendiente-intersección **49.** y = 2; la forma general y la forma pendiente-intersección son iguales

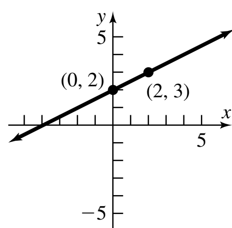
51. Pendiente $= 2$; intercepción $y = 3$



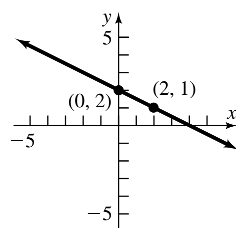
53. Pendiente $= 2$; intercepción $y = -2$



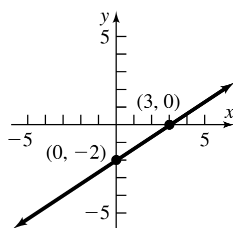
55. Pendiente $= \frac{1}{2}$; intercepción $y = 2$



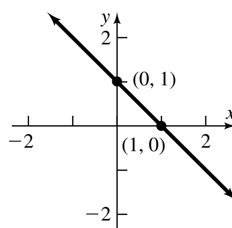
57. Pendiente $= -\frac{1}{2}$; intercepción $y = 2$



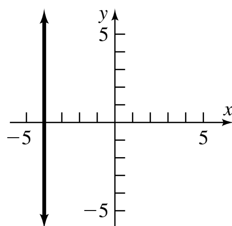
59. Pendiente $= \frac{2}{3}$; intercepción $y = -2$

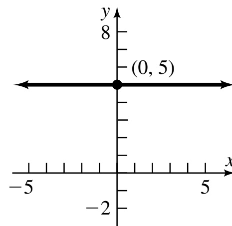


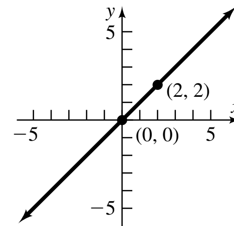
61. Pendiente $= -1$; intercepción $y = 1$



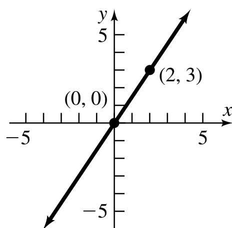
63. Pendiente no definida; sin intercepción y **65.** Pendiente $= 0$; intercepción $y = 5$ **67.** Pendiente $= 1$; intercepción $y = 0$





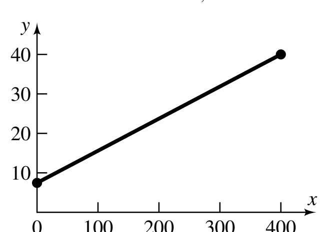


69. Pendiente $= \frac{3}{2}$; intercepción $y = 0$ **71.** $y = 0$ **73.** $C = 0.07x + 29$; \$36.70; \$45.10 **75.** $C = 0.53x + 1{,}070{,}000$



77. a) $C = 0.08275x + 7.58, 0 \le x \le 400$

b)



c) \$15.86 **d)** \$32.41
e) Cada kW adicional que se utilice sumará \$0.08275 a la cuenta.

79. $°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$; aproximadamente 21°C

81. a) $A = \frac{1}{5}(x - 100{,}000) + 40{,}000$

b) \$80,000 **c)** Cada caja adicional vendida requiere otros \$0.20 en publicidad.

83. b) **85.** d) **87.** $x - y = -2$ o $y = x + 2$ **89.** $x + 3y = 3$ o $y = -\frac{1}{3}x + 1$ **91.** b, c, e, g

95. No si la intercepción está en (0, 0), la intercepción x no es distinta de la intercepción y. No, cada línea atraviesa por lo menos un eje.

97. Están en la misma recta. **99.** Si, esto ocurre cuando la intercepción y es igual a 0.

2.5 Conceptos y vocabulario *(página 197)*

1. $m_1 = m_2$; intercepciones y; $m_1, m_2 = -1$ **2.** 2 **3.** $-\frac{1}{2}$ **4.** Falso

2.5 Ejercicios *(página 197)*

5. a) 6 **b)** $-\frac{1}{6}$ **7. a)** $-\frac{1}{2}$ **b)** 2 **9. a)** $\frac{1}{2}$ **b)** -2 **11. a)** $-\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{5}{3}$ **13. a)** Indefinido **b)** 0

15. $2x - y = 3$ o $y = 2x - 3$ **17.** $x + 2y = 5$ o $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ **19.** $2x - y = -4$ o $y = 2x + 4$ **21.** $2x - y = 0$ o $y = 2x$

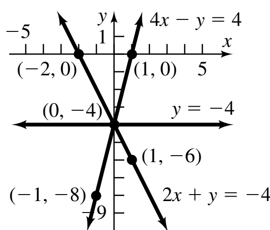
23. $x = 4$; sin forma pendiente- intercepción **25.** $2x + y = 0$ o $y = -2x$ **27.** $x - 2y = -3$ o $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ **29.** $y = 4$; la forma general y la forma pendiente- intercepción son iguales. **31.** paralelas **33.** ninguna **35.** $P_1 = (-2, 5), P_2 = (1, 3), m_1 = -\frac{2}{3}$; $P_2 = (1, 3), P_3 = (-1, 0)$, $m_2 = \frac{3}{2}$; puesto que $m_1 m_2 = -1$, las rectas son perpendiculares; entonces, los puntos P_1, P_2 y P_3 son los vértices de un triángulo rectángulo.

37. $P_1 = (-1, 0), P_2 = (2, 3), m = 1$; $P_3 = (1, -2), P_4 = (4, 1), m = 1$; $P_1 = (-1, 0), P_3 = (1, -2), m = -1$; $P_2 = (2, 3)$, $P_4 = (4, 1), m = -1$; los lados opuestos son paralelos, y los lados paralelos son perpendiculares; los puntos son los vértices de rectángulo.

39. c) **41.** Consulte la figura 54; $m_1 m_2 = -1$; $d(A, B) = \sqrt{(m_2 - m_1)^2}$; $d(O, A) = \sqrt{1 + m_2^2}$; $d(O, B) = \sqrt{1 + m_1^2}$. Ahora demuestre que $[d(O, B)]^2 + [d(O, A)]^2 = [d(A, B)]^2$. **43.** $\sqrt{2}x + 4y = 9\sqrt{2}$ **45.** (1, 0)

47. La forma pendiente (a, b) a (b, a) es $\frac{a - b}{b - a} = -1$. La pendiente de la recta $y = x$ es 1. Puesto que $-1 \cdot 1 = -1$, la recta que contiene los puntos (a, b) y (b, a) es perpendicular a la recta $y = x$. El punto medio entre (a, b) y $(b, a) = \left(\frac{a + b}{2}, \frac{b + a}{2}\right)$. Puesto que $\frac{b + a}{2} = \frac{a + b}{2}$, el punto medio queda sobre la recta $y = x$.

49. La familia de las rectas $Cx + y = -4$ se intersecta en el punto $(0, -4)$.



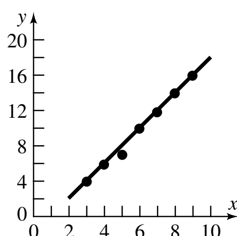
2.6 Conceptos y vocabulario *(página 203)*

1. Diagrama de dispersión **2.** Verdadero

2.6 Ejercicios *(página 204)*

3. Lineal **5.** Lineal **7.** No lineal

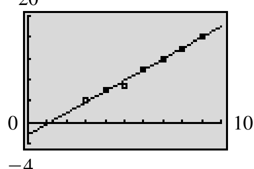
9. a), c)



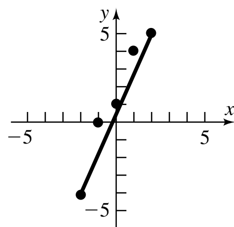
b) Utilizando (3, 4) y (9, 16), $y = 2x - 2$.

d) $y = 2.0357x - 2.3571$

e)



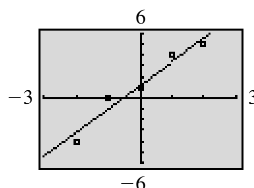
11. a), c)



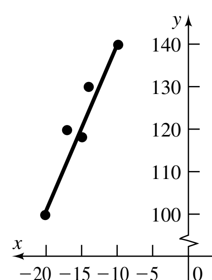
b) Utilizando (−2, −4) y (2, 5), $y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$.

d) $y = 2.2x + 1.2$

e)



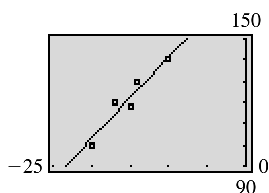
13. a), c)



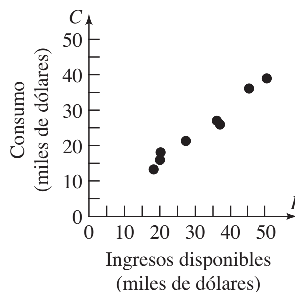
b) Utilizando (−20, 100) y (−10, 140), $y = 4x + 180$.

d) $y = 3.8613x + 180.292$

e)



15. a)



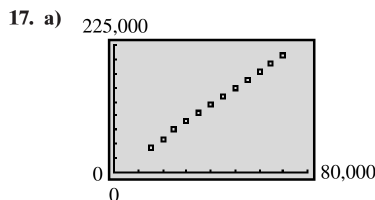
b) Utilizando (20, 16) y (50, 39), $C = \frac{23}{30}I + \frac{2}{3}$.

c) A medida que los ingresos disponibles aumentan en $1000, el consumo se incrementa en alrededor de $767.

d) $32,867

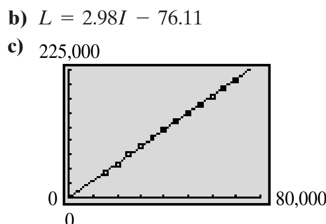
e) $C = 0.755I + 0.627$

17. a)



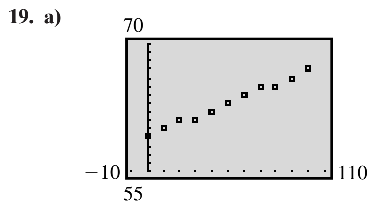
b) $L = 2.98I - 76.11$

c)



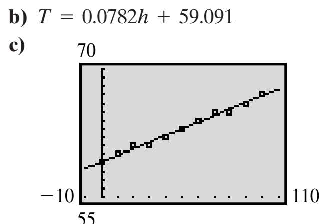
d) Por cada dólar de ingresos adicional, se incrementa en \$2.98 la cantidad que le prestará la institución.
e) \$125,083.89

19. a)



b) $T = 0.0782h + 59.091$

c)



d) Si la humedad relativa aumenta en 1%, la temperatura aparente aumenta en 0.0782 grados Fahrenheit.
e) Alrededor de 65°F

2.7 Conceptos y vocabulario *(página 209)*

1. $y = kx$ **2.** Falso

2.7 Ejercicios *(página 210)*

3. $y = \frac{1}{5}x$ **5.** $A = \pi x^2$ **7.** $F = \frac{250}{d^2}$ **9.** $z = \frac{1}{5}(x^2 + y^2)$ **11.** $M = \frac{9d^2}{2\sqrt{x}}$ **13.** $T^2 = \frac{8a^3}{d^2}$ **15.** $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ **17.** $A = \frac{1}{2}bh$

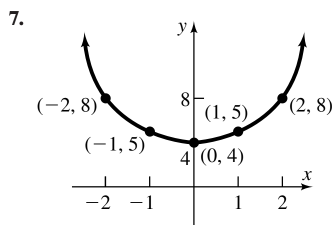
19. $F = 6.67 \times 10^{-11}\left(\frac{mM}{d^2}\right)$ **21.** $p = 0.00649B$; \$941.05 **23.** 144 pies; 2 seg. **25.** 2.25 **27.** $V = \pi r^2 h$ **29.** 54.86 lb **31.** $\sqrt[3]{6} \approx 1.82$ pulg.

33. 900 pies-libra **35.** 384 psi

Ejercicios de repaso *(página 213)*

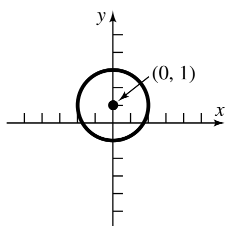
1. a) $2\sqrt{5}$ **b)** $(2, 1)$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** Por cada avance de 2, existe una elevación de 1. **3. a)** 5 **b)** $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ **c)** $-\frac{4}{3}$ **d)** Por cada avance de 3, existe una elevación de −4. **5. a)** 12 **b)** $(4, 2)$ **c)** No definido **d)** Sin cambio en x

7.

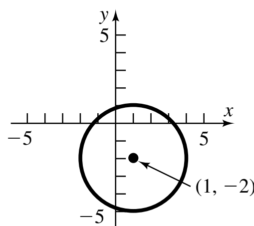


9. $(0, 0)$; simétrica con respecto al eje x.
11. $(\pm 4, 0), (0, \pm 2)$; simétrica con respecto al eje x, al eje y, y el origen.
13. $(0, 1)$; simétrica con respecto al eje y. **15.** $(0, 0), (-1, 0), (0, -2)$; sin simetría
17. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ **19.** $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

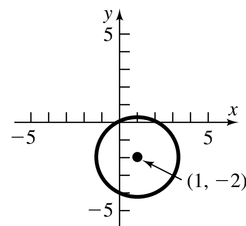
21. Centro $(0, 1)$; Radio $= 2$



23. Centro $(1, -2)$; Radio $= 3$

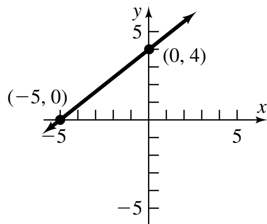


25. Centro $(1, -2)$; Radio $= \sqrt{5}$

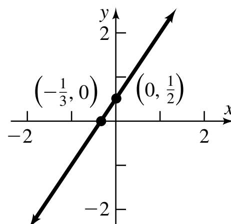


27. $2x + y = 5$ o $y = -2x + 5$ **29.** $x = -3$; sin forma pendiente-intersección **31.** $x + 5y = -10$ o $y = -\frac{1}{5}x - 2$
33. $2x - 3y = -19$ o $y = \frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$ **35.** $x - y = 7$ o $y = x - 7$

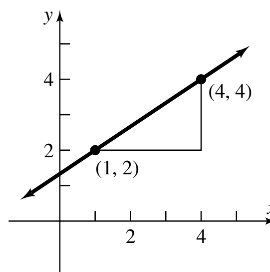
37. Pendiente $= \frac{4}{5}$; intercepción $y = 4$



39. Pendiente $= \frac{3}{2}$; intercepción $y = \frac{1}{2}$



41.

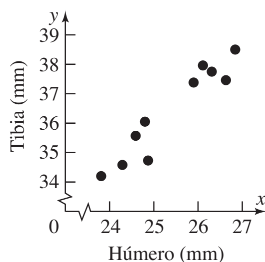


43. a) $d(A, B) = 2\sqrt{5}$; $d(B, C) = \sqrt{145}$; $d(A, C) = 5\sqrt{5}$; $[d(B, C)]^2 = [d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2$

b) La pendiente de A a B es -2; la pendiente de A a C es $\frac{1}{2}$. **45.** La pendiente de A a B es -1; la pendiente de A a C es -1.

47. $R = 1.18g$; \$13.22 **49.** $a \approx 36$ millones de millas

51. a)



b) Sí; al parecer ambas variables se relacionan de manera lineal.

c) $y = 1.4562x - 0.5$ **d)** 38.1 mm

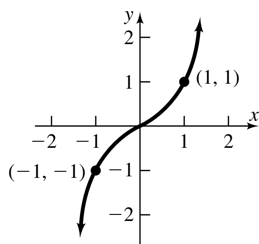
Repaso acumulativo *(página 216)*

1. $\left\{\frac{5}{3}\right\}$ **2.** $\{-3, 4\}$ **3.** $\left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$ **4.** $\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$ **5.** Sin solución real **6.** $\{4\}$ **7.** $\{1, 3\}$ **8.** $\{-2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}\}$

9. $\{-3i, 3i\}$ **10.** $\{-1 - 2i, -1 + 2i\}$ **11.** $x \le 5$; (recta numérica: 5) **12.** $-5 < x < 1$; (recta numérica: −5, 1)

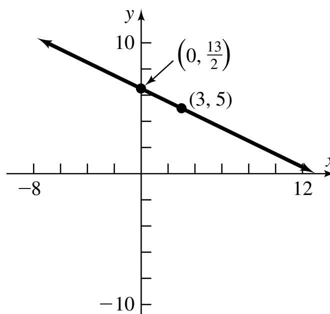
13. $1 \le x \le 3$; (recta numérica: 0 1 2 3 4) **14.** $x < -5$ o $x > 1$; (recta numérica: −5, 1) **15.** $5\sqrt{2}$; $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **16.** *a*), *b*)

17.

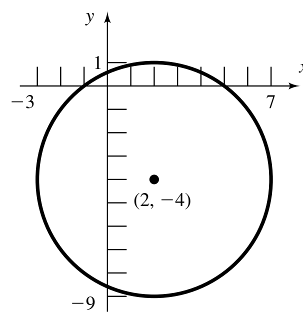


18. $y = -2x + 2$

19. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$;



20.



CAPÍTULO 3 Funciones y sus gráficas

3.1 Conceptos y vocabulario *(página 229)*

5. independiente, dependiente **6.** rango **7.** $[0, 5]$ **8.** $\neq$; f; g **9.** $(g - f)(x)$ **10.** Falso **11.** Verdadero **12.** Verdadero **13.** Falso **14.** Falso

3.1 Ejercicios *(página 229)*

15. Es una función; Dominio: {Dad, Collen, Kaleigh, Marissa}, Rango {8 de enero, 15 de marzo, 17 de septiembre} **17.** No es una función **19.** No es una función **21.** Es una función; Dominio: $\{1, 2, 3, 4\}$; Rango: $\{3\}$ **23.** No es una función **25.** Es una función; Dominio: $\{-2, -1, 0, 1\}$, Rango: $\{0, 1, 4\}$ **27. a)** -4 **b)** 1 **c)** -3 **d)** $3x^2 - 2x - 4$ **e)** $-3x^2 - 2x + 4$ **f)** $3x^2 + 8x + 1$ **g)** $12x^2 + 4x - 4$ **h)** $3x^2 + 6xh + 3h^2 + 2x + 2h - 4$ **29. a)** 0 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $-\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{-x}{x^2 + 1}$ **e)** $\frac{-x}{x^2 + 1}$ **f)** $\frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$ **g)** $\frac{2x}{4x^2 + 1}$ **h)** $\frac{x + h}{x^2 + 2xh + h^2 + 1}$ **31. a)** 4 **b)** 5 **c)** 5 **d)** $|x| + 4$ **e)** $-|x| - 4$ **f)** $|x + 1| + 4$ **g)** $2|x| + 4$ **h)** $|x + h| + 4$ **33. a)** $-\frac{1}{5}$ **b)** $-\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{1}{8}$ **d)** $\frac{-2x + 1}{-3x - 5}$ **e)** $\frac{-2x - 1}{3x - 5}$ **f)** $\frac{2x + 3}{3x - 2}$ **g)** $\frac{4x + 1}{6x - 5}$ **h)** $\frac{2x + 2h + 1}{3x + 3h - 5}$ **35.** Función **37.** Función **39.** No es una función **41.** No es una función **43.** Función **45.** No es una función **47.** Todos los números reales **49.** Todos los números reales **51.** $\{x|x \neq -4, x \neq 4\}$ **53.** $\{x|x \neq 0\}$ **55.** $\{x|x \geq 4\}$ **57.** $\{x|x > 9\}$ **59.** $\{x|x > 1\}$

61. a) $(f + g)(x) = 5x + 1$; Todos los números reales **b)** $(f - g)(x) = x + 7$; Todos los números reales **c)** $(f \cdot g)(x) = 6x^2 - x - 12$; Todos los números reales **d)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x + 4}{2x - 3}$; $\left\{x \middle| x \neq \frac{3}{2}\right\}$

63. a) $(f + g)(x) = 2x^2 + x - 1$; Todos los números reales **b)** $(f - g)(x) = -2x^2 + x - 1$; Todos los números reales **c)** $(f \cdot g)(x) = 2x^3 - 2x^2$; Todos los números reales **d)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x - 1}{2x^2}$; $\{x|x \neq 0\}$

65. a) $(f + g)(x) = \sqrt{x} + 3x - 5$; $\{x|x \geq 0\}$ **b)** $(f - g)(x) = \sqrt{x} - 3x + 5$; $\{x|x \geq 0\}$ **c)** $(f \cdot g)(x) = 3x\sqrt{x} - 5\sqrt{x}$; $\{x|x \geq 0\}$ **d)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x - 5}$; $\left\{x \middle| x \geq 0, x \neq \frac{5}{3}\right\}$

67. a) $(f + g)(x) = 1 + \frac{2}{x}$; $\{x|x \neq 0\}$ **b)** $(f - g)(x) = 1$; $\{x|x \neq 0\}$ **c)** $(f \cdot g)(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; $\{x|x \neq 0\}$ **d)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x + 1$; $\{x|x \neq 0\}$ **69. a)** $(f + g)(x) = \frac{6x + 3}{3x - 2}$; $\left\{x \middle| x \neq \frac{2}{3}\right\}$ **b)** $(f - g)(x) = \frac{-2x + 3}{3x - 2}$; $\left\{x \middle| x \neq \frac{2}{3}\right\}$ **c)** $(f \cdot g)(x) = \frac{8x^2 + 12x}{(3x - 2)^2}$; $\left\{x \middle| x \neq \frac{2}{3}\right\}$ **d)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x + 3}{4x}$; $\left\{x \middle| x \neq 0, x \neq \frac{2}{3}\right\}$ **71.** $g(x) = 5 - \frac{7}{2}x$ **73.** 4 **75.** $2x + h - 1$ **77.** $3x^2 + 3xh + h^2$ **79.** $A = -\frac{7}{2}$ **81.** $A = -4$ **83.** $A = 8$; no definida en $x = 3$ **85.** $A(x) = \frac{1}{2}x^2$ **87.** $G(x) = 10x$ **89. a)** 15.1 m, 14.07 m, 12.94 m, 11.72 m **b)** 1.01 seg, 1.43 seg, 1.75 seg **c)** 2.02 seg **91. a)** \$222 **b)** \$225 **c)** \$220 **d)** \$230 **93.** $R(x) = \frac{L(x)}{P(x)}$ **95.** $H(x) = P(x) \cdot I(x)$ **97.** Sólo $h(x) = 2x$

3.2 Conceptos y vocabulario *(página 236)*

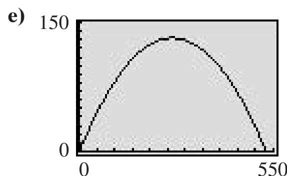
3. vertical **4.** $5; -3$ **5.** $a = -2$ **6.** Falso **7.** Falso **8.** Verdadero

3.2 Ejercicios *(página 236)*

9. a) $f(0) = 3$; $f(-6) = -3$ **b)** $f(6) = 0$; $f(11) = 1$ **c)** Positivo **d)** Negativo **e)** $-3, 6$, y 10 **f)** $-3 < x < 6$; $10 < x \leq 11$ **g)** $\{x|-6 \leq x \leq 11\}$ **h)** $\{y|-3 \leq y \leq 4\}$ **i)** $-3, 6, 10$ **j)** 3 **k)** 3 veces **l)** una vez **m)** $0, 4$ **n)** $-5, 8$ **11.** No es una función **13.** Función **a)** Dominio: $\{x|-\pi \leq x \leq \pi\}$; Rango: $\{y|-1 \leq y \leq 1\}$ **b)** $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), (0, 1)$ **c)** eje y **15.** No es una función **17.** Es una función **a)** Dominio: $\{x|x > 0\}$; Rango: todos los números reales **b)** $(1, 0)$ **c)** Ninguno **19.** Es una función **a)** Dominio: todos los números reales; Rango: $\{y|y \leq 2\}$ **b)** $(-3, 0), (3, 0), (0, 2)$ **c)** Eje y **21.** Es una función **a)** Dominio: todos los números reales; Rango: $\{y|y \geq -3\}$ **b)** $(1, 0), (3, 0), (0, 9)$ **c)** Ninguno **23. a)** Sí **b)** $f(-2) = 9$; $(-2, 9)$ **c)** $0, \frac{1}{2}$; $(0, -1), \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ **d)** Todos los números reales **e)** $-\frac{1}{2}, 1$ **f)** -1 **25. a)** No **b)** $f(4) = -3$; $(4, -3)$ **c)** 14; $(14, 2)$ **d)** $\{x|x \neq 6\}$ **e)** -2 **f)** $-\frac{1}{3}$ **27. a)** Sí **b)** $f(2) = \frac{8}{17}$; $\left(2, \frac{8}{17}\right)$ **c)** $-1, 1$; $(-1, 1), (1, 1)$ **d)** Todos los números reales **e)** 0 **f)** 0

29. **a)** Unos 81.07 pies **b)** Unos 129.59 pies **c)** Unos 26.63 pies **d)** Unos 528.13 pies

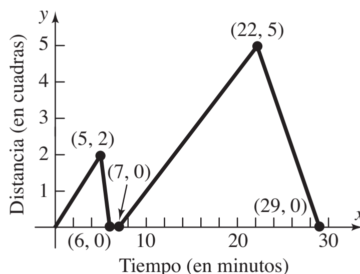
e)



f) 115.07 pies y 413.05 pies
g) 275 pies; la altura máxima que aparece en la tabla es 131.8 pies
h) 264 pies

31. **a)** III **b)** IV **c)** I **d)** V **e)** II

33.



35. **a)** 2 horas transcurridas durante las que Kevin estuvo entre 0 y 3 millas de casa. **b)** 0.5 horas transcurridas durante las que Kevin estuvo a 3 millas de casa. **c)** 0.3 horas transcurridas durante las que Kevin estuvo entre 0 y 3 millas de casa. **d)** 0.2 horas transcurridas durante las que Kevin estuvo a 0 millas de casa. **e)** 0.9 horas transcurridas durante las que Kevin estuvo entre 0 y en 2.8 millas de casa. **f)** 0.3 horas transcurridas durante las que Kevin estuvo a 2.8 millas de casa. **g)** 1.1 horas transcurridas durante las que Kevin estuvo entre 0 y 2.8 millas de casa. **h)** 3 millas **i)** 2 veces

37. Todos los puntos $(5, y)$ y $(x, 0)$ quedan excluidos. **39.** Las intercepciones x se pueden numerar en cualquier parte, desde 0 hasta infinito. Existe cuando mucho una intercepción y. **41.** sí; $f(x) = 0$

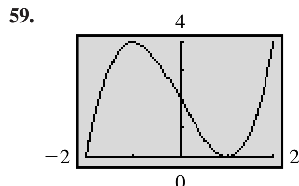
3.3 Conceptos y vocabulario *(página 248)*

6. Creciente **7.** Par; impar **8.** Verdadero **9.** Verdadero **10.** Falso

3.3 Ejercicios *(página 248)*

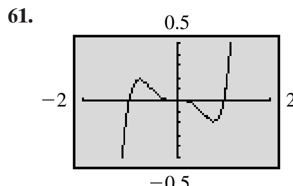
11. Sí **13.** No **15.** $(-8, -2)$; $(0, 2)$; $(5, \infty)$ **17.** Sí; 10 **19.** $-2, 2; 6, 10$ **21.** **a)** $(-2, 0), (0, 3), (2, 0)$ **b)** Dominio: $\{x|-4 \le x \le 4\}$ o $[-4, 4]$; Rango: $\{y|0 \le y \le 3\}$ o $[0, 3]$ **c)** Creciente en $(-2, 0)$ y $(2, 4)$; Decreciente en $(-4, -2)$ y $(0, 2)$ **d)** Impar
23. **a)** $(0, 1)$ **b)** Dominio: todos los números reales; Rango: $\{y|y > 0\}$ o $(0, \infty)$ **c)** Creciente en $(-\infty, \infty)$ **d)** Ninguna
25. **a)** $(-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0)$ **b)** Dominio: $\{x|-\pi \le x \le \pi\prod\}$ o $[-\pi, \pi]$; Rango: $\{y|-1 \le y \le 1\}$ o $[-1, 1]$ **c)** Creciente en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; Decreciente en $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ **d)** Impar **27.** **a)** $\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ **b)** Dominio: $\{x|-3 \le x \le 3\}$ o $[-3, 3]$; Rango: $\{y|-1 \le y \le 2\}$ o $[-1, 2]$ **c)** Creciente en $(2, 3)$; decreciente en $(-1, 1)$; constante en $(-3, -1)$ y $(1, 2)$ **d)** Ninguna
29. **a)** 0; 3 **b)** $-2, 2; 0, 0$ **31.** **a)** $\frac{\pi}{2}$; 1 **b)** $-\frac{\pi}{2}$; -1 **33.** **a)** -4 **b)** -8 **c)** -10 **35.** **a)** 5 **b)** 5 **c)** $y = 5x$ **37.** **a)** -3 **b)** -3 **c)** $y = -3x + 1$ **39.** **a)** $x - 1$ **b)** 1 **c)** $y = x - 2$ **41.** **a)** $x(x + 1)$ **b)** 6 **c)** $y = 6x - 6$ **43.** **a)** $\frac{-1}{x + 1}$ **b)** $-\frac{1}{3}$ **c)** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ **45.** **a)** $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ **b)** $\sqrt{2} - 1$ **c)** $(\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} + 2$ **47.** Impar **49.** Par **51.** Impar **53.** Ninguna
55. Par **57.** Impar

59.



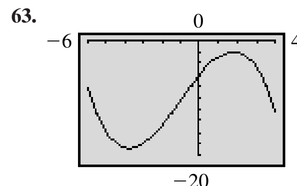
Creciente: $(-2, -1), (1, 2)$
Decreciente: $(-1, 1)$
Máximo local: $(-1, 4)$
Mínimo local: $(1, 0)$

61.

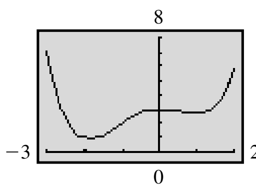


Creciente: $(-2, -0.77), (0.77, 2)$
Decreciente: $(-0.77, 0.77)$
Máximo local: $(-0.77, 0.19)$
Mínimo local: $(0.77, -0.19)$

63.

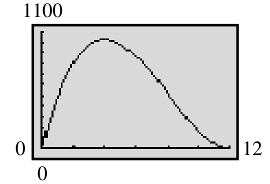


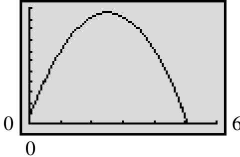
Creciente: $(-3.77, 1.77)$
Decreciente: $(-6, -3.77), (1.77, 4)$
Máximo local: $(1.77, -1.91)$
Mínimo local: $(-3.77, -18.89)$

65. 

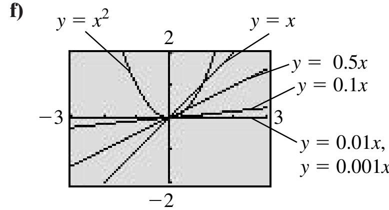
Creciente: (−1.87, 0), (0.97, 2)
Decreciente: (−3, −1.87), (0, 0.97)
Máximo local: (0, 3)
Mínimo local: (−1.87, 0.95), (0.97, 2.65)

67. a) $V(x) = x(24 - 2x)^2$
b) 972 pulg.^{3} **c)** 160 pulg.^{3}
d) V es mayor cuando $x = 4$.



69. a) 

b) 2.5 seg **c)** 106 pies

71. a) 1 **b)** 0.5 **c)** 0.1 **d)** 0.01 **e)** 0.001
f) 

g) Se están acercando a la recta tangente en (0, 0).
h) Se están acercando a 0.

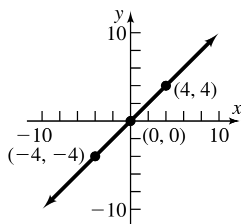
75. Al menos uno **77.** Sí, la función $f(x) = 0$ es par e impar.

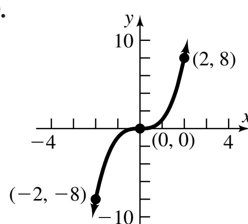
3.4 Conceptos y vocabulario *(página 258)*

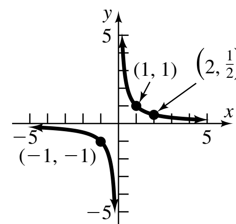
4. menos **5.** definida en partes **6.** Verdadero **7.** Falso **8.** Falso

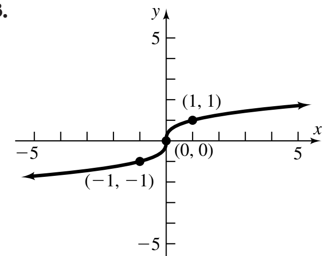
3.4 Ejercicios *(página 258)*

9. C **11.** E **13.** B **15.** F

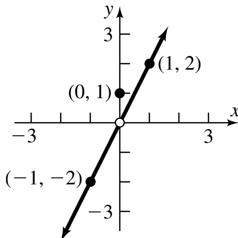
17. 

19. 

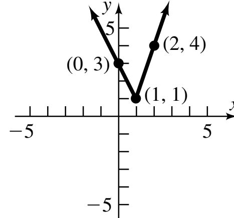
21. 

23. 

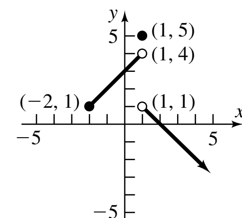
25. a) 4 **b)** 2 **c)** 5 **27. a)** 2 **b)** 3 **c)** −4

29. a) Todos los números reales
b) (0, 1)
c) 

d) $\{y|y \neq 0\}$; $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$

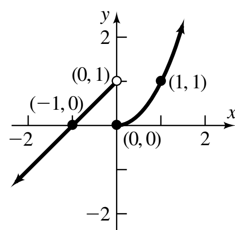
31. a) Todos los números reales
b) (0, 3)
c) 

d) $\{y|y \geq 1\}$; $[1, \infty)$

33. a) $\{x|x \geq -2\}$; $[-2, \infty)$
b) (0, 3), (2, 0)
c) 

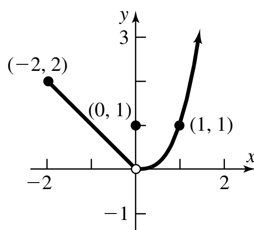
d) $\{y|y < 4, y = 5\}$; $(-\infty, 4)$ o $\{5\}$

35. a) Todos los números reales
b) $(-1, 0), (0, 0)$
c)



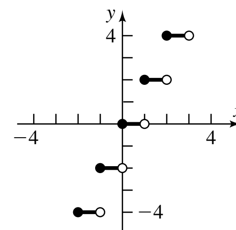
d) Todos los números reales

37. a) $\{x|x \geq -2\}; [-2, \infty)$
b) $(0, 1)$
c)



d) $\{y|y > 0\}; (0, \infty)$

39. a) Todos los números reales
b) $(x, 0)$ para $0 \leq x < 1$
c)



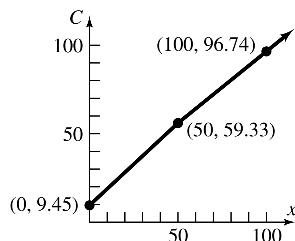
d) El conjunto de los números enteros pares

41. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$ (Existen otras respuestas) **43.** $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ -x + 2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$ (Existen otras respuestas)

45. a) \$39.99 **b)** \$43.74 **c)** \$40.24

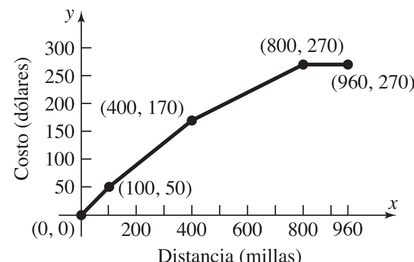
47. a) \$59.33 **b)** \$396.04 **c)** $C = \begin{cases} 0.99755x + 9.45 & \text{si } 0 \leq x \leq 50 \\ 0.74825x + 21.915 & \text{si } x > 50 \end{cases}$

d)



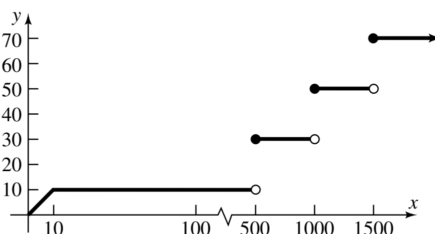
49. Para el programa X: $f(x) = \begin{cases} 0.10x & \text{si } 0 < x \leq 7000 \\ 700.00 + 0.15(x - 7000) & \text{si } 7000 < x \leq 28{,}400 \\ 3910 + 0.25(x - 28{,}400) & \text{si } 28{,}400 < x \leq 68{,}800 \\ 14{,}010 + 0.28(x - 68{,}800) & \text{si } 68{,}800 < x \leq 143{,}500 \\ 34{,}926 + 0.33(x - 143{,}500) & \text{si } 143{,}500 < x \leq 311{,}950 \\ 90{,}514.50 + 0.35(x - 311{,}950) & \text{si } x > 311{,}950 \end{cases}$

51. a)



b) $C = 50 + 0.4(x - 100)$
c) $C = 170 + 0.25(x - 400)$

53. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 10 \\ 10 & \text{si } 10 \leq x < 500 \\ 30 & \text{si } 500 \leq x < 1000 \\ 50 & \text{si } 1000 \leq x < 1500 \\ 70 & \text{si } 1500 \leq x \end{cases}$



55. a) 10°C **b)** 4°C **c)** −3°C **d)** −4°C **e)** La sensación térmica es igual a la temperatura del aire. **f)** Con una velocidad del viento superior a 20m/s, el factor de sensación térmica depende únicamente de la temperatura del aire. **57.** Cada una de las gráficas es la de $y = x^2$, pero desplazada de manera vertical. Si $y = x^2 + k$, $k > 0$, está desplazada hacia arriba en k unidades; si $y = x^2 - k$, $k > 0$, el desplazamiento es hacia abajo k unidades. **59.** Cada una de las gráficas es la de $y = |x|$, pero ya sea comprimida o alargada. Si $y = k|x|$ y $k > 1$, la gráfica está alargada de manera vertical; si $y = k|x|$, $0 < k < 1$, la gráfica está comprimida de manera vertical. **61.** La gráfica de $y = f(-x)$ es la reflexión sobre el eje x de la gráfica de $y = f(x)$. **63.** Tienen forma de $\cup$ y están abiertas hacia arriba. Las tres pasan por los puntos $(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$. A medida que aumenta el exponente, lo hace el grado de la curva (excepto cerca de $x = 0$).

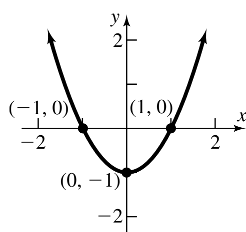
3.5 Conceptos y vocabulario *(página 271)*

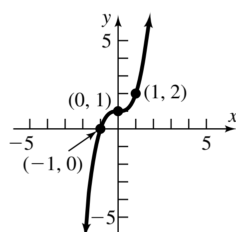
1. Horizontal, derecha **2.** y **3.** –5, –2, 2 **4.** Verdadero **5.** Falso **6.** Verdadero

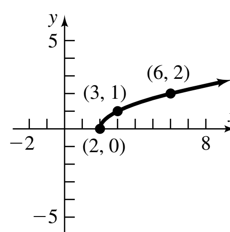
3.5 Ejercicios *(página 272)*

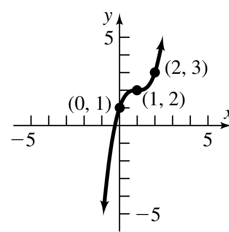
7. B **9.** H **11.** I **13.** L **15.** F **17.** G **19.** $y = (x - 4)^3$ **21.** $y = x^3 + 4$ **23.** $y = -x^3$ **25.** $y = 4x^3$ **27.** (1) $y = \sqrt{x} + 2$; (2)

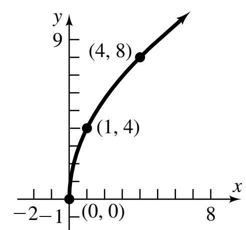
$y = -(\sqrt{x} + 2)$; (3) $y = -(\sqrt{-x} + 2)$ **29.** (1) $y = -\sqrt{x}$; (2) $y = -\sqrt{x} + 2$; (3) $y = -\sqrt{x + 3} + 2$ **31.** *c*) **33.** *c*)

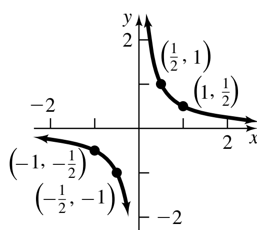
35.


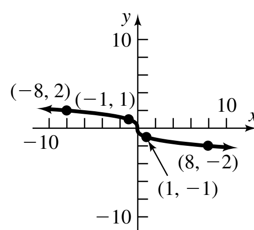
37.


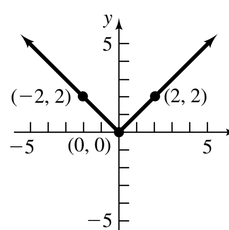
39.


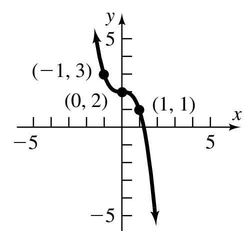
41.


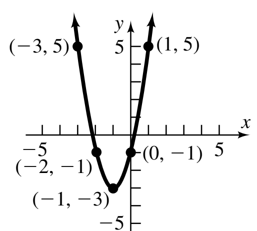
43.


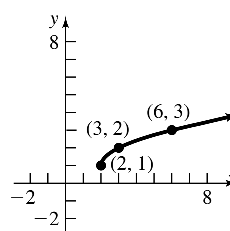
45.


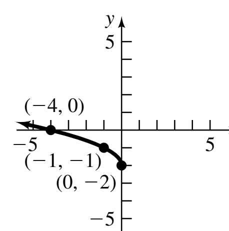
47.


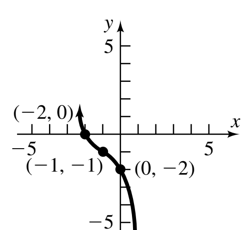
49.


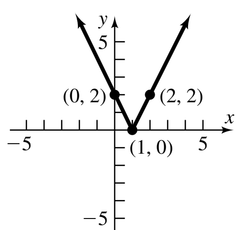
51.


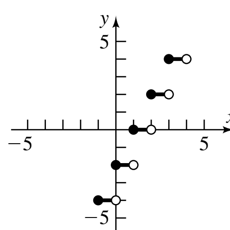
53.


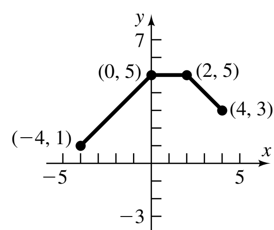
55.


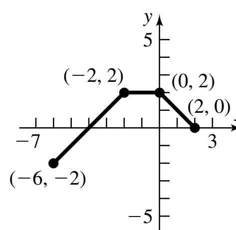
57.


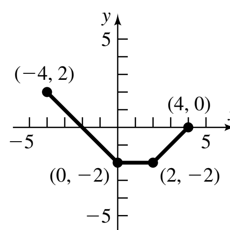
59.


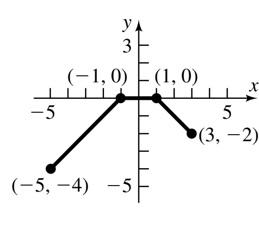
61.


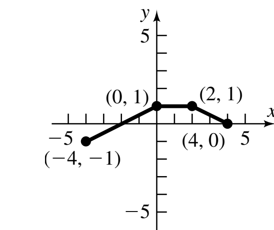
63.


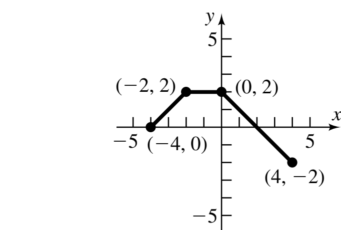
65. a) $F(x) = f(x) + 3$


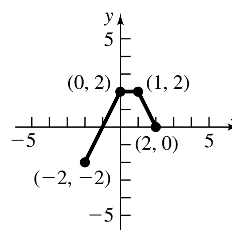
b) $G(x) = f(x + 2)$


c) $P(x) = -f(x)$


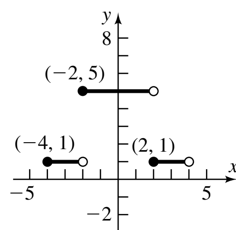
d) $H(x) = f(x + 1) - 2$


e) $Q(x) = \frac{1}{2}f(x)$


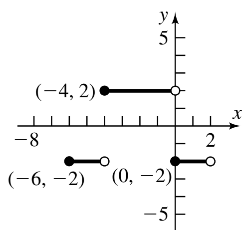
f) $g(x) = f(-x)$


g) $h(x) = f(2x)$


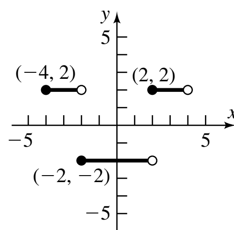
67. a) $F(x) = f(x) + 3$



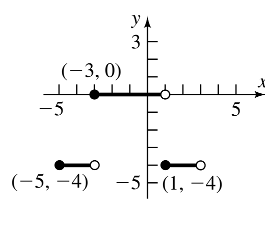
b) $G(x) = f(x + 2)$



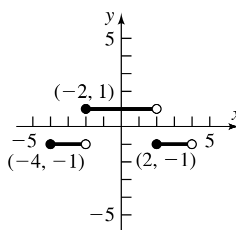
c) $P(x) = -f(x)$



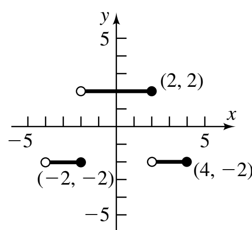
d) $H(x) = f(x + 1) - 2$



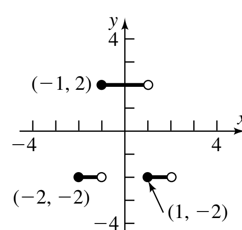
e) $Q(x) = \frac{1}{2}f(x)$



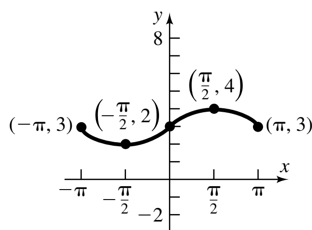
f) $g(x) = f(-x)$



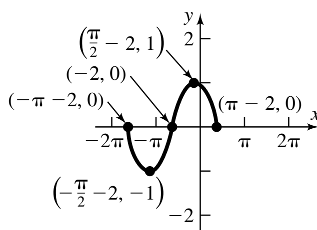
g) $h(x) = f(2x)$



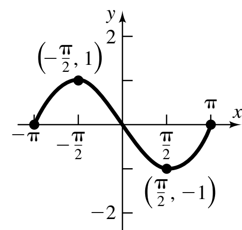
69. a) $F(x) = f(x) + 3$



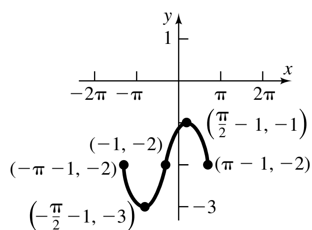
b) $G(x) = f(x + 2)$



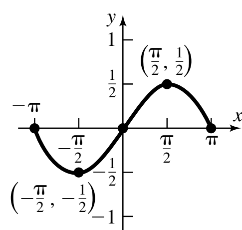
c) $P(x) = -f(x)$



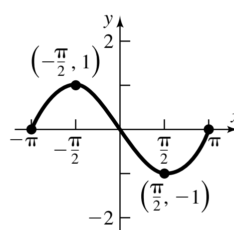
d) $H(x) = f(x + 1) - 2$



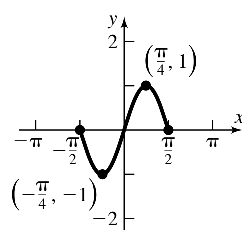
e) $Q(x) = \frac{1}{2}f(x)$



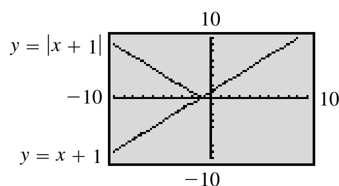
f) $g(x) = f(-x)$



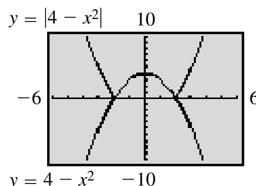
g) $h(x) = f(2x)$



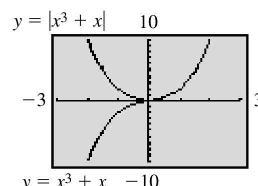
71. a)



b)

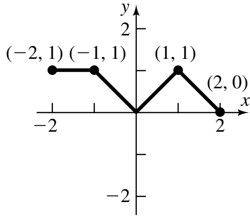


c)

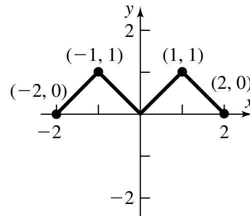


d) Para obtener la gráfica de $y = f(x)$ se refleja toda la parte de la gráfica de $y = |f(x)|$ que queda bajo el eje x.

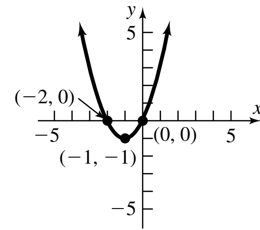
73. a)



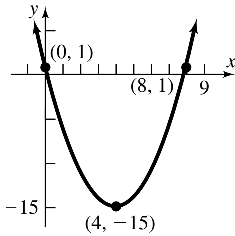
b)



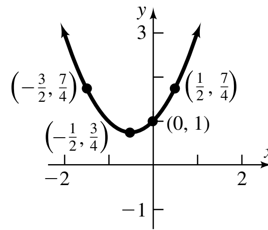
75. $f(x) = (x + 1)^2 - 1$



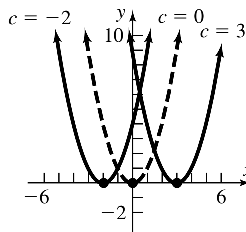
77. $f(x) = (x - 4)^2 - 15$



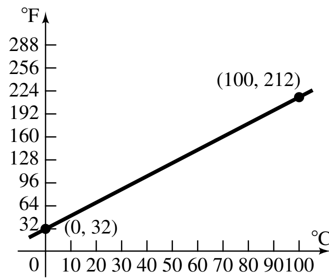
79. $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

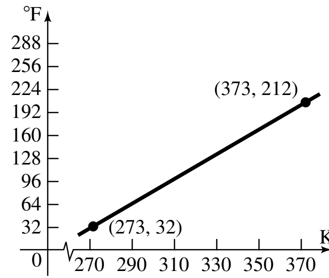


81.

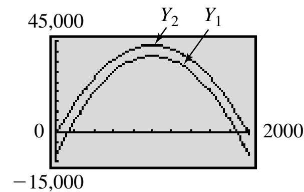


83.





85. a)



b) 10% de impuesto

c) Y_1 es la gráfica de $p(x)$ desplazada hacia abajo 10,000 unidades de manera vertical. Y_2 es la gráfica de $p(x)$ comprimida por un factor de 0.9 de manera vertical.

d) 10% de impuestos

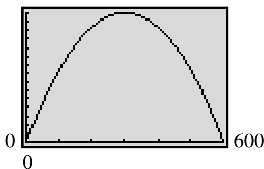
3.6 Ejercicios *(página 280)*

1. $V(r) = 2\pi r^3$

3. a) $R(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 100x$

b) $13,333.33

c)

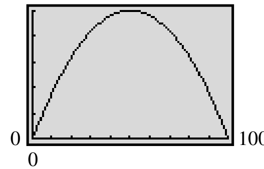


d) 300; $15,000 **e)** $50

5. a) $R(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 20x$

b) $255

c)

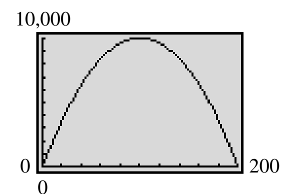


d) 50; $500 **e)** $10

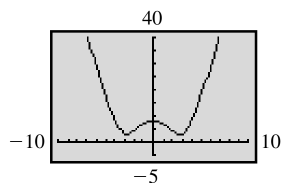
7. a) $A(x) = -x^2 + 200x$

b) $0 < x < 200$

c) A es mayor cuando $x = 100$ yardas.

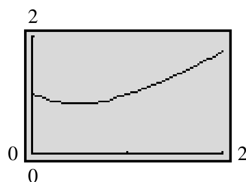


9. a) $d(x) = \sqrt{x^4 - 15x^2 + 64}$
b) $d(0) = 8$
c) $d(1) = \sqrt{50} \approx 7.07$
d)



e) d es menor cuando $x \approx -2.74$ o $x \approx 2.74$.

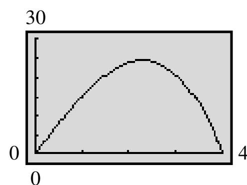
11. a) $d(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$
b)



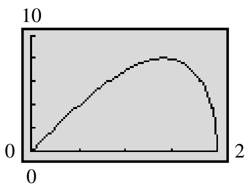
c) $x = \dfrac{1}{2}$

13. $A(x) = \dfrac{1}{2}x^4$

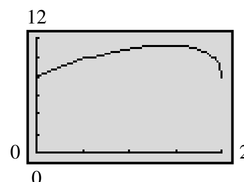
15. a) $A(x) = x(16 - x^2)$
b) Dominio: $\{x|0 < x < 4\}$
c) El área es mayor cuando $x \approx 2.31$.



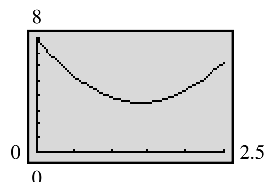
17. a) $A(x) = 4x\sqrt{4 - x^2}$
b) $p(x) = 4x + 4\sqrt{4 - x^2}$
c) A es mayor cuando $x \approx 1.41$.



d) p es mayor cuando $x \approx 1.41$.



19. a) $A(x) = x^2 + \dfrac{25 - 20x + 4x^2}{\pi}$
b) Dominio: $\{x|0 < x < 2.5\}$
c) A es menor cuando $x \approx 1.40$ m.

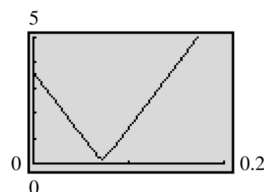


21. a) $C(x) = x$ **b)** $A(x) = \dfrac{x^2}{4\pi}$

23. a) $A(r) = 2r^2$ **b)** $p(r) = 6r$

25. $A(x) = \left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)x^2$

27. a) $d(t) = \sqrt{2500t^2 - 360t + 13}$
b) d es menor cuando $t \approx 0.07$.



29. $V(r) = \dfrac{\pi H(R - r)r^2}{R}$ **31. a)** $T(x) = \dfrac{12 - x}{5} + \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{3}$ **b)** $\{x|0 \le x \le 12\}$ **c)** 3.09 horas **d)** 3.55 horas

Ejercicios de repaso *(página 286)*

1. Función; Dominio $\{-1, 2, 4\}$, Rango $\{0, 3\}$ **3. a)** 2 **b)** −2 **c)** $-\dfrac{3x}{x^2 - 1}$ **d)** $-\dfrac{3x}{x^2 - 1}$ **e)** $\dfrac{3(x - 2)}{x^2 - 4x + 3}$ **f)** $\dfrac{6x}{4x^2 - 1}$

5. a) 0 **b)** 0 **c)** $\sqrt{x^2 - 4}$ **d)** $-\sqrt{x^2 - 4}$ **e)** $\sqrt{x^2 - 4x}$ **f)** $2\sqrt{x^2 - 1}$ **7. a)** 0 **b)** 0 **c)** $\dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ **d)** $-\dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ **e)** $\dfrac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}$ **f)** $\dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ **9.** $\{x|x \ne -3, x \ne 3\}$ **11.** $\{x|x \le 2\}$ **13.** $\{x|x > 0\}$ **15.** $\{x|x \ne -3, x \ne 1\}$

17. $(f + g)(x) = 2x + 3$; Dominio: todos los números reales
$(f - g)(x) = -4x + 1$; Dominio: todos los números reales
$(f \cdot g)(x) = -3x^2 + 5x + 2$; Dominio: todos los números reales
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2 - x}{3x + 1}$; Dominio: $\left\{x \,\middle|\, x \ne -\dfrac{1}{3}\right\}$

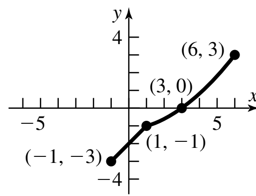
19. $(f + g)(x) = 3x^2 + 4x + 1$; Dominio: todos los números reales
$(f - g)(x) = 3x^2 - 2x + 1$; Dominio: todos los números reales
$(f \cdot g)(x) = 9x^3 + 3x^2 + 3x$; Dominio: todos los números reales
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{3x^2 + x + 1}{3x}$; Dominio: $\{x|x \ne 0\}$

21. $(f + g)(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x(x - 1)}$; Dominio: $\{x|x \ne 0, 1\}$, $(f - g)(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x(x - 1)}$; Dominio: $\{x|x \ne 0, 1\}$

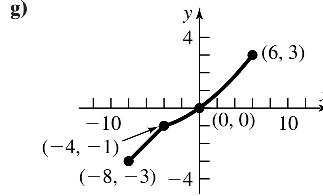
$(f \cdot g)(x) = \dfrac{x + 1}{x(x - 1)}$; Dominio: $\{x|x \ne 0, 1\}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x(x + 1)}{x - 1}$; Dominio: $\{x|x \ne 0, 1\}$ **23.** $-4x + 1 - 2h$

25. **a)** Dominio: $\{x|-4 \le x \le 3\}$; Rango: $\{y|-3 \le y \le 3\}$ **b)** $(0, 0)$ **c)** -1 **d)** -4

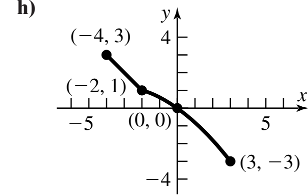
e) $\{x|0 < x \le 3\}$ **f)**



g)

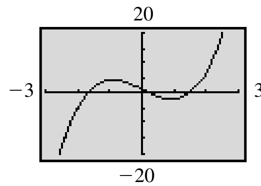


h)



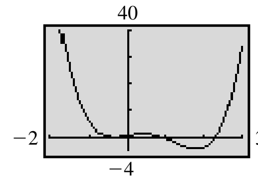
27. **a)** Dominio: $\{x|-4 \le x \le 4\}$ o $[-4, 4]$ Rango: $\{y|-3 \le y \le 1\}$ o $[-3, 1]$ **b)** Creciente en $(-4, -1)$ y $(3, 4)$; Decreciente en $(-1, 3)$ **c)** El máximo local es 1 y se presenta en $x = -1$; El mínimo local es -3 y se presenta en $x = 3$ **d)** No hay simetría **e)** Ninguna **f)** Intercepciones x: $-2, 0, 4$; intercepciones y: 0 **29.** Impar **31.** Par **33.** Ninguna **35.** Impar

37.



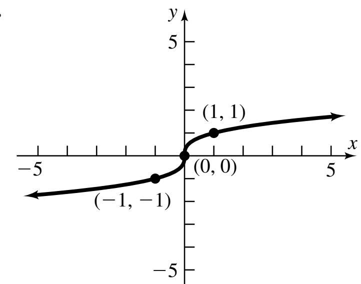
Máximo local: $(-0.91, 4.04)$
Mínimo local: $(0.91, -2.04)$
Creciente: $(-3, -0.91)$; $(0.91, 3)$
Decreciente: $(-0.91, 0.91)$

39.

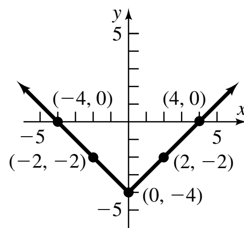


Máximo local: $(0.41, 1.53)$
Mínimo local: $(-0.34, 0.54)$; $(1.80, -3.56)$
Creciente: $(-0.34, 0.41)$; $(1.80, 3)$
Decreciente: $(-2, -0.34)$; $(0.41, 1.80)$

41. **a)** 23 **b)** 7 **c)** 47
43. -5 **45.** $-4x - 5$ **47.** b), c), d)
49.

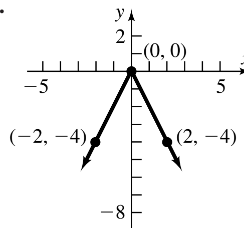


51.



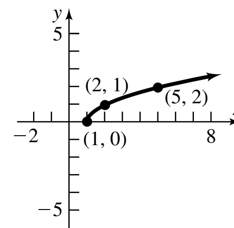
Intercepciones: $(-4, 0)$, $(4, 0)$, $(0, -4)$
Dominio: todos los números reales
Rango: $\{y|y \ge -4\}$ o $[-4, \infty)$

53.



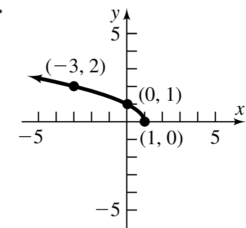
Intercepción: $(0, 0)$
Dominio: todos los números reales
Rango: $\{y|y \le 0\}$ o $(-\infty, 0]$

55.



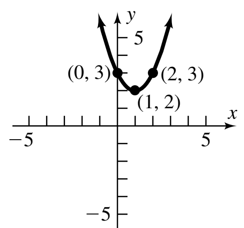
Intercepción: $(1, 0)$
Dominio: $\{x|x \ge 1\}$ o $[1, \infty)$
Rango: $\{y|y \ge 0\}$ o $[0, \infty)$

57.



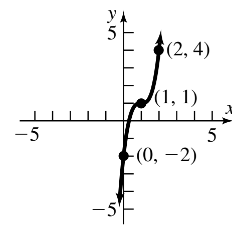
Intercepciones: $(0, 1)$, $(1, 0)$
Dominio: $\{x| x \le 1\}$ o $(-\infty, 1]$
Rango: $\{y|y \ge 0\}$ o $[0, \infty)$

59.



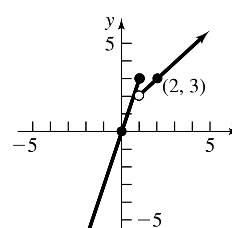
Intercepción: $(0, 3)$
Dominio: todos los números reales
Rango: $\{y|y \ge 2\}$ or $[2, \infty)$

61.



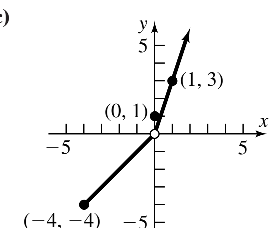
Intercepciones: $(0, -2)$, $\left(1 + \frac{\sqrt[3]{-9}}{3}, 0\right)$ o alrededor de $(0.3, 0)$
Dominio: todos los números reales
Rango: todos los números reales

63. **a)** $\{x|x > -2\}$; $(-2, \infty)$
b) $(0, 0)$
c)



d) $\{y|y > -6\}$; $(-6, \infty)$

65. **a)** $\{x|x \ge -4\}$; $[-4, \infty)$
b) $(0, 1)$
c)

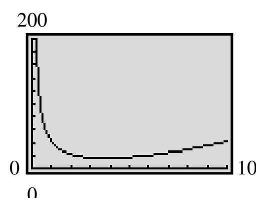


d) $\{y|y \ge -4\}$; $[-4, \infty)$

67. $f(x) = -2x + 3$ **69.** $A = 11$ **71.** $Th) = -0.0025h + 30, 0 \le x \le 10{,}000$ **73.** $V(S) = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$; Si se duplicarán el área, el volumen aumenta en un factor de $2\sqrt{2}$. **75.** $S(x) = kx(36 - x^2)^{3/2}$; Dominio: $\{x|\ 0 < x < 6\}$

77. a) $C(r) = 0.12\pi r^2 + \dfrac{40}{r}$ **b)** \$16.03 **c)** \$29.13

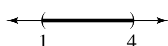
d) El costo es menor para $r \approx 3.76$ cm.



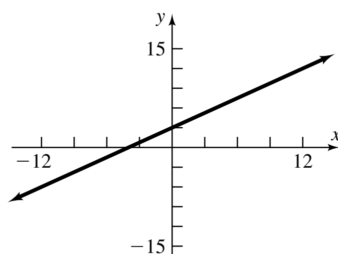
Repaso acumulativo *(página 290)*

1. $\left\{\dfrac{4}{5}\right\}$ **2.** $\{3, 4\}$ **3.** $\left\{-\dfrac{1}{3}, 2\right\}$ **4.** $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ **5.** No tiene solución real **6.** $\{-7\}$ **7.** $\{-31\}$ **8.** $\left\{\dfrac{1}{3}, 1\right\}$ **9.** $\left\{\dfrac{1-\sqrt{15}i}{4}, \dfrac{1+\sqrt{15}i}{4}\right\}$

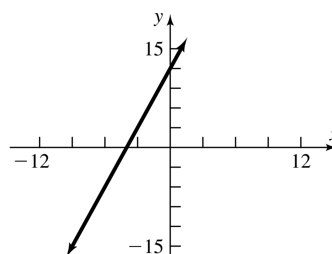
10. $\{x|1 < x < 4\}$



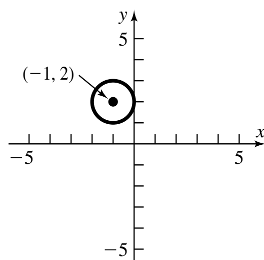
11.



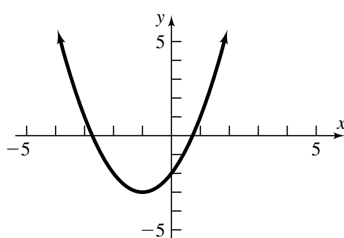
12.



13.

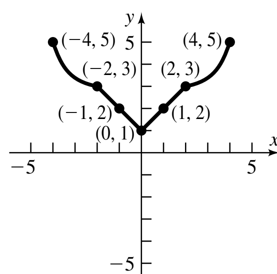


14.

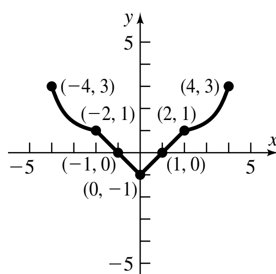


15. a) Dominio: $\{x|-4 \le x \le 4\}$; Rango: $\{y|0 \le y \le 3\}$ **b)** $(-1, 0), (0, -1), (1, 0)$ **c)** eje y **d)** 1 **e)** -4 y 4 **f)** $\{x|-1 < x < 1\}$

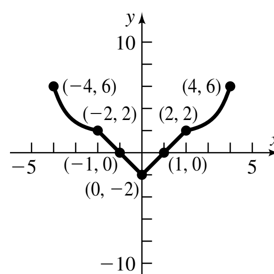
g)



h)

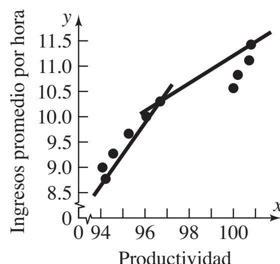


i)



j) par **k)** $(0, 4)$ **l)** $(-4, 0)$ **m)** f tiene un mínimo local de -1 en $x = 0$ **n)** 1

16. a), b), e)



c) 0.624 dólares/unidad de productividad

d) Por cada aumento de 1 unidad en la productividad, los ingresos se incrementan en un promedio de \$0.62.

f) 0.273 dólares/unidad de productividad

g) Por cada aumento de 1 unidad en la productividad, los ingresos se incrementan en un promedio de \$0.27.

h) Es decreciente.

CAPÍTULO 4 Polinomios y funciones racionales

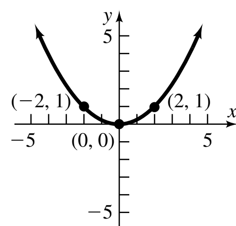
4.1 Conceptos y vocabulario *(página 306)*

5. Parábola **6.** El eje o eje de simetría **7.** $-\dfrac{b}{2a}$ **8.** Verdadero **9.** Verdadero **10.** Verdadero

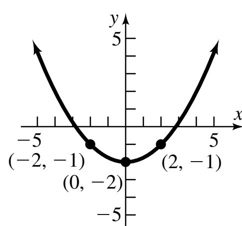
4.1 Ejercicios *(página 306)*

11. *C* **13.** *F* **15.** *G* **17.** *H*

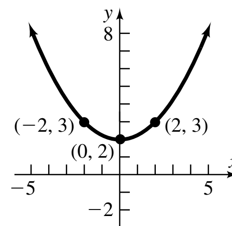
19.



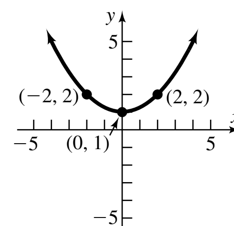
21.



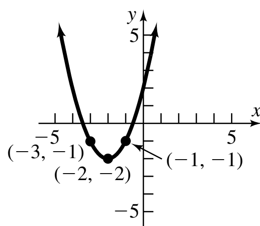
23.



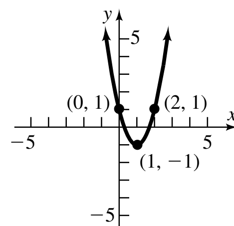
25.



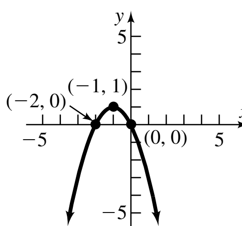
27. $f(x) = (x + 2)^2 - 2$



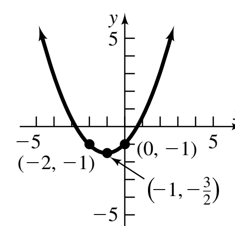
29. $f(x) = 2(x - 1)^2 - 1$



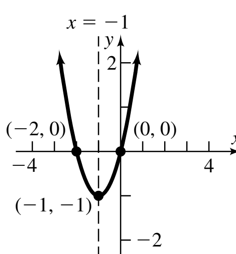
31. $f(x) = -(x + 1)^2 + 1$



33. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - \frac{3}{2}$

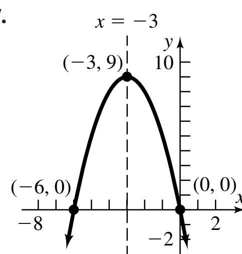


35.



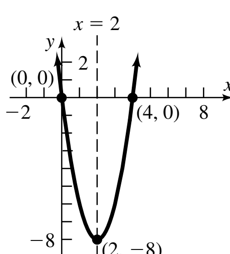
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-1, \infty)$
Dec: $(-\infty, -1)$; Crec: $(-1, \infty)$

37.



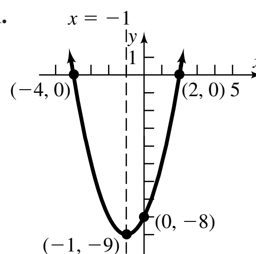
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(-\infty, 9]$
Crec: $(-\infty, -3)$; Dec: $(-3, \infty)$

39.



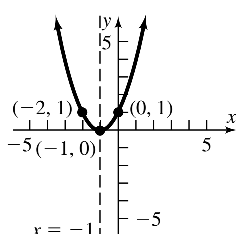
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-8, \infty)$
Dec: $(-\infty, 2)$; Crec: $(2, \infty)$

41.



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-9, \infty)$
Dec: $(-\infty, -1)$; Crec: $(-1, \infty)$

43.

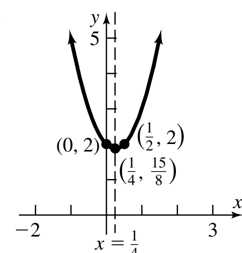


Dominio: $(-\infty, \infty)$

Rango: $[0, \infty)$

Dec: $(-\infty, -1)$; Crec: $(-1, \infty)$

45.

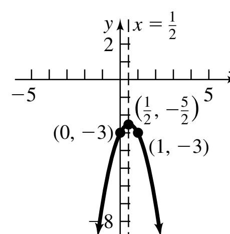


Dominio: $(-\infty, \infty)$

Rango: $\left[\dfrac{15}{8}, \infty\right)$

Dec: $\left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right)$; Crec: $\left(\dfrac{1}{4}, \infty\right)$

47.

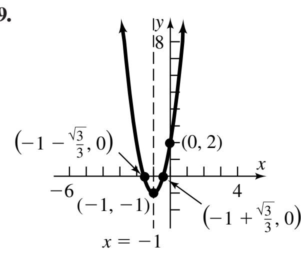


Dominio: $(-\infty, \infty)$

Rango: $\left(-\infty, -\dfrac{5}{2}\right]$

Dec: $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$; Crec: $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$

49.

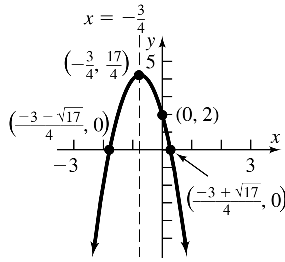


Dominio: $(-\infty, \infty)$

Rango: $[-1, \infty)$

Dec: $(-\infty, -1)$; Crec: $(-1, \infty)$

51.



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $\left(-\infty, \frac{17}{4}\right]$
Dec: $\left(-\frac{3}{4}, \infty\right)$; Crec: $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$

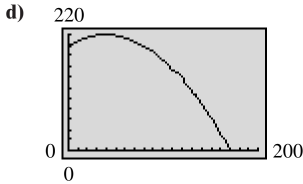
53. $f(x) = (x + 1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1$
55. $f(x) = -(x + 3)^2 + 5 = -x^2 - 6x - 4$
57. $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3 = 2x^2 - 4x - 1$
59. Valor mínimo; −18
61. Valor mínimo; −21
63. Valor máximo; 21
65. Valor máximo; 13

67. a) $a = 1$: $f(x) = (x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$
$a = 2$: $f(x) = 2(x + 3)(x - 1) = 2x^2 + 4x - 6$
$a = -2$: $f(x) = -2(x + 3)(x - 1) = -2x^2 - 4x + 6$
$a = 5$: $f(x) = 5(x + 3)(x - 1) = 5x^2 + 10x - 15$
b) El valor de a no influye sobre las intercepciones en x, pero cambia la intercepción en y por un factor de a.
c) El valor de a no afecta al eje de simetría. Éste es $x = -1$ para todos los valores de a.
d) El valor de a no afecta a la coordenada x del vértice. Sin embargo, la coordenada y del vértice se multiplica por a.
e) El punto medio entre las intercepciones con el eje x es la coordenada x (abscisa) del vértice.

69. \$500; \$1,000,000 **71. a)** $R(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 100x$ **b)** \$13,333.33 **c)** 300; \$15,000 **d)** \$50 **73. a)** $R(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 20x$ **b)** \$255 **c)** 50; \$500 **d)** \$10 **75. a)** $A(w) = -w^2 + 200w$ **b)** A A es mayor cuando $w = 100$ yardas. **c)** 10,000 yardas^2

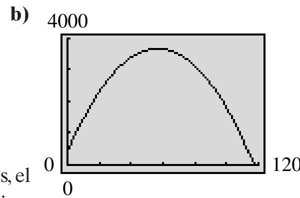
77. 2,000,000 m^2 **79. a)** $\frac{625}{16} \approx 39$ pies **b)** 219.5 pies **c)** 170 pies **81.** 18.75 m **83.** 3 pulgadas **85.** $\frac{750}{\pi}$ por 375 m

d)



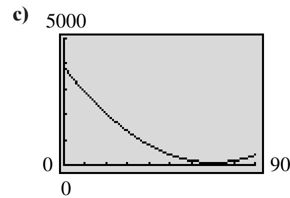
e) Cuando alcanza una altura de 100 pies, el proyectil está a 135.7 pies del precipicio.

87. a) \$56,600; 3685 cazadores
b)



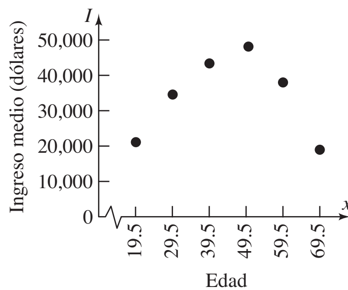
Creciente

89. a) 1795 **b)** 28 años de edad
c)

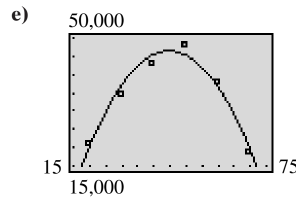


d) El número de víctimas inicialmente disminuye, luego comienza a aumentar.

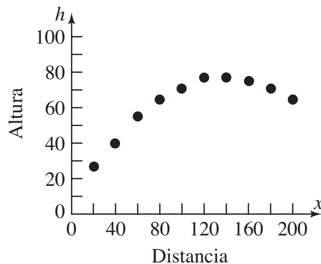
91. a) Cuadrática, $a < 0$



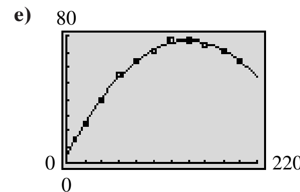
b) 44.7 años de edad
c) \$46,484
e)



93. a) Cuadrática, $a < 0$



b) 139.2 pies
c) 77.4 pies
e)



95. $x = \frac{a}{2}$ **97.** $\frac{38}{3}$ **99.** $\frac{248}{3}$
101. 25 unidades cuadradas

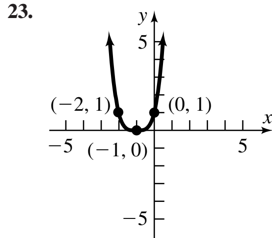
4.2 Conceptos y vocabulario *(página 326)*

5. suave; continua **6.** cero o raíz **7.** toca **8.** Verdadero **9.** Falso **10.** Falso

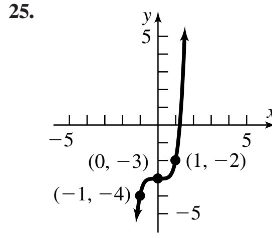
4.2 Ejercicios *(página 327)*

11. Sí, tercer grado **13.** Sí, segundo grado **15.** No, x está elevada a la potencia -1. **17.** No, x está elevada a la potencia $\frac{3}{2}$.
19. Sí, cuarto grado **21.** Sí, cuarto grado

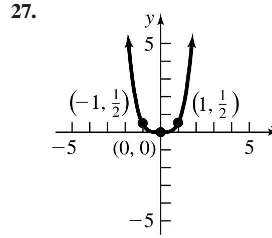
23.



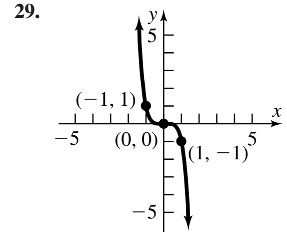
25.



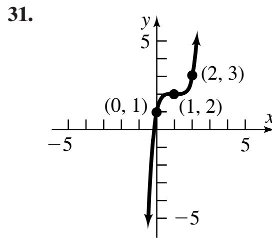
27.



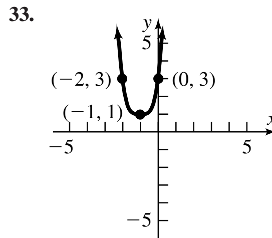
29.



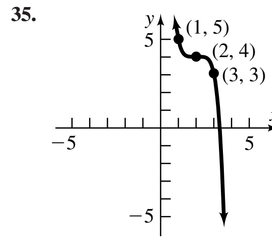
31.



33.



35.

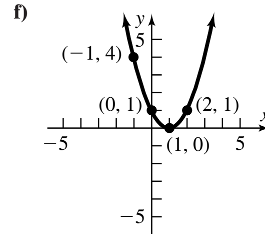


37. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ para $a = 1$ **39.** $f(x) = x^3 - x^2 - 12x$ para $a = 1$ **41.** $f(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$ para $a = 1$
43. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ para $a = 1$ **45. a)** 7, multiplicidad 1; −3, multiplicidad 2 **b)** la gráfica toca al eje x en −3 y lo atraviesa en 7 **c)** $y = 3x^3$ **47. a)** 2, multiplicidad 3 **b)** la gráfica atraviesa el eje x en 2 **c)** $y = 4x^5$ **49. a)** $-\frac{1}{2}$, multiplicidad 2 **b)** la gráfica toca el eje x en $-\frac{1}{2}$ **c)** $y = -2x^6$ **51. a)** 5, multiplicidad 3; −4, multiplicidad 2 **b)** la gráfica toca el eje x en −4 y lo atraviesa en 5 **c)** $y = x^5$
53. a) no hay ceros reales **b)** La gráfica no toca ni atraviesa el eje x **c)** $y = 3x^6$
55. a) 0, multiplicidad 2; $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, multiplicidad 1 **b)** La gráfica toca al eje x en 0 y lo atraviesa en $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ **c)** $y = -2x^4$

57. a) intercepción en x: 1; intercepción en y: 1
b) La toca en 1
c) $y = x^2$
d) 1
e)

Intervalo	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
Número seleccionado	−1	2
Valor de f	$f(-1) = 4$	$f(2) = 1$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Bajo del eje x
Punto sobre la gráfica	(−1, 4)	(2, 1)

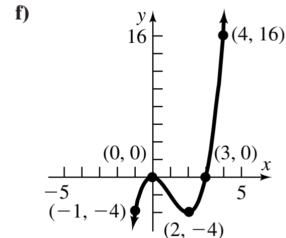
f)



59. a) intercepciones en x: 0, 3; intercepción en y: 0
b) La toca en 0; la atraviesa en 3
c) $y = x^3$
d) 2
e)

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
Número seleccionado	−1	2	4
Valor de f	$f(-1) = -4$	$f(2) = -4$	$f(4) = 16$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	(−1, −4)	(2, −4)	(4, 16)

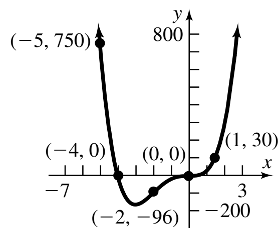
f)



61. **a)** intercepciones x: −4, 0; intercepción y: 0
b) La toca en −4, 0
c) $y = 6x^4$
d) 3
e)

−4 0

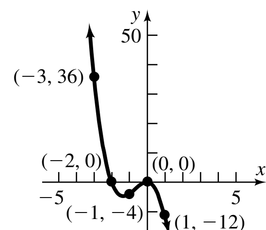
Intervalo	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, \infty)$
Número seleccionado	−5	−2	1
Valor de f	$f(-5) = 750$	$f(-2) = -96$	$f(1) = 30$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	(−5, 750)	(−2, −96)	(1, 30)

f)


63. **a)** intercepciones x: −2, 0; intercepción y: 0
b) La toca en −2; la atraviesa en 0
c) $y = -4x^3$
d) 2
e)

−2 0

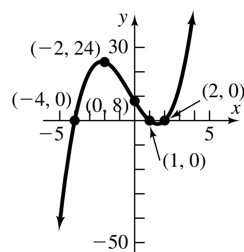
Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
Número seleccionado	−3	−1	1
Valor de f	$f(-3) = 36$	$f(-1) = -4$	$f(1) = -12$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Abajo del eje x
Punto sobre la gráfica	(−3, 36)	(−1, −4)	(1, −12)

f)


65. **a)** intercepciones x: −4, 1, 2; intercepción y: 8
b) La atraviesa en −4, 1, 2
c) $y = x^3$
d) 2
e)

−4 1 2

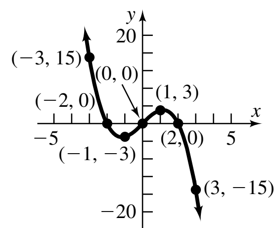
Intervalo	$(-\infty, -4)$	$(-4, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	−5	−2	$\frac{3}{2}$	3
Valor de f	$f(-5) = -42$	$f(-2) = 24$	$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{8}$	$f(3) = 14$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	(−5, −42)	(−2, 24)	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{8}\right)$	(3, 14)

f)


67. $f(x) = 4x - x^3 = -x(x^2 - 4)$
$= -x(x + 2)(x - 2)$
a) intercepciones x: −2, 0, 2; intercepción y: 0
b) La atraviesa en −2, 0, y 2
c) $y = -x^3$
d) 2
e)

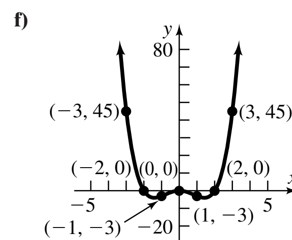
−2 0 2

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	−3	−1	1	3
Valor de f	$f(-3) = 15$	$f(-1) = -3$	$f(1) = 3$	$f(3) = -15$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x
Punto sobre la gráfica	(−3, 15)	(−1, −3)	(1, 3)	(3, −15)

f)


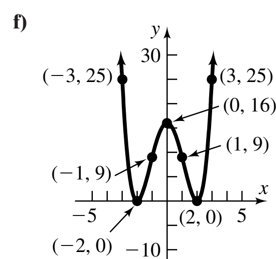
69. a) intercepciones x: −2, 0, 2; intercepción y: 0
b) La atraviesa en −2, 2; la toca en 0
c) $y = x^4$
d) 3
e)

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	−3	−1	1	3
Valor de f	$f(-3) = 45$	$f(-1) = -3$	$f(1) = -3$	$f(3) = 45$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	(−3, 45)	(−1, −3)	(1, −3)	(3, 45)

f)


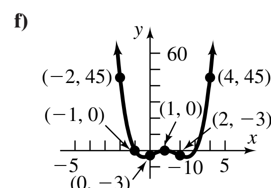
71. a) intercepciones x: −2, 2; intercepción y: 16
b) La toca en −2, 2
c) $y = x^4$
d) 3
e)

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	−3	0	3
Valor de f	$f(-3) = 25$	$f(0) = 16$	$f(3) = 25$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Arriba del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	(−3, 25)	(0, 16)	(3, 25)

f)


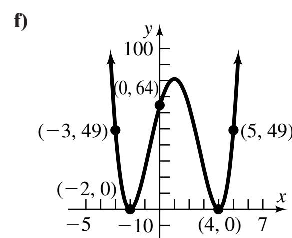
73. a) intercepciones x: −1, 1, 3; intercepción y: −3
b) La atraviesa en −1, 3; la toca en 1
c) $y = x^4$
d) 3
e)

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Número seleccionado	−2	0	2	4
Valor de f	$f(-2) = 45$	$f(0) = -3$	$f(2) = -3$	$f(4) = 45$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	(−2, 45)	(0, −3)	(2, −3)	(4, 45)

f)


75. a) intercepciones x: −2, 4; intercepción y: 64
b) La toca en −2 y 4
c) $y = x^4$
d) 3
e)

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 4)$	$(4, \infty)$
Número seleccionado	−3	0	5
Valor de f	$f(-3) = 49$	$f(0) = 64$	$f(5) = 49$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Arriba del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	(−3, 49)	(0, 64)	(5, 49)

f)


77. a) intercepciones x: 0, 2; intercepción y: 0

b) La toca en 0; la atraviesa en 2

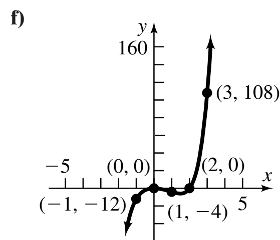
c) $y = x^5$

d) 4

e)

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	-1	1	3
Valor de f	$f(-1) = -12$	$f(1) = -4$	$f(3) = 108$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del x
Punto sobre la gráfica	$(-1, -12)$	$(1, -4)$	$(3, 108)$

f)



79. a) intercepciones x: -1, 0, 1; intercepción y: 0

b) La atraviesa en 1; la toca en -1 y 0

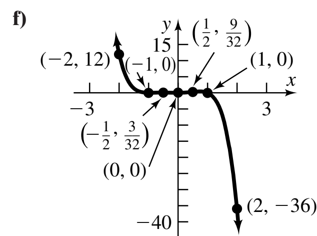
c) $y = -x^5$

d) 4

e)

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Número seleccionado	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
Valor de f	$f(-2) = 12$	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{32}$	$f(2) = -36$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Arriba del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-2, 12)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{32}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{32}\right)$	$(2, -36)$

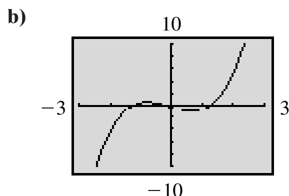
f)



81. c, e, f **83.** c, e

85. a) Tercer grado 3; $y = x^3$

b)



c) intercepciones x: -1.26, -0.20, 1.26; intercepción y: -0.31752

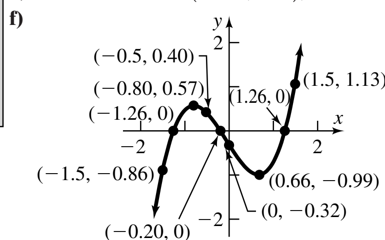
d) Encima en $(-1.26, -0.20)$ y $(1.26, \infty)$; Abajo en $(-\infty, -1.26)$ y $(-0.20, 1.26)$

X	Y1
-1.5	-.8611
-.5	.40128
0	-.3175
1.5	1.1261

Y1=X³+0.2X²-1.5…

e) Máximo local en $(-0.80, 0.57)$; mínimo local en $(0.66, -0.99)$

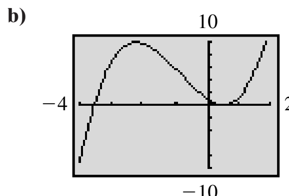
f)



g) Creciente en $(-\infty, -0.80)$ y $(0.66, \infty)$; decreciente en $(-0.80, 0.66)$

87. a) Tercer grado; $y = x^3$

b)



d)

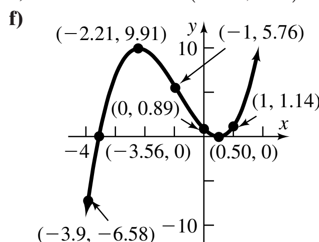
X	Y1
-3.9	-6.582
-1	5.76
1	1.14

Y1=X³+2.56X²-3.…

Encima en $(-3.56, 0.5)$ y $(0.5, \infty$ Abajo en $(-\infty, -3.56)$

e) Máximo local en $(-2.21, 9.91)$ mínimo local en $(0.50, 0)$

f)

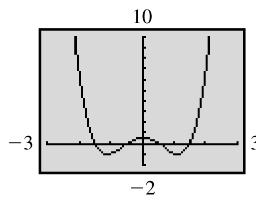


c) Intercepciones x: -3.56, 0.50 intercepción y: 0.89

g) Creciente en $(-\infty, -2.21)$ y $(0.50, \infty)$; decreciente en $(-2.21, 0.50)$

89. a) Cuarto grado; $y = x^4$

b)



c) Intercepciones x: $-1.5, -0.5, 0.5, 1.5$
intercepción y: 0.5625

d)

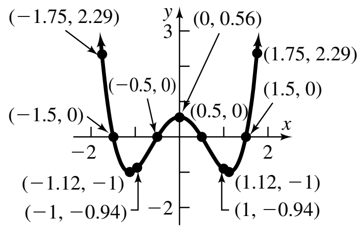
X	Y1
-1.75	2.2852
-1	-.9375
0	.5625
1	-.9375
1.75	2.2852

Y1=X^4−2.5X²+0.…

Encima en $(-\infty, -1.5)$, $(-0.5, 0.5)$, y $(1.5, \infty)$; abajo en $(-1.5, -0.5)$ y $(0.5, 1.5)$

e) Máximo local en $(-1.12, -1)$, $(1.12, -1)$; mínimo local en $(0, 0.56)$

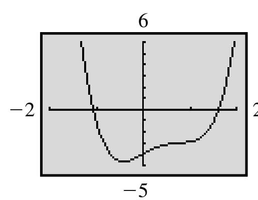
f)



g) Creciente en $(-1.12, 0)$ y $(1.12, \infty)$
Decreciente en $(-\infty, -1.12)$ y $(0, 1.12)$

91. a) Cuarto grado; $y = 2x^4$

b)



c) Intercepciones y: $-1.07, 1.62$
intercepción y: -4

d)

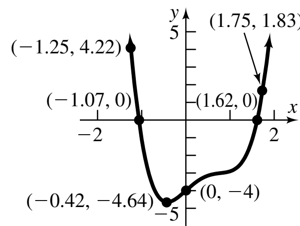
X	Y1
-1.25	4.2237
0	-4
1.75	1.834

Y1=2X^4−πX³+√(5…

Encima en $(-\infty, -1.07)$ y $(1.62, \infty)$; abajo en $(-1.07, 1.62)$

e) Mínimo local en $(-0.42, -4.64)$

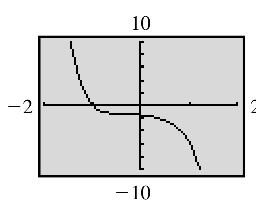
f)



g) Creciente en $(-0.42, \infty)$
Decreciente en $(-\infty, -0.42)$

93. a) Quinto grado; $y = -2x^5$

b)



c) Intercepción x: -0.98; intercepción y: $-\sqrt{2}$

d)

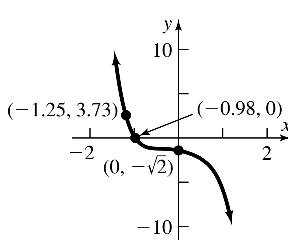
X	Y1
-1.25	3.7296
0	-1.414

Y1=−2X^5−√(2)X²…

Encima en $(-\infty, -0.98)$; abajo en $(0.98, \infty)$

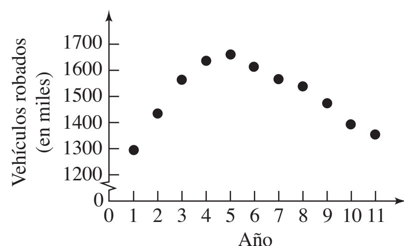
e) Ninguno

f)



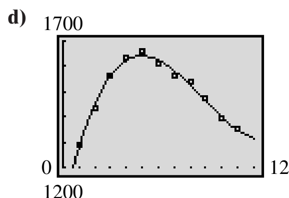
g) Decreciente en $(-\infty, \infty)$

95. a) Cúbica, $a > 0$

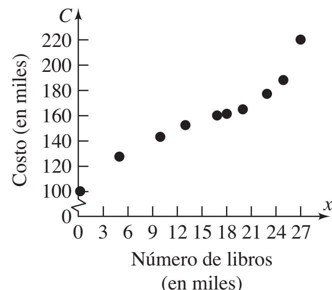


b) $\approx$ 1,524,220 robos de vehículo

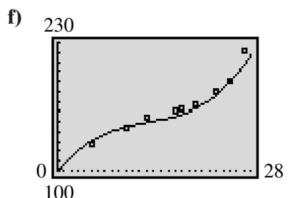
d)



97. a) Cúbica, $a > 0$



b) Aproximadamente 3.17 dólares/libro
c) 1.85 dólares/libro
d) \$171,470
f)



g) Costos fijos de \$98,430

99. No; sí

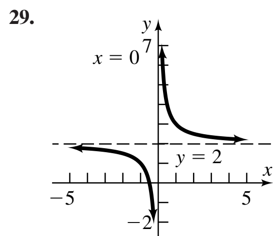
4.3 Conceptos y vocabulario *(página 339)*

5. $y = 1$ **6.** $x = -1$ **7.** propia **8.** Falso **9.** Verdadero **10.** Verdadero

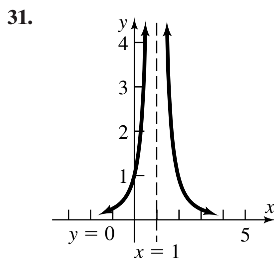
4.3 Ejercicios *(página 339)*

11. Todos los números reales, excepto 3; $\{x|x \neq 3\}$ **13.** Todos los números reales, excepto 2 y -4; $\{x|x \neq 2, x \neq -4\}$ **15.** Todos los números reales, excepto $-\frac{1}{2}$ y 3; $\left\{x \middle| x \neq -\frac{1}{2}, x \neq 3\right\}$ **17.** Todos los números reales, excepto 2; $\{x|x \neq 2\}$ **19.** Todos los números reales **21.** Todos los números reales, excepto -3 y 3; $\{x|x \neq -3, x \neq 3\}$ **23. a)** Dominio: $\{x|x \neq 2\}$; Rango: $\{y|y \neq 1\}$ **b)** $(0, 0)$ **c)** $y = 1$ **d)** $x = 2$ **e)** Ninguno **25. a)** Dominio: $\{x|x \neq 0\}$; Rango: todos los números reales **b)** $(-1, 0), (1, 0)$ **c)** Ninguno **d)** $x = 0$ **e)** $y = 2x$ **27. a)** Dominio: $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$; Rango: $\{y|y \leq 0, y > 1\}$ **b)** $(0, 0)$ **c)** $y = 1$ **d)** $x = -2, x = 2$ **e)** Ninguno

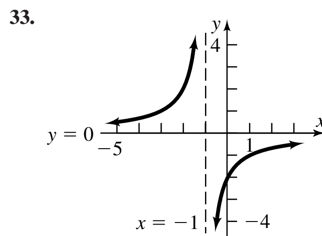
29.



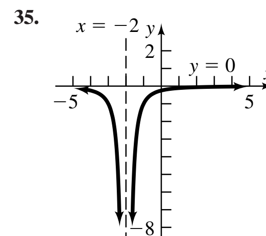
31.



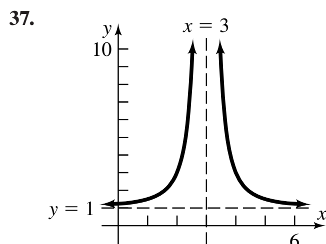
33.



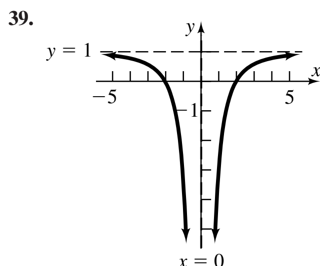
35.



37.



39.



41. Asíntota horizontal: $y = 3$; asíntota vertical: $x = -4$
43. No hay asíntotas
45. Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$
47. Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntota vertical: $x = 0$
49. Asíntota oblicua: $y = 3x$; asíntota vertical: $x = 0$
51. Asíntota oblicua: $y = -(x + 1)$; asíntota vertical: $x = 0$
53. a) 9.8209 m/seg^2 **b)** 9.8195 m/seg^2 **c)** 9.7936 m/seg^2 **d)** eje h

4.4 Conceptos y vocabulario *(página 353)*

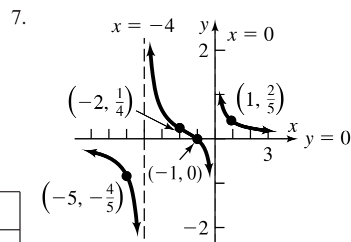
3. en términos menores **4.** Falso **5.** Falso **6.** Verdadero

4.4 Ejercicios *(página 353)*

7. 1. Dominio: $\{x|x \neq 0, x \neq -4\}$
2. Intercepción x: -1; no hay intercepción y
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntotas verticales: $x = 0, x = -4$
5. Asíntota horizontal: $y = 0$, intersección en $(-1, 0)$
6. -4 -1 0

Intervalo	$(-\infty, -4)$	$(-4, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
Número seleccionado	-5	-2	$-\frac{1}{2}$	1
Valor de R	$R(-5) = -\frac{4}{5}$	$R(-2) = \frac{1}{4}$	$R\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{7}$	$R(1) = \frac{2}{5}$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$\left(-5, -\frac{4}{5}\right)$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{7}\right)$	$\left(1, \frac{2}{5}\right)$

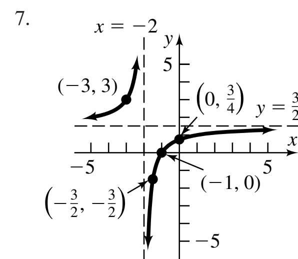
7.



9. 1. Dominio: $\{x|x \neq -2\}$
2. Intercepción x: -1; intercepción y: $\frac{3}{4}$
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: $x = -2$
5. Asíntota horizontal: $y = \frac{3}{2}$, sin intersección
6. -2 -1

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, \infty)$
Número seleccionado	-3	$-\frac{3}{2}$	0
Valor de R	$R(-3) = 3$	$R\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$	$R(0) = \frac{3}{4}$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Below x-axis	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-3, 3)$	$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$	$\left(0, \frac{3}{4}\right)$

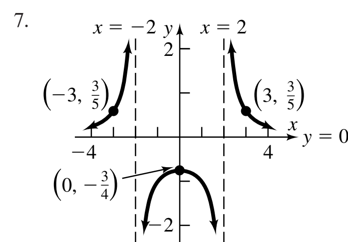
7.



11. 1. Dominio: $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$
2. Sin intercepción x; intercepción y: $-\frac{3}{4}$
3. Simétrica con respecto al eje y
4. Asíntotas verticales: $x = 2, x = -2$
5. Asíntota horizontal: $y = 0$, sin intersección
6. -2 2

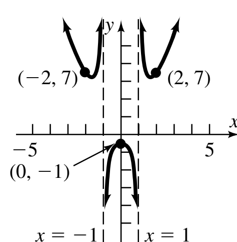
Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	-3	0	3
Valor de R	$R(-3) = \frac{3}{5}$	$R(0) = -\frac{3}{4}$	$R(3) = \frac{3}{5}$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$\left(-3, \frac{3}{5}\right)$	$\left(0, -\frac{3}{4}\right)$	$\left(3, \frac{3}{5}\right)$

7.



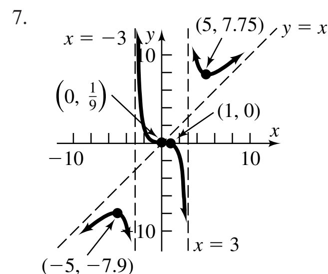
13. 1. Dominio: $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$
2. Sin intercepción x; intercepción y: -1
3. Simétrica con respecto al eje y
4. Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$
5. Sin asíntotas horizontales ni oblicuas
6. (recta numérica: -1, 1)

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Número seleccionado	-2	0	2
Valor de P	$P(-2) = 7$	$P(0) = -1$	$P(2) = 7$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-2, 7)$	$(0, -1)$	$(2, 7)$

7.


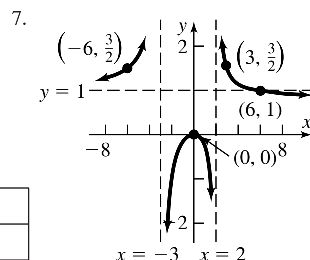
15. 1. Dominio: $\{x|x \neq -3, x \neq 3\}$
2. Intercepción x: 1; intercepción y: $\frac{1}{9}$
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = -3$
5. Asíntota oblicua: $y = x$, con intersección en $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$
6. (recta numérica: -3, 1, 3)

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Número seleccionado	-4	0	2	4
Valor de H	$H(-4) \approx -9.3$	$H(0) = \frac{1}{9}$	$H(2) = -1.4$	$H(4) = 9$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-4, -9.3)$	$\left(0, \frac{1}{9}\right)$	$(2, -1.4)$	$(4, 9)$

7.


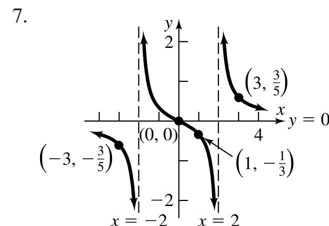
17. 1. Dominio: $\{x \neq -3, x \neq 2\}$
2. Intercepción x: 0; intercepción y: 0
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntotas verticales: $x = 2$, $x = -3$
5. Asíntota horizontal: $y = 1$, con intersección en $(6, 1)$
6. (recta numérica: -3, 0, 2)

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	-6	-1	1	3
Valor de R	$R(-6) = 1.5$	$R(-1) = -\frac{1}{6}$	$R(1) = -0.25$	$R(3) = 1.5$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-6, 1.5)$	$\left(-1, -\frac{1}{6}\right)$	$(1, -0.25)$	$(3, 1.5)$

7.


19. 1. Dominio: $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$
2. Intercepción x: 0; intercepción y: 0
3. Simétrica con respecto al origen
4. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$
5. Asíntota horizontal: $y = 0$, con intersección en $(0, 0)$
6. (recta numérica: -2, 0, 2)

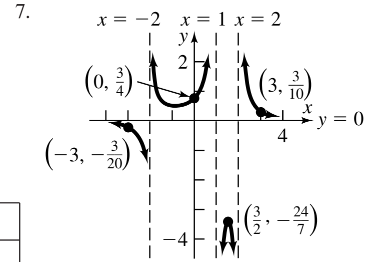
Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	-3	-1	1	3
Valor de G	$G(-3) = -\frac{3}{5}$	$G(-1) = \frac{1}{3}$	$G(1) = -\frac{1}{3}$	$G(3) = \frac{3}{5}$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$\left(-3, -\frac{3}{5}\right)$	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(3, \frac{3}{5}\right)$

7.


21. 1. Dominio: $\{x|x \neq 1, x \neq -2, x \neq 2\}$
2. Sin intercepción x; intercepción y: $\frac{3}{4}$
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntotas verticales: $x = -2, x = 1, x = 2$
5. Asíntota horizontal: $y = 0$, sin intersección
6.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	-3	0	1.5	3
Valor de R	$R(-3) = -\frac{3}{20}$	$R(0) = \frac{3}{4}$	$R(1.5) = -\frac{24}{7}$	$R(3) = \frac{3}{10}$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$\left(-3, -\frac{3}{20}\right)$	$\left(0, \frac{3}{4}\right)$	$\left(1.5, -\frac{24}{7}\right)$	$\left(3, \frac{3}{10}\right)$

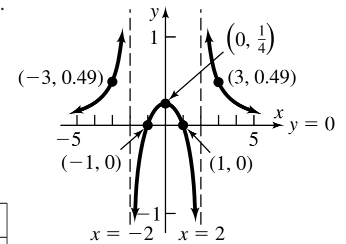
7.



23. 1. Dominio: $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$
2. Intercepciones x: -1, 1; intercepción y: $\frac{1}{4}$
3. Simétrica con respecto al eje y
4. Asíntotas verticales: $x = -2, x = 2$
5. Asíntota horizontal: $y = 0$, con intersecciones en $(-1, 0)$ u $(1, 0)$
6.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	-3	-1.5	0	1.5	3
Valor de H	$H(-3) \approx 0.49$	$H(-1.5) \approx -0.46$	$H(0) = \frac{1}{4}$	$H(1.5) \approx -0.46$	$H(3) \approx 0.49$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-3, 0.49)$	$(-1.5, -0.46)$	$\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$(1.5, -0.46)$	$(3, 0.49)$

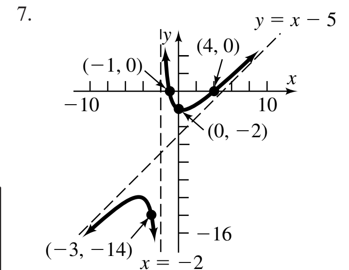
7.



25. 1. Dominio: $\{x|x \neq -2\}$
2. Intercepciones x: -1, 4; intercepción y: -2
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: $x = -2$
5. Asíntota oblicua: $y = x - 5$, sin intersección
6.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 4)$	$(4, \infty)$
Número seleccionado	-3	-1.5	0	5
Valor de F	$F(-3) = -14$	$F(-1.5) = 5.5$	$F(0) = -2$	$F(5) \approx 0.86$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-3, -14)$	$(-1.5, 5.5)$	$(0, -2)$	$(5, 0.86)$

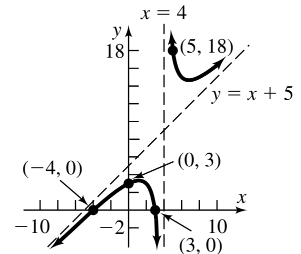
7.



27. 1. Dominio: $\{x|x \neq 4\}$
2. Intercepciones x: -4, 3; intercepciones y: 3
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: $x = 4$
5. Asíntota oblicua: $y = x + 5$, sin intersección
6.

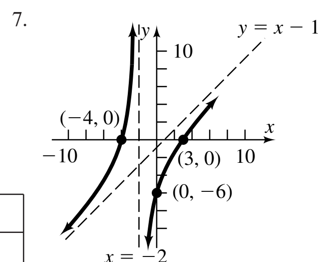
Intervalo	$(-\infty, -4)$	$(-4, 3)$	$(3, 4)$	$(4, \infty)$
Número seleccionado	-5	0	3.5	5
Valor de R	$R(-5) = -\frac{8}{9}$	$R(0) = 3$	$R(3.5) = -7.5$	$R(5) = 18$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$\left(-5, -\frac{8}{9}\right)$	$(0, 3)$	$(3.5, -7.5)$	$(5, 18)$

7.



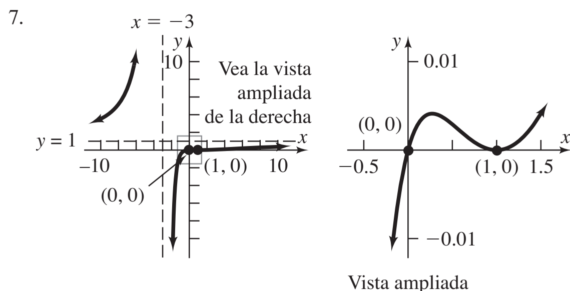
29. 1. Dominio: $\{x|x \neq -2\}$
2. Intercepciones x: −4, 3; intercepción y: −6
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: $x = -2$
5. Asíntota oblicua: $y = x - 1$, sin intercepción
6. −4, −2, 3

Intervalo	$(-\infty, -4)$	$(-4, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, \infty)$
Número seleccionado	−5	−3	0	4
Valor de F	$F(-5) = -\frac{8}{3}$	$F(-3) = 6$	$F(0) = -6$	$F(4) = \frac{4}{3}$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$\left(-5, -\frac{8}{3}\right)$	$(-3, 6)$	$(0, -6)$	$\left(4, \frac{4}{3}\right)$

7.


31. 1. Dominio: $\{x|x \neq -3\}$
2. Intercepciones x: 0, 1; intercepción y: 0
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: $x = -3$
5. Asíntota horizontal: $y = 1$, sin intersección
6. −3, 0, 1

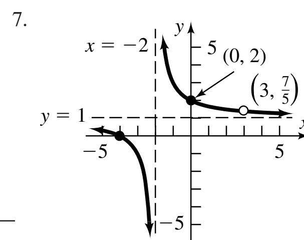
Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Número seleccionado	−4	−1	$\frac{1}{2}$	2
Valor de R	$R(-4) = 100$	$R(-1) = -0.5$	$R\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.003$	$R(2) = 0.016$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Arriba del eje x	Arriba del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-4, 100)$	$(-1, -0.5)$	$\left(\frac{1}{2}, 0.003\right)$	$(2, 0.016)$

7.


Vista ampliada

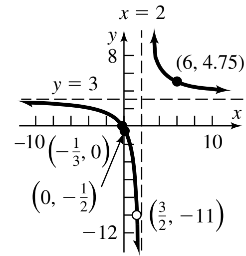
33. 1. Dominio: $\{x|x \neq -2, x \neq 3\}$
2. Intercepción x: −4; intercepción y: 2
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: $x = -2$; orificio en $\left(3, \frac{7}{5}\right)$
5. Asíntota horizontal: $y = 1$, sin intersección
6. −4, −2, 3

Intervalo	$(-\infty, -4)$	$(-4, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, \infty)$
Número seleccionado	−5	−3	0	4
Valor de R	$R(-5) = \frac{1}{3}$	$R(-3) = -1$	$R(0) = 2$	$R(4) = \frac{4}{3}$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$\left(-5, \frac{1}{3}\right)$	$(-3, -1)$	$(0, 2)$	$\left(4, \frac{4}{3}\right)$

7.


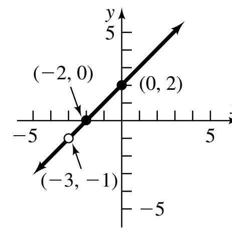
35. 1. Dominio: $\left\{x \middle| x \neq \frac{3}{2}, x \neq 2\right\}$
2. Intercepción x: $-\frac{1}{3}$; intercepción y: $-\frac{1}{2}$
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: $x = 2$; orificio en $\left(\frac{3}{2}, -11\right)$
5. Asíntota horizontal: $y = 3$, sin intersección
6. $-\frac{1}{3}$ $\frac{3}{2}$ 2

Intervalo	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	-1	0	1.7	6
Valor de R	$R(-1) = \frac{2}{3}$	$R(0) = -\frac{1}{2}$	$R(1.7) \approx -20.3$	$R(6) = 4.75$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$\left(-1, \frac{2}{3}\right)$	$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$	$(1.7, -20.3)$	$(6, 4.75)$

7.


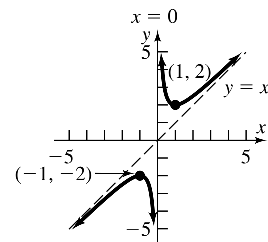
37. 1. Dominio: $\{x | x \neq -3\}$
2. Intercepción x: -2; intercepción y: 2
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: ninguna; orificio en $(-3, -1)$
5. Asíntota oblicua: $y = x + 2$ con intersección en todos los puntos, excepto $x = -3$
6. -3 -2

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, \infty)$
Número seleccionado	-4	-2.5	0
Valor de R	$R(-4) = -2$	$R(-2.5) = -\frac{1}{2}$	$R(0) = 2$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-4, -2)$	$\left(-2.5, -\frac{1}{2}\right)$	$(0, 2)$

7.


39. 1. Dominio: $\{x | x \neq 0\}$
2. Sin intercepción x; sin intercepción y
3. Simétrica con respecto al origen
4. Asíntota vertical: $x = 0$
5. Asíntotas oblicuas: $y = x$, sin intersección
6. 0

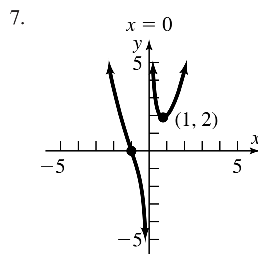
Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Número seleccionado	-1	1
Valor de f	$f(-1) = -2$	$f(1) = 2$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-1, -2)$	$(1, 2)$

7.


41. 1. Dominio: $\{x \mid x \neq 0\}$
2. Intercepción x: -1; sin intercepción y
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: $x = 0$
5. Sin asíntotas verticales ni oblicuas
6.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
Número seleccionado	-2	$-\frac{1}{2}$	1
Valor de f	$f(-2) = 3.5$	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.75$	$f(1) = 2$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-2, 3.5)$	$\left(-\frac{1}{2}, -1.75\right)$	$(1, 2)$

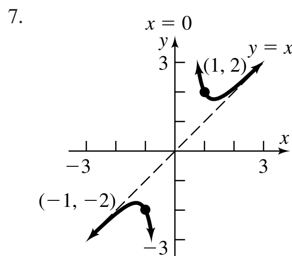
7.



43. 1. Dominio: $\{x \mid x \neq 0\}$
2. Sin intercepción x; sin intercepción y
3. Simétrica con respecto al origen
4. Asíntota vertical: $x = 0$
5. Asíntotas oblicuas: $y = x$, sin intersección
6.

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Número seleccionado	-1	1
Valor de f	$f(-1) = -2$	$f(1) = 2$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-1, -2)$	$(1, 2)$

7.

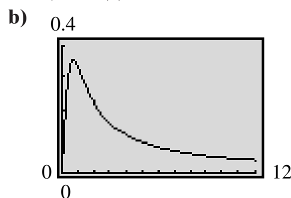


45. Una posibilidad: $R(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

47. Una posibilidad: $R(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)\left(x^2 + \frac{4}{3}\right)}{(x+1)^2(x-2)^2}$

49. **a)** Eje t; $C(t) \to 0$

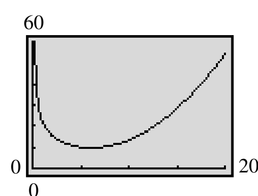
b)



c) 0.71 horas después de la inyección

51. **a)** $\overline{C}(x) = \dfrac{0.2x^3 - 2.3x^2 + 14.3x + 10.2}{x}$ **b)** \$9400

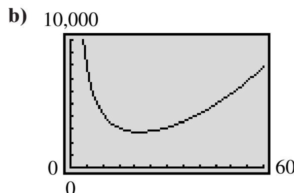
c) $\approx$ \$10,933 **d)**



e) 6 **f)** \$9400

53. **a)** $S(x) = 2x^2 + \dfrac{40{,}000}{x}$

b)



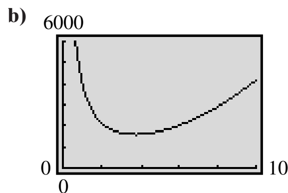
c) 2784.95 pulgadas cuadradas

d) 21.54 pulgadas × 21.54 pulgadas × 21.54 pulgadas

e) Para reducir al mínimo el costo del material necesario para la construcción

55. **a)** $C(r) = 12\pi r^2 + \dfrac{4000}{r}$

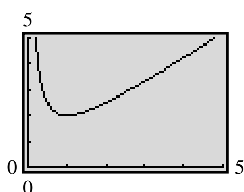
b)



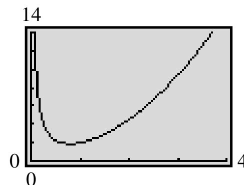
El costo es el menor cuando $r \approx 3.76$ cm.

57. No. cada una de las funciones es un cociente de polinomios, pero no está escrita en los términos menores. Cada una de las funciones no está definida en $x = 1$; todas las gráficas tiene un orificio en $x = 1$.

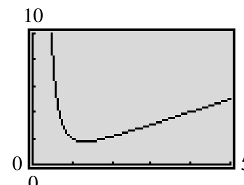
59. Valor mínimo: 2.00 en $x = 1.00$



61. Valor mínimo: 1.89 en $x = 0.79$



63. Valor mínimo: 1.75 en $x = 1.32$



4.5 Conceptos y vocabulario *(página 360)*

2. Verdadero

4.5 Ejercicios *(página 361)*

3. $\{x|-2 < x < 5\}; (-2, 5)$ **5.** $\{x|x \le 0 \text{ o } x \ge 4\}; (-\infty, 0] \text{ o } [4, \infty)$ **7.** $\{x|-3 < x < 3\}; (-3, 3)$

9. $\{x|x \le -2 \text{ o } x \ge 1\}; (-\infty, -2] \text{ o } [1, \infty)$ **11.** $\left\{x \middle| -\frac{1}{2} \le x \le 3\right\}; \left[-\frac{1}{2}, 3\right]$ **13.** $\{x|x < -1 \text{ o } x > 8\}; (-\infty, -1) \text{ o } (8, \infty)$

15. No tiene solución real **17.** $\left\{x \middle| x < -\frac{2}{3} \text{ o } x > \frac{3}{2}\right\}; \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \text{ o } \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ **19.** $\{x|x \ge 1\}; [1, \infty)$

21. $\{x|x \le 1 \text{ o } 2 \le x \le 3\}; (-\infty, 1] \text{ o } [2, 3]$ **23.** $\{x|-1 < x < 0 \text{ o } x > 3\}; (-1, 0) \text{ o } (3, \infty)$ **25.** $\{x|x < -1 \text{ o } x > 1\}; (-\infty, -1) \text{ o } (1, \infty)$

27. $\{x|x = 0 \text{ o } x \ge 4\}; 0 \text{ o } [4, \infty)$ **29.** $\{x|x < -1 \text{ o } x > 1\}; (-\infty, -1) \text{ o } (1, \infty)$ **31.** $\{x|x < -1 \text{ o } x > 1\}; (-\infty, -1) \text{ o } (1, \infty)$

33. $\{x|x \le -1 \text{ o } 0 < x \le 1\}; (-\infty, -1] \text{ o } (0, 1]$ **35.** $\{x|x < -1 \text{ o } x > 1\}; (-\infty, -1) \text{ o } (1, \infty)$

37. $\left\{x \middle| x < -\frac{2}{3} \text{ o } 0 < x < \frac{3}{2}\right\}; \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \text{ o } \left(0, \frac{3}{2}\right)$ **39.** $\{x|x < 2\}; (-\infty, 2)$ **41.** $\{x|-2 < x \le 9\}; (-2, 9]$

43. $\{x|x < 2 \text{ o } 3 < x < 5\}; (-\infty, 2) \text{ o } (3, 5)$ **45.** $\{x|x < -3 \text{ o } -1 < x < 1 \text{ o } x > 2\}; (-\infty, -3) \text{ o } (-1, 1) \text{ o } (2, \infty)$

47. $\{x|x < -5 \text{ o } -4 \le x \le -3 \text{ o } x = 0 \text{ o } x > 1\}; (-\infty, -5) \text{ o } [-4, -3] \text{ o } 0 \text{ o } (1, \infty)$ **49.** $\left\{x \middle| -\frac{1}{2} < x < 1 \text{ o } x > 3\right\}$

51. $\{x|x > 4\}; (4, \infty)$ **53.** $\{x|x \le -4 \text{ o } x \ge 4\}; (-\infty, -4] \text{ o } [4, \infty)$ **55.** $\{x|x < -4 \text{ o } x \ge 2\}; (-\infty, -4) \text{ o } [2, \infty)$

57. Para el tiempo t entre 2 y 3 segundos, $2 < t < 3$, la pelota está a más de 96 pies sobre el nivel del piso.

59. Para obtener una ganancia de al menos \$50, se deben vender entre 8 y 32 relojes, $8 \le x \le 32$. **61.** $-2 < k < 2$

Problemas históricos *(página 374)*

1.

$$\left(x - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3}\right) + d = 0$$

$$x^3 - bx^2 + \frac{b^2x}{3} - \frac{b^3}{27} + bx^2 - \frac{2b^2x}{3} + \frac{b^3}{9} + cx - \frac{bc}{3} + d = 0$$

$$x^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)x + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) = 0$$

Sean $p = c - \frac{b^2}{3}$ y $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$. Entonces $x^3 + px + q = 0$.

2.

$$(H + K)^3 + p(H + K) + q = 0$$

$$H^3 + 3H^2K + 3HK^2 + K^3 + pH + pK + q = 0$$

Sea $3HK = -p$.

$$H^3 - pH - pK + K^3 + pH + pK + q = 0$$

$$H^3 + K^3 = -q$$

3.

$$3HK = -p$$

$$K = -\frac{p}{3H}$$

$$H^3 + \left(-\frac{p}{3H}\right)^3 = -q$$

$$H^3 - \frac{p^3}{27H^3} = -q$$

$$27H^6 - p^3 = -27qH^3$$

$$27H^6 + 27qH^3 - p^3 = 0$$

$$H^3 = \frac{-27q \pm \sqrt{(27q)^2 - 4(27)(-p^3)}}{2 \cdot 27}$$

$$H^3 = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{27^2q^2}{2^2(27^2)} + \frac{4(27)p^3}{2^2(27^2)}}$$

$$H^3 = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$ Seleccionando por ahora la raíz positiva.

$$H = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

4. $H^3 + K^3 = -q$

$$K^3 = -q - H^3$$

$$K^3 = -q - \left[\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right]$$

$$K^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$K = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

5. $x = H + K$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$ (Observe que si se hubiera utilizado la raíz negativa en 3, el resultado sería el mismo).

6. $x = 3$ **7.** $x = 2$ **8.** $x = 2$

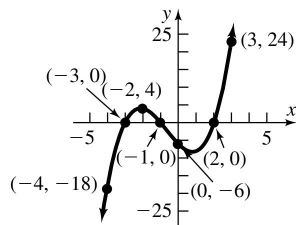
4.6 Conceptos y vocabulario *(página 375)*

5. Residuo; dividendo **6.** fc) **7.** -4 **8.** Falso **9.** Falso **10.** Verdadero

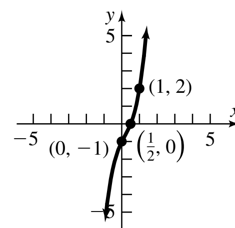
4.6 Ejercicios *(página 375)*

11. No; $f(2) = 8$ **13.** Sí; $f(2) = 0$ **15.** Sí; $f(-3) = 0$ **17.** No; $f(-4) = 1$ **19.** Sí; $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ **21.** 7; 3 o 1 positivo; 2 o 0 negativo **23.** 6; 2 o 0 positivo; 2 o 0 negativo **25.** 3; 2 o 0 positivo; 1 negativo **27.** 4; 2 o 0 positivo; 2 o 0 negativo **29.** 5; 0 positivo; 3 o 1 negativo **31.** 6; 1 positivo; 1 negativo **33.** $\pm 1, \pm\frac{1}{3}$ **35.** $\pm 1, \pm 3$ **37.** $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}$ **39.** $\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}$ **41.** $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ **43.** $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{10}{3}, \pm\frac{20}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}$ **45.** $-3, -1, 2$; $f(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$ **47.** $\frac{1}{2}$; $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1)$ **49.** $-1, 1$; $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 2)$ **51.** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; $f(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 2)$ **53.** 1, multiplicidad 2; $-2, -1$; $f(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)^2$ **55.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2$; $f(x) = 4\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x - 2)\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$ **57.** $\{-1, 2\}$ **59.** $\left\{\frac{2}{3}, -1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\right\}$ **61.** $\left\{\frac{1}{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\right\}$ **63.** $\{-3, -2\}$ **65.** $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ **67.** $\left\{\frac{1}{2}, 2, 5\right\}$

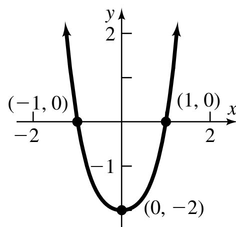
69. Intercepción y: -6; intercepciones x: $-3, -1, 2$
$(-\infty, -3)$, $f(-4) = -18$, abajo del eje x
$(-3, -1)$, $f(-2) = 4$, arriba del eje x
$(-1, 2)$, $f(0) = -6$, abajo del eje x
$(2, \infty)$, $f(3) = 24$, arriba del eje x



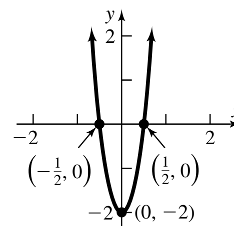
71. Intercepción y: -1; intercepción x: $\frac{1}{2}$
$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $f(0) = -1$, abajo del eje x
$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, $f(1) = 2$, arriba del eje x



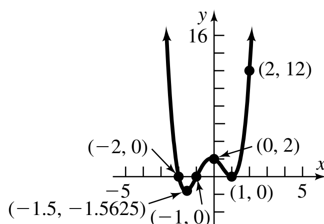
73. Intercepción y: -2; intercepciones x: $-1, 1$
$(-\infty, -1)$, $f(-2) = 18$, arriba del eje x
$(-1, 1)$, $f(0) = -2$, abajo del eje x
$(1, \infty)$, $f(2) = 18$, arriba del eje x
(simétrica con respecto al eje y)



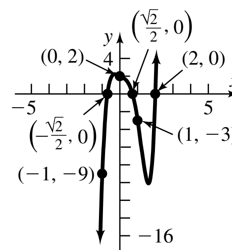
75. Intercepción y: -2; intercepciones x: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $f(-1) = 9$, arriba del eje x
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f(0) = -2$, abajo del eje x
$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, $f(1) = 9$, arriba del eje x
(simétrica con respecto al eje y)



77. Intercepción y: 2; intercepciones x: $-2, -1, 1$
$(-\infty, -2)$, $f(-3) = 32$, arriba del eje x
$(-2, -1)$, $f(-1.5) \approx -1.6$, abajo del eje x
$(-1, 1)$, $f(0) = 2$, arriba del eje x
$(1, \infty)$, $f(2) = 12$, arriba del eje x



79. Intercepción y: 2; intercepciones x: $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2$
$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(-1) = -9$, abajo del eje x
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(0) = 2$, arriba del eje x
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$, $f(1) = -3$, abajo del eje x
$(2, \infty)$, $f(3) = 323$, arriba del eje x



81. 5 **83.** 2 **85.** 5 **87.** $\frac{3}{2}$ **89.** $f(0) = -1$; $f(1) = 10$
91. $f(-5) = -58$; $f(-4) = 2$ **93.** $f(1.4) = -0.17536$; $f(1.5) = 1.40625$
95. 0.21 **97.** -4.04 **99.** 1.15 **101.** 2.53 **103.** $k = 5$ **105.** -7
107. Si $f(x) = x^n - c^n$, entonces $fc) = c^n - c^n = 0$, de manera que $x - c$ es un factor de f. **109.** 5 **111.** No, por el teorema de los ceros racionales, $\frac{1}{3}$ no es un cero racional potencial. **113.** No, por el teorema de los ceros racionales, $\frac{3}{5}$ no es un cero racional potencial. **115.** 7 pulgadas
117. Todos los ceros potenciales son enteros. Entonces, r es un entero o no es un cero racional (y por lo tanto es irracional).

4.7 Conceptos y vocabulario *(página 382)*

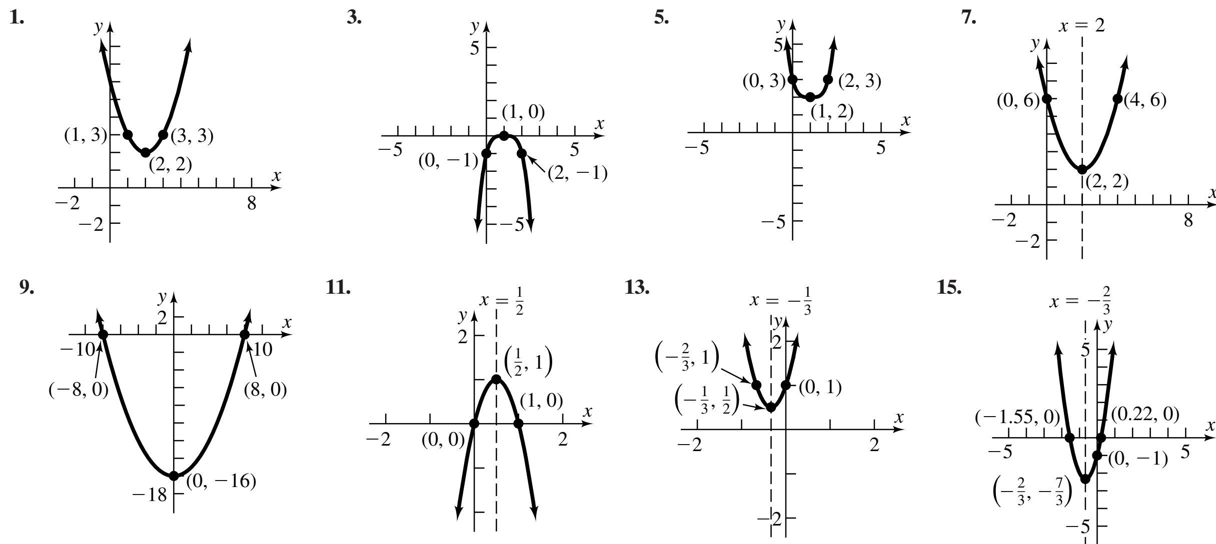
3. Uno **4.** $3 - 4i$ **5.** Verdadero **6.** Falso

4.7 Ejercicios *(página 382)*

7. $4 + i$ **9.** $-i, 1 - i$ **11.** $-i, -2i$ **13.** $-i$ **15.** $2 - i, -3 + i$ **17.** $f(x) = x^4 - 14x^3 + 77x^2 - 200x + 208$; $a = 1$
19. $f(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 6x - 4$; $a = 1$ **21.** $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$; $a = 1$ **23.** $-2i, 4$
25. $2i, -3, \frac{1}{2}$ **27.** $3 + 2i, -2, 5$ **29.** $4i, -\sqrt{11}, \sqrt{11}, -\frac{2}{3}$ **31.** $1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $f(x) = (x - 1)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
33. $2, 3 - 2i, 3 + 2i$; $f(x) = (x - 2)(x - 3 + 2i)(x - 3 - 2i)$ **35.** $-i, i, -2i, 2i$; $f(x) = (x + i)(x - i)(x + 2i)(x - 2i)$
37. $-5i, 5i, -3, 1$; $f(x) = (x + 5i)(x - 5i)(x + 3)(x - 1)$ **39.** $-4, \frac{1}{3}, 2 - 3i, 2 + 3i$; $f(x) = 3(x + 4)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2 + 3i)(x - 2 - 3i)$
41. Los ceros que son números complejos se deben presentar en pares conjugados; o un polinomio con coeficientes reales de grado impar debe tener por lo menos un cero real. **43.** Si el cero restante fuese un número complejo, entonces su conjugado también sería un cero, generando un polinomio de quinto grado.

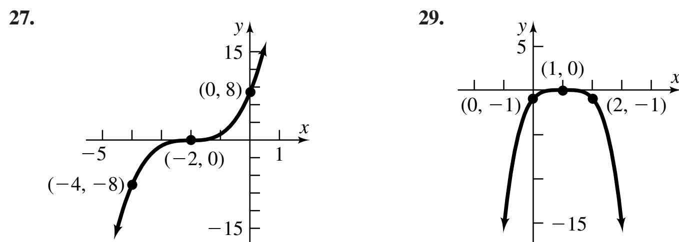
Ejercicios de repaso *(página 384)*

1. **3.** **5.** **7.** **9.** **11.** **13.** **15.**



17. Valor mínimo; 1 **19.** Valor máximo; 12 **21.** Valor máximo; 16 **23.** Polinomio de quinto grado **25.** No es un polinomio

27. **29.**

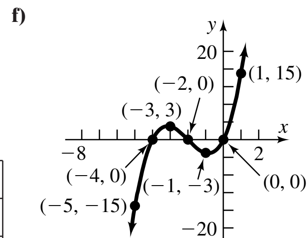


31. (0, 3) (1, 2) (2, 3)

33. a) Intercepciones x: −4, −2, 0; intercepción y: 0
b) Atraviesa en −4, −2, 0
c) $y = x^3$
d) 2
e)

Intervalo	$(-\infty, -4)$	$(-4, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
Número seleccionado	−5	−3	−1	1
Valor de f	$f(-5) = -15$	$f(-3) = 3$	$f(-1) = -3$	$f(1) = 15$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-5, -15)$	$(-3, 3)$	$(-1, -3)$	$(1, 15)$

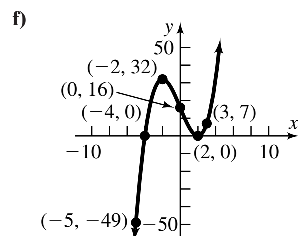
f)



35. a) Intercepciones x: −4, 2; intercepción y: 16
b) Atraviesa en −4; toca en 2
c) $y = x^3$
d) 2
e)

Intervalo	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	−5	−2	3
Valor de f	$f(-5) = -49$	$f(-2) = 32$	$f(3) = 7$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-5, -49)$	$(-2, 32)$	$(3, 7)$

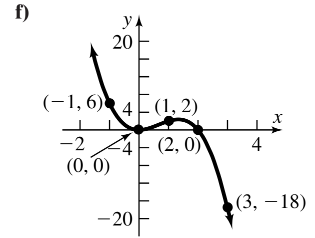
f)



37. **a)** Intercepciones en x: 0, 2; intercepción en y: 0
b) Atraviesa en 0; toca en 2
c) $y = -2x^3$
d) 2
e)

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	-1	1	3
Valor de f	$f(-1) = 6$	$f(1) = 2$	$f(3) = -18$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-1, 6)$	$(1, 2)$	$(3, -18)$

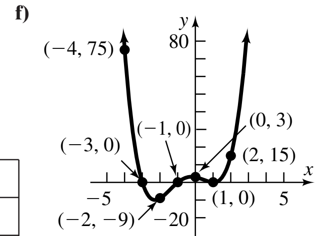
f)



39. **a)** Intercepciones x: $-3, -1, 1$; intercepción y: 3
b) Atraviesa en $-3, -1$; toca en 1
c) $y = x^4$
d) 3
e)

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Número seleccionado	-4	-2	0	2
Valor de f	$f(-4) = 75$	$f(-2) = -9$	$f(0) = 3$	$f(2) = 15$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-4, 75)$	$(-2, -9)$	$(0, 3)$	$(2, 15)$

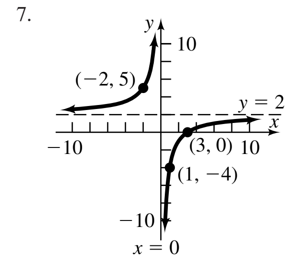
f)



41. Dominio: $\{x|x \neq -3, x \neq 3\}$; Asíntota horizontal: $y = 0$; Asíntota vertical: $x = -3, x = 3$
43. Dominio: $\{x|x \neq -2\}$; Asíntota horizontal: $y = 1$; Asíntota vertical: $x = -2$
45. 1. Dominio: $\{x|x \neq 0\}$
2. Intercepción x:: 3; no hay intercepción y
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: $x = 0$
5. Asíntota horizontal: $y = 2$; sin intersección
6.

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
Número seleccionado	-2	1	4
Valor de R	$R(-2) = 5$	$R(1) = -4$	$R(4) = \frac{1}{2}$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-2, 5)$	$(1, -4)$	$\left(4, \frac{1}{2}\right)$

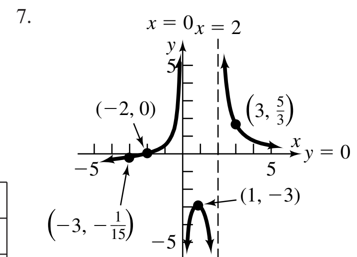
7.



47. 1. Dominio: $\{x|x \neq 0, x \neq 2\}$
2. Intercepción x: -2; no hay intercepción y
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: $x = 0, x = 2$
5. Asíntota horizontal: $y = 0$; con intersección en $(-2, 0)$
6.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	-3	-1	1	3
Valor de H	$H(-3) = -\frac{1}{15}$	$H(-1) = \frac{1}{3}$	$H(1) = -3$	$H(3) = \frac{5}{3}$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$\left(-3, -\frac{1}{15}\right)$	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$(1, -3)$	$\left(3, \frac{5}{3}\right)$

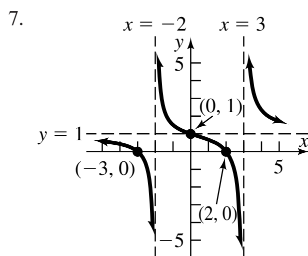
7.



49. 1. Dominio: $\{x|x \neq -2, x \neq 3\}$
2. Intercepciones x: $-3, 2$; intercepción y: 1
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 3$
5. Asíntota horizontal: $y = 1$; con intersección en $(0, 1)$
6.

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Número seleccionado	-4	-2.5	0	2.5	4
Valor de R	$R(-4) \approx 0.43$	$R(-2.5) \approx -0.82$	$R(0) = 1$	$R(2.5) \approx -1.22$	$R(4) = \frac{7}{3}$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$(-4, 0.43)$	$(-2.5, -0.82)$	$(0, 1)$	$(2.5, -1.22)$	$\left(4, \frac{7}{3}\right)$

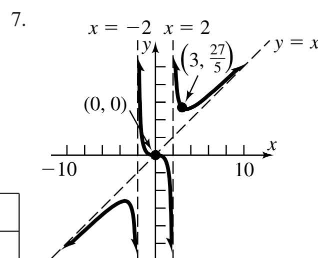
7.



51. 1. Dominio: $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$
2. Intercepción x: 0; intercepción y: 0
3. Simétrica con respecto al origen
4. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$
5. Asíntota oblicua: $y = x$; con intersección en $(0, 0)$
6.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	-3	-1	1	3
Valor de F	$F(-3) = -\frac{27}{5}$	$F(-1) = \frac{1}{3}$	$F(1) = -\frac{1}{3}$	$F(3) = \frac{27}{5}$
Ubicación de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$\left(-3, -\frac{27}{5}\right)$	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(3, \frac{27}{5}\right)$

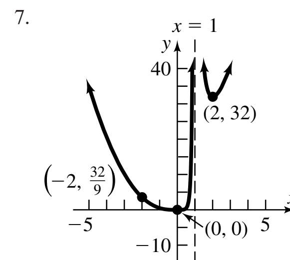
7.



53. 1. Dominio: $\{x|x \neq 1\}$
2. Intercepción x: 0; intercepción y: 0
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: $x = 1$
5. No existe asíntota horizontal ni oblicua
6.

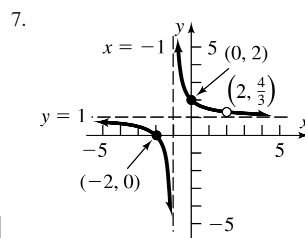
Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Número seleccionado	-2	$\frac{1}{2}$	2
Valor de R	$R(-2) \approx \frac{32}{9}$	$R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$	$R(2) = 32$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Arriba del eje x	Arriba del eje x
Punto sobre la gráfica	$\left(-2, \frac{32}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$(2, 32)$

7.

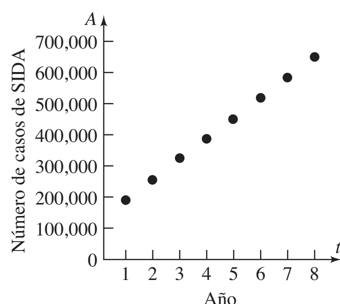


55. 1. Dominio: $\{x|x \neq -1, x \neq 2\}$
2. Intercepción x: -2; intersección y:: 2
3. No es simétrica con respecto al eje y o el origen
4. Asíntota vertical: $x = -1$; orificio en $\left(2, \frac{4}{3}\right)$
5. Asíntota horizontal: $y = 1$, sin intersección
6.

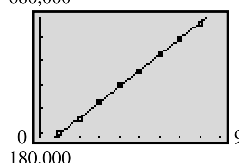
Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Número seleccionado	-3	-1.5	0	3
Valor de G	$G(-3) = \frac{1}{2}$	$G(-1.5) = -1$	$G(0) = 2$	$G(3) = 1.25$
Ubicación de la gráfica	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Arriba x
Punto sobre la gráfica	$\left(-3, \frac{1}{2}\right)$	$(-1.5, -1)$	$(0, 2)$	$(3, 1.25)$

7. 

57. $\left\{x \middle| -4 < x < \frac{3}{2}\right\}; \left(-4, \frac{3}{2}\right)$ **59.** $\{x|-3 < x \leq 3\}; (-3, 3]$ **61.** $\{x|x < 1 \text{ o } x > 2\}; (-\infty, 1) \text{ o } (2, \infty)$
63. $\{x|1 \leq x \leq 2 \text{ o } x > 3\}; [1, 2] \text{ o } (3, \infty)$ **65.** $\{x|x < -4 \text{ o } 2 < x < 4 \text{ o } x > 6\}; (-\infty, -4) \text{ o } (2, 4) \text{ o } (6, \infty)$
67. $q(x) = 8x^2 + 5x + 6; R = 10$; g no es factor de f. **69.** $q(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 1; R = 0$; g es factor de f.
71. $f(4) = 47{,}105$ **73.** 4, 2, o 0 positivos; 2 o 0 negativos
75. $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12}$ **77.** $-2, 1, 4; f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 4)$
79. $\frac{1}{2}$, multiplicidad 2; -2; $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x + 2)$ **81.** 2, multiplicidad 2; $f(x) = (x - 2)^2(x^2 + 5)$ **83.** $\{-3, 2\}$ **85.** $\left\{-3, -1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$
87. $-2, 1, 4; f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 4)$ **89.** $-2; \frac{1}{2}$ (multiplicidad 2); $f(x) = 4(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
91. 2 (multiplicidad 2), $-\sqrt{5}i, \sqrt{5}i; f(x) = (x + \sqrt{5}i)(x - \sqrt{5}i)(x - 2)^2$
93. $-3, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i; f(x) = 2(x + 3)(x - 2)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ **95.** 5 **97.** $\frac{37}{2}$ **99.** $f(0) = -1; f(1) = 1$
101. $f(0) = -1; f(1) = 1$ **103.** 1.52 **105.** 0.93 **107.** $4 - i$ **109.** $-i, 1 - i$ **111.** $(2, 2)$ **113.** 4,166,666.7 m^2
115. El lado con semicírculos debe tener $\frac{50}{\pi}$ pies; el otro lado debe tener 25 pies. **117.** **a)** 63 clubs **b)** \$151.90
119. **a)**



b) 796,999 **d)**



123. **a)** par **b)** positiva **c)** impar **d)** La gráfica toca al eje x en $x = 0$, pero no lo atraviesa allí. **e)** 8

Repaso acumulativo *(página 389)*

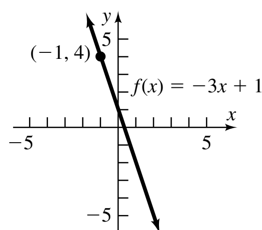
1. $\sqrt{26}$ **2.** $\{x|x \leq 0 \text{ o } x \geq 1\}$ o $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

0 1

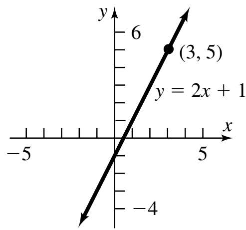
3. $\{x|-1 < x < 4\}$ o $(-1, 4)$

−1 4

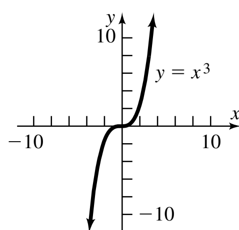
4. $f(x) = -3x + 1$



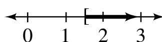
5. $y = 2x - 1$



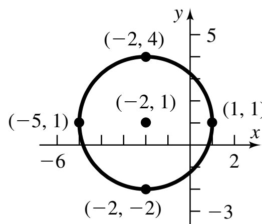
6.



7. No es una función; tiene dos imágenes **8.** $\{0, 2, 4\}$ **9.** $\left\{x \middle| x \geq \frac{3}{2}\right\}; \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$



10. Centro: $(-2, 1)$; Radio: 3



11. Intercepciones x: $-3, 0, 3$
Intercepción y: 0
Simétrica con respecto al origen

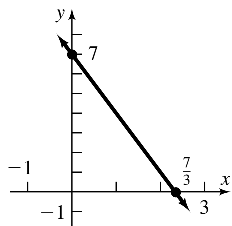
12. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$

13. No es una función; no pasa la Prueba de la Recta Vertical.

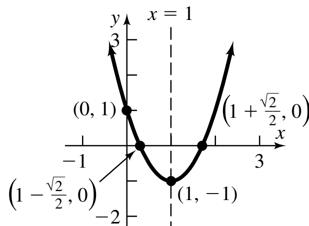
14. **a)** 22 **b)** $x^2 - 5x - 2$ **c)** $-x^2 - 5x + 2$ **d)** $9x^2 + 15x - 2$ **e)** $2x + h + 5$

15. **a)** $\{x | x \neq 1\}$ **b)** No, (2, 7) está sobre la gráfica. **c)** 4; (3, 4) está sobre la gráfica. **d)** $\frac{7}{4}$; $\left(\frac{7}{4}, 9\right)$ está sobre la gráfica.

16.



17.

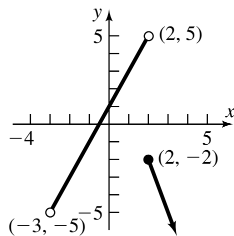


18. $x + 4$; $m_{seg} = 6$

19. **a)** Intercepciones x: $-5, -1, 5$; intercepción y: -3
b) No es simétrica
c) Ninguno
d) Creciente: $(-\infty, -3)$ y $(2, \infty)$
Decreciente : $(-3, 2)$
e) El máximo local es 5, y se presenta en $x = -3$.
f) El mínimo local es -6, y se presenta en $x = 2$.

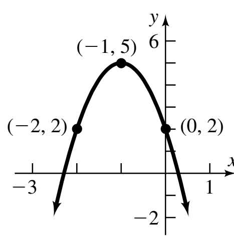
20. Impar

21. **a)** Dominio: $\{x | -3 < x\}$ o $(-3, \infty)$
b) Intercepción x: $-\frac{1}{2}$; intercepción y: 1
c)



d) Rango: $\{y | y < 5\}$ o $(-\infty, 5)$

22.



23. **a)** $(f + g)(x) = x^2 - 9x - 6$; dominio: todos los números reales **b)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{-4x - 7}$; dominio: $\left\{x \middle| x \neq -\frac{7}{4}\right\}$

24. **a)** $R(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 150x$ **b)** \$14,000 **c)** 750; \$56,250 **d)** \$75

CAPÍTULO 5 Funciones exponenciales y logarítmicas

5.1 Conceptos y vocabulario *(página 397)*

4. $(g \circ f)(x)$ **5.** Falso **6.** Falso

5.1 Ejercicios *(página 397)*

7. a) -1 **b)** -1 **c)** 8 **d)** 0 **e)** 8 **f)** -7 **9. a)** 98 **b)** 49 **c)** 4 **d)** 4 **11. a)** 97 **b)** $-\frac{163}{2}$ **c)** 1 **d)** $-\frac{3}{2}$

13. a) $2\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** 1 **d)** 0 **15. a)** $\frac{1}{17}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** 1 **d)** $\frac{1}{2}$ **17. a)** $\frac{3}{\sqrt[3]{4}+1}$ **b)** 1 **c)** $\frac{6}{5}$ **d)** 0 **19.** $\{x|x \neq 0, x \neq 2\}$ **21.** $\{x|x \neq -4, x \neq 0\}$ **23.** $\left\{x \middle| x \geq -\frac{3}{2}\right\}$ **25.** $\{x|x \geq 1\}$ **27. a)** $(f \circ g)(x) = 6x + 3$; todos los números reales **b)** $(g \circ f)(x) = 6x + 9$; todos los números reales **c)** $(f \circ f)(x) = 4x + 9$; todos los números reales **d)** $(g \circ g)(x) = 9x$; todos los números reales **29. a)** $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 1$; todos los números reales **b)** $(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x + 1$; todos los números reales **c)** $(f \circ f)(x) = 9x + 4$; todos los números reales **d)** $(g \circ g)(x) = x^4$; todos los números reales **31. a)** $(f \circ g)(x) = x^4 + 8x^2 + 16$; todos los números reales **b)** $(g \circ f)(x) = x^4 + 4$; todos los números reales **c)** $(f \circ f)(x) = x^4$; todos los números reales **d)** $(g \circ g)(x) = x^4 + 8x^2 + 20$; todos los números reales

33. a) $(f \circ g)(x) = \frac{3x}{2-x}$; $\{x|x \neq 0, x \neq 2\}$ **b)** $(g \circ f)(x) = \frac{2(x-1)}{3}$; $\{x|x \neq 1\}$ **c)** $(f \circ f)(x) = \frac{3(x-1)}{4-x}$; $\{x|x \neq 1, x \neq 4\}$

d) $(g \circ g)(x) = x$; $\{x|x \neq 0\}$ **35. a)** $(f \circ g)(x) = \frac{4}{4+x}$; $\{x|x \neq -4, x \neq 0\}$ **b)** $(g \circ f)(x) = \frac{-4(x-1)}{x}$; $\{x|x \neq 0, x \neq 1\}$

c) $(f \circ f)(x) = x$; $\{x|x \neq 1\}$ **d)** $(g \circ g)(x) = x$; $\{x|x \neq 0\}$ **37. a)** $(f \circ g)(x) = \sqrt{2x+3}$; $\left\{x \middle| x \geq -\frac{3}{2}\right\}$

b) $(g \circ f)(x) = 2\sqrt{x} + 3$; $\{x|x \geq 0\}$ **c)** $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$; $\{x|x \geq 0\}$ **d)** $(g \circ g)(x) = 4x + 9$; todos los números reales

39. a) $(f \circ g)(x) = x$; $\{x|x \geq 1\}$ **b)** $(g \circ f)(x) = |x|$; todos los números reales **c)** $(f \circ f)(x) = x^4 + 2x^2 + 2$; todos los números reales **d)** $(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x-1} - 1}$; $\{x|x \geq 2\}$ **41. a)** $(f \circ g)(x) = acx + ad + b$; todos los números reales **b)** $(g \circ f)(x) = acx + bc + d$; todos los números reales **c)** $(f \circ f)(x) = a^2x + ab + b$; todos los números reales **d)** $(g \circ g)(x) = c^2x + cd + d$; todos los números reales

43. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\left(\frac{1}{2}x\right) = x$; $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = \frac{1}{2}(2x) = x$

45. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$; $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$

47. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}(x+6)\right) = 2\left[\frac{1}{2}(x+6)\right] - 6 = x + 6 - 6 = x$;

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 6) = \frac{1}{2}(2x - 6 + 6) = x$

49. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{a}(x-b)\right) = a\left[\frac{1}{a}(x-b)\right] + b = x$; $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(ax+b) = \frac{1}{a}(ax + b - b) = x$

51. $f(x) = x^4$; $g(x) = 2x + 3$ (Son factibles otras respuestas). **53.** $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$ (Son factibles otras respuestas).

55. $f(x) = |x|$; $g(x) = 2x + 1$ (Son factibles otras respuestas). **57.** $(f \circ g)(x) = 11$; $(g \circ f)(x) = 2$ **59.** $-3, 3$ **61.** $S(t) = \frac{16}{9}\pi t^6$

63. $C(t) = 15{,}000 + 800{,}000t - 40{,}000t^2$ **65.** $C(p) = \frac{2\sqrt{100-p}}{25} + 600, 0 \leq p \leq 100$ **67.** $V(r) = 2\pi r^3$

69. a) $f(x) = 0.857118x$ **b)** $g(x) = 128.6054x$ **c)** $g(f(x)) = g(0.857118x) = 110.23x$ **d)** 110,230.00 yenes

71. f es una función impar, por lo que $f(-x) = -f(x)$. g es una función par, de manera que $g(-x) = g(x)$.
Entonces $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Por lo que $f \circ g$ es par.
También , $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, por lo que $g \circ f$ es par.

5.2 Conceptos y vocabulario *(página 409)*

4. Inyectiva **5.** $y = x$ **6.** $[4, \infty)$ **7.** Falso **8.** Verdadero

5.2 Ejercicios *(página 409)*

9. a)

Dominio		Rango
\$200	→	20 horas
\$300	→	25 horas
\$350	→	30 horas
\$425	→	40 horas

b) Su inverso es una función.

11. a)

Dominio		Rango
\$200	→	20 horas, 25 horas
\$350	→	30 horas
\$425	→	40 horas

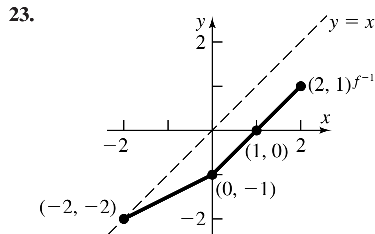
b) Su inverso no es una función.

13. a) $\{(6, 2), (6, -3), (9, 4), (10, 1)\}$ **b)** Su inverso no es una función.

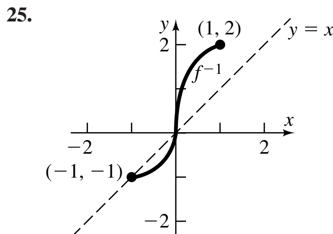
15. a) $\{(0, 0), (1, 1), (16, 2), (81, 3)\}$ **b)** Su inverso no es una función.

17. Inyectiva **19.** No inyectiva **21.** Inyectiva

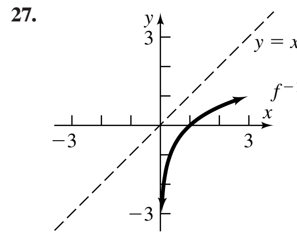
23.



25.



27.



29. $f(g(x)) = f\left(\frac{1}{3}(x - 4)\right) = 3\left[\frac{1}{3}(x - 4)\right] + 4$

$= (x - 4) + 4 = x;$

$g(f(x)) = g(3x + 4) = \frac{1}{3}[(3x + 4) - 4] = \frac{1}{3}3x = x$

31. $f(g(x)) = 4\left[\frac{x}{4} + 2\right] - 8 = (x + 8) - 8 = x;$

$g(f(x)) = \frac{4x - 8}{4} + 2 = (x - 2) + 2 = x$

33. $f(g(x)) = (\sqrt[3]{x + 8})^3 - 8 = (x + 8) - 8 = x;$

$g(f(x)) = \sqrt[3]{(x^3 - 8) + 8} = \sqrt[3]{x^3} = x$

35. $f(g(x)) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x; g(f(x)) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$

37. $f(g(x)) = \dfrac{2\left(\frac{4x - 3}{2 - x}\right) + 3}{\frac{4x - 3}{2 - x} + 4} = \dfrac{2(4x - 3) + 3(2 - x)}{4x - 3 + 4(2 - x)}$

$= \frac{5x}{5} = x;$

$g(f(x)) = \dfrac{4\left(\frac{2x + 3}{x + 4}\right) - 3}{2 - \frac{2x + 3}{x + 4}} = \dfrac{4(2x + 3) - 3(x + 4)}{2(x + 4) - (2x + 3)}$

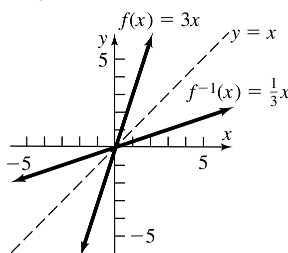
$= \frac{5x}{5} = x$

39. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$

$f(f^{-1}(x)) = 3\left(\frac{1}{3}x\right) = x$

$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{3}(3x) = x$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales

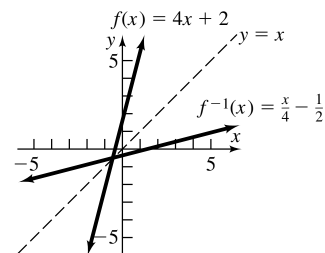


41. $f^{-1}(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$

$f(f^{-1}(x)) = 4\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right) + 2 = (x - 2) + 2 = x$

$f^{-1}(f(x)) = \frac{4x + 2}{4} - \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = x$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales



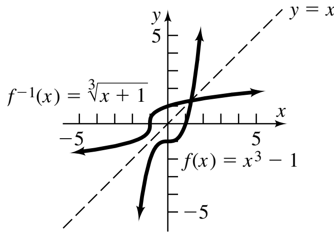
43. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = x$

$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{(x^3-1)+1} = x$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales



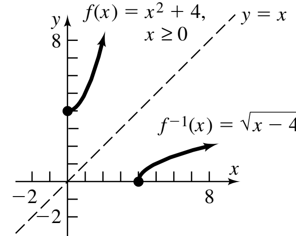
45. $f^{-1}(x) = \sqrt{x-4},\ x \geq 4$

$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x-4})^2 + 4 = x$

$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x^2+4)-4} = \sqrt{x^2} = x,\ x \geq 0$

Dominio f = Rango f^{-1} = $\{x|x \geq 0\}$ o $[0, \infty)$

Rango f = Dominio f^{-1} = $\{x|x \geq 4\}$ o $[4, \infty)$



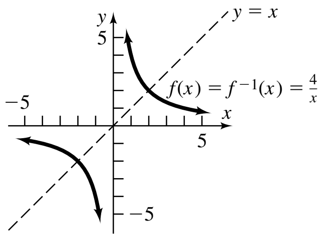
47. $f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x}$

$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{4}{\left(\dfrac{4}{x}\right)} = x$

$f^{-1}(f(x)) = \dfrac{4}{\left(\dfrac{4}{x}\right)} = x$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales, excepto 0

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales, excepto 0



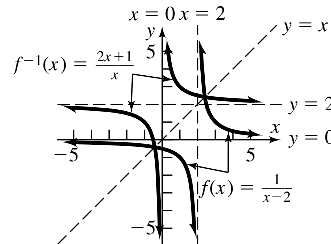
49. $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{1}{\dfrac{2x+1}{x} - 2} = \dfrac{x}{(2x+1) - 2x} = x$

$f^{-1}(f(x)) = \dfrac{2\left(\dfrac{1}{x-2}\right) + 1}{\dfrac{1}{x-2}} = \dfrac{2 + (x-2)}{1} = x$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales, excepto 2

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales, excepto 0



51. $f^{-1}(x) = \dfrac{2-3x}{x}$

$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{2}{3 + \dfrac{2-3x}{x}} = \dfrac{2x}{3x + 2 - 3x} = \dfrac{2x}{2} = x$

$f^{-1}(f(x)) = \dfrac{2 - 3\left(\dfrac{2}{3+x}\right)}{\dfrac{2}{3+x}} = \dfrac{2(3+x) - 3 \cdot 2}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$

Dominio f = Todos los números reales, excepto −3

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales, excepto 0

53. $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x}{x-3}$

$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{3\left(\dfrac{-2x}{x-3}\right)}{\dfrac{-2x}{x-3} + 2} = \dfrac{3(-2x)}{-2x + 2(x-3)} = \dfrac{-6x}{-6} = x$

$f^{-1}(f(x)) = \dfrac{-2\left(\dfrac{3x}{x+2}\right)}{\dfrac{3x}{x+2} - 3} = \dfrac{-2(3x)}{3x - 3(x+2)} = \dfrac{-6x}{-6} = x$

Dominio f = Todos los números reales, excepto −2

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales, excepto 3

55. $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3x-2}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2\left(\dfrac{x}{3x-2}\right)}{3\left(\dfrac{x}{3x-2}\right)-1} = \frac{2x}{3x-(3x-2)} = \frac{2x}{2} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\dfrac{2x}{3x-1}}{3\left(\dfrac{2x}{3x-1}\right)-2} = \frac{2x}{6x-2(3x-1)} = \frac{2x}{2} = x$$

Dominio f = Todos los números reales, excepto $\dfrac{1}{3}$

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales, excepto $\dfrac{2}{3}$

57. $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+4}{2x-3}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{3\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right)+4}{2\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right)-3} = \frac{3(3x+4)+4(2x-3)}{2(3x+4)-3(2x-3)} = \frac{17x}{17} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{3\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right)+4}{2\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right)-3} = \frac{3(3x+4)+4(2x-3)}{2(3x+4)-3(2x-3)} = \frac{17x}{17} = x$$

Dominio f = Todos los números reales, excepto $\dfrac{3}{2}$

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales, excepto $\dfrac{3}{2}$

59. $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x+3}{x-2}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2\left(\dfrac{-2x+3}{x-2}\right)+3}{\dfrac{-2x+3}{x-2}+2} = \frac{2(-2x+3)+3(x-2)}{-2x+3+2(x-2)} = \frac{-x}{-1} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{-2\left(\dfrac{2x+3}{x+2}\right)+3}{\dfrac{2x+3}{x+2}-2} = \frac{-2(2x+3)+3(x+2)}{2x+3-2(x+2)} = \frac{-x}{-1} = x$$

Dominio f = Todos los números reales, excepto -2

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales, excepto 2

61. $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-2x}}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{\dfrac{4}{1-2x}-4}{2\cdot\dfrac{4}{1-2x}} = \frac{4-4(1-2x)}{2\cdot 4} = \frac{8x}{8} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{2}{\sqrt{1-2\left(\dfrac{x^2-4}{2x^2}\right)}} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{4}{x^2}}} = \sqrt{x^2} = x, \text{ por lo que } x > 0.$$

Dominio $f = \{x|x > 0\}$ o $(0, \infty)$

Rango f = Dominio $f^{-1} = \left\{x \middle| x < \dfrac{1}{2}\right\}$ o $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$

63. a) 0 **b)** 2 **c)** 0 **d)** 1 **65.** $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{m}(x-b), m \neq 0$ **67.** Primer cuadrante

69. Posible respuesta: $f(x) = |x|, x \geq 0$, es inyectiva; $f^{-1}(x) = x, x \geq 0$ **71. a)** $C(H) = \dfrac{H + 10.53}{2.15}$ **b)** 16.99 pulgadas

73. $x(p) = \dfrac{300-p}{50}, p \leq 300$ **75.** $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$; $f = f^{-1}$ si $a = -d$ **79.** Sí, si el dominio es $\{x|x \geq 0\}$.

81. Sobre la recta $y = x$. No. No.

5.3 Conceptos y vocabulario *(página 423)*

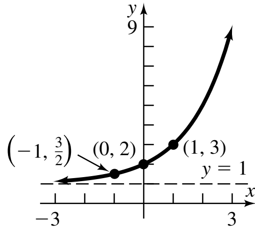
6. $\left(-1, \dfrac{1}{a}\right), (0,1), (1,a)$ **7.** 1 **8.** 4 **9.** Falso **10.** Falso

5.3 Ejercicios *(página 423)*

11. a) 11.212 **b)** 11.587 **c)** 11.664 **d)** 11.665 **13. a)** 8.815 **b)** 8.821 **c)** 8.824 **d)** 8.825
15. a) 21.217 **b)** 22.217 **c)** 22.440 **d)** 22.459 **17.** 3.320 **19.** 0.427 **21.** No exponencial **23.** Exponencial; $a = 4$

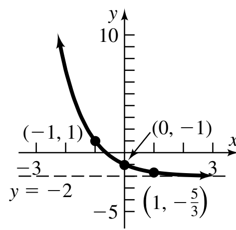
25. Exponencial; $a = 2$ **27.** No exponencial **29.** B **31.** D **33.** A **35.** E

37.



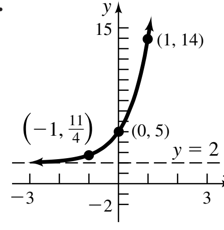
Dominio: todos los números reales
Rango: $\{y|y > 1\}$ o $(1, \infty)$
Asíntota horizontal: $y = 1$

39.



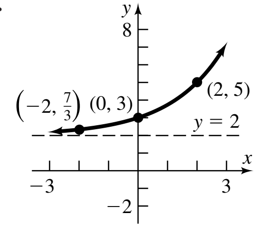
Dominio: todos los números reales
Rango: $\{y|y > -2\}$ o $(-2, \infty)$
Asíntota horizontal: $y = -2$

41.



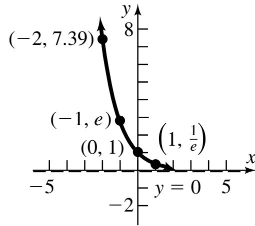
Dominio: todos los números reales
Rango: $\{y|y > 2\}$ o $(2, \infty)$
Asíntota horizontal: $y = 2$

43.



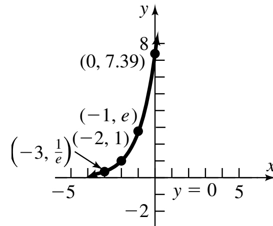
Dominio: todos los números reales
Rango: $\{y|y > 2\}$ o $(2, \infty)$
Asíntota horizontal: $y = 2$

45.



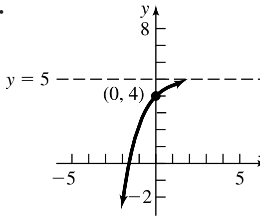
Dominio: todos los números reales
Rango: $\{y|y > 0\}$ o $(0, \infty)$
Asíntota horizontal: $y = 0$

47.



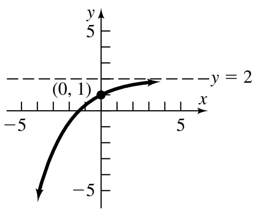
Dominio: todos los números reales
Rango: $\{y|y > 0\}$ o $(0, \infty)$
Asíntota horizontal: $y = 0$

49.



Dominio: todos los números reales
Rango: $\{y|y < 5\}$ o $(-\infty, 5)$
Asíntota horizontal: $y = 5$

51.

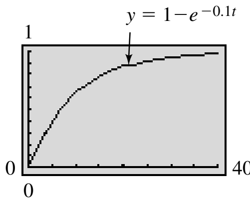


Dominio: todos los números reales
Rango: $\{y|y < 2\}$ o $(-\infty, 2)$
Asíntota horizontal: $y = 2$

53. $\frac{1}{2}$ **55.** $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ **57.** $\left\{1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$ **59.** 0 **61.** 4 **63.** $\frac{3}{2}$ **65.** $\{1, 2\}$ **67.** $\frac{1}{49}$ **69.** $\frac{1}{4}$ **71.** $f(x) = 3^x$ **73.** $f(x) = -6^x$

75. a) 74% **b)** 47% **77. a)** 44.3 W. **b)** 11.6 W. **79.** 3.35 mg; 0.45 mg

81. a) 0.63 **b)** 0.98 **c)** 1
d)

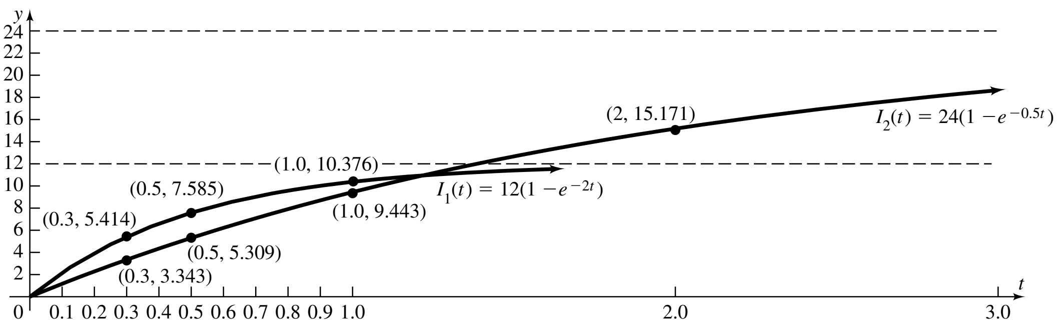


e) Alrededor de 7 minutos

83. a) 5.16% **b)** 8.88%

85. a) \$12, 123 **b)** \$6443

87. a) 5.414 amp, 7.585 amp, 10.376 amp **b)** 12 amp **d)** 3.343 amp, 5.309 amp, 9.443 amp **e)** 24 amp
c), f)

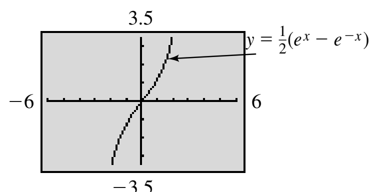


89. $n = 4$: 2.7083; $n = 6$: 2.7181; $n = 8$: 2.7182788; $n = 10$: 2.7182818 **91.** $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = \dfrac{a^x a^h - a^x}{h} = \dfrac{a^x(a^h - 1)}{h}$

93. $f(-x) = a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \dfrac{1}{f(x)}$ **95. a)** 70.95% **b)** 72.62% **c)** 100%

97. a) $f(-x) = \dfrac{1}{2}(e^{-x} - e^{-(-x)}) = \dfrac{1}{2}(e^{-x} - e^{x})$ **b)**

$= -\dfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = -f(x)$



99. 59 minutos

5.4 Conceptos y vocabulario *(página 437)*

4. $\{x|x > 0\}$ o $(0, \infty)$ **5.** $\left(\dfrac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$, $(a, 1)$ **6.** 1 **7.** Falso **8.** Verdadero

5.4 Ejercicios *(página 437)*

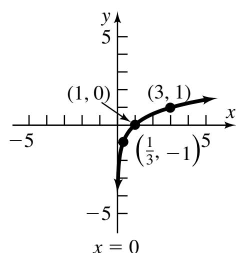
9. $2 = \log_3 9$ **11.** $2 = \log_a 1.6$ **13.** $2 = \log_{1.1} M$ **15.** $x = \log_2 7.2$ **17.** $\sqrt{2} = \log_x \pi$ **19.** $x = \ln 8$ **21.** $2^3 = 8$

23. $a^6 = 3$ **25.** $3^x = 2$ **27.** $2^{1.3} = M$ **29.** $(\sqrt{2})^x = \pi$ **31.** $e^x = 4$ **33.** 0 **35.** 2 **37.** −4 **39.** $\dfrac{1}{2}$ **41.** 4 **43.** $\dfrac{1}{2}$

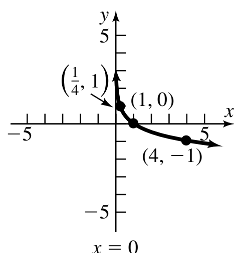
45. $\{x|x > 3\}$; $(3, \infty)$ **47.** Todos los números reales, excepto 0; $\{x|x \neq 0\}$ **49.** $\{x|x > 0\}$; $(0, \infty)$ **51.** $\{x|x > -1\}$; $(-1, \infty)$

53. $\{x|x < -1$ o $x > 0\}$; $(-\infty, -1)$ o $(0, \infty)$ **55.** $\{x|x \geq 1\}$; $[1, \infty)$ **57.** 0.511 **59.** 30.099 **61.** $\sqrt{2}$

63.

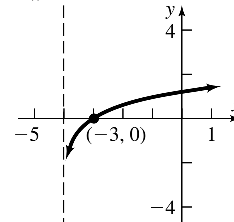


65.



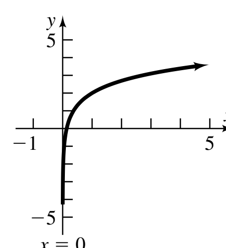
67. B **69.** D **71.** A **73.** E

75.



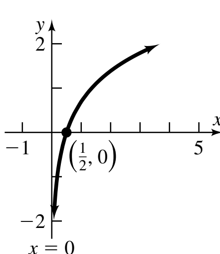
Dominio: $(-4, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Asíntota vertical: $x = -4$

77.



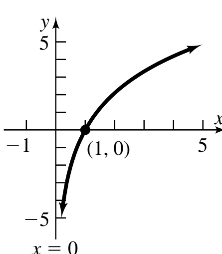
Dominio: $(0, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Asíntota vertical: $x = 0$

79.



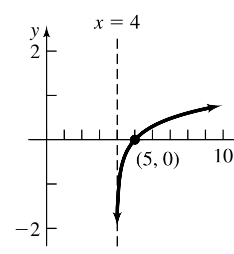
Dominio: $(0, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Asíntota vertical: $x = 0$

81.



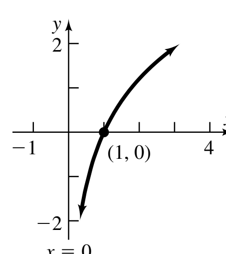
Dominio: $(0, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Asíntota vertical: $x = 0$

83.



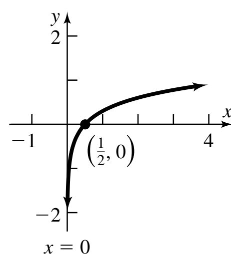
Dominio: $(4, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Asíntota vertical: $x = 4$

85.



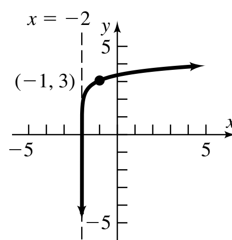
Dominio: $(0, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Asíntota vertical: $x = 0$

87.



Dominio: $(0, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Asíntota vertical: $x = 0$

89.



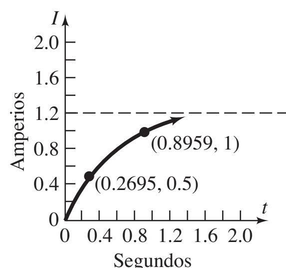
Dominio: $(-2, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Asíntota vertical: $x = -2$

91. $\{9\}$ **93.** $\left\{\frac{7}{2}\right\}$ **95.** $\{2\}$ **97.** $\{5\}$ **99.** $\{3\}$

101. $\{2\}$ **103.** $\left\{\frac{\ln 10}{3}\right\}$ **105.** $\left\{\frac{\ln 8 - 5}{2}\right\}$ **107.** $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

109. $\{-1\}$ **111. a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** Aumenta. **e)** ≈ 0.000316 **f)** $\approx 3.981 \times 10^{-8}$
113. a) 5.97 km **b)** 0.90 km **115. a)** 6.93 min **b)** 16.09 min **c)** No, ya que $F(t)$ nunca puede ser igual a 1
117. $h \approx 2.29$, por lo que el tiempo entre las inyecciones es aproximadamente de 2 horas 17 minutos

119. 0.2695 seg
0.8959 seg



121. 50 decibeles (dB)
123. 110 dB
125. 8.1
127. a) $k = 20.07$ **b)** 91% **c)** 0.175 **d)** 0.08
129. Porque $y = \log_1 x$ significa $1^y = 1 = x$, lo que no puede ser verdadero para $x \neq 1$

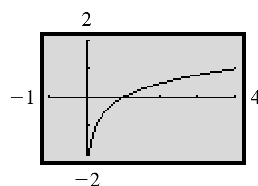
5.5 Conceptos y vocabulario *(página 448)*

1. Suma **2.** 7 **3.** $r \log_a M$ **4.** Falso **5.** Falso **6.** Verdadero

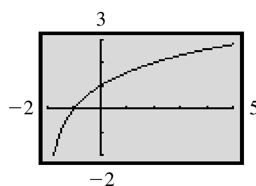
5.5 Ejercicios *(página 449)*

7. 71 **9.** −4 **11.** 7 **13.** 1 **15.** 1 **17.** 2 **19.** $\frac{5}{4}$ **21.** 4 **23.** $a + b$ **25.** $b - a$ **27.** $3a$ **29.** $\frac{1}{5}(a + b)$ **31.** $2 + \log_5 x$ **33.** $3 \log_2 z$
35. $1 + \ln x$ **37.** $\ln x + x$ **39.** $2 \log_a u + 3 \log_a v$ **41.** $2 \ln x + \frac{1}{2}\ln(1 - x)$ **43.** $3 \log_2 x - \log_2(x - 3)$
45. $\log x + \log(x + 2) - 2\log(x + 3)$ **47.** $\frac{1}{3}\ln(x - 2) + \frac{1}{3}\ln(x + 1) - \frac{2}{3}\ln(x + 4)$ **49.** $\ln 5 + \ln x + \frac{1}{2}\ln(1 + 3x) - 3\ln(x - 4)$
51. $\log_5 u^3v^4$ **53.** $-\frac{5}{2}\log_3 x$ **55.** $\log_4 \frac{x - 1}{(x + 1)^4}$ **57.** $-2\ln(x - 1)$ **59.** $\log_2[x(3x - 2)^4]$ **61.** $\log_a\left(\frac{25x^6}{\sqrt{2x + 3}}\right)$ **63.** $\log_2 \frac{(x + 1)^2}{(x + 3)(x - 1)}$
65. 2.771 **67.** −3.880 **69.** 5.615 **71.** 0.874

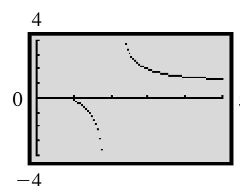
73. $y = \frac{\log x}{\log 4}$



75. $y = \frac{\log(x + 2)}{\log 2}$



77. $y = \frac{\log(x + 1)}{\log(x - 1)}$



79. $y = Cx$ **81.** $y = Cx(x+1)$ **83.** $y = Ce^{3x}$ **85.** $y = Ce^{-4x} + 3$ **87.** $y = \dfrac{\sqrt[3]{C}(2x+1)^{1/6}}{(x+4)^{1/9}}$ **89.** 3 **91.** 1

93. $\log_a(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_a(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a[(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})]$
$= \log_a[x^2 - (x^2 - 1)] = \log_a 1 = 0$

95. $\ln(1 + e^{2x}) = \ln[e^{2x}(e^{-2x} + 1)] = \ln e^{2x} + \ln(e^{-2x} + 1) = 2x + \ln(1 + e^{-2x})$

97. $y = f(x) = \log_a x$; $a^y = x$ implica que $a^y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-y} = x$, de manera que $-y = \log_{1/a} x = -f(x)$.

99. $f(x) = \log_a x$; $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \log_a \dfrac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = -f(x)$

101. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a (M \cdot N^{-1}) = \log_a M + \log_a N^{-1} = \log_a M - \log_a N$,

puesto que $a^{\log_a N^{-1}} = N^{-1}$ implica que $a^{-\log_a N^{-1}} = N$; i.e., $\log_a N = -\log_a N^{-1}$.

5.6 Ejercicios *(página 454)*

1. 6 **3.** 16 **5.** 8 **7.** 3 **9.** 5 **11.** $-1 + \sqrt{1 + e^4} \approx 6.456$ **13.** $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585$ **15.** 0 **17.** $\dfrac{\ln 10}{\ln 2} \approx 3.322$ **19.** $-\dfrac{\ln 1.2}{\ln 8} \approx -0.088$
21. $\dfrac{\ln 3}{2\ln 3 + \ln 4} \approx 0.307$ **23.** $\dfrac{\ln 7}{\ln 0.6 + \ln 7} \approx 1.356$ **25.** 0 **27.** $\dfrac{\ln \pi}{1 + \ln \pi} \approx 0.534$ **29.** $\dfrac{\ln 1.6}{3\ln 2} \approx 0.226$ **31.** $\dfrac{9}{2}$ **33.** 2 **35.** 1 **37.** 16
39. $\left\{-1, \dfrac{2}{3}\right\}$ **41.** 0 **43.** $\ln(2 + \sqrt{5}) \approx 1.444$ **45.** 1.92 **47.** 2.79 **49.** -0.57 **51.** -0.70 **53.** 0.57 **55.** $\{0.39, 1.00\}$ **57.** 1.32 **59.** 1.31

5.7 Ejercicios *(página 462)*

3. \$108.29 **5.** \$609.50 **7.** \$697.09 **9.** \$12.46 **11.** \$125.23 **13.** \$88.72 **15.** \$860.72 **17.** \$554.09 **19.** \$59.71 **21.** \$361.93 **23.** 5.35%
25. 26% **27.** $6\frac{1}{4}$% compuesto anual **29.** 9% compuesto mensual **31.** 104.32 meses (como 8.7 años); 103.97 meses (como 8.66 años)
33. 61.02 meses; 60.82 meses **35.** 15.27 años o 15 años, 4 meses **37.** \$104,335 **39.** \$12,910.62 **41.** Alrededor de \$30.17 por acción o \$3017
43. 9.35% **45.** De ninguna manera. Jim tendrá \$1057.60. El segundo banco le ofrece un mejor trato, ya que Jim tendrá \$1060.62 después de 1 año. **47.** Tendrá \$11,632.73; Henry tiene \$10,947.89. **49. a)** El interés es \$30,000 **b)** El interés es \$38,613.59 **c)** El interés es \$37,752.73. Es mejor el interés simple al 12%. **51. a)** \$1364.62 **b)** \$1353.35 **53.** \$4631.93

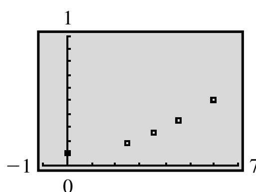
55. a) 6.1 años **b)** 18.45 años **c)**
$$mP = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$m = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$\ln m = \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = nt \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$
$$t = \frac{\ln m}{n \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)}$$

5.8 Ejercicios *(página 472)*

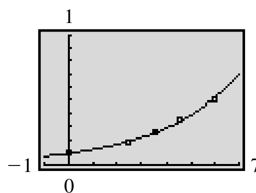
1. a) 500 insectos **b)** $0.02 = 2\%$ **c)** ≈ 611 insectos **d)** Después de cerca de 23.5 días **e)** Después de cerca de 34.7 días **3. a)** $-0.0244 = -2.44\%$ **b)** Unos 391.7 g **c)** Después de 9.1 años **d)** 28.4 años **5.** 5832; 3.9 años **7.** 25,198 **9.** 9.784 g **11.** Hace 9727 años **13. a)** 5:18 PM **b)** La pizza estará a 160°F después de 14.3 minutos. **c)** A medida que pasa el tiempo, la temperatura de la pizza se acerca a 70°F **15.** 18.63°C; 25.1°C **17.** 7.34 kg; 76.6 horas **19.** 26.6 días **21. a)** 0.1286 **b)** 0.9 **c)** 1996 **23. a)** 1000 **b)** 30 **c)** 11.076 horas

5.9 Ejercicios *(página 479)*

1. a)

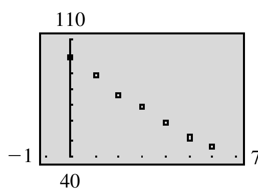


b) $y = 0.0903(1.3384)^x$
c) $N(t) = 0.0903e^{0.2915t}$
d)

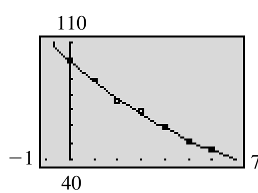


e) 0.69 **f)** Después de alrededor de 7.26 horas

3. a)

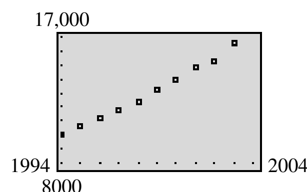


b) $y = 100.326(0.8769)^x$
c) $A = 100.326e^{-0.1314t}$
d)



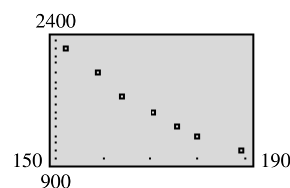
e) 5.3 semanas **f)** 0.14 g
g) Después de alrededor de 12.3 semanas

5. a)

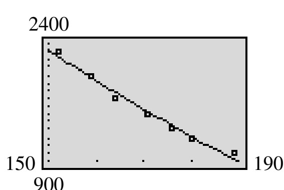


b) $y = 2.2908 \times 10^{-44}(1.056554737)^x$
c) 5.66% **d)** $44,230.54
e) En el 2023

7. a)

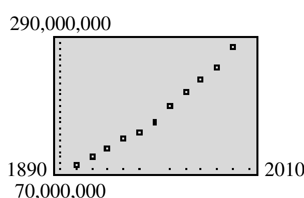


b) $y = 32{,}741.02 - 6070.96 \ln x$
c)

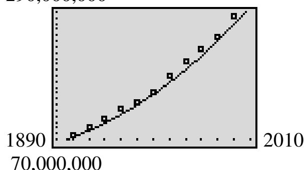


d) Aproximadamente 168 computadoras

9. a)

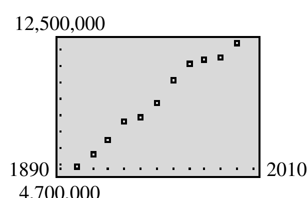


b) $y = \dfrac{799{,}475{,}916.5}{1 + 1.56344 \times 10^{14}e^{-0.0160x}}$
c)

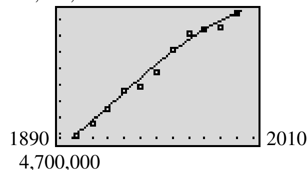


d) 799,475,917
e) Aproximadamente 279,809,184 **f)** 2011

11. a)



b) $y = \dfrac{14{,}471{,}245.24}{1 + 3.860 \times 10^{20}\, e^{-0.0246x}}$
c)

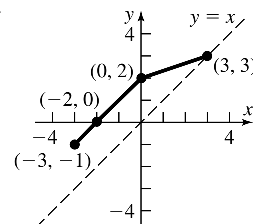


d) 14,471,245
e) Aproximadamente 12,811,429

Ejercicios de repaso *(página 484)*

1. a) −26 **b)** −241 **c)** 16 **d)** −1 **3. a)** $\sqrt{11}$ **b)** 1 **c)** $\sqrt{\sqrt{6} + 2}$ **d)** 19

5. a) e^4 **b)** $3e^{-2} - 2$ **c)** e^{e^4} **d)** −17 **7.** $(f \circ g)(x) = 1 - 3x$, todos los números reales; $(g \circ f)(x) = 7 - 3x$, todos los números reales; $(f \circ f)(x) = x$, todos los números reales; $(g \circ g)(x) = 9x + 4$, todos los números reales **9.** $(f \circ g)(x) = 27x^2 + 3|x| + 1$, todos los números reales; $(g \circ f)(x) = 3|3x^2 + x + 1|$, todos los números reales; $(f \circ f)(x) = 3(3x^2 + x + 1)^2 + 3x^2 + x + 2$, todos los números reales; $(g \circ g)(x) = 9|x|$, todos los números reales **11.** $(f \circ g)(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$, $\{x|x \neq 0, x \neq 1\}$; $(g \circ f)(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, $\{x|\, x \neq -1, x \neq 1\}$; $(f \circ f)(x) = x$, $\{x|x \neq 1\}$; $(g \circ g)(x) = x$, $\{x|x \neq 0\}$ **13. a)** $\{(2, 1), (5, 3), (8, 5), (10, 6)\}$ **b)** Su inverso es una función. **15.**



17. $f^{-1}(x) = \dfrac{2x + 3}{5x - 2}$

$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{2\left(\dfrac{2x + 3}{5x - 2}\right) + 3}{5\left(\dfrac{2x + 3}{5x - 2}\right) - 2} = x$

$f^{-1}(f(x)) = \dfrac{2\left(\dfrac{2x + 3}{5x - 2}\right) + 3}{5\left(\dfrac{2x + 3}{5x - 2}\right) - 2} = x$

Dominio de f = Rango f^{-1} = todos los números reales, excepto $\frac{2}{5}$

Rango de f = Dominio f^{-1} = todos los números reales, excepto $\frac{2}{5}$

19. $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 1}{x}$

$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{1}{\dfrac{x + 1}{x} - 1} = x$

$f^{-1}(f(x)) = \dfrac{\dfrac{1}{x - 1} + 1}{\dfrac{1}{x - 1}} = x$

Dominio de f = Rango f^{-1} = todos los números reales, excepto 1

Rango de f = Dominio f^{-1} = todos los números reales, excepto 0

21. $f^{-1}(x) = \dfrac{27}{x^3}$

$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{3}{\left(\dfrac{27}{x^3}\right)^{1/3}} = x$

$f^{-1}(f(x)) = \dfrac{27}{\left(\dfrac{3}{x^{1/3}}\right)^3} = x$

Dominio de f = Rango f^{-1} = todos los números reales, excepto 0

Rango de f = Dominio f^{-1} = todos los números reales, excepto 0

23. a) 81 **b)** 2 **c)** $\frac{1}{9}$ **d)** -3

25. $\log_5 z = 2$ **27.** $5^{13} = u$

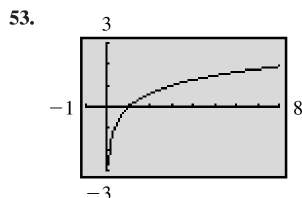
29. $\left\{x \middle| x > \frac{2}{3}\right\}; \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

31. $\{x \mid x < 1 \text{ o } x > 2\}; (-\infty, 1) \text{ o } (2, \infty)$

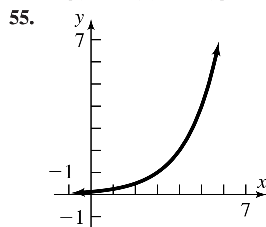
33. -3 **35.** $\sqrt{2}$ **37.** 0.4 **39.** $\log_3 u + 2\log_3 v - \log_3 w$ **41.** $2\log x + \frac{1}{2}\log(x^3 + 1)$ **43.** $\ln x + \frac{1}{3}\ln(x^2 + 1) - \ln(x - 3)$

45. $\frac{25}{4}\log_4 x$ **47.** $-2\ln(x + 1)$ **49.** $\log\left(\dfrac{4x^3}{[(x + 3)(x - 2)]^{1/2}}\right)$ **51.** 2.124

53.

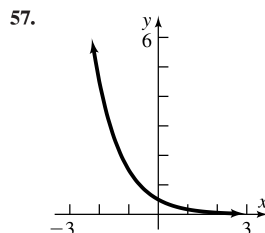


55.



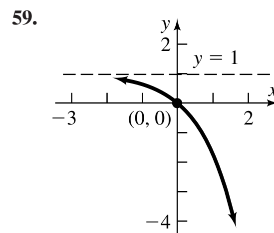
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(0, \infty)$
Asíntota horizontal: $y = 0$

57.



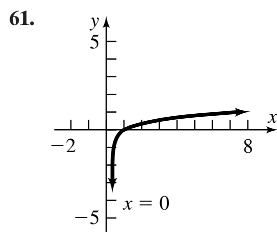
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(0, \infty)$
Asíntota horizontal: $y = 0$

59.



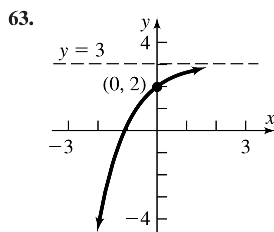
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(-\infty, 1)$
Asíntota horizontal: $y = 1$

61.



Dominio: $(0, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Asíntota vertical: $x = 0$

63.



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(-\infty, 3)$
Asíntota horizontal: $y = 3$

65. $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ **67.** $\left\{\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right\}$

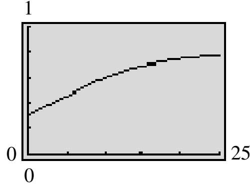
69. $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ **71.** $\left\{\frac{2\ln 3}{\ln 5 - \ln 3} \approx 4.301\right\}$

73. $\left\{\frac{12}{5}\right\}$ **75.** $\{83\}$ **77.** $\left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$ **79.** $\{-1\}$

81. $\{1 - \ln 5 \approx -0.609\}$ **83.** $\left\{\dfrac{\ln 3}{3\ln 2 - 2\ln 3} \approx -9.327\right\}$ **85.** 3229.5 m **87. a)** 37.3 W **b)** 6.9 dB **89. a)** 9.85 años **b)** 4.27 años

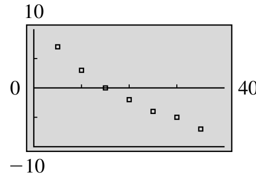
91. \$41,668.97 **93.** 24,203 Hace 24,203 años **95.** 6,835,600,129

97. **a)** 0.3
b) 0.8
c)



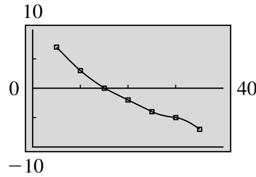
d) In 2023

99. **a)**



b) Sensación térmica = 18.921 − 7.096 ln (velocidad del viento)

c)

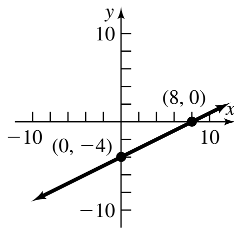


d) Aproximadamente −3°F

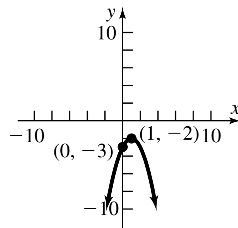
Repaso acumulativo *(página 489)*

1. Sí; no **2.** **a)** 10 **b)** $2x^2 + 3x + 1$ **c)** $2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h + 1$ **3.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ está sobre la gráfica **4.** −26

5.



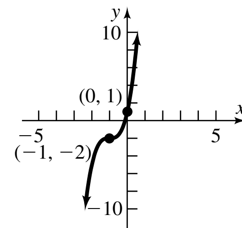
6. **a)**



b) $\{x|-\infty < x < \infty\}$

7. $f(x) = 2(x - 4)^2 - 8 = 2x^2 - 16x + 24$

8.



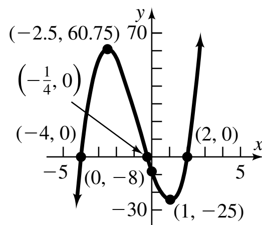
9. $f(g(x)) = \frac{4}{(x - 3)^2} + 2$; dominio: $\{x|x \neq 3\}$; 3

10. **a)** Ceros: $-4, -\frac{1}{4}, 2$

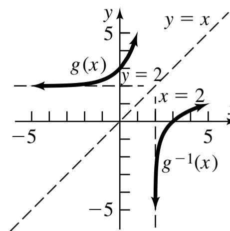
b) Intercepciones x: $-4, -\frac{1}{4}, 2$; intercepción y: −8

c) El máximo local de 60.75 se presenta en $x = -2.5$; el mínimo local de −25 se presenta en $x = 1$

d)



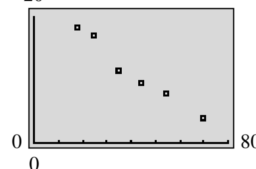
11. **a), c)**



Dominio g = Rango $g^{-1} = (-\infty, \infty)$
Rango g = Dominio $g^{-1} = (2, \infty)$

b) $g^{-1}(x) = \log_3(x - 2)$

12. $-\frac{3}{2}$ **13.** 2 **14.** **a)** −1 **b)** $\{x|x > -1\}$ o $(-1, \infty)$ **c)** 25 **15.** **a)**



b) Las respuestas variarán

CAPÍTULO 6 Funciones trigonométricas

6.1 Conceptos y vocabulario *(página 502)*

3. Posición estándar **4.** $r\theta$; $\frac{1}{2}r^2\theta$ **5.** $\frac{s}{t}$; $\frac{\theta}{t}$ **6.** Falso **7.** Verdadero **8.** Verdadero **9.** Verdadero **10.** Falso

6.1 Ejercicios *(página 503)*

11. 30° **13.** 135° **15.** 450° **17.** $\frac{3\pi}{4}$

19. $-\frac{\pi}{6}$ **21.** $\frac{16\pi}{3}$

23. 40.17° **25.** 1.03° **27.** 9.15° **29.** 40°19′12″ **31.** 18°15′18″ **33.** 19°59′24″ **35.** $\frac{\pi}{6}$ **37.** $\frac{4\pi}{3}$ **39.** $-\frac{\pi}{3}$ **41.** π **43.** $-\frac{3\pi}{4}$ **45.** $-\frac{\pi}{2}$ **47.** 60° **49.** −225° **51.** 90° **53.** 15° **55.** −90° **57.** −30° **59.** 0.30 **61.** −0.70 **63.** 2.18 **65.** 179.91° **67.** 114.59° **69.** 362.11° **71.** 5 m **73.** 6 pies **75.** 0.6 radianes **77.** $\frac{\pi}{3} \approx 1.047$ pulgadas **79.** 25 m^2 **81.** $2\sqrt{3} \approx 3.464$ pies **83.** 0.24 radianes **85.** $\frac{\pi}{3} \approx 1.047$ pulgadas^2 **87.** $s = 2.094$ pies; $A = 2.094$ pies^2 **89.** $s = 14.661$ yardas; $A = 87.965$ yardas^2 **91.** $3\pi \approx 9.4248$ pulgadas; $5\pi \approx 15.7080$ pulgadas **93.** $2\pi \approx 6.28$ m^2 **95.** $\frac{675\pi}{2} \approx 1060.29$ pies^2 **97.** $\omega = \frac{1}{60}$ radián/seg; $v = \frac{1}{12}$ cm/seg **99.** Aproximadamente 452.5 rpm **101.** Aproximadamente 359 millas **103.** Aproximadamente 898 millas/hora **105.** Aproximadamente 2292 millas/hora **107.** $\frac{3}{4}$ rpm **109.** Aproximadamente 2.86 millas/hora **111.** Aproximadamente 31.47 rpm **113.** Aproximadamente 1037 millas/hora **115.** $v_1 = r_1\omega_1$, $v_2 = r_2\omega_2$, y $v_1 = v_2$, so $r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

6.2 Conceptos y vocabulario *(página 515)*

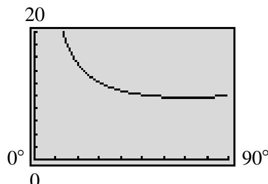
3. complementaria **4.** coseno **5.** 62° **6.** 1 **7.** Verdadero **8.** Falso **9.** Verdadero **10.** Falso

6.2 Ejercicios *(página 515)*

11. $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{12}{13}$; $\tan\theta = \frac{5}{12}$; $\csc\theta = \frac{13}{5}$; $\sec\theta = \frac{13}{12}$; $\cot\theta = \frac{12}{5}$ **13.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\cos\theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\tan\theta = \frac{2}{3}$; $\csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$; $\sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$; $\cot\theta = \frac{3}{2}$ **15.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\theta = \frac{1}{2}$; $\tan\theta = \sqrt{3}$; $\csc\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\sec\theta = 2$; $\cot\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **17.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\tan\theta = \sqrt{2}$; $\csc\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $\sec\theta = \sqrt{3}$; $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **19.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\tan\theta = \frac{1}{2}$; $\csc\theta = \sqrt{5}$; $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\cot\theta = 2$ **21.** $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\csc\theta = 2$; $\sec\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\cot\theta = \sqrt{3}$ **23.** $\tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\csc\theta = \frac{3}{2}$; $\sec\theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; $\cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ **25.** $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan\theta = 1$; $\csc\theta = \sqrt{2}$; $\sec\theta = \sqrt{2}$; $\cot\theta = 1$ **27.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan\theta = 2\sqrt{2}$; $\csc\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\sec\theta = 3$; $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ **29.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\csc\theta = \sqrt{5}$; $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\cot\theta = 2$ **31.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\theta = \frac{1}{3}$; $\tan\theta = 2\sqrt{2}$; $\csc\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ **33.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\csc\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $\sec\theta = \sqrt{3}$; $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **35.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sec\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\cot\theta = \sqrt{3}$

37. 1 **39.** 1 **41.** 0 **43.** 0 **45.** 1 **47.** 0 **49.** 0 **51.** 1 **53.** 1 **55. a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** 2 **d)** 2 **57. a)** 17 **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** 4 **d)** $\frac{17}{16}$ **59. a)** $\frac{1}{4}$ **b)** 15 **c)** 4 **d)** $\frac{16}{15}$ **61. a)** 0.78 **b)** 0.79 **c)** 1.27 **d)** 1.27 **e)** 1.61 **f)** 0.78 **g)** 0.62 **h)** 1.27 **63.** 0.6 **65.** 20°

67. **a)** 10 min
b) 20 min
c) $T(\theta) = 5\left(1 - \frac{1}{3\tan\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)$
d) aproximadamente 15.8 min
e) aproximadamente 10.4 min
f)



70.5°; 177 pies, 9.7 min

69. **a)** $|OA| = |OC| = 1$; ángulo OAC = ángulo OCA;

ángulo OAC + ángulo $OAC + 180° - \theta = 180°$; ángulo $OAC = \frac{\theta}{2}$

b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{|CD|}{|OC|} = |CD|$; $\cos\theta = \frac{|OD|}{|OC|} = |OD|$

c) $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + |OD|} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$

71. $h = x\tan\theta$ y $h = (1 - x)\tan n\theta$; entonces, $x\tan\theta = (1 - x)\tan n\theta$ de manera que $x = \frac{\tan n\theta}{\tan\theta + \tan n\theta}$.

73. **a)** Área $\triangle OAC = \frac{1}{2}|AC|\,|OC| = \frac{1}{2}\cdot\frac{|AC|}{1}\cdot\frac{|OC|}{1} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

b) Área $\triangle OCB = \frac{1}{2}|BC|\,|OC| = \frac{1}{2}|OB|^2\frac{|BC|}{|OB|}\cdot\frac{|OC|}{|OB|} = \frac{1}{2}|OB|^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

c) Área $\triangle OAB = \frac{1}{2}|BD|\,|OA| = \frac{1}{2}|OB|\frac{|BD|}{|OB|} = \frac{1}{2}|OB|\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

d) $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\frac{|OC|}{1}}{\frac{|OC|}{|OB|}} = |OB|$

e) Área $\triangle OAB$ = Área $\triangle OAC$ + Área $\triangle OCB$

$$\frac{1}{2}|OB|\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}|OB|^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + |OB|^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{|OB|}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha(|OB|\cos\beta) + |OB|^2\operatorname{sen}\beta\left(\frac{\cos\alpha}{|OB|}\right)}{|OB|}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

75. $\operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha = \cos\beta\tan\beta = \operatorname{sen}\beta$;

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \tan^2\beta = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\beta} = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{sen}^4\alpha - 3\operatorname{sen}^2\alpha + 1 = 0$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

77. Como $a^2 + b^2 = c^2, a > 0, b > 0$, entonces $0 < b^2 < c^2$ o $0 < b < c$.
De esta manera $0 < \frac{b}{c} < 1$ y $0 < \operatorname{sen}\theta < 1$.

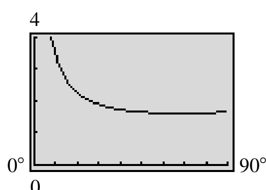
6.3 Conceptos y vocabulario *(página 523)*

1. $\frac{3}{2}$ **2.** 0.91 **3.** Verdadero **4.** Falso

6.3 Ejercicios *(página 523)*

5. $\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 45° = 1$; $\csc 45° = \sqrt{2}$; $\sec 45° = \sqrt{2}$; $\cot 45° = 1$ **7.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **9.** $\frac{1}{2}$ **11.** $\frac{3}{4}$ **13.** $\sqrt{3}$ **15.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **17.** $\sqrt{2}$ **19.** 2 **21.** $\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ **23.** $-\frac{8}{3}$ **25.** $\frac{1}{2}$ **27.** 0 **29.** 0.47 **31.** 0.38 **33.** 1.33 **35.** 0.31 **37.** 3.73 **39.** 1.04 **41.** 0.84 **43.** 0.02 **45.** 0.31 **47.** $R \approx 310.56$ pies; $H \approx 77.64$ pies **49.** $R \approx 19{,}541.95$ m; $H \approx 2278.14$ m **51.** **a)** 1.20 seg **b)** 1.12 seg **c)** 1.20 seg

53. **a)** $T(\theta) = 1 + \frac{2}{3\operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{4\tan\theta}$ **b)** 1.9 horas; 0.57 horas **c)** 1.69 horas; 0.75 horas
d) 1.63 horas; 0.86 horas **e)** 1.67 horas **f)** 2.75 horas
g)



67.98°; 1.62 horas; 0.9 horas

55.

θ	0.5	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
sen θ	0.4794	0.3894	0.1987	0.0998	0.0100	0.001	0.0001	0.00001
$\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$	0.9589	0.9735	0.9933	0.9983	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$ a 1 a medida que $\theta \to 0$. **57.** 1 **59.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.4 Conceptos y vocabulario *(página 535)*

1. tangente, cotangente **2.** coterminal **3.** 60° **4.** Falso **5.** Verdadero **6.** Verdadero **7.** 60° **8.** I, IV **9.** $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ **10.** $\frac{\pi}{3}$

6.4 Ejercicios *(página 535)*

11. $\text{sen}\,\theta = \frac{4}{5}$; $\cos\theta = -\frac{3}{5}$; $\tan\theta = -\frac{4}{3}$; $\csc\theta = \frac{5}{4}$; $\sec\theta = -\frac{5}{3}$; $\cot\theta = -\frac{3}{4}$ **13.** $\text{sen}\,\theta = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\cos\theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\tan\theta = -\frac{3}{2}$; $\csc\theta = -\frac{\sqrt{13}}{3}$; $\sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$; $\cot\theta = -\frac{2}{3}$ **15.** $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan\theta = 1$; $\csc\theta = -\sqrt{2}$; $\sec\theta = -\sqrt{2}$; $\cot\theta = 1$ **17.** $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\csc\theta = 2$; $\sec\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\cot\theta = \sqrt{3}$ **19.** $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan\theta = -1$; $\csc\theta = -\sqrt{2}$; $\sec\theta = \sqrt{2}$; $\cot\theta = -1$ **21.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **23.** 1 **25.** 1 **27.** $\sqrt{3}$ **29.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **31.** 0 **33.** II **35.** IV **37.** IV **39.** III **41.** 30° **43.** 60° **45.** 30° **47.** $\frac{\pi}{4}$ **49.** $\frac{\pi}{3}$ **51.** 45° **53.** $\frac{\pi}{3}$ **55.** 80° **57.** $\frac{\pi}{4}$ **59.** $\frac{1}{2}$ **61.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **63.** $\frac{1}{2}$ **65.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **67.** -2 **69.** $-\sqrt{3}$ **71.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **73.** $\sqrt{3}$ **75.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **77.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **79.** $-\sqrt{3}$ **81.** $\sqrt{2}$ **83.** 0 **85.** 0 **87.** -1 **89.** $\cos\theta = -\frac{5}{13}$; $\tan\theta = -\frac{12}{5}$; $\csc\theta = \frac{13}{12}$; $\sec\theta = -\frac{13}{5}$; $\cot\theta = -\frac{5}{12}$ **91.** $\text{sen}\,\theta = -\frac{3}{5}$; $\tan\theta = \frac{3}{4}$; $\csc\theta = -\frac{5}{3}$; $\sec\theta = -\frac{5}{4}$; $\cot\theta = \frac{4}{3}$ **93.** $\cos\theta = -\frac{12}{13}$; $\tan\theta = -\frac{5}{12}$; $\csc\theta = \frac{13}{5}$; $\sec\theta = -\frac{13}{12}$; $\cot\theta = -\frac{12}{5}$ **95.** $\text{sen}\,\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan\theta = 2\sqrt{2}$; $\csc\theta = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\sec\theta = -3$; $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ **97.** $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\tan\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\csc\theta = \frac{3}{2}$; $\sec\theta = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$; $\cot\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ **99.** $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\theta = \frac{1}{2}$; $\tan\theta = -\sqrt{3}$; $\csc\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\cot\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **101.** $\text{sen}\,\theta = -\frac{3}{5}$; $\cos\theta = -\frac{4}{5}$; $\csc\theta = -\frac{5}{3}$; $\sec\theta = -\frac{5}{4}$; $\cot\theta = \frac{4}{3}$ **103.** $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$; $\cos\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\csc\theta = \sqrt{10}$; $\sec\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}$; $\cot\theta = -3$ **105.** $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$; $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sec\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\cot\theta = \sqrt{3}$ **107.** 0 **109.** -0.2 **111.** 3 **113.** 5 **115.** 0

117. a) Aproximadamente 16.6 pies **b)**

20

45 90

0

c) 67.5°

6.5 Conceptos y vocabulario *(página 545)*

4. 2π; π **5.** todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ **6.** todos los números reales, desde -1 hasta 1, inclusive **7.** -0.2 **8.** Verdadero

6.5 Ejercicios *(página 545)*

9. $\text{sen}\,t = -\frac{1}{2}$; $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\csc t = -2$; $\sec t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\cot t = -\sqrt{3}$ **11.** $\text{sen}\,t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan t = 1$; $\csc t = -\sqrt{2}$; $\sec t = -\sqrt{2}$; $\cot t = 1$ **13.** $\text{sen}\,t = \frac{2}{3}$; $\cos t = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\tan t = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\csc t = \frac{3}{2}$; $\sec t = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; $\cot t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ **15.** $\text{sen}\,\theta = -\frac{4}{5}$; $\cos\theta = \frac{3}{5}$; $\tan\theta = -\frac{4}{3}$; $\csc\theta = -\frac{5}{4}$; $\sec\theta = \frac{5}{3}$; $\cot\theta = -\frac{3}{4}$ **17.** $\text{sen}\,\theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\tan\theta = -\frac{3}{2}$; $\csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$; $\sec\theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}$; $\cot\theta = -\frac{2}{3}$ **19.** $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan\theta = 1$; $\csc\theta = -\sqrt{2}$; $\sec\theta = -\sqrt{2}$; $\cot\theta = 1$

21. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **23.** 1 **25.** 1 **27.** $\sqrt{3}$ **29.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **31.** 0 **33.** $\sqrt{2}$ **35.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **37.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **39.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **41.** 2 **43.** -1 **45.** -1 **47.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **49.** 0

51. $-\sqrt{2}$ **53.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **55.** -1 **57.** -2 **59.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ **61.** Todos los números reales **63.** En los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$

65. En los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ **67.** $[-1, 1]$ **69.** $(-\infty, \infty)$ **71.** $(-\infty, -1]$ or $[1, \infty)$ **73.** Impar; sí; origen **75.** Impar; sí; origen

77. Par; sí; eje y **79.** 0.9 **81.** 9 **83. a)** $-\frac{1}{3}$ **b)** 1 **85. a)** -2 **b)** 6 **87. a)** -4 **b)** -12

89. Sea $P = (x, y)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde a t. Considerando la ecuación $\tan t = \frac{y}{x} = a$. Entonces $y = ax$. Pero $x^2 + y^2 = 1$, entonces $x^2 + a^2x^2 = 1$. De esta manera $x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ y $y = \pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$; es decir, para todo número real a, existe un punto $P = (x, y)$ sobre el círculo unitario para el que $\tan t = a$. En otras palabras, $-\infty < \tan t < \infty$, y el rango de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.

91. Suponga que existe un número, p, $0 < p < 2\pi$, para el cual $\operatorname{sen}(\theta + p) = \operatorname{sen}\theta$ para toda θ. Si $\theta = 0$, entonces $\operatorname{sen}(0 + p) = \operatorname{sen} p = \operatorname{sen} 0 = 0$; ntonces $p = \pi$. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + p\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Pero $p = \pi$. De tal modo, $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Esto es imposible. Por lo tanto, el menor número positivo p para el que $\operatorname{sen}(\theta + p) = \operatorname{sen}\theta$ para toda θ es $p = 2\pi$.

93. $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$; puesto que $\cos\theta$ iene un periodo de 2π, también lo tiene $\sec\theta$.

95. Si $P = (a, b)$ s el punto sobre el círculo unitario que corresponde a θ, entonces $Q = (-a, -b)$ es el punto sobre el círculo unitario que corresponde a $\theta + \pi$. Así, $\tan(\theta + \pi) = \frac{(-b)}{(-a)} = \frac{b}{a} = \tan\theta$. Si existe un número p tal que, $0 < p < \pi$, para el cual $(\theta + p) = \tan\theta$ para toda θ, entonces, si $\theta = 0$, $\tan(p) = \tan 0 = 0$. Pero esto significa que p es un múltiplo de π. Esto es imposible, porque en el intervalo $(0, \pi)$ no existe algún múltiplo de π. Por lo tanto, el periodo fundamental de $f(\theta) = \tan\theta$ es π.

97. $m = \frac{\operatorname{sen}\theta - 0}{\cos\theta - 0} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

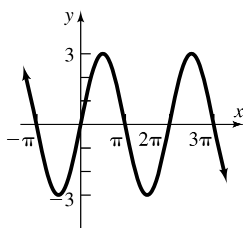
6.6 Conceptos y vocabulario *(página 559)*

3. 1; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, donde k es cualquier entero **4.** 3; π **5.** 3; $\frac{\pi}{3}$ **6.** Verdadero **7.** Falso **8.** Verdadero

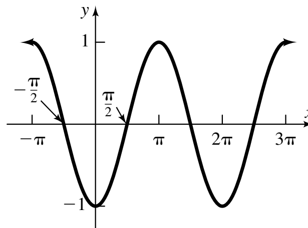
6.6 Ejercicios *(página 560)*

9. 0 **11.** $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ **13.** 1 **15.** $0, \pi, 2\pi$ **17.** $\operatorname{sen} x = 1$ for $x = -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{sen} x = -1$ por $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ **19.** B, C, F

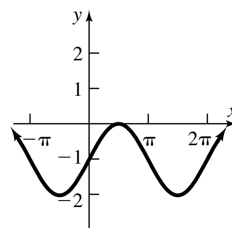
21.



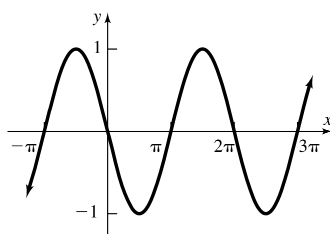
23.



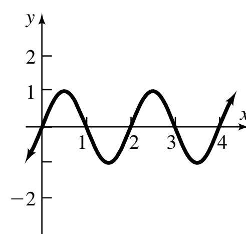
25.



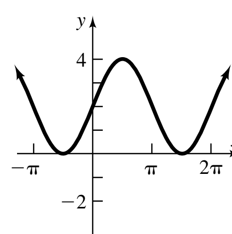
27.



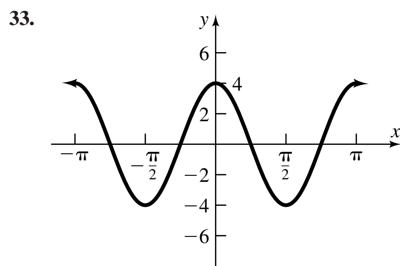
29.



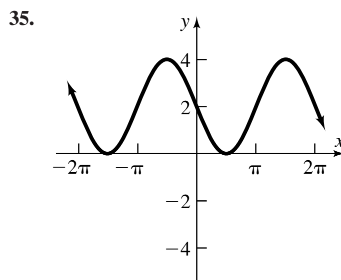
31.



33.



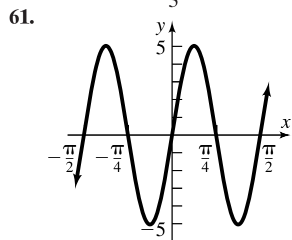
35.



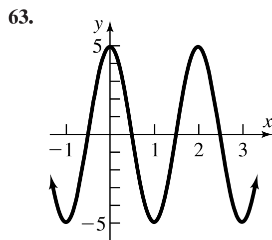
37. Amplitud 2; Periodo $= 2\pi$ **39.** Amplitud $= 4$; Periodo $= \pi$ **41.** Amplitud $= 6$; Periodo $= 2$ **43.** Amplitud $= \frac{1}{2}$; Periodo $= \frac{4\pi}{3}$

45. Amplitud $= \frac{5}{3}$; Periodo $= 3$ **47.** F **49.** A **51.** H **53.** C **55.** J **57.** A **59.** B

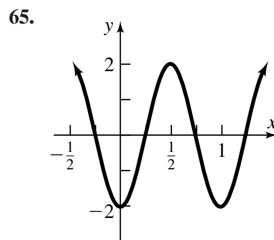
61.



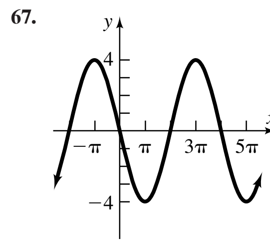
63.



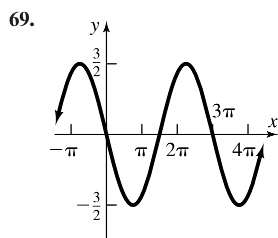
65.



67.



69.

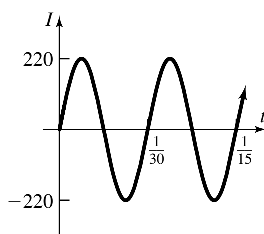


71. $y = \pm 3\,\text{sen}(2x)$ **73.** $y = \pm 3\,\text{sen}(\pi x)$ **75.** $y = 5\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ **77.** $y = -3\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

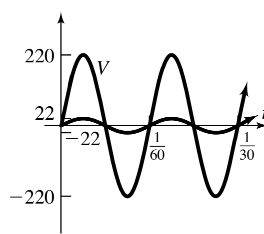
79. $y = \frac{3}{4}\,\text{sen}(2\pi x)$ **81.** $y = -\text{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)$ **83.** $y = -\cos\left(\frac{4\pi}{3}x\right) + 1$ **85.** $y = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

87. $y = -4\cos(3x)$

89. Periodo $= \frac{1}{30}$; Amplitud $= 220$ **91. a)** Amplitud $= 220$; Periodo $= \frac{1}{60}$



b), e)



c) $I = 22\,\text{sen}(120\pi t)$

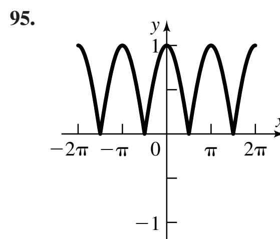
d) Amplitud $= 22$; Periodo $= \frac{1}{60}$

93. a) $P = \dfrac{[V_0\,\text{sen}(2\pi f t)]^2}{R} = \dfrac{V_0^2}{R}\,\text{sen}^2[2\pi f t]$

b) Puesto que la gráfica de P tiene una amplitud de $\frac{V_0^2}{2R}$ y un periodo de $\frac{1}{2f}$ y tiene la forma $y = A\cos(\omega t) + B$, entonces $A = -\frac{V_0^2}{2R}$ and $B = \frac{V_0^2}{2R}$. Como $\frac{1}{2f} = \frac{2\pi}{\omega}$, entonces $\omega = 4\pi f$. Por lo tanto,

$$P = -\frac{V_0^2}{2R}\cos(4\pi f t) + \frac{V_0^2}{2R} = \frac{V_0^2}{2R}[1 - \cos(4\pi f t)].$$

95.

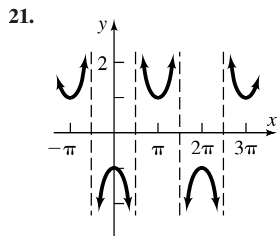


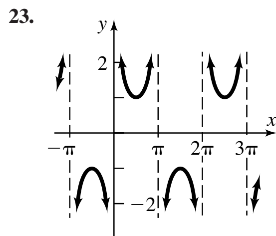
6.7 Conceptos y vocabulario *(página 570)*

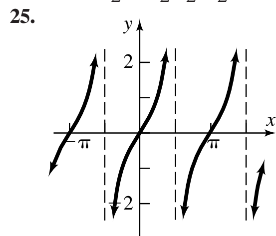
3. origen; múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ **4.** eje y; múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ **5.** $y = \cos x$ **6.** Verdadero

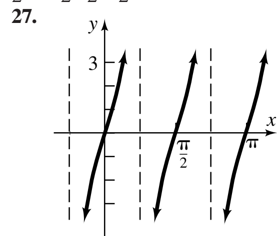
6.7 Ejercicios *(página 570)*

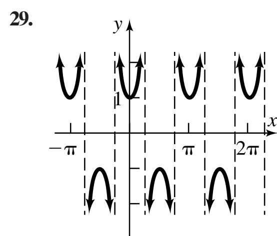
7. 0 **9.** 1 **11.** $\sec x = 1$ por $x = -2\pi, 0, 2\pi$; $\sec x = -1$ por $x = -\pi, \pi$ **13.** $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ **15.** $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ **17.** D **19.** B

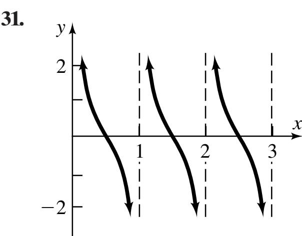
21.


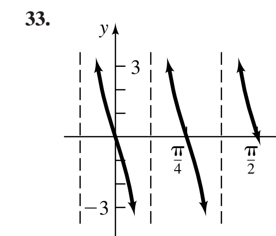
23.


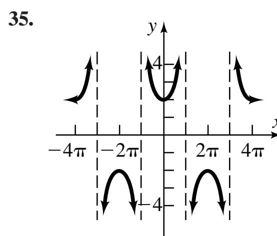
25.


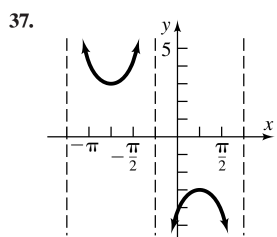
27.


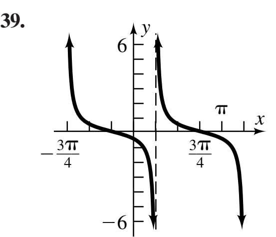
29.


31.


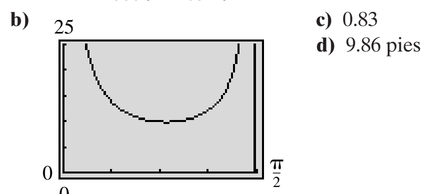
33.


35.


37.


39.


41. a) $L(\theta) = \frac{3}{\cos\theta} + \frac{4}{\operatorname{sen}\theta} = 3\sec\theta + 4\csc\theta$

b)


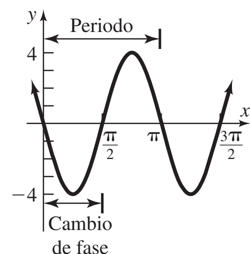
c) 0.83
d) 9.86 pies

6.8 Conceptos y vocabulario *(página 580)*

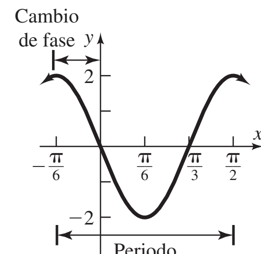
1. Cambio de fase **2.** Falso

6.8 Ejercicios *(página 580)*

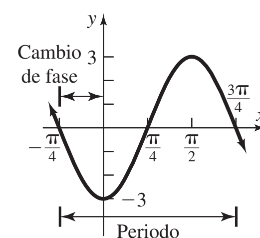
3. Amplitud $= 4$
Periodo $= \pi$
Cambio de fase $= \frac{\pi}{2}$



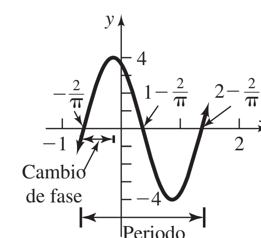
5. Amplitud $= 2$
Periodo $= \frac{2\pi}{3}$
Cambio de fase $= -\frac{\pi}{6}$



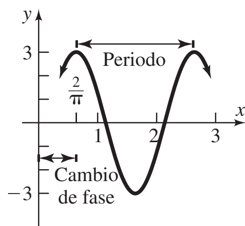
7. Amplitud $= 3$
Periodo $= \pi$
Cambio de fase $= -\frac{\pi}{4}$



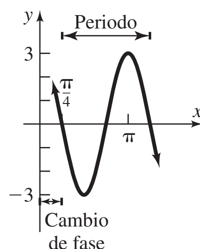
9. Amplitud $= 4$
Periodo $= 2$
Cambio de fase $= -\frac{2}{\pi}$



11. Amplitud = 3
Periodo = 2
Cambio de fase $= \frac{2}{\pi}$



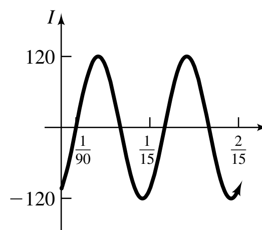
13. Amplitud = 3
Periodo = π
Cambio de fase $= \frac{\pi}{4}$



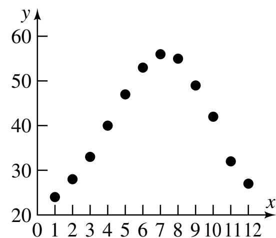
15. $y = 2\,\text{sen}\left[2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$ o $y = 2\,\text{sen}(2x - 1)$

17. $y = 3\,\text{sen}\left[\frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)\right]$ o $y = 3\,\text{sen}\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right)$

19. Periodo $= \frac{1}{15}$; Amplitud = 120; Cambio de fase $= \frac{1}{90}$

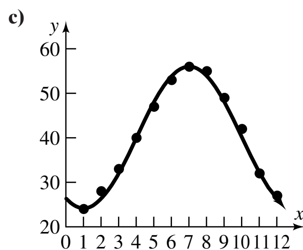


21. a)



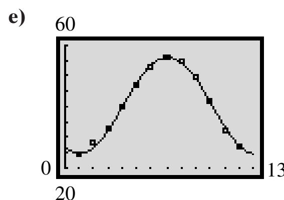
b) $y = 15.9\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{2\pi}{3}\right) + 40.1$

c)

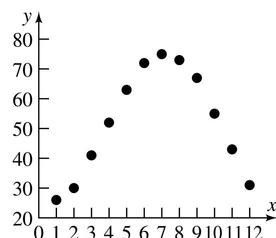


d) $y = 15.62\,\text{sen}(0.517x - 2.096) + 40.377$

e)

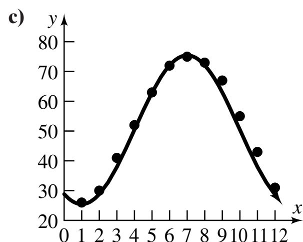


23. a)



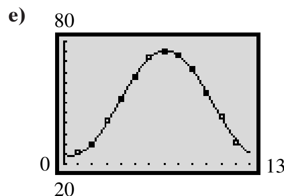
b) $y = 24.95\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{2\pi}{3}\right) + 50.45$

c)



d) $y = 25.693\,\text{sen}(0.476x - 1.814) + 49.854$

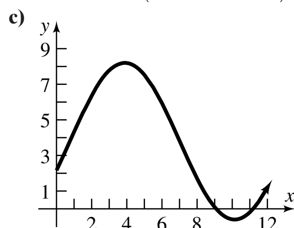
e)



25. a) 4:08 P.M.

b) $y = 4.4\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{25}x - 6.6643\right) + 3.8$

c)

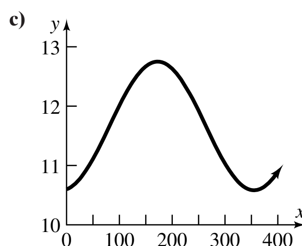


d) 8.2 pies

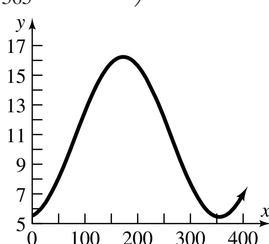
27. a) $y = 1.0835\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{365}x - 2.45\pi\right) + 11.6665$

b) 11.83 horas

c)



29. **a)** $y = 5.3915 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}x - 2.45\pi\right) + 10.8415$
b) 11.66 horas **c)**



Ejercicios de repaso *(página 586)*

1. $\frac{3\pi}{4}$ **3.** $\frac{\pi}{10}$ **5.** 135° **7.** $-450°$ **9.** $\frac{1}{2}$ **11.** $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{3}$ **13.** $-3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ **15.** 3 **17.** 0 **19.** 0 **21.** 1 **23.** 1 **25.** 1

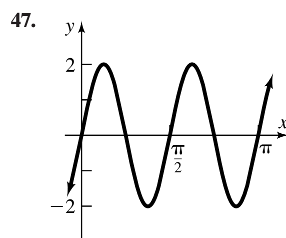
27. -1 **29.** 1 **31.** $\cos\theta = \frac{3}{5}$; $\tan\theta = \frac{4}{3}$; $\csc\theta = \frac{5}{4}$; $\sec\theta = \frac{5}{3}$; $\cot\theta = \frac{3}{4}$ **33.** $\operatorname{sen}\theta = -\frac{12}{13}$; $\cos\theta = -\frac{5}{13}$; $\csc\theta = -\frac{13}{12}$; $\sec\theta = -\frac{13}{5}$;

$\cot\theta = \frac{5}{12}$ **35.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$; $\cos\theta = -\frac{4}{5}$; $\tan\theta = -\frac{3}{4}$; $\csc\theta = \frac{5}{3}$; $\cot\theta = -\frac{4}{3}$ **37.** $\cos\theta = -\frac{5}{13}$; $\tan\theta = -\frac{12}{5}$; $\csc\theta = \frac{13}{12}$; $\sec\theta = -\frac{13}{5}$;

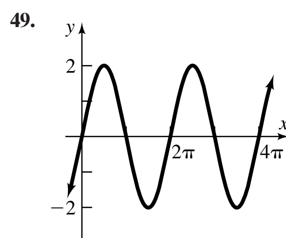
$\cot\theta = -\frac{5}{12}$ **39.** $\cos\theta = \frac{12}{13}$; $\tan\theta = -\frac{5}{12}$; $\csc\theta = -\frac{13}{5}$; $\sec\theta = \frac{13}{12}$; $\cot\theta = -\frac{12}{5}$ **41.** $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\cos\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\csc\theta = -\sqrt{10}$;
$\sec\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}$; $\cot\theta = 3$ **43.** $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\theta = \frac{1}{3}$; $\tan\theta = -2\sqrt{2}$; $\csc = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\cot\theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ **45.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$
;

$\tan\theta = -\frac{1}{2}$; $\csc\theta = \sqrt{5}$; $\sec\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

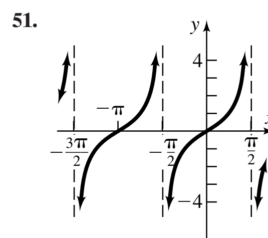
47.



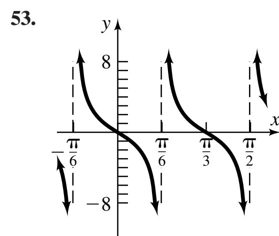
49.



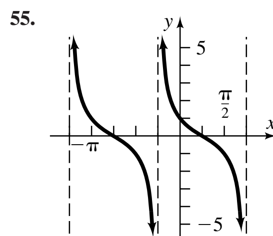
51.



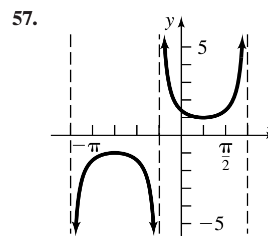
53.



55.

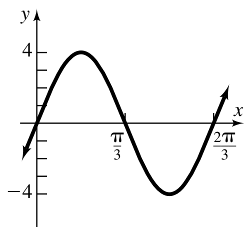


57.

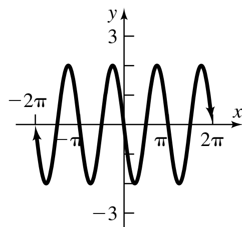


59. Amplitud = 4; Periodo = 2π
61. Amplitud = 8; Periodo = 4

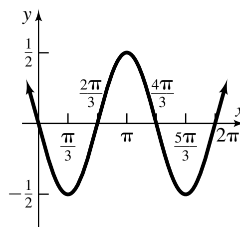
63. Amplitud $= 4$
Periodo $= \dfrac{2\pi}{3}$
Cambio de fase $= 0$



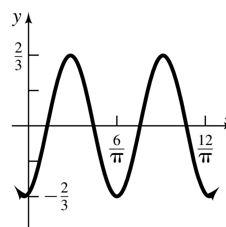
65. Amplitud $= 2$
Periodo $= \pi$
Cambio de fase $= \dfrac{\pi}{2}$



67. Amplitud $= \dfrac{1}{2}$
Periodo $= \dfrac{4\pi}{3}$
Cambio de fase $= \dfrac{2\pi}{3}$

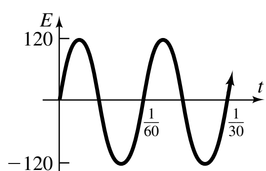


69. Amplitud $= \dfrac{2}{3}$
Periodo $= 2$
Cambio de fase $= \dfrac{6}{\pi}$

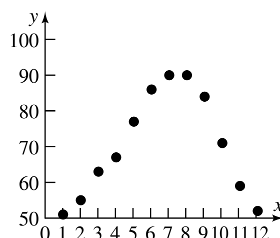


71. $y = 5\cos\dfrac{x}{4}$ **73.** $y = -6\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$ **75.** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{5}{13}, \cos\theta = \dfrac{12}{13}, \tan\theta = \dfrac{5}{12}, \csc\theta = \dfrac{13}{5}; \sec\theta = \dfrac{13}{12}, \cot\theta = \dfrac{12}{5}$ **77.** $\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{4}{5}, \cos\theta = \dfrac{3}{5}, \tan\theta = -\dfrac{4}{3}, \csc\theta = -\dfrac{5}{4}, \sec\theta = \dfrac{5}{3}, \cot\theta = -\dfrac{3}{4}$ **79.** $\dfrac{\pi}{5}$ **81.** dominio: todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$; rango: todos los números reales ≤ -1 o ≥ 1 **83.** $\dfrac{\pi}{3} \approx 1.047$ pies; $\dfrac{\pi}{3} \approx 1.047$ pies^2 **85.** Aproximadamente 114.59 revoluciones/hora
87. 0.1 revolución/seg $= \dfrac{\pi}{5}$ radián/seg

89. a) 120 **b)** $\dfrac{1}{60}$ **c)**

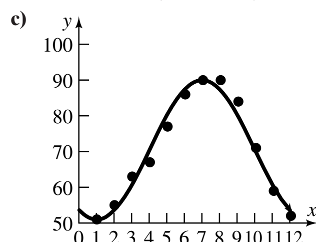


91. a)

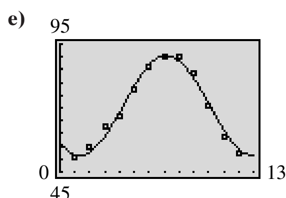


b) $y = 19.5\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + 70.5$ **d)** $y = 19.52\operatorname{sen}(0.54x - 2.28) + 71.01$ **93. a)** $y = 1.85\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{365}x - 2.45\pi\right) + 11.517$

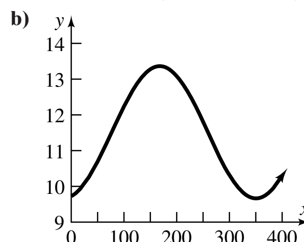
c)



e)



b)



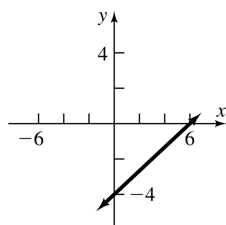
c) 11.80 hr

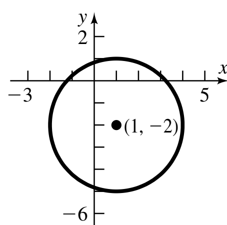
Repaso acumulativo *(página 590)*

1. $\left\{-1, \dfrac{1}{2}\right\}$ **2.** $y - 5 = -3(x + 2)$ o $y = -3x - 1$ **3.** $x^2 + (y + 2)^2 = 16$

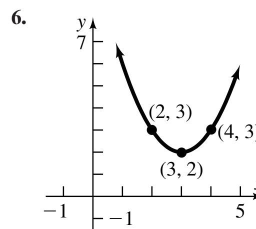
4. Una recta. Pendiente $\dfrac{2}{3}$; intersecciones $(6, 0)$ y $(0, -4)$

5. Un círculo. Centro (1, -2); Radio 3

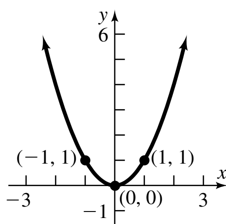




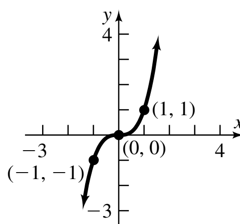
6.



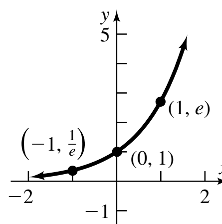
7. **a)**



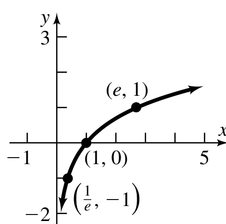
b)



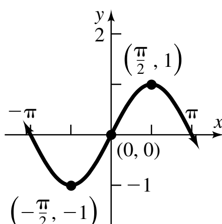
c)



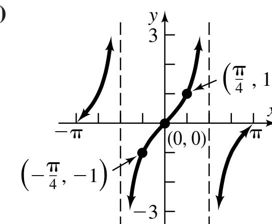
d)



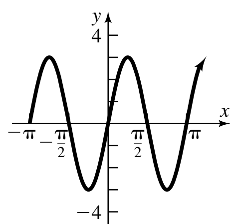
e)



f)

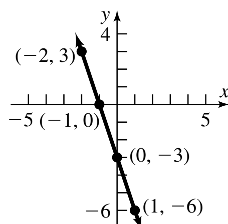


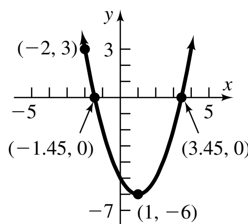
8. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 2)$ **9.** -2 **10.**



11. $3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ **12.** $y = 2(3^x)$ **13.** $y = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

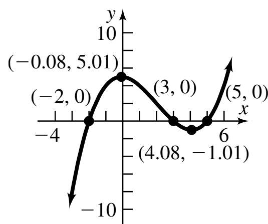
14. **a)** $f(x) = -3x - 3; m = -3; (-1, 0), (0, -3)$ **b)** $f(x) = (x - 1)^2 - 6; (0, -5), (-\sqrt{6} + 1, 0); (\sqrt{6} + 1, 0)$

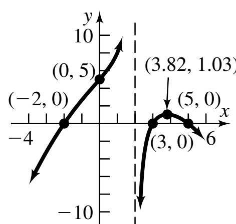




c) Se tiene que $y = 3$ cuando $x = -2$ y $y = -6$ cuando $x = 1$. Ambos puntos satisfacen $y = ae^x$. Por lo tanto, para $(-2, 3)$ se tiene $3 = ae^{-2}$ o cual implica que $a = 3e^2$. Pero para $(1, -6)$ tenemos $-6 = ae^1$, lo cual implica que $a = -6e^{-1}$. Por lo tanto, no existe función exponencial $y = ae^x$ que contenga $(-2, 3)$ y $(1, -6)$.

15. **a)** $f(x) = \frac{1}{6}(x + 2)(x - 3)(x - 5)$ **b)** $R(x) = -\frac{(x + 2)(x - 3)(x - 5)}{3(x - 2)}$





CAPÍTULO 7 Trigonometría analítica

7.1 Conceptos y vocabulario *(página 601)*

7. $x = \text{sen } y$ **8.** 0 **9.** $\frac{\pi}{5}$ **10.** Falso **11.** Verdadero **12.** Verdadero

7.1 Ejercicios *(página 601)*

13. 0 **15.** $-\frac{\pi}{2}$ **17.** 0 **19.** $\frac{\pi}{4}$ **21.** $\frac{\pi}{3}$ **23.** $\frac{5\pi}{6}$ **25.** 0.10 **27.** 1.37 **29.** 0.51 **31.** −0.38 **33.** −0.12 **35.** 1.08 **37.** 0.54 **39.** $\frac{4\pi}{5}$

41. −3.5 **43.** $-\frac{3\pi}{7}$ **45.** Sí; $-\frac{\pi}{6}$ está en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. **47.** No; 2 no está en el dominio de $\text{sen}^{-1} x$.

49. No; $-\frac{\pi}{6}$ no está en el intervalo $[0, \pi]$. **51.** Sí, $-\frac{1}{2}$ está en el dominio de $\cos^{-1} x$. **53.** Sí; $-\frac{\pi}{3}$ está en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

55. Sí; 2 está en el dominio de $\tan^{-1} x$. **57. a)** 13.92 horas o 13 horas 55 minutos **b)** 12 horas **c)** 13.85 horas o 13 horas 51 minutos

59. a) 13.3 horas o 13 horas 18 minutos **b)** 12 horas **c)** 13.26 horas o 13 horas 15 minutos **61. a)** 12 horas **b)** 12 horas **c)** 12 horas

d) Es 12 horas **63.** 3.35 min

7.2 Conceptos y vocabulario *(página 607)*

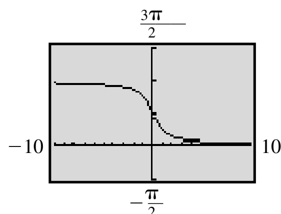
4. $x = \sec y$; ≥ 1; 0; π **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **6.** Falso **7.** Verdadero **8.** Verdadero

7.2 Ejercicios *(página 607)*

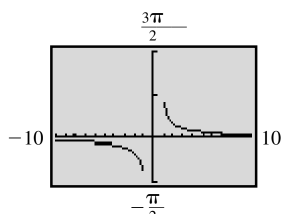
9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **11.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **13.** 2 **15.** $\sqrt{2}$ **17.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **19.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **21.** $\frac{3\pi}{4}$ **23.** $\frac{\pi}{6}$ **25.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **27.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **29.** $-\frac{\sqrt{14}}{2}$ **31.** $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ **33.** $\sqrt{5}$

35. $-\frac{\pi}{4}$ **37.** $\frac{\pi}{6}$ **39.** $-\frac{\pi}{2}$ **41.** $\frac{\pi}{6}$ **43.** $\frac{2\pi}{3}$ **45.** 1.32 **47.** 0.46 **49.** −0.34 **51.** 2.72 **53.** −0.73 **55.** 2.55

57.



59.



7.3 Conceptos y vocabulario *(página 613)*

3. identidad; condicional **4.** −1 **5.** 0 **6.** Verdadero **7.** Verdadero **8.** Verdadero

7.3 Ejercicios *(página 613)*

9. $\frac{1}{\cos\theta}$ **11.** $\frac{1 + \text{sen }\theta}{\cos\theta}$ **13.** $\frac{1}{\text{sen }\theta\cos\theta}$ **15.** 2 **17.** $\frac{3\text{ sen }\theta + 1}{\text{sen }\theta + 1}$ **19.** $\csc\theta\cdot\cos\theta = \frac{1}{\text{sen }\theta}\cdot\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen }\theta} = \cot\theta$

21. $1 + \tan^2(-\theta) = 1 + (-\tan\theta)^2 = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

23. $\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \cos\theta\left(\frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\text{sen }\theta}\right) = \cos\theta\left(\frac{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\text{ sen }\theta}\right) = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta\text{ sen }\theta}\right) = \frac{1}{\text{sen }\theta} = \csc\theta$

25. $\tan\theta\cot\theta - \cos^2\theta = \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\text{sen }\theta} - \cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \text{sen}^2\theta$ **27.** $(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1) = \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

29. $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

31. $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = \cos^2\theta + \cos^2\theta\tan^2\theta = \cos^2\theta + \cos^2\theta\cdot\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$

33. $(\text{sen }\theta + \cos\theta)^2 + (\text{sen }\theta - \cos\theta)^2 = \text{sen}^2\theta + 2\text{ sen }\theta\cos\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta - 2\text{ sen }\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta$
$= 1 + 1 = 2$

35. $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \sec^2\theta(\sec^2\theta - 1) = (1 + \tan^2\theta)\tan^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

37. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta} = \frac{1 - \text{sen }\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1 + \text{sen }\theta}{1 + \text{sen }\theta} = \frac{1 - \text{sen}^2\theta}{\cos\theta(1 + \text{sen }\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1 + \text{sen }\theta)} = \frac{\cos\theta}{1 + \text{sen }\theta}$

39. $3\text{ sen}^2\theta + 4\cos^2\theta = 3\text{ sen}^2\theta + 3\cos^2\theta + \cos^2\theta = 3(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + \cos^2\theta = 3 + \cos^2\theta$

41. $1 - \dfrac{\cos^2\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = 1 - \dfrac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = 1 - \dfrac{(1+\operatorname{sen}\theta)(1-\operatorname{sen}\theta)}{1+\operatorname{sen}\theta} = 1-(1-\operatorname{sen}\theta) = \operatorname{sen}\theta$

43. $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\cot\theta}}{1-\dfrac{1}{\cot\theta}} = \dfrac{\dfrac{\cot\theta+1}{\cot\theta}}{\dfrac{\cot\theta-1}{\cot\theta}} = \dfrac{\cot\theta+1}{\cot\theta-1}$ **45.** $\dfrac{\sec\theta}{\csc\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}} + \tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \tan\theta = \tan\theta + \tan\theta = 2\tan\theta$

47. $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\csc\theta}}{1-\dfrac{1}{\csc\theta}} = \dfrac{\dfrac{\csc\theta+1}{\csc\theta}}{\dfrac{\csc\theta-1}{\csc\theta}} = \dfrac{\csc\theta+1}{\csc\theta-1}$

49. $\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{(1-\operatorname{sen}\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{1-2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{2-2\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{2(1-\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)}$
$= \dfrac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta$

51. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta} = \dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{1}{1-\cot\theta}$

53. $(\sec\theta-\tan\theta)^2 = \sec^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} - \dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1-2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{(1-\operatorname{sen}\theta)^2}{1-\operatorname{sen}^2\theta}$
$= \dfrac{(1-\operatorname{sen}\theta)^2}{(1-\operatorname{sen}\theta)(1+\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$

55. $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cot\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{\cos\theta}{\dfrac{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}$
$= \dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta} = \operatorname{sen}\theta+\cos\theta$

57. $\tan\theta + \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta+1}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

59. $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \dfrac{\tan\theta+(\sec\theta-1)}{\tan\theta-(\sec\theta-1)} \cdot \dfrac{\tan\theta+(\sec\theta-1)}{\tan\theta+(\sec\theta-1)} = \dfrac{\tan^2\theta+2\tan\theta(\sec\theta-1)+\sec^2\theta-2\sec\theta+1}{\tan^2\theta-(\sec^2\theta-2\sec\theta+1)}$
$= \dfrac{\sec^2\theta-1+2\tan\theta(\sec\theta-1)+\sec^2\theta-2\sec\theta+1}{\sec^2\theta-1-\sec^2\theta+2\sec\theta-1} = \dfrac{2\sec^2\theta-2\sec\theta+2\tan\theta(\sec\theta-1)}{-2+2\sec\theta}$
$= \dfrac{2\sec\theta(\sec\theta-1)+2\tan\theta(\sec\theta-1)}{2(\sec\theta-1)} = \dfrac{2(\sec\theta-1)(\sec\theta+\tan\theta)}{2(\sec\theta-1)} = \tan\theta+\sec\theta$

61. $\dfrac{\tan\theta-\cot\theta}{\tan\theta+\cot\theta} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta}{1} = \operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta$

63. $\dfrac{\tan\theta-\cot\theta}{\tan\theta+\cot\theta} + 1 = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}} + 1 = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}} + 1 = \operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta+1 = \operatorname{sen}^2\theta+(1-\cos^2\theta) = 2\operatorname{sen}^2\theta$

65. $\dfrac{\sec\theta+\tan\theta}{\cot\theta+\cos\theta} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\cos\theta} = \dfrac{\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta+\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \cdot \dfrac{1}{\cos\theta} = \tan\theta\sec\theta$

67. $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} + 1 = \dfrac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta} + 1 = \dfrac{1}{\sec^2\theta} - \dfrac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta} + 1 = \cos^2\theta - \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}} + 1 = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 1$
$= \cos^2\theta + (1-\operatorname{sen}^2\theta) = 2\cos^2\theta$

69. $\dfrac{\sec\theta-\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta} = \dfrac{\sec\theta}{\sec\theta\csc\theta} - \dfrac{\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta} = \dfrac{1}{\csc\theta} - \dfrac{1}{\sec\theta} = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

71. $\sec\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \operatorname{sen}\theta \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{sen}\theta\tan\theta$

73. $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\theta+1-\operatorname{sen}\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)(1-\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{2}{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{2}{\cos^2\theta} = 2\sec^2\theta$

75. $\dfrac{\sec\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\sec\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\cdot\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\sec\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{\sec\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}{\cos^2\theta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}$

77. $\dfrac{(\sec\theta-\tan\theta)^2+1}{\csc\theta(\sec\theta-\tan\theta)} = \dfrac{\sec^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta + \tan^2\theta + 1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)} = \dfrac{2\sec^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)} = \dfrac{\dfrac{2}{\cos^2\theta} - \dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}} = \dfrac{2-2\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$

$= \dfrac{2(1-\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\tan\theta$

79. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + 1 - 1 + \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta} = \sec\theta\csc\theta$

81. $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta} = \dfrac{(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)(\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta)}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta} = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta$

83. $\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}} = \dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}} = \cos^2\theta$

85. $\dfrac{(2\cos^2\theta-1)^2}{\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta} = \dfrac{[2\cos^2\theta - (\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)]^2}{(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)} = \dfrac{(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)^2}{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta} = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = (1-\operatorname{sen}^2\theta) - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

87. $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta-\cos\theta} = \dfrac{(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)-\cos\theta}\cdot\dfrac{(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos\theta} = \dfrac{1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta+2(1+\operatorname{sen}\theta)\cos\theta+\cos^2\theta}{1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta}$

$= \dfrac{1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta+2(1+\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)+(1-\operatorname{sen}^2\theta)}{1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta-(1-\operatorname{sen}^2\theta)} = \dfrac{2+2\operatorname{sen}\theta+2(1+\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta+2\operatorname{sen}^2\theta}$

$= \dfrac{2(1+\operatorname{sen}\theta)+2(1+\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta(1+\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{2(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta(1+\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

89. $(a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta)^2 + (a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta)^2 = a^2\operatorname{sen}^2\theta + 2ab\operatorname{sen}\theta\cos\theta + b^2\cos^2\theta + a^2\cos^2\theta - 2ab\operatorname{sen}\theta\cos\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta$
$= a^2(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta) + b^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta) = a^2 + b^2$

91. $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta} = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}} = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\dfrac{\tan\beta+\tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta}} = (\tan\alpha+\tan\beta)\cdot\dfrac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta} = \tan\alpha\tan\beta$

93. $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\beta)^2 + (\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha) = (\operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos^2\beta)\,1 + (\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha)$
$= 2\cos^2\beta + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = 2\cos\beta(\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha)$

95. $\ln|\sec\theta| = \ln|\cos\theta|^{-1} = -\ln|\cos\theta|$

97. $\ln|1+\cos\theta| + \ln|1-\cos\theta| = \ln(|1+\cos\theta||1-\cos\theta|) = \ln|1-\cos^2\theta| = \ln|\operatorname{sen}^2\theta| = 2\ln|\operatorname{sen}\theta|$

99. Sea $\theta = \tan^{-1} v$. Entonces $\tan\theta = v, -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Ahora, $\sec\theta > 0$ y $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$. De manera que $\sec(\tan^{-1} v) = \sec\theta = \sqrt{1+v^2}$.

101. Sea $\theta = \cos^{-1} v$. Entonces $\cos\theta = v, 0 \le \theta \le \pi$, y $\tan(\cos^{-1} v) = \tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{1-v^2}}{v}$.

103. Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1} v$. Entonces $\operatorname{sen}\theta = v, -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, y $\cos(\operatorname{sen}^{-1} v) = \cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1-v^2}$.

7.4 Conceptos y vocabulario *(página 623)*

4. − **5.** − **6.** Falso **7.** Falso **8.** Falso

7.4 Ejercicios *(página 623)*

9. $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ **11.** $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})$ **13.** $-\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ **15.** $2-\sqrt{3}$ **17.** $-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ **19.** $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ **21.** $\frac{1}{2}$ **23.** 0 **25.** 1

27. -1 **29.** $\frac{1}{2}$ **31. a)** $\frac{2\sqrt{5}}{25}$ **b)** $\frac{11\sqrt{5}}{25}$ **c)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **d)** 2 **33. a)** $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$ **b)** $\frac{-3-4\sqrt{3}}{10}$ **c)** $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$ **d)** $\frac{25\sqrt{3}+48}{39}$

35. a) $-\frac{5+12\sqrt{3}}{26}$ **b)** $\frac{12-5\sqrt{3}}{26}$ **c)** $\frac{-5+12\sqrt{3}}{26}$ **d)** $\frac{-240+169\sqrt{3}}{69}$ **37. a)** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **b)** $\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ **c)** $\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ **d)**

$\frac{9 - 4\sqrt{2}}{7}$ **39.** $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta = 1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \operatorname{sen}\theta = \cos\theta$

41. $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\pi\cos\theta - \cos\pi\operatorname{sen}\theta = 0 \cdot \cos\theta - (-1)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$

43. $\operatorname{sen}(\pi + \theta) = \operatorname{sen}\pi\cos\theta + \cos\pi\operatorname{sen}\theta = 0 \cdot \cos\theta + (-1)\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\theta$

45. $\tan(\pi - \theta) = \frac{\tan\pi - \tan\theta}{1 + \tan\pi\tan\theta} = \frac{0 - \tan\theta}{1 + 0 \cdot \tan\theta} = -\tan\theta$

47. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\cos\theta + \cos\frac{3\pi}{2}\operatorname{sen}\theta = (-1)\cos\theta + 0 \cdot \operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$

49. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

51. $\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta} = 1 + \cot\alpha\tan\beta$

53. $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 - \tan\alpha\tan\beta$

55. $\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$

57. $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta} = \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}} = \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} - \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} + \frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}} = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$

59. $\sec(\alpha + \beta) = \frac{1}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} - \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}} = \frac{\csc\alpha\csc\beta}{\cot\alpha\cot\beta - 1}$

61. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta) = \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta$
$= (\operatorname{sen}^2\alpha)(1 - \operatorname{sen}^2\beta) - (1 - \operatorname{sen}^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\beta) = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$

63. $\operatorname{sen}(\theta + k\pi) = \operatorname{sen}\theta\cos k\pi + \cos\theta\operatorname{sen}k\pi = (\operatorname{sen}\theta)(-1)^k + (\cos\theta)(0) = (-1)^k\operatorname{sen}\theta$, donde k es cualquier entero **65.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **67.** $-\frac{24}{25}$

69. $-\frac{33}{65}$ **71.** $\frac{63}{65}$ **73.** $\frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$ **75.** $\frac{4}{3}$ **77.** $u\sqrt{1 - v^2} - v\sqrt{1 - u^2}$ **79.** $\frac{u\sqrt{1 - v^2} - v}{\sqrt{1 + u^2}}$ **81.** $\frac{uv - \sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - v^2}}{v\sqrt{1 - u^2} + u\sqrt{1 - v^2}}$

83. Sean $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} v$ y $\beta = \cos^{-1} v$. Entonces $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = v$, y como $\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\beta$.
Si $v \geq 0$, entonces $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, entonces $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ y β están sobre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Si $v < 0$, entonces $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 0$, de manera que $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ y β están sobre $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. De cualquier manera, $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\beta$ implica que $\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$, o $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

85. Sean $\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{v}$, y $\beta = \tan^{-1} v$. Puesto que $v \neq 0$, $\alpha, \beta \neq 0$. Entonces $\tan\alpha = \frac{1}{v} = \frac{1}{\tan\beta} = \cot\beta$, y como
$\tan\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\beta$. Porque $v > 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, y entonces $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ y β están sobre $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Entonces, $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\beta$ implica que $\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$, o $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

87. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} v + \cos^{-1} v) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} v)\cos(\cos^{-1} v) + \cos(\operatorname{sen}^{-1} v)\operatorname{sen}(\cos^{-1} v) = (v)(v) + \sqrt{1 - v^2}\sqrt{1 - v^2} = v^2 + 1 - v^2 = 1$

89. $\frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen}x}{h} = \frac{\operatorname{sen}x\cos h + \cos x\operatorname{sen}h - \operatorname{sen}x}{h} = \frac{\cos x\operatorname{sen}h - \operatorname{sen}x(1 - \cos h)}{h} = \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen}h}{h} - \operatorname{sen}x \cdot \frac{1 - \cos h}{h}$

91. $\tan\frac{\pi}{2}$ no está definida; $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$ **93.** $\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

95. No; $\tan\frac{\pi}{2}$ es no definida.

7.5 Conceptos y vocabulario *(página 633)*

1. $\text{sen}^2\,\theta; 2\cos^2\theta; 2\,\text{sen}^2\,\theta$; **2.** $1 - \cos\theta$ **3.** $\text{sen}\,\theta$ **4.** Verdadero **5.** Falso **6.** Falso

7.5 Ejercicios *(página 633)*

7. a) $\frac{24}{25}$ **b)** $\frac{7}{25}$ **c)** $\frac{\sqrt{10}}{10}$ **d)** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ **9. a)** $\frac{24}{25}$ **b)** $-\frac{7}{25}$ **c)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **d)** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ **11. a)** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{6}}$ **d)** $\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}}$ **13. a)** $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ **b)** $-\frac{7}{9}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **d)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **15. a)** $-\frac{4}{5}$ **b)** $\frac{3}{5}$ **c)** $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}$ **d)** $\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{10}}$ **17. a)** $-\frac{3}{5}$ **b)** $-\frac{4}{5}$ **c)** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10-\sqrt{10}}{5}}$ **d)** $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+\sqrt{10}}{5}}$ **19.** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ **21.** $1-\sqrt{2}$ **23.** $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

25. $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = (2-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}$ **27.** $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

29. $\text{sen}^4\,\theta = (\text{sen}^2\,\theta)^2 = \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}[1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{4}\cos^2(2\theta)$
$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos(4\theta)}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(4\theta) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(4\theta)$

31. $\text{sen}(4\theta) = \text{sen}[2(2\theta)] = 2\,\text{sen}(2\theta)\cos(2\theta) = (4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)(1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta) = 4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 8\,\text{sen}^3\,\theta\cos\theta = (\cos\theta)(4\,\text{sen}\,\theta - 8\,\text{sen}^3\,\theta)$

33. $\text{sen}(5\theta) = 16\,\text{sen}^5\,\theta - 20\,\text{sen}^3\,\theta + 5\,\text{sen}\,\theta$ **35.** $\cos^4\theta - \text{sen}^4\,\theta = (\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta)(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta) = \cos(2\theta)$

37. $\cot(2\theta) = \frac{1}{\tan(2\theta)} = \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{1 - \frac{1}{\cot^2\theta}}{2\left(\frac{1}{\cot\theta}\right)} = \frac{\frac{\cot^2\theta - 1}{\cot^2\theta}}{\frac{2}{\cot\theta}} = \frac{\cot^2\theta - 1}{\cot^2\theta}\cdot\frac{\cot\theta}{2} = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$

39. $\sec(2\theta) = \frac{1}{\cos(2\theta)} = \frac{1}{2\cos^2\theta - 1} = \frac{1}{\frac{2}{\sec^2\theta} - 1} = \frac{1}{\frac{2-\sec^2\theta}{\sec^2\theta}} = \frac{\sec^2\theta}{2-\sec^2\theta}$

41. $\cos^2(2\theta) - \text{sen}^2(2\theta) = \cos[2(2\theta)] = \cos(4\theta)$

43. $\frac{\cos(2\theta)}{1+\text{sen}(2\theta)} = \frac{\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta}{1 + 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} = \frac{(\cos\theta - \text{sen}\,\theta)(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)}{\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta + 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} = \frac{(\cos\theta - \text{sen}\,\theta)(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)}{(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)} = \frac{\cos\theta - \text{sen}\,\theta}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}$
$= \frac{\frac{\cos\theta - \text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\theta}}{\frac{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\theta}} = \frac{\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} - \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\theta}}{\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} + \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\theta}} = \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$ **45.** $\sec^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{2}{1+\cos\theta}$

47. $\cot^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1 + \frac{1}{\sec\theta}}{1 - \frac{1}{\sec\theta}} = \frac{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta}}{\frac{\sec\theta - 1}{\sec\theta}} = \frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta}\cdot\frac{\sec\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}$

49. $\frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}{1 + \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\frac{1+\cos\theta - (1-\cos\theta)}{1+\cos\theta}}{\frac{1+\cos\theta + 1 - \cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2} = \cos\theta$

51. $\frac{\text{sen}(3\theta)}{\text{sen}\,\theta} - \frac{\cos(3\theta)}{\cos\theta} = \frac{\text{sen}(3\theta)\cos\theta - \cos(3\theta)\,\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\theta\cos\theta} = \frac{\text{sen}(3\theta - \theta)}{\frac{1}{2}(2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)} = \frac{2\,\text{sen}(2\theta)}{\text{sen}(2\theta)} = 2$

53. $\tan(3\theta) = \tan(\theta + 2\theta) = \frac{\tan\theta + \tan(2\theta)}{1 - \tan\theta\tan(2\theta)} = \frac{\tan\theta + \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{1 - \frac{\tan\theta(2\tan\theta)}{1-\tan^2\theta}} = \frac{\tan\theta - \tan^3\theta + 2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta - 2\tan^2\theta} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

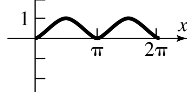
55. $\frac{1}{2}(\ln|1 - \cos(2\theta)| - \ln 2) = \ln\left(\frac{|1-\cos(2\theta)|}{2}\right)^{1/2} = \ln|\text{sen}^2\,\theta|^{1/2} = \ln|\text{sen}\,\theta|$ **57.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **59.** $\frac{7}{25}$ **61.** $\frac{24}{7}$

63. $\frac{24}{25}$ **65.** $\frac{1}{5}$ **67.** $\frac{25}{7}$ **69.** $\text{sen}(2\theta) = \frac{4x}{4+x^2}$ **71.** $-\frac{1}{4}$

73. $\dfrac{2z}{1+z^2} = \dfrac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{\dfrac{2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} = 2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \text{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \text{sen}\,\alpha$

75. $A = \frac{1}{2}h(\text{base}) = h\left(\frac{1}{2}\,\text{base}\right) = s\cos\frac{\theta}{2}\cdot s\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}s^2\,\text{sen}\,\theta$

77.



79. $\text{sen}\,\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}$; $\cos\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

81. $\text{sen}^3\,\theta + \text{sen}^3(\theta+120°) + \text{sen}^3(\theta+240°) = \text{sen}^3\,\theta + (\text{sen}\,\theta\cos 120° + \cos\theta\,\text{sen}\,120°)^3 + (\text{sen}\,\theta\cos 240° + \cos\theta\,\text{sen}\,240°)^3$

$= \text{sen}^3\,\theta + \left(-\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^3$

$= \text{sen}^3\,\theta + \frac{1}{8}(3\sqrt{3}\cos^3\theta - 9\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + 3\sqrt{3}\cos\theta\,\text{sen}^2\,\theta - \text{sen}^3\,\theta) - \frac{1}{8}(\text{sen}^3\,\theta + 3\sqrt{3}\,\text{sen}^2\,\theta\cos\theta + 9\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta + 3\sqrt{3}\cos^3\theta)$

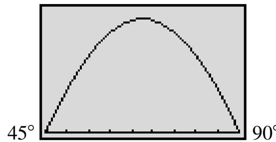
$= \frac{3}{4}\,\text{sen}^3\,\theta - \frac{9}{4}\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta = \frac{3}{4}[\text{sen}^3\,\theta - 3\,\text{sen}\,\theta(1-\text{sen}^2\,\theta)] = \frac{3}{4}(4\,\text{sen}^3\,\theta - 3\,\text{sen}\,\theta) = -\frac{3}{4}\,\text{sen}(3\theta)$ (del ejemplo 2)

83. a) $R = \frac{v_0^2\sqrt{2}}{16}(\text{sen}\,\theta\cos\theta - \cos^2\theta)$

$= \frac{v_0^2\sqrt{2}}{16}\left[\frac{1}{2}\,\text{sen}(2\theta) - \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right]$

$= \frac{v_0^2\sqrt{2}}{32}[\text{sen}(2\theta) - \cos(2\theta) - 1]$

b)



c) $\theta = 67.5°$ hacen mayor a R.

7.6 Ejercicios *(página 637)*

1. $\frac{1}{2}[\cos(2\theta) - \cos(6\theta)]$ **3.** $\frac{1}{2}[\text{sen}(6\theta) + \text{sen}(2\theta)]$ **5.** $\frac{1}{2}[\cos(2\theta) + \cos(8\theta)]$ **7.** $\frac{1}{2}[\cos\theta - \cos(3\theta)]$ **9.** $\frac{1}{2}[\text{sen}(2\theta) + \text{sen}\,\theta]$

11. $2\,\text{sen}\,\theta\cos(3\theta)$ **13.** $2\cos(3\theta)\cos\theta$ **15.** $2\,\text{sen}(2\theta)\cos\theta$ **17.** $2\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$ **19.** $\dfrac{\text{sen}\,\theta + \text{sen}(3\theta)}{2\,\text{sen}(2\theta)} = \dfrac{2\,\text{sen}(2\theta)\cos\theta}{2\,\text{sen}(2\theta)} = \cos\theta$

21. $\dfrac{\text{sen}(4\theta) + \text{sen}(2\theta)}{\cos(4\theta) + \cos(2\theta)} = \dfrac{2\,\text{sen}(3\theta)\cos\theta}{2\cos(3\theta)\cos\theta} = \dfrac{\text{sen}(3\theta)}{\cos(3\theta)} = \tan(3\theta)$ **23.** $\dfrac{\cos\theta - \cos(3\theta)}{\text{sen}\,\theta + \text{sen}(3\theta)} = \dfrac{2\,\text{sen}(2\theta)\,\text{sen}\,\theta}{2\,\text{sen}(2\theta)\cos\theta} = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

25. $\text{sen}\,\theta[\text{sen}\,\theta + \text{sen}(3\theta)] = \text{sen}\,\theta[2\,\text{sen}(2\theta)\cos\theta] = \cos\theta[2\,\text{sen}(2\theta)\,\text{sen}\,\theta] = \cos\theta\left[2\cdot\frac{1}{2}[\cos\theta - \cos(3\theta)]\right] = \cos\theta[\cos\theta - \cos(3\theta)]$

27. $\dfrac{\text{sen}(4\theta) + \text{sen}(8\theta)}{\cos(4\theta) + \cos(8\theta)} = \dfrac{2\,\text{sen}(6\theta)\cos(2\theta)}{2\cos(6\theta)\cos(2\theta)} = \dfrac{\text{sen}(6\theta)}{\cos(6\theta)} = \tan(6\theta)$

29. $\dfrac{\text{sen}(4\theta) + \text{sen}(8\theta)}{\text{sen}(4\theta) - \text{sen}(8\theta)} = \dfrac{2\,\text{sen}(6\theta)\cos(-2\theta)}{2\,\text{sen}(-2\theta)\cos(6\theta)} = \dfrac{\text{sen}(6\theta)}{\cos(6\theta)}\cdot\dfrac{\cos(2\theta)}{-\text{sen}(2\theta)} = \tan(6\theta)[-\cot(2\theta)] = -\dfrac{\tan(6\theta)}{\tan(2\theta)}$

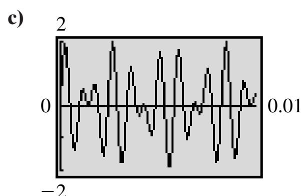
31. $\dfrac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta} = \dfrac{2\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\,\text{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \dfrac{\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2}} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$

33. $\dfrac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \dfrac{2\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \dfrac{\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$

35. $1 + \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(6\theta) = [1 + \cos(6\theta)] + [\cos(2\theta) + \cos(4\theta)] = 2\cos^2(3\theta) + 2\cos(3\theta)\cos(-\theta)$
$= 2\cos(3\theta)[\cos(3\theta) + \cos\theta] = 2\cos(3\theta)[2\cos(2\theta)\cos\theta] = 4\cos\theta\cos(2\theta)\cos(3\theta)$

37. a) $y = 2\,\text{sen}(2061\pi t)\cos(357\pi t)$ **b)** $y_{\text{máx}} = 2$

c)



39. $\text{sen}(2\alpha) + \text{sen}(2\beta) + \text{sen}(2\gamma) = 2\,\text{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \text{sen}(2\gamma) = 2\,\text{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\,\text{sen}\,\gamma\cos\gamma$
$= 2\,\text{sen}(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) + 2\,\text{sen}\,\gamma\cos\gamma = 2\,\text{sen}\,\gamma\cos(\alpha-\beta) + 2\,\text{sen}\,\gamma\cos\gamma = 2\,\text{sen}\,\gamma[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma]$
$= 2\,\text{sen}\,\gamma\left(2\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}\right) = 4\,\text{sen}\,\gamma\cos\frac{\pi-2\beta}{2}\cos\frac{2\alpha-\pi}{2} = 4\,\text{sen}\,\gamma\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$
$= 4\,\text{sen}\,\gamma\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\alpha$

41.
$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$
$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$
$$\text{sen}(\alpha-\beta) + \text{sen}(\alpha+\beta) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\beta$$
$$\text{sen}\,\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)]$$

43. $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cdot\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] = \cos\frac{2\alpha}{2} + \cos\frac{2\beta}{2} = \cos\alpha + \cos\beta$

7.7 Conceptos y vocabulario *(página 643)*

3. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ **4.** $\left\{\theta \middle| \theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \text{donde } k \text{ es cualquier entero}\right\}$ **5.** Falso **6.** Falso

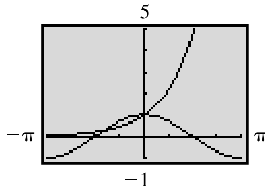
7.7 Ejercicios *(página 643)*

7. $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ **9.** $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ **11.** $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ **13.** $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ **15.** $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ **17.** $\left\{\frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}\right\}$
19. $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ **21.** $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ **23.** $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$ **25.** $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ **27.** $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ **29.** $\left\{\frac{11\pi}{6}\right\}$
31. $\left\{\theta \middle| \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}; \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}$ **33.** $\left\{\theta \middle| \theta = \frac{5\pi}{6} + k\pi\right\}; \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}, \frac{35\pi}{6}$
35. $\left\{\theta \middle| \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}; \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}$ **37.** $\left\{\theta \middle| \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi, \theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi\right\}; \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$
39. $\left\{\theta \middle| \theta = \frac{8\pi}{3} + 4k\pi, \theta = \frac{10\pi}{3} + 4k\pi\right\}; \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{20\pi}{3}, \frac{22\pi}{3}, \frac{32\pi}{3}, \frac{34\pi}{3}$ **41.** $\{0.41, 2.73\}$ **43.** $\{1.37, 4.51\}$ **45.** $\{2.69, 3.59\}$
47. $\{1.82, 4.46\}$ **49.** $\{2.08, 5.22\}$ **51.** $\{0.73, 2.41\}$
53. a) $\left\{x \middle| x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right\}$ **b)** $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ or $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ **55. a)** $\left\{x \middle| x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$
b) $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$ or $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ **57. a)** 10 seg; 30 seg **b)** 20 seg; 60 seg **c)** $10 < x < 30$ o $(10, 30)$
59. a) 150 millas **b)** 6.06, 8.44, 15.72, 18.11 min **c)** Antes de 6.06 minutos, entre 8.44 y 15.72 minutos y después de 18.11 minutos. **d)** No
61. 28.90° **63.** Sí, varía desde 1.28 hasta 1.34 **65.** 1.47 **67.** Si θ es el ángulo de incidencia original y ϕ es el ángulo de refracción, entonces $\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\phi} = n_2$. El ángulo de incidencia del haz emitido también es ϕ, y el índice de refracción es $\frac{1}{n_2}$. De tal modo, θ es el ángulo de refracción del haz emitido.

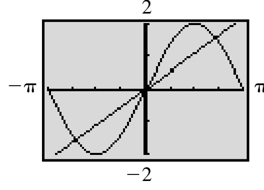
7.8 Ejercicios *(página 651)*

3. $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ **5.** $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **7.** $0, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ **9.** $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ **11.** π **13.** $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **15.** $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ **17.** $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ **19.** $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
21. $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **23.** $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$ **25.** $0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$ **27.** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ **29.** $\frac{\pi}{2}$ **31.** 0 **33.** $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
35. No hay soluciones reales **37.** No hay soluciones reales **39.** $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$ **41.** $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ **43.** $\frac{\pi}{4}$

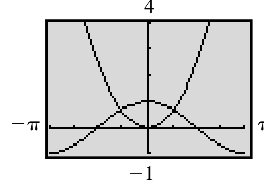
45. −1.29, 0



47. −2.24, 0, 2.24



49. −0.82, 0.82

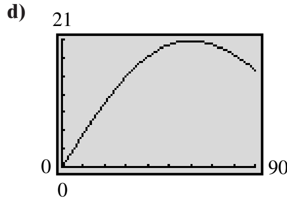


51. −1.31, 1.98, 3.84
53. 0.52
55. 1.26
57. −1.02, 1.02
59. 0, 2.15
61. 0.76, 1.35

63. **a)** 60° **b)** 60°

c) $A(60°) = 12\sqrt{3}$ pulgada².

d)

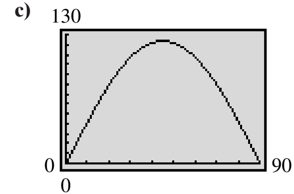


$\theta_{\text{máx}} = 60°$
Área máxima = 20.78 pulgadas²

65. 2.03, 4.91

67. **a)** 29.99° o 60.01° **b)** 123.6 m

c)



Ejercicios de repaso *(página 655)*

1. $\frac{\pi}{2}$ **3.** $\frac{\pi}{4}$ **5.** $\frac{5\pi}{6}$ **7.** $\frac{\pi}{4}$ **9.** $-\sqrt{3}$ **11.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **13.** $\frac{3}{5}$ **15.** $-\frac{4}{3}$ **17.** $-\frac{\pi}{6}$ **19.** $-\frac{\pi}{4}$ **21.** $\tan\theta\cot\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

23. $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = \cos^2\theta\sec^2\theta = 1$ **25.** $4\cos^2\theta + 3\,\text{sen}^2\theta = \cos^2\theta + 3(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = 3 + \cos^2\theta$

27. $\frac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} + \frac{\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2 + \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta(1-\cos\theta)} = \frac{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta(1-\cos\theta)} = \frac{2(1-\cos\theta)}{\text{sen}\,\theta(1-\cos\theta)} = 2\csc\theta$

29. $\frac{\cos\theta}{\cos\theta - \text{sen}\,\theta} = \frac{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta - \text{sen}\,\theta}{\cos\theta}} = \frac{1}{1 - \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}} = \frac{1}{1 - \tan\theta}$

31. $\frac{\csc\theta}{1 + \csc\theta} = \frac{\frac{1}{\text{sen}\,\theta}}{1 + \frac{1}{\text{sen}\,\theta}} = \frac{1}{1 + \text{sen}\,\theta} = \frac{1}{1 + \text{sen}\,\theta}\cdot\frac{1 - \text{sen}\,\theta}{1 - \text{sen}\,\theta} = \frac{1 - \text{sen}\,\theta}{1 - \text{sen}^2\theta} = \frac{1 - \text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}$

33. $\csc\theta - \text{sen}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} - \text{sen}\,\theta = \frac{1 - \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta} = \cos\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \cos\theta\cot\theta$

35. $\frac{1 - \text{sen}\,\theta}{\sec\theta} = \cos\theta(1 - \text{sen}\,\theta)\cdot\frac{1 + \text{sen}\,\theta}{1 + \text{sen}\,\theta} = \frac{\cos\theta(1 - \text{sen}^2\theta)}{1 + \text{sen}\,\theta} = \frac{\cos^3\theta}{1 + \text{sen}\,\theta}$

37. $\cot\theta - \tan\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} - \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta\cos\theta} = \frac{1 - 2\,\text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta\cos\theta}$

39. $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta} - \frac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta} = \cot\beta - \tan\alpha$

41. $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 + \tan\alpha\tan\beta$

43. $(1 + \cos\theta)\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \text{sen}\,\theta$

45. $2\cot\theta\cot 2\theta = 2\left(\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}\right)\left(\frac{\cos 2\theta}{\text{sen}\,2\theta}\right) = \frac{2\cos\theta(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)}{2\,\text{sen}^2\theta\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}{\text{sen}^2\theta} = \cot^2\theta - 1$

47. $1 - 8\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta = 1 - 2(2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)^2 = 1 - 2\,\text{sen}^2(2\theta) = \cos(4\theta)$ **49.** $\frac{\text{sen}(2\theta) + \text{sen}(4\theta)}{\cos(2\theta) + \cos(4\theta)} = \frac{2\,\text{sen}(3\theta)\cos(-\theta)}{2\cos(3\theta)\cos(-\theta)} = \tan(3\theta)$

51. $\dfrac{\cos(2\theta) - \cos(4\theta)}{\cos(2\theta) + \cos(4\theta)} - \tan\theta\tan(3\theta) = \dfrac{-2\,\text{sen}(3\theta)\,\text{sen}(-\theta)}{2\cos(3\theta)\cos(-\theta)} - \tan\theta\tan(3\theta) = \tan(3\theta)\tan\theta - \tan\theta\tan(3\theta) = 0$

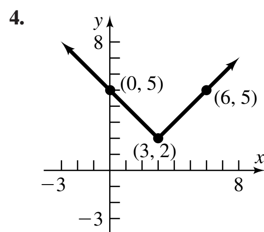
53. $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ **55.** $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ **57.** $\frac{1}{2}$ **59.** $\sqrt{2} - 1$ **61. a)** $-\frac{33}{65}$ **b)** $-\frac{56}{65}$ **c)** $-\frac{63}{65}$ **d)** $\frac{33}{56}$ **e)** $\frac{24}{25}$ **f)** $\frac{119}{169}$ **g)** $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ **h)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **63. a)** $-\frac{16}{65}$ **b)** $-\frac{63}{65}$ **c)** $-\frac{56}{65}$ **d)** $\frac{16}{63}$ **e)** $\frac{24}{25}$ **f)** $\frac{119}{169}$ **g)** $\frac{\sqrt{26}}{26}$ **h)** $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ **65. a)** $-\frac{63}{65}$ **b)** $\frac{16}{65}$ **c)** $\frac{33}{65}$ **d)** $-\frac{63}{16}$ **e)** $\frac{24}{25}$ **f)** $-\frac{119}{169}$ **g)** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ **h)** $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ **67. a)** $\frac{-\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{6}$ **b)** $\frac{1 - 2\sqrt{6}}{6}$ **c)** $\frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$ **d)** $\frac{8\sqrt{2} + 9\sqrt{3}}{23}$ **e)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **f)** $-\frac{7}{9}$ **g)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **h)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **69. a)** 1 **b)** 0 **c)** $-\frac{1}{9}$ **d)** No definido **e)** $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ **f)** $-\frac{1}{9}$ **g)** $\frac{\sqrt{30}}{6}$ **h)** $-\frac{\sqrt{6}\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{6}$ **71.** $\frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$ **73.** $-\frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$ **75.** $-\frac{24}{25}$ **77.** $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ **79.** $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ **81.** $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ **83.** $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ **85.** $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ **87.** $\{0, \pi\}$ **89.** $\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\right\}$ **91.** $\left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ **93.** $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ **95.** $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ **97.** $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ **99.** $\left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$ **101.** 0.78

103. −1.11 **105.** 1.23 **107.** {1.11} **109.** {0.87} **111.** {2.22} **113.** $\text{sen}\left(\frac{30°}{2}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$; $\text{sen}(45° - 30°) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

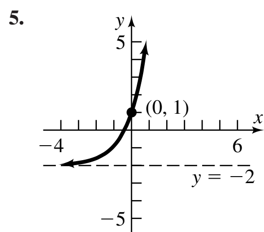
Repaso acumulativo *(página 658)*

1. $\left\{\frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}\right\}$ **2.** $y + 1 = -1(x - 4)$ o $x + y = 3$; $6\sqrt{2}$; (1, 2) **3.** Simétrica con respecto al eje x; (0, −3), (0, 3), (3, 0)

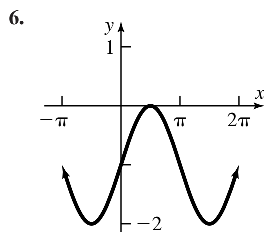
4.



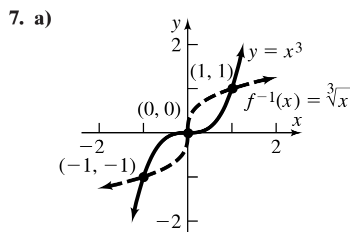
5.



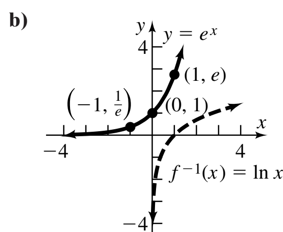
6.



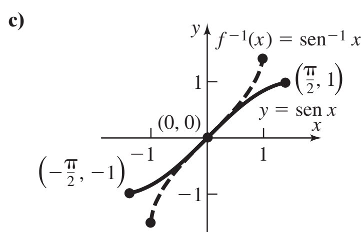
7. a)



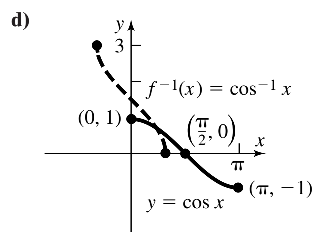
b)



c)



d)

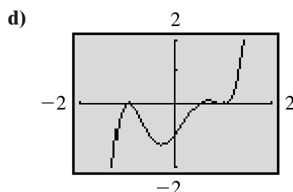


8. a) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **c)** $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ **d)** $\frac{7}{9}$ **e)** $\sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}}$ **f)** $\sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}}$ **9.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$

10. a) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **b)** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **c)** $\frac{7}{9}$ **d)** $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ **e)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

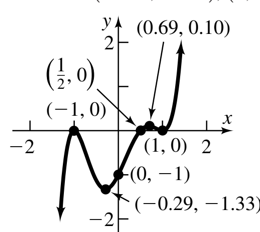
11. a) $f(x) = (2x - 1)(x - 1)^2(x + 1)^2$; $\frac{1}{2}$ multiplicidad 1 ; 1 y -1 multiplicidad 2 **b)** (0, −1); $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; (−1, 0); (1, 0) **c)** $y = 2x^5$

d)



e) Mínimos: (−0.29, −1.33), (1, 0); máximos: (−1, 0), (0.69, 0.10)

f)



g) Creciente: (−∞, −1), (−0.29, 0.69), (1, ∞);
Decreciente: (−1, −0.29), (0.69, 1)

12. a) $\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$ **b)** {−1, 1} **c)** (−∞, −1) or $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ **d)** (−∞, −1], [1, ∞)

CAPÍTULO 8 Aplicaciones de las funciones trigonométricas

8.1 Conceptos y vocabulario *(página 665)*

5. ángulo de elevación **6.** ángulo de depresión **7.** Verdadero **8.** Falso

8.1 Ejercicios *(página 665)*

9. $a \approx 13.74, c \approx 14.62, \alpha = 70°$ **11.** $b \approx 5.03, c \approx 7.83, \alpha = 50°$ **13.** $a \approx 0.71, c \approx 4.06, \beta = 80°$ **15.** $b \approx 10.72, c \approx 11.83, \beta = 65°$ **17.** $b \approx 3.08, a \approx 8.46, \alpha = 70°$ **19.** $c \approx 5.83, \alpha \approx 59.0°, \beta = 31.0°$ **21.** $b \approx 4.58, \alpha \approx 23.6°, \beta = 66.4°$ **23.** 4.59 pulgada, 6.55 pulgada **25.** 5.52 u 11.83 pulgada **27.** 23.6° y 66.4° **29.** 70.02 pies **31.** 985.91 pies **33.** 137.37 m **35.** 20.67 pies **37.** 1978.09 pies **39.** 60.27 pies **41.** 530.18 pies **43.** 554.52 pies **45. a)** 111.96 pies/seg o 76.3 millas/hora **b)** 82.42 pies/seg o 56.2 millas/hora **c)** menos de 18.8° **47.** S76.6°E **49.** 69.0° **51.** 3.83 millas **53.** No; retroceder el trípode alrededor de 1 pie. **55. a)** $A(\theta) = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta$ **b)** De la fórmula del doble ángulo, ya que $2 \text{ sen } \theta \cos \theta = \text{sen}(2\theta)$ **c)** $\theta = 45°$ **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ by $\sqrt{2}$

8.2 Conceptos y vocabulario *(página 676)*

4. oblicuo **5.** $\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$ **6.** Falso **7.** Verdadero **8.** Falso

8.2 Ejercicios *(página 676)*

9. $a \approx 3.23, b \approx 3.55, \alpha = 40°$ **11.** $a \approx 3.25, c \approx 4.23, \beta = 45°$ **13.** $\gamma = 95°, c \approx 9.86, a \approx 6.36$ **15.** $\alpha = 40°, a = 2, c \approx 3.06$ **17.** $\gamma = 120°, b \approx 1.06, c \approx 2.69$ **19.** $\alpha = 100°, a \approx 5.24, c \approx 0.92$ **21.** $\beta = 40°, a \approx 5.64, b \approx 3.86$ **23.** $\gamma = 100°, a \approx 1.31, b \approx 1.31$ **25.** Un triángulo; $\beta \approx 30.7°, \gamma \approx 99.3°, c \approx 3.86$ **27.** Un triángulo; $\gamma \approx 36.2°, \alpha \approx 43.8°, a \approx 3.51$ **29.** No existe triángulo **31.** Dos triángulos; $\gamma_1 \approx 30.9°, \alpha_1 \approx 129.1°, a_1 \approx 9.07$ o $\gamma_2 \approx 149.1°, \alpha_2 \approx 10.9°, a_2 \approx 2.20$ **33.** No existe triángulo **35.** Dos triángulos; $\alpha_1 \approx 57.7°, \beta_1 \approx 97.3°, b_1 \approx 2.35$ o $\alpha_2 \approx 122.3°, \beta_2 \approx 32.7°, b_2 \approx 1.28$ **37. a)** La estación Able está como a 143.33 millas de la embarcación; la estación Baker está a cerca de 135.58 millas de la embarcación. **b)** Aproximadamente 41 minutos **39.** 1490.48 pies **41.** 381.69 pies **43. a)** 169.18 millas **b)** 161.3° **45.** 84.7°; 183.72 pies **47.** 2.64 millas **49.** 38.5 pulgadas **51.** 449.36 pies **53.** 187,600,000 km o 101,440,000 km **55.** 39.39 pies **57.** 29.97 pies

59. $$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} - \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma} = \frac{\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma} = \frac{2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2 \text{ sen } \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\text{sen } \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

61. $$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\frac{a-b}{c}}{\frac{a+b}{c}} = \frac{\frac{\text{sen}\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]}{\cos \frac{\gamma}{2}}}{\frac{\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]}{\text{sen } \frac{\gamma}{2}}} = \frac{\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]}{\cot \frac{\gamma}{2}} = \frac{\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]}{\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]}$$

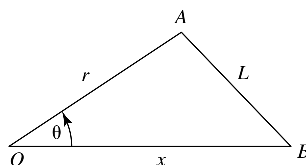
8.3 Conceptos y vocabulario *(página 684)*

3. Cosenos **4.** Senos **5.** Cosenos **6.** Falso **7.** Falso **8.** Verdadero

8.3 Ejercicios *(página 684)*

9. $b \approx 2.95, \alpha \approx 28.7°, \gamma \approx 106.3°$ **11.** $c \approx 3.75, \alpha \approx 32.1°, \beta \approx 52.9°$ **13.** $\alpha \approx 48.5°, \beta \approx 38.6°, \gamma \approx 92.9°$ **15.** $\alpha \approx 127.2°, \beta \approx 32.1°, \gamma \approx 20.7°$ **17.** $c \approx 2.57, \alpha \approx 48.6°, \beta \approx 91.4°$ **19.** $a \approx 2.99, \beta \approx 19.2°, \gamma \approx 80.8°$ **21.** $b \approx 4.14, \alpha \approx 43.0°, \gamma \approx 27.0°$ **23.** $c \approx 1.69, \alpha \approx 65.0°, \beta \approx 65.0°$ **25.** $\alpha \approx 67.4°, \beta = 90°, \gamma \approx 22.6°$ **27.** $\alpha = 60°, \beta = 60°, \gamma = 60°$ **29.** $\alpha \approx 33.6°, \beta \approx 62.2°, \gamma \approx 84.3°$ **31.** $\alpha \approx 97.9°, \beta \approx 52.4°, \gamma \approx 29.7°$ **33.** 70.75 pies **35. a)** 26.4° **b)** 30.8 horas **37. a)** 63.7 pies **b)** 66.8 pies **c)** 92.8° **39. a)** 492.6 pies **b)** 269.3 pies **41.** 342.3 pies

43. Utilizando la ley de los cosenos:
$L^2 = x^2 + r^2 - 2rx \cos \theta$
$x^2 - 2rx \cos \theta + r^2 - L^2 = 0$
Empleando después la fórmula cuadrática:
$x = r \cos \theta + \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + L^2 - r^2}$



45. $\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2}} = \sqrt{\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{4ab}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{4ab}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}}$
$= \sqrt{\frac{2s(2s-2c)}{4ab}} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

47. $\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2abc} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2abc} = \frac{b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2abc}$
$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

8.4 Conceptos y vocabulario *(página 690)*

2. Heron's **3.** Falso **4.** Verdadero

8.4 Ejercicios *(página 690)*

5. 2.83 **7.** 2.99 **9.** 14.98 **11.** 9.56 **13.** 3.86 **15.** 1.48 **17.** 2.82 **19.** 30 **21.** 1.73 **23.** 19.90

25. $A = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\gamma = \frac{1}{2}a\,\text{sen}\,\gamma\left(\frac{a\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha}\right) = \frac{a^2\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\gamma}{2\,\text{sen}\,\alpha}$ **27.** 0.92 **29.** 2.27 **31.** 5.44 **33.** 9.03 pies cuadrados **35.** $5446.38
37. 9.26 9.26 cm^2

39. $A = \frac{1}{2}r^2(\theta + \text{sen}\,\theta)$ **41. a)** $A(\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$ **b)** Fórmula del doble ángulo, ya que $2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \text{sen}(2\theta)$
c) $\theta = 45°$ **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ by $\sqrt{2}$

43. a) Área $\triangle OAC = \frac{1}{2}|OC||AC| = \frac{1}{2}\cdot\frac{|OC|}{1}\cdot\frac{|AC|}{1} = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$

b) Área $\triangle OCB = \frac{1}{2}|BC||OC| = \frac{1}{2}|OB|^2\frac{|BC|}{|OB|}\cdot\frac{|OC|}{|OB|} = \frac{1}{2}|OB|^2\,\text{sen}\,\beta\cos\beta$

c) Área $\triangle OAB = \frac{1}{2}|BD||OA| = \frac{1}{2}|OB|\frac{|BD|}{|OB|} = \frac{1}{2}|OB|\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)$

d) $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\frac{|OC|}{1}}{\frac{|OC|}{|OB|}} = |OB|$ **e)** Utilice la sugerencia y los resultados anteriores

45. 31,145.15 pies^2 **47.** $h_1 = 2\frac{K}{a}, h_2 = 2\frac{K}{b}, h_3 = 2\frac{K}{c}$. Entonces $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{a}{2K} + \frac{b}{2K} + \frac{c}{2K} = \frac{a+b+c}{2K} = \frac{2s}{2K} = \frac{s}{K}$.

49. El ángulo AOB mide $180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \gamma) = 90° + \frac{\gamma}{2}$, y $\text{sen}\left(90° + \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}$, ya que el coseno es una función par. Por lo tanto, $r = \frac{c\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\,\text{sen}\frac{\beta}{2}}{\text{sen}\left(90° + \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{c\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\,\text{sen}\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$.

51. $\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \frac{s-a}{r} + \frac{s-b}{r} + \frac{s-c}{r} = \frac{3s-(a+b+c)}{r} = \frac{3s-2s}{r} = \frac{s}{r}$

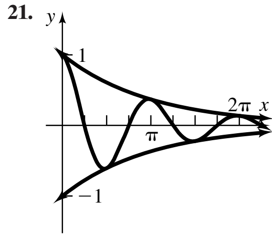
8.5 Conceptos y vocabulario *(página 700)*

2. movimiento armónico; amplitud **3.** movimiento armónico simple; movimiento amortiguado **4.** Verdadero

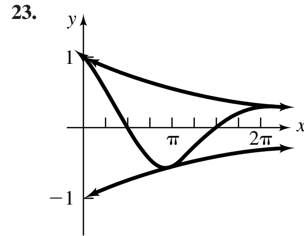
8.5 Ejercicios *(página 700)*

5. $d = -5\cos(\pi t)$ **7.** $d = -6\cos(2t)$ **9.** $d = -5\,\text{sen}(\pi t)$ **11.** $d = -6\,\text{sen}(2t)$ **13. a)** Armónico simple **b)** 5 m **c)** $\frac{2\pi}{3}$ sec
d) $\frac{3}{2\pi}$ oscilaciones/seg **15. a)** Armónico simple **b)** 6 m **c)** 2 sec **d)** $\frac{1}{2}$ oscilaciones/seg **17. a)** Armónico simple **b)** 3 m
c) 4π seg **d)** $\frac{1}{4\pi}$ oscilaciones/seg **19. a)** Armónico simple **b)** 2 m **c)** 1 sec **d)** 1 oscilación/seg

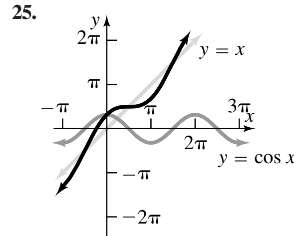
21.



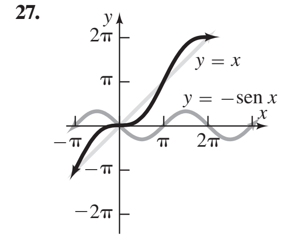
23.



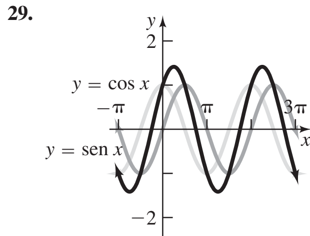
25.



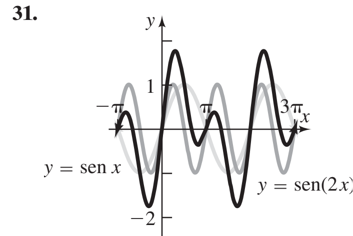
27.



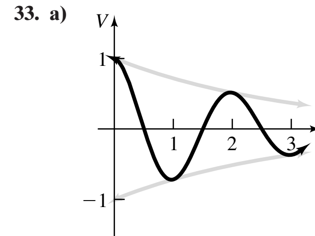
29.



31.



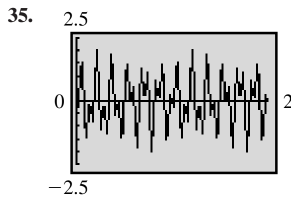
33. a)



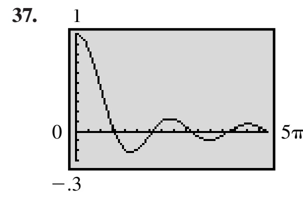
b) En $t = 0, 2$; en $t = 1, t = 3$

c) Entre alrededor de 1.28 y 1.75 seg

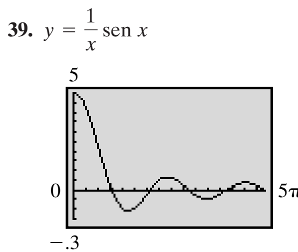
35.

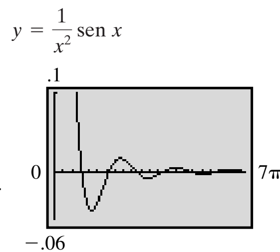


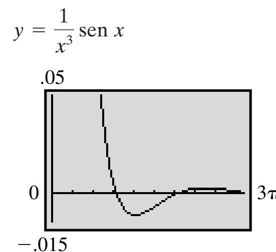
37.



39. $y = \dfrac{1}{x}\,\text{sen}\,x$ $\quad y = \dfrac{1}{x^2}\,\text{sen}\,x$ $\quad y = \dfrac{1}{x^3}\,\text{sen}\,x$



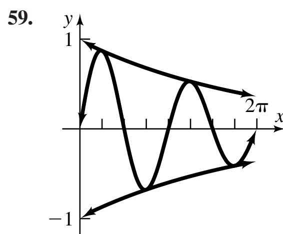




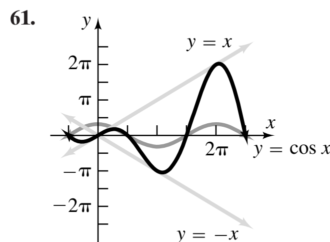
Ejercicios de repaso *(página 484)*

1. $\alpha = 70°, b \approx 3.42, a \approx 9.4$ **3.** $a \approx 4.58, \alpha = 66.4°, \beta \approx 23.6°$ **5.** $\gamma = 100°, b \approx 0.65, c \approx 1.29$ **7.** $\beta \approx 56.8°, \gamma \approx 23.2°, b \approx 4.25$ **9.** No hay triángulo **11.** $b \approx 3.32, \alpha \approx 62.8°, \gamma \approx 17.2°$ **13.** No hay triángulo **15.** $c \approx 2.32, \alpha \approx 16.1°, \beta \approx 123.9°$ **17.** $\beta = 36.2°, \gamma = 63.8°, c = 4.55$ **19.** $\alpha = 39.6°, \beta = 18.6°, \gamma = 121.9°$ **21.** Dos triángulos: $\beta_1 \approx 13.4°, \gamma_1 \approx 156.6°, c_1 \approx 6.86$ o $\beta_2 \approx 166.6°, \gamma_2 \approx 3.4°, c_2 \approx 1.02$ **23.** $a \approx 5.23, \beta = 46.0°, \gamma = 64.0°$ **25.** 1.93 **27.** 18.79 **29.** 6 **31.** 3.80 **33.** 0.32 **35.** 839.10 pies **37.** 23.32 pies **39.** 2.15 mi **41.** 204.07 millas **43. a)** 2.59 millas **b)** 2.92 millas **c)** 2.53 millas **45. a)** 131.8 millas **b)** 23.1° **c)** 0.21 horas **47.** 8798.67 pies^2 **49.** 1.92 pulgadas^2 **51.** 76.94 pulgadas **53.** $d = -3\cos\left[\dfrac{\pi}{2}t\right]$ **55. a)** Armónico simple **b)** 6 pies **c)** π sec **d)** $\dfrac{1}{\pi}$ oscilaciones/seg **57. a)** Armónico simple **b)** 2 pies **c)** 2 seg **d)** $\dfrac{1}{2}$ oscilaciones/seg

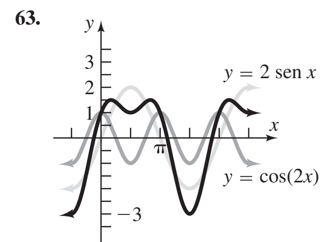
59.



61.

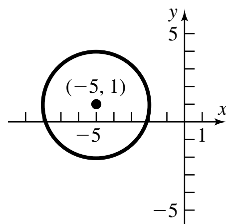


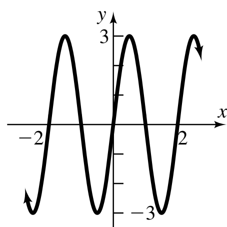
63.



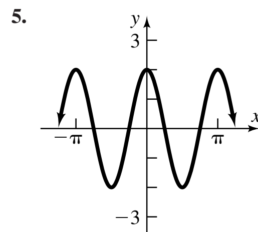
Repaso acumulativo *(página 708)*

1. $\left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$ **2.** $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$ **3.** $\{x|x \leq -1 \text{ o } x \geq 4\}$ **4.**



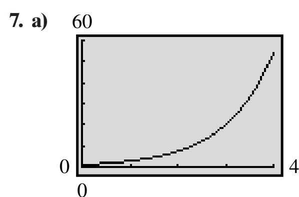


5.

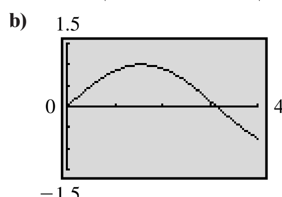


6. a) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **b)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **c)** $-\frac{4}{5}$ **d)** $-\frac{3}{5}$ **e)** $\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$ **f)** $-\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$

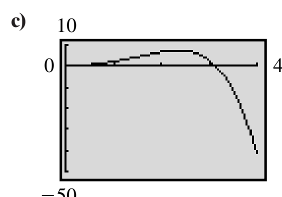
7. a)



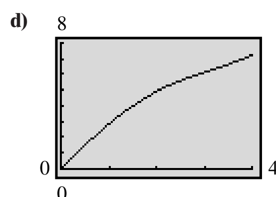
b)



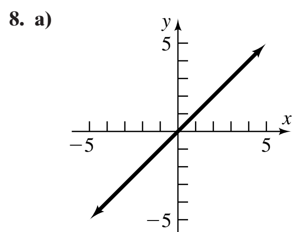
c)



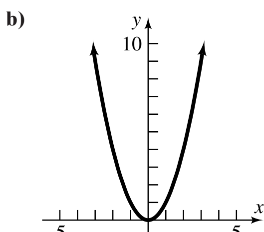
d)



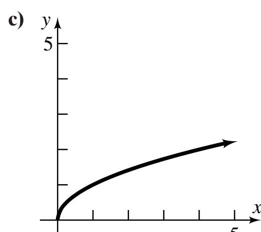
8. a)



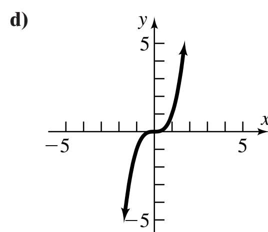
b)



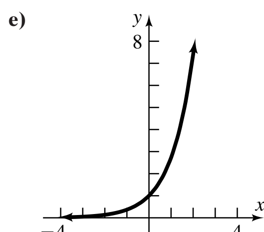
c)



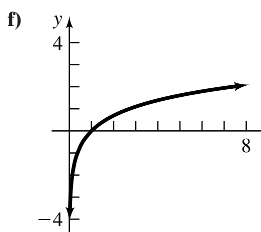
d)



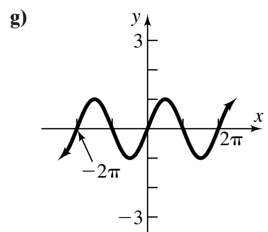
e)



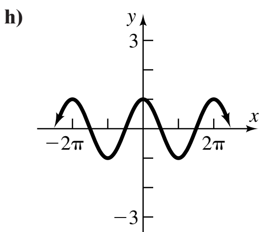
f)



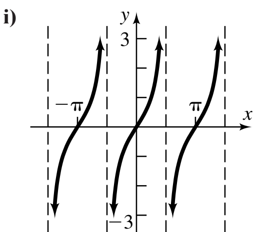
g)



h)



i)



9. Dos triángulos: $\alpha_1 \approx 59.0°, \beta_1 \approx 81.0°, b_1 \approx 23.05$ o $\alpha_2 \approx 121.0°, \beta_2 \approx 19.0°, b_2 \approx 7.59$ **10.** $\left\{-2i, 2i, \frac{1}{3}, 1, 2\right\}$

11. $R(x) = \dfrac{(2x+1)(x-4)}{(x+5)(x-3)}$; dominio:. $\{x|x \neq -5, x \neq 3\}$

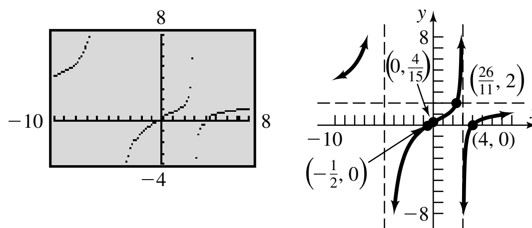
intersecciones: $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $(4, 0)$, $\left(0, \frac{4}{15}\right)$

sin simetría

asíntotas verticales: $x = -5$, $x = 3$

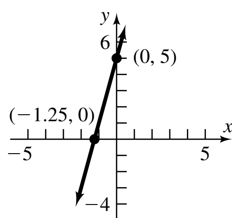
asíntota horizontal: $y = 2$

intersecciones: $\left(\frac{26}{11}, 2\right)$

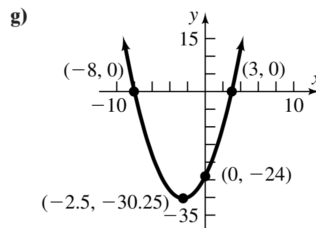


12. $\{2.26\}$ **13.** $\{1\}$ **14. a)** $\left\{-\frac{5}{4}\right\}$ **b)** $\{2\}$ **c)** $\left\{\frac{-1-\sqrt{117}}{2}, \frac{-1+\sqrt{117}}{2}\right\}$ **d)** $\left\{x \middle| x > -\frac{5}{4}\right\}$ o $\left(-\frac{5}{4}, \infty\right)$

e) $\left\{x \middle| -8 \leq x \leq 3\right\}$ o $[-8, 3]$ **f)**



g)



C A P Í T U L O 9 Coordenadas polares y vectores

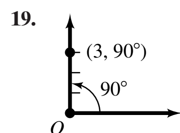
9.1 Conceptos y vocabulario *(página 719)*

5. Polo; eje polar **6.** −2 **7.** $(-\sqrt{3}, -1)$ **8.** Falso **9.** Verdadero **10.** Verdadero

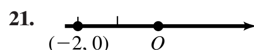
9.1 Ejercicios *(página 718)*

11. A **13.** C **15.** B **17.** A

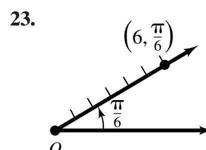
19.



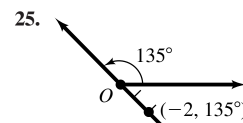
21.



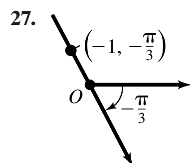
23.



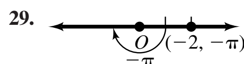
25.



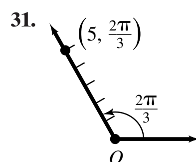
27.



29.

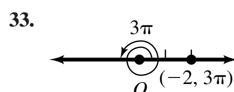


31.



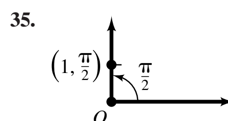
a) $\left(5, -\frac{4\pi}{3}\right)$
b) $\left(-5, \frac{5\pi}{3}\right)$
c) $\left(5, \frac{8\pi}{3}\right)$

33.



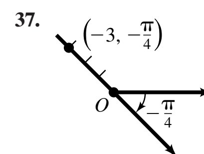
a) $(2, -2\pi)$
b) $(-2, \pi)$
c) $(2, 2\pi)$

35.



a) $\left(1, -\frac{3\pi}{2}\right)$
b) $\left(-1, \frac{3\pi}{2}\right)$
c) $\left(1, \frac{5\pi}{2}\right)$

37.



a) $\left(3, -\frac{5\pi}{4}\right)$
b) $\left(-3, \frac{7\pi}{4}\right)$
c) $\left(3, \frac{11\pi}{4}\right)$

39. $(0, 3)$ **41.** $(-2, 0)$ **43.** $(-3\sqrt{3}, 3)$ **45.** $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ **47.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

49. $(2, 0)$ **51.** $(-2.57, 7.05)$ **53.** $(-4.98, -3.85)$ **55.** $(3, 0)$ **57.** $(1, \pi)$ **59.** $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ **61.** $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ **63.** $(2.47, -1.02)$

65. $(9.30, 0.47)$ **67.** $r^2 = \frac{3}{2}$ **69.** $r^2 \cos^2\theta - 4r \operatorname{sen}\theta = 0$ **71.** $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 1$ **73.** $r\cos\theta = 4$ **75.** $x^2 + y^2 - x = 0$ o $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

77. $(x^2 + y^2)^{3/2} - x = 0$ **79.** $x^2 + y^2 = 4$ **81.** $y^2 = 8(x + 2)$

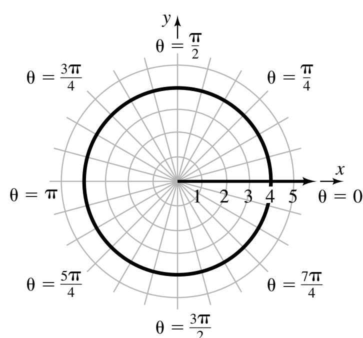
83.
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(r_2\cos\theta_2 - r_1\cos\theta_1)^2 + (r_2\operatorname{sen}\theta_2 - r_1\operatorname{sen}\theta_1)^2} \\ &= \sqrt{(r_2^2\cos^2\theta_2 - 2r_2\cos\theta_2\, r_1\cos\theta_1 + r_1^2\cos^2\theta_1) + (r_2^2\operatorname{sen}^2\theta_2 - 2r_2\operatorname{sen}\theta_2\, r_1\operatorname{sen}\theta_1 + r_1^2\operatorname{sen}^2\theta_1)} \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(\cos\theta_2\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1)} \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)} \end{aligned}$$

9.2 Conceptos y vocabulario *(página 734)*

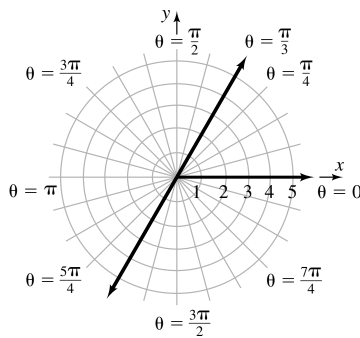
7. Ecuación polar **8.** $r = 2\cos\theta$ **9.** $-r$ **10.** Falso **11.** Falso **12.** Falso

9.2 Ejercicios *(página 734)*

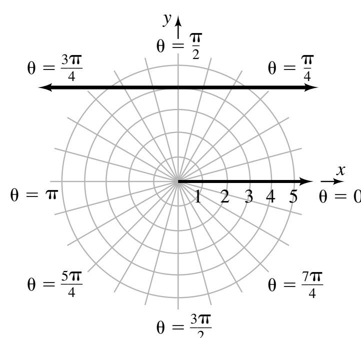
13. $x^2 + y^2 = 16$; Círculo, radio 4, centro en el polo



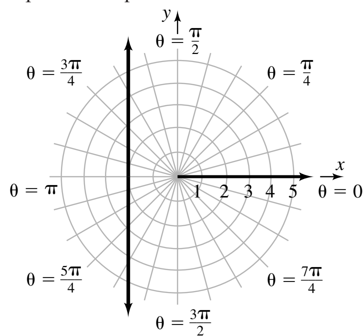
15. $y = \sqrt{3}x$; recta a través del polo, formando ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje polar



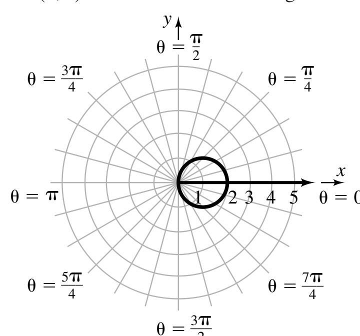
17. $y = 4$; recta horizontal 4 unidades por encima del polo



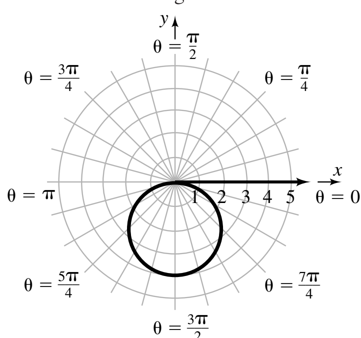
19. $x = -2$; recta vertical 2 unidades a la izquierda del polo



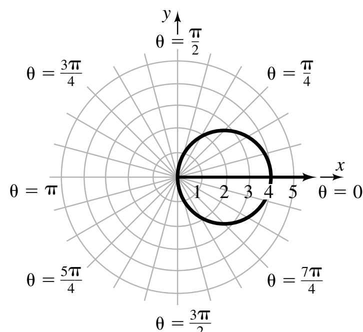
21. $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; Círculo, radio 1, centro en $(1, 0)$ en coordenadas rectangulares



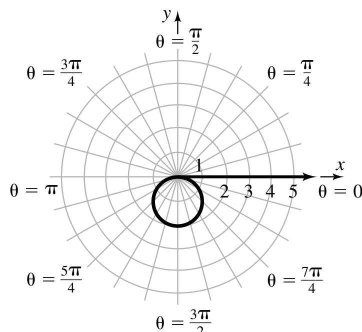
23. $x^2 + (y + 2)^2 = 4$; Círculo, radio 2, centro en $(0, -2)$ en coordenadas rectangulares



25. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$;
Círculo, radio 2, centro en $(2, 0)$ en coordenadas rectangulares

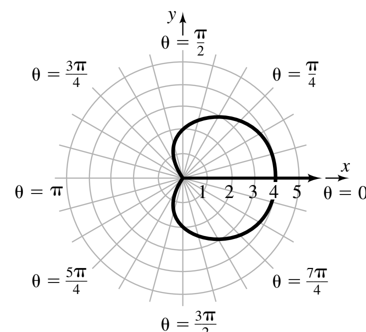


27. $x^2 + (y + 1)^2 = 1$;
Círculo, radio 1, centro en $(0, -1)$ en coordenadas rectangulares

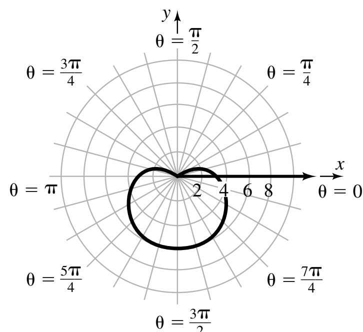


29. E **31.** F **33.** H **35.** D

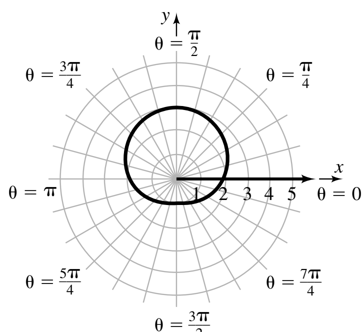
37. Cardioide



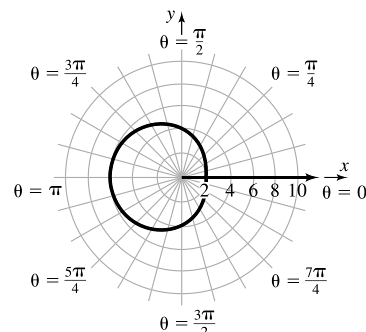
39. Cardioide



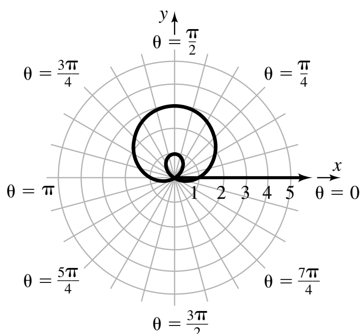
41. Limaçon sin bucle interno



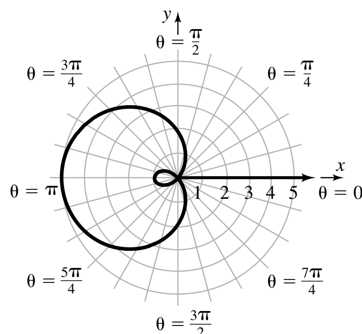
43. Limaçon sin bucle interno



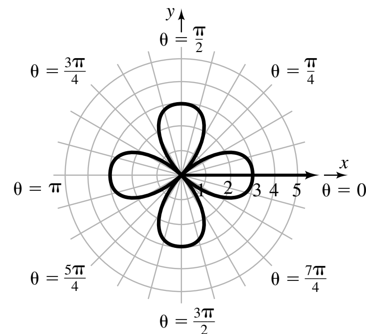
45. Limaçon sin bucle interno



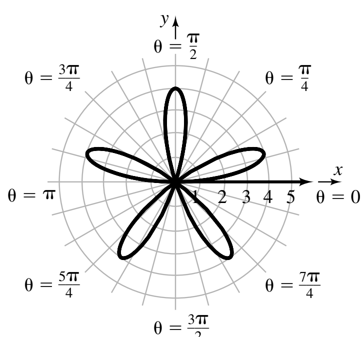
47. Limaçon sin bucle interno



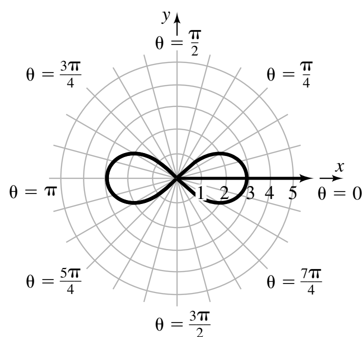
49. Rosa



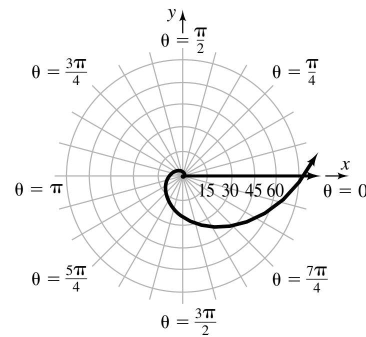
51. Rosa



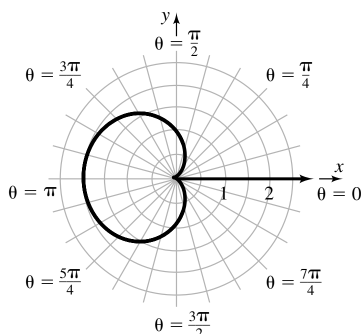
53. Lemniscata



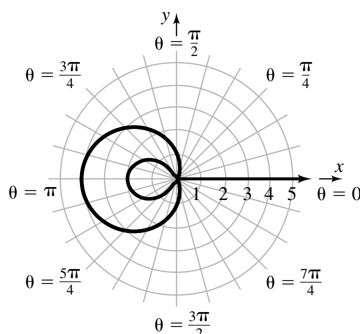
55. Espiral



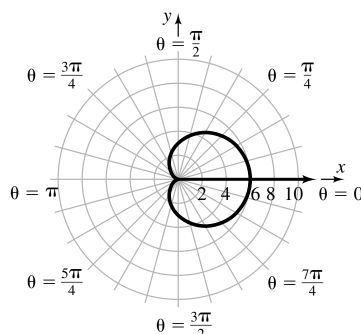
57. Cardioide



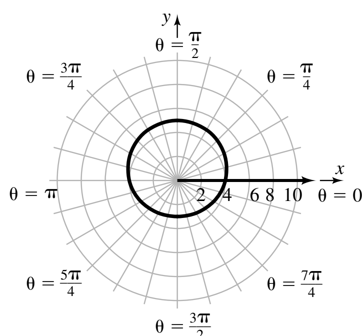
59. Limaçon con bucle interno



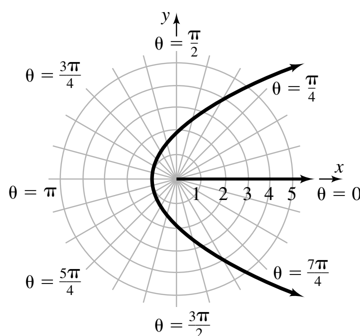
61. $r = 3 + 3\cos\theta$



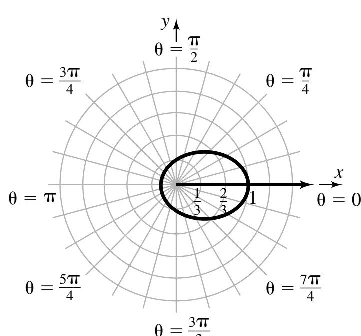
63. $r = 4 + \operatorname{sen}\theta$



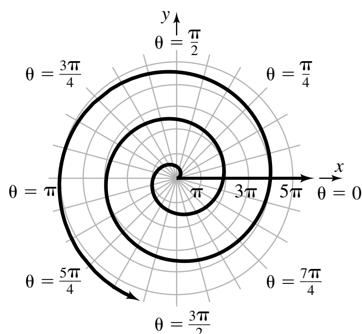
65.



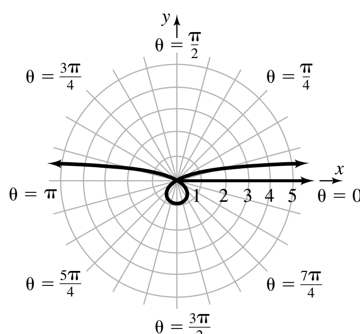
67.



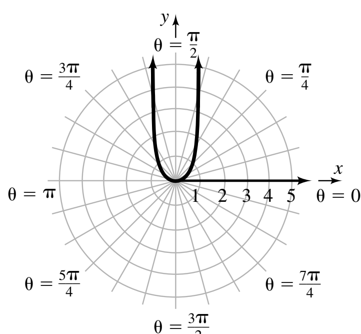
69.



71.



73.



75. $r\operatorname{sen}\theta = a$

$y = a$

77.
$$r = 2a\operatorname{sen}\theta$$
$$r^2 = 2ar\operatorname{sen}\theta$$
$$x^2 + y^2 = 2ay$$
$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$
$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$
Círculo, radio a, centro en $(0, a)$ en coordenadas rectangulares

79.
$$r = 2a\cos\theta$$
$$r^2 = 2ar\cos\theta$$
$$x^2 + y^2 = 2ax$$
$$x^2 - 2ax + y^2 = 0$$
$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$
Círculo, radio a, centro en$(a, 0)$ en coordenadas rectangulares

81. a) $r^2 = \cos\theta$: $r^2 = \cos(\pi - \theta)$
$$r^2 = -\cos\theta$$
No equivalente; no pasa la prueba.
$$(-r)^2 = \cos(-\theta)$$
$$r^2 = \cos\theta$$
La nueva prueba funciona.

b) $r^2 = \operatorname{sen}\theta$: $r^2 = \operatorname{sen}(\pi - \theta)$
$$r^2 = \operatorname{sen}\theta$$
La prueba funciona.
$$(-r)^2 = \operatorname{sen}(-\theta)$$
$$r^2 = -\operatorname{sen}\theta$$
Sin equivalencia; no pasa la nueva prueba.

Problemas históricos *(página 742)*

(página 742)

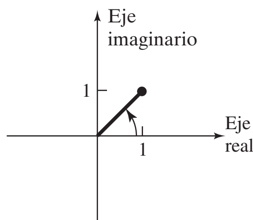
1. a) $1 + 4i, 1 + i$ **b)** $-1, 2 + i$

9.3 Conceptos y vocabulario *(página 743)*

5. magnitud con módulo **6.** de De Moivre **7.** tres **8.** Verdadero **9.** Falso **10.** Verdadero

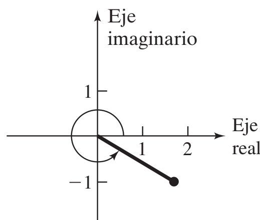
9.3 Ejercicios *(página 743)*

11.



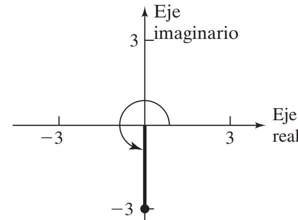
$\sqrt{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

13.



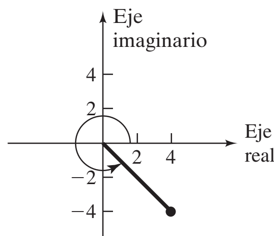
$2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$

15.



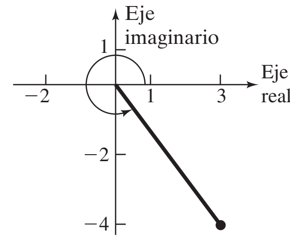
$3(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$

17.



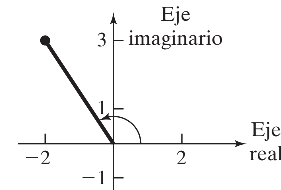
$4\sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

19.



$5(\cos 306.9° + i \operatorname{sen} 306.9°)$

21.



$\sqrt{13}(\cos 123.7° + i \operatorname{sen} 123.7°)$

23. $-1 + \sqrt{3}i$ **25.** $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ **27.** $-3i$ **29.** $-0.035 + 0.197i$ **31.** $1.970 + 0.347i$ **33.** $zw = 8(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°); \frac{z}{w} = \frac{1}{2}(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$ **35.** $zw = 12(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°); \frac{z}{w} = \frac{3}{4}(\cos 220° + i \operatorname{sen} 220°)$ **37.** $zw = 4\left(\cos \frac{9\pi}{40} + i \operatorname{sen} \frac{9\pi}{40}\right); \frac{z}{w} = \cos \frac{\pi}{40} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{40}$ **39.** $zw = 4\sqrt{2}(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°); \frac{z}{w} = \sqrt{2}(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°)$ **41.** $-32 + 32\sqrt{3}i$ **43.** $32i$

45. $\frac{27}{2} + \frac{27\sqrt{3}}{2}i$ **47.** $-\frac{25\sqrt{2}}{2} + \frac{25\sqrt{2}}{2}i$ **49.** $-4 + 4i$ **51.** $-23 + 14.142i$

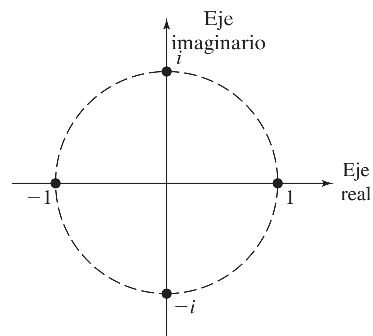
53. $\sqrt[6]{2}(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°), \sqrt[6]{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°), \sqrt[6]{2}(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°)$

55. $\sqrt[4]{8}(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°), \sqrt[4]{8}(\cos 165° + i \operatorname{sen} 165°), \sqrt[4]{8}(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°), \sqrt[4]{8}(\cos 345° + i \operatorname{sen} 345°)$

57. $2(\cos 67.5° + i \operatorname{sen} 67.5°), 2(\cos 157.5° + i \operatorname{sen} 157.5°), 2(\cos 247.5° + i \operatorname{sen} 247.5°), 2(\cos 337.5° + i \operatorname{sen} 337.5°)$

59. $\cos 18° + i \operatorname{sen} 18°, \cos 90° + i \operatorname{sen} 90°, \cos 162° + i \operatorname{sen} 162°, \cos 234° + i \operatorname{sen} 234°, \cos 306° + i \operatorname{sen} 306°$

61. $1, i, -1, -i$



63. Observando la fórmula (8); $|z_k| = \sqrt[n]{r}$ para todas las k.

65. Observando la fórmula (8). La z_k está separada por un ángulo de $\frac{2\pi}{n}$.

9.4 Conceptos y vocabulario *(página 754)*

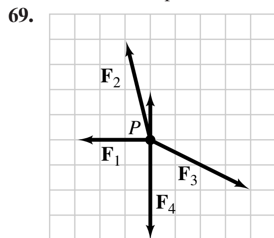
1. Unidad **2.** Escalar **3.** Horizontal; vertical **4.** Verdadero **5.** Verdadero **6.** Falso

9.4 Ejercicios *(página 754)*

7. $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ **9.** $3\mathbf{v}$ **11.** $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}-\mathbf{w}$, $-\mathbf{w}$

13. $3\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $-2\mathbf{w}$, $3\mathbf{v}+\mathbf{u}-2\mathbf{w}$

15. T **17.** F **19.** F **21.** T **23.** 12
25. $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ **27.** $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ **29.** $\mathbf{v}=8\mathbf{i}-\mathbf{j}$ **31.** $\mathbf{v}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$
33. 5 **35.** $\sqrt{2}$ **37.** $\sqrt{13}$ **39.** $-\mathbf{j}$ **41.** $\sqrt{89}$ **43.** $\sqrt{34}-\sqrt{13}$ **45.** $\mathbf{i}$
47. $\frac{3}{5}\mathbf{i}-\frac{4}{5}\mathbf{j}$ **49.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$
51. $\mathbf{v}=\frac{8\sqrt{5}}{5}\mathbf{i}+\frac{4\sqrt{5}}{5}\mathbf{j}$ o $\mathbf{v}=-\frac{8\sqrt{5}}{5}\mathbf{i}-\frac{4\sqrt{5}}{5}\mathbf{j}$
53. $\{-2+\sqrt{21},-2-\sqrt{21}\}$ **55.** $\mathbf{v}=\frac{5}{2}\mathbf{i}+\frac{5\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$
57. $\mathbf{v}=-7\mathbf{i}+7\sqrt{3}\,\mathbf{j}$ **59.** $\mathbf{v}=\frac{25\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}-\frac{25}{2}\mathbf{j}$
61. $\mathbf{F}=20(\sqrt{3}\mathbf{i}+\mathbf{j})$ **63.** $\mathbf{F}=(20\sqrt{3}+30\sqrt{2})\mathbf{i}+(20-30\sqrt{2})\mathbf{j}$
65. Tensión en el cable derecho: 1000 libras; tensión en el cable izquierdo: 845.2 libras
67. Tensión en la parte derecha: 1088.4 libras; tensión de la parte izquierda: 1089.1 libras
69.



Problemas históricos *(página 762)*

1. $(a\mathbf{i}+b\mathbf{j})\cdot(c\mathbf{i}+d\mathbf{j})=ac+bd$
Parte real $[(\overline{a+bi})(c+di)]=$ parte real$[(a-bi)(c+di)]=$ parte real$[ac+adi-bci-bdi^2]=ac+bd$

9.5 Conceptos y vocabulario *(página 762)*

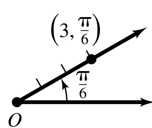
2. Ortogonal **3.** paralelo **4.** Falso **5.** Verdadero **6.** Falso

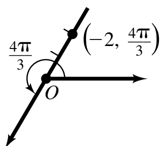
9.5 Ejercicios *(página 762)*

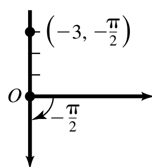
7. 0; 90°; ortogonal **9.** 4; 36.9°; ninguno **11.** $\sqrt{3}-1$; 75°; ninguno **13.** 24; 16.3°; ninguno **15.** 0; 90°; ortogonal **17.** $\frac{2}{3}$
19. $\mathbf{v}_1=\frac{5}{2}\mathbf{i}-\frac{5}{2}\mathbf{j}, \mathbf{v}_2=-\frac{1}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}$ **21.** $\mathbf{v}_1=-\frac{1}{5}\mathbf{i}-\frac{2}{5}\mathbf{j}, \mathbf{v}_2=\frac{6}{5}\mathbf{i}-\frac{3}{5}\mathbf{j}$ **23.** $\mathbf{v}_1=\frac{14}{5}\mathbf{i}+\frac{7}{5}\mathbf{j}, \mathbf{v}_2=\frac{1}{5}\mathbf{i}-\frac{2}{5}\mathbf{j}$
25. 496.7 millas/hora; suroeste **27.** 8.6° con respecto a la perpendicular a la corriente, corriente arriba; 1.52 minutos
29. Fuerza necesaria para evitar que Sienna ruede por la pendiente de la colina: 737.6 libras; fuerza perpendicular a la colina: 5248.4 libras
31. $\mathbf{v}=(250\sqrt{2}-30)\mathbf{i}+(250\sqrt{2}+30\sqrt{3})\mathbf{j}$; 518.8 km/h; N38.6°E **33.** $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+20\mathbf{j}$; 20.2 km/h; N8.5°E (suponiendo que la embarcación va hacia el norte y la corriente hacia el este) **35.** 3 pies-libra **37.** $1000\sqrt{3}$ pies-libra $\approx$ 1732 pies-libra
39. Sean $\mathbf{u}=a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}, \mathbf{v}=a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}, \mathbf{w}=a_3\mathbf{i}+b_3\mathbf{j}$. Calcule $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$.
41. $\cos\alpha=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{i}\|}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}$; si $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}=x=\cos\alpha$ y $\mathbf{v}\cdot\mathbf{j}=y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$.
43. $\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$; la proyección de vector de $\mathbf{v}$ en $\mathbf{i}$ es $\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}}{\|\mathbf{i}\|^2}\mathbf{i}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}$; $\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}=a, \mathbf{v}\cdot\mathbf{j}=b$, entonces $\mathbf{v}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j}$.
45. $(\mathbf{v}-\alpha\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}-\alpha\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=\alpha\|\mathbf{w}\|^2-\alpha\|\mathbf{w}\|^2=0$ ya que el producto punto de cualquier vector por sí mismo es igual al cuadrado de su magnitud. **47.** $W=\mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ cuando $\mathbf{F}$ es ortogonal a $\overrightarrow{AB}$.

Ejercicios de repaso *(página 765)*

1. $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **3.** $(1, \sqrt{3})$ **5.** $(0, 3)$ **7.** $\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(-3\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$



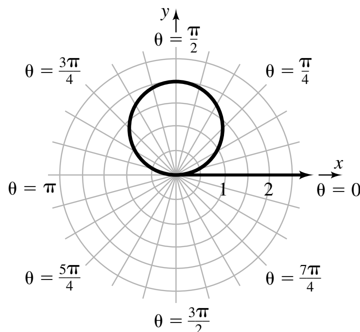
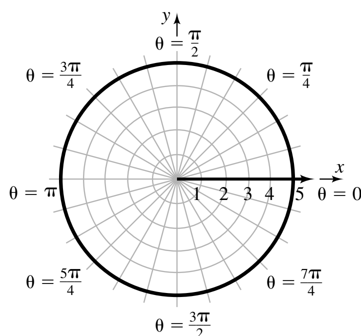
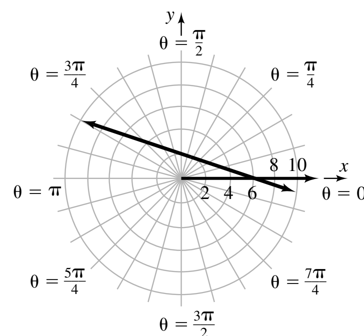




9. $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$

11. $(5, 0.93), (-5, 4.07)$

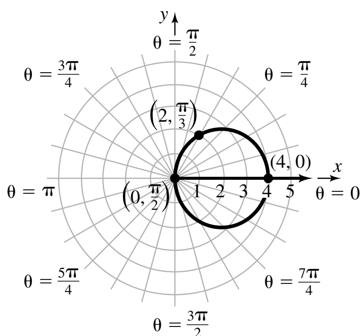
13. $x^2 + y^2 - 2y = 0$ **15.** $x^2 + y^2 = 25$ **17.** $x + 3y = 6$

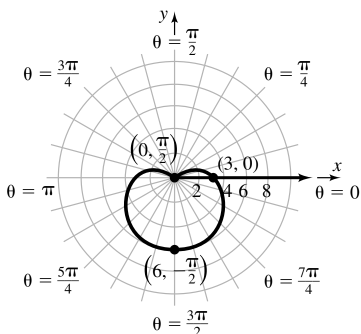




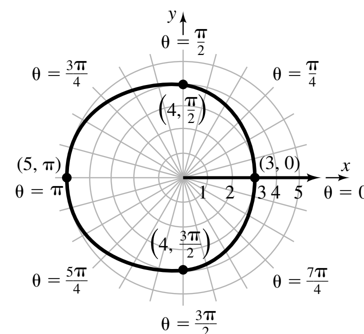
19. Círculo; radio 2, centro en $(2, 0)$ *n* coordenadas rectangulares; simétrica con respecto al eje polar

21. Cardioide; simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$

23. Limaçon sin bucle interno; simétrica con respecto al eje polar

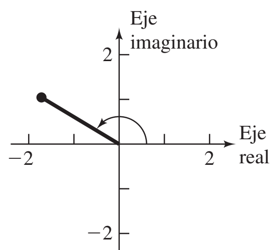


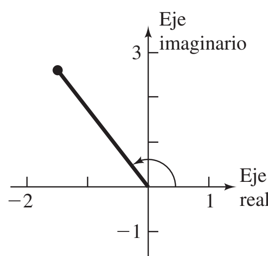


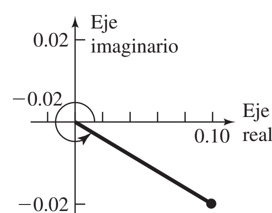


25. $\sqrt{2}(\cos 225° + i \text{ sen } 225°)$ **27.** $5(\cos 323.1° + i \text{ sen } 323.1°)$

29. $-\sqrt{3} + i$ **31.** $-\frac{3}{2} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$ **33.** $0.10 - 0.02i$





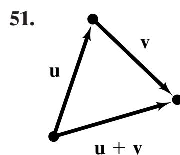


35. $zw = \cos 130° + i \operatorname{sen} 130°; \dfrac{z}{w} = \cos 30° + i \operatorname{sen} 30°$ **37.** $zw = 6(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 6; \dfrac{z}{w} = \dfrac{3}{2}\left(\cos \dfrac{8\pi}{5} + i \operatorname{sen} \dfrac{8\pi}{5}\right)$

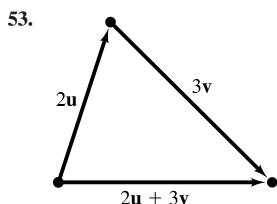
39. $zw = 5(\cos 5° + i \operatorname{sen} 5°); \dfrac{z}{w} = 5(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$ **41.** $\dfrac{27}{2} + \dfrac{27\sqrt{3}}{2}i$ **43.** $4i$ **45.** 64 **47.** $-527 - 336i$

49. $3, 3(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°), 3(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$

51.



53.

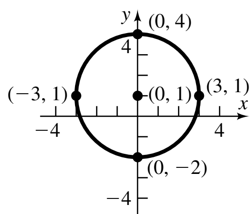


55. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}; \|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{5}$ **57.** $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}; \|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}$ **59.** $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **61.** $-20\mathbf{i} + 13\mathbf{j}$ **63.** $\sqrt{5}$ **65.** $\sqrt{5} + 5 \approx 7.24$ **67.** $\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\mathbf{j}$ **69.** $\mathbf{v} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$ **71.** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -11; \theta \approx 169.70°$ **73.** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -4; \theta \approx 153.43°$ **75.** Paralela **77.** Paralela **79.** Ortogonal **81.** $\mathbf{v}_1 = \dfrac{4}{5}\mathbf{i} - \dfrac{3}{5}\mathbf{j}; \mathbf{v}_2 = \dfrac{6}{5}\mathbf{i} + \dfrac{8}{5}\mathbf{j}$ **83.** $\dfrac{9}{10}(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$ **85.** $\sqrt{29} \approx 5.39$ millas/hora; 0.4 millas **87.** Cable izquierdo: 1843.21; cable derecho: 1630.41 **89.** 50 pies-libra

Repaso acumulativo *(página 768)*

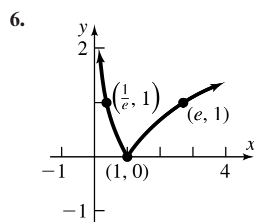
1. $\{-3, 3\}$ **2.** $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

3. $x^2 + (y - 1)^2 = 9$

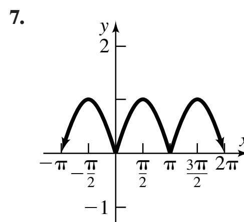


4. $\left\{x \middle| x < \dfrac{1}{2}\right\}$ o $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ **5.** Simétrica con respecto al eje y

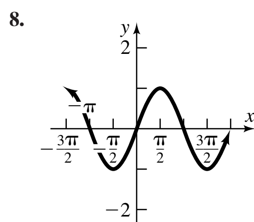
6.



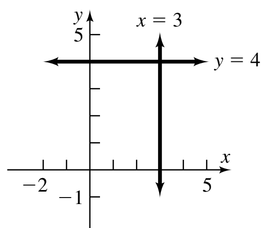
7.



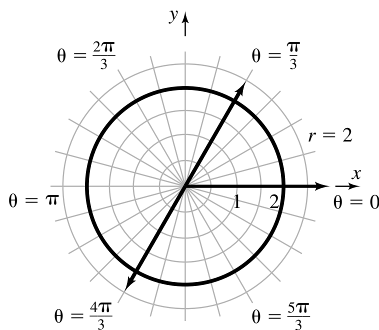
8.



9. $-\dfrac{\pi}{6}$ **10.**



11.



CAPÍTULO 10 Geometría analítica

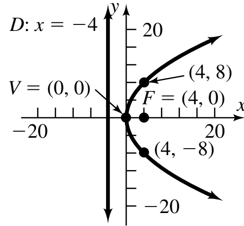
10.2 Conceptos y vocabulario *(página 778)*

6. Parábola **7.** Paraboloide de revolución **8.** Verdadero **9.** Verdadero **10.** Verdadero

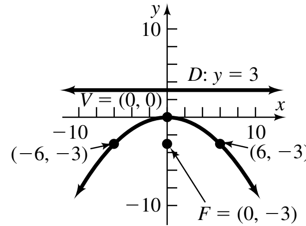
10.2 Ejercicios *(página 778)*

11. B **13.** E **15.** H **17.** C

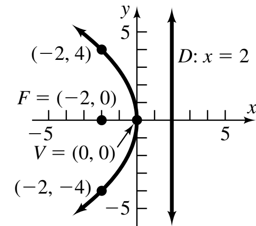
19. $y^2 = 16x$



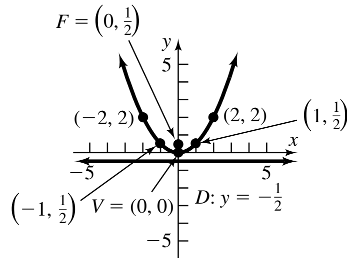
21. $x^2 = -12y$



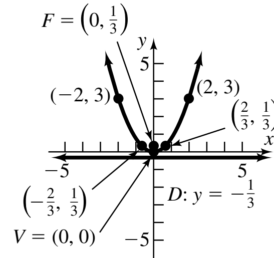
23. $y^2 = -8x$



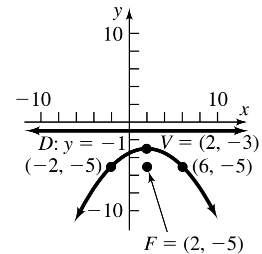
25. $x^2 = 2y$



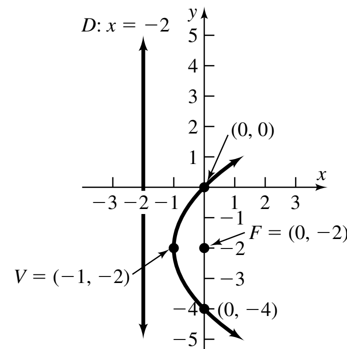
27. $x^2 = \frac{4}{3}y$



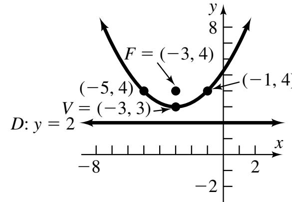
29. $(x - 2)^2 = -8(y + 3)$



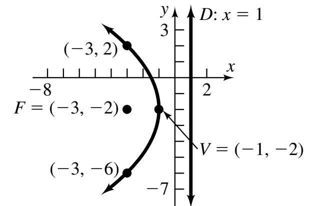
31. $(y + 2)^2 = 4(x + 1)$



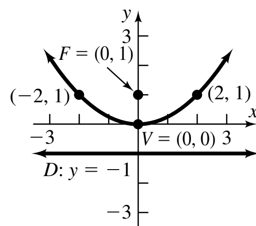
33. $(x + 3)^2 = 4(y - 3)$



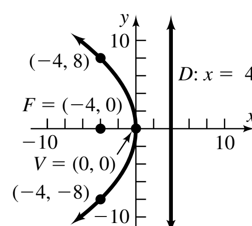
35. $(y + 2)^2 = -8(x + 1)$



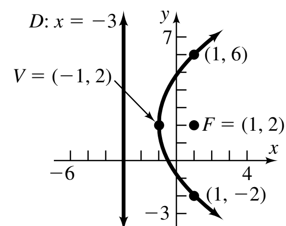
37. Vértice: $(0, 0)$; Focos: $(0, 1)$; Directriz: $y = -1$



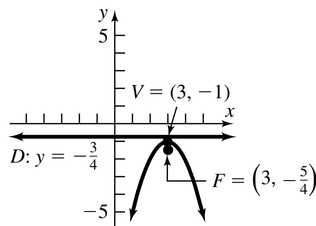
39. Vértice: $(0, 0)$; Focos: $(-4, 0)$; Directriz: $x = 4$



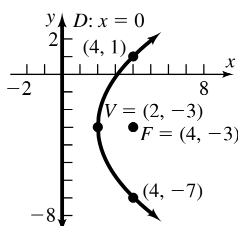
41. Vértice: $(-1, 2)$; Focos: $(1, 2)$; Directriz: $x = -3$



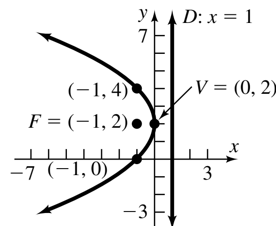
43. Vértice: $(3, -1)$; Foco: $\left(3, -\frac{5}{4}\right)$; Directriz: $y = -\frac{3}{4}$



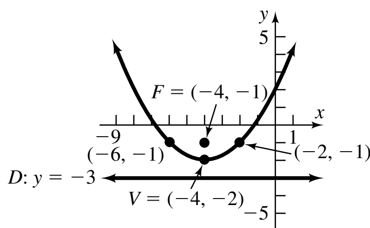
45. Vértice: $(2, -3)$; Foco: $(4, -3)$; Directriz: $x = 0$



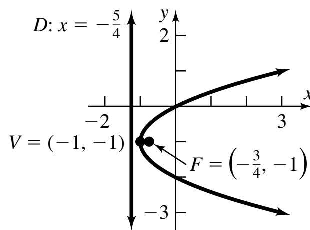
47. Vértice: $(0, 2)$; Foco: $(-1, 2)$; Directriz: $x = 1$



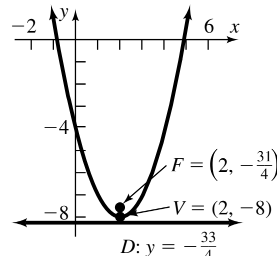
49. Vértice: $(-4, -2)$; Foco: $(-4, -1)$; Directriz: $y = -3$



51. Vértice: $(-1, -1)$; Foco: $\left(-\frac{3}{4}, -1\right)$; Directriz: $x = -\frac{5}{4}$



53. Vértice: $(2, -8)$; Foco: $\left(2, -\frac{31}{4}\right)$; Directriz: $y = -\frac{33}{4}$



55. $(y - 1)^2 = x$ **57.** $(y - 1)^2 = -(x - 2)$ **59.** $x^2 = 4(y - 1)$ **61.** $y^2 = \frac{1}{2}(x + 2)$

63. 1.5625 pies desde la base del disco, a lo largo del eje de simetría **65.** 1 pulgada del vértice **67.** 20 pies **69.** 0.78125 pies

71. 4.17 pies de la base a lo largo del eje de simetría **73.** 24.31 pies, 18.75 pies, 7.64 pies

75. $Ax^2 + Ey = 0,\ A \neq 0,\ E \neq 0$

$Ax^2 = -Ey$

$x^2 = -\frac{E}{A}y$

Ésta es la ecuación de una parábola con vértice en $(0, 0)$ y con el eje y como eje de simetría. El foco es $\left(0, -\frac{E}{4A}\right)$; la directriz es la recta $y = \frac{E}{4A}$. La parábola es abierta hacia arriba si $-\frac{E}{A} > 0$ y hacia abajo si $-\frac{E}{A} < 0$.

77. $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0,\ A \neq 0$

$$Ax^2 + Dx = -Ey - F$$

$$x^2 + \frac{D}{A}x = -\frac{E}{A}y - \frac{F}{A}$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}y - \frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2}$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}y + \frac{D^2 - 4AF}{4A^2}$$

a) Si $E \neq 0$, entonces la ecuación se puede escribir como

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}\left(y - \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right)$$

Ésta es la ecuación de una parábola con vértice en $\left(-\frac{D}{2A}, \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right)$ y con eje de simetría paralelo al eje y.

b)–d) Si $E = 0$, gráfica de la ecuación no contiene puntos si $D^2 - 4AF < 0$, es una recta vertical si $D^2 - 4AF = 0$, y es dos rectas verticales si $D^2 - 4AF > 0$.

10.3 Conceptos y vocabulario *(página 789)*

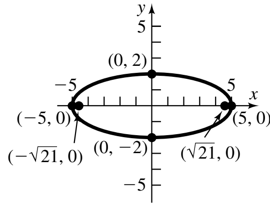
7. Elipse **8.** Mayor **9.** $(0, -5)$; $(0, 5)$ **10.** Falso **11.** Verdadero **12.** Verdadero

10.3 Ejercicios *(página 789)*

13. C **15.** B

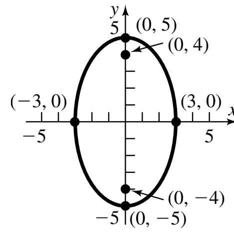
17. Vértices: $(-5, 0)$, $(5, 0)$

Focos: $(-\sqrt{21}, 0)$, $(\sqrt{21}, 0)$



19. Vértices: $(0, -5)$, $(0, 5)$

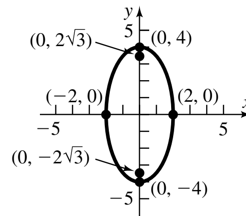
Focos: $(0, -4)$, $(0, 4)$



21. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Vértices: $(0, -4)$, $(0, 4)$

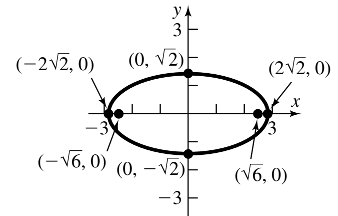
Focos: $(0, -2\sqrt{3})$, $(0, 2\sqrt{3})$



23. $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

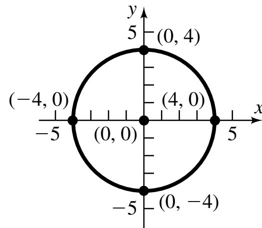
Vértices: $(-2\sqrt{2}, 0)$, $(2\sqrt{2}, 0)$

Focos: $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 0)$

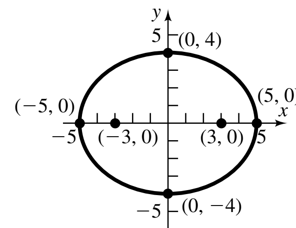


25. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

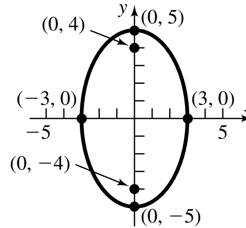
Vértices: $(-4, 0)$, $(4, 0)$,
$(0, -4)$, $(0, 4)$



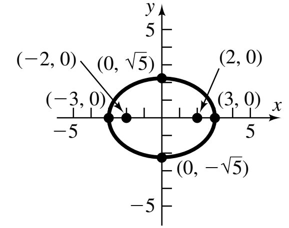
27. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$



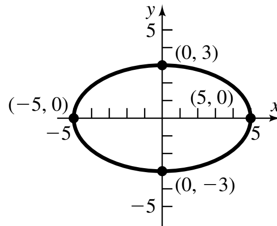
29. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$



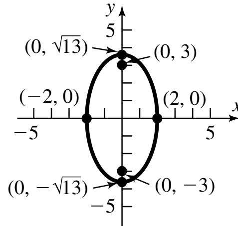
31. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$



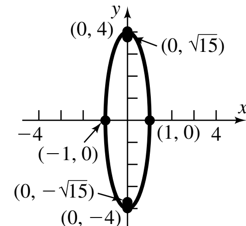
33. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$



35. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{13} = 1$



37. $x^2 + \dfrac{y^2}{16} = 1$

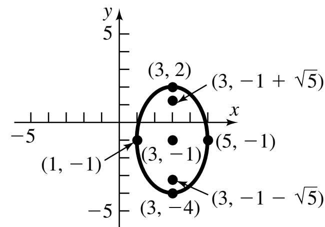


39. $\dfrac{(x + 1)^2}{4} + (y - 1)^2 = 1$

41. $(x - 1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

43. Centro: $(3, -1)$; Vértices: $(3, -4)$, $(3, 2)$

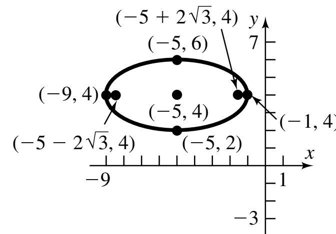
Focos: $(3, -1 - \sqrt{5})$, $(3, -1 + \sqrt{5})$



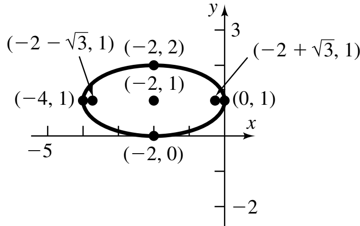
45. $\dfrac{(x + 5)^2}{16} + \dfrac{(y - 4)^2}{4} = 1$

Centro: $(-5, 4)$; Vértices: $(-9, 4)$, $(-1, 4)$

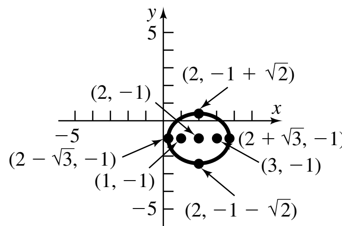
Focos: $(-5 - 2\sqrt{3}, 4)$, $(-5 + 2\sqrt{3}, 4)$



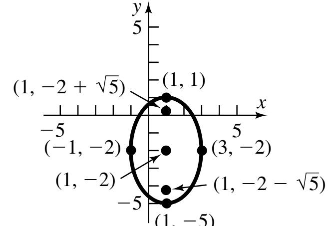
47. $\dfrac{(x+2)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$
Centro: $(-2, 1)$; Vértices: $(-4, 1)$, $(0, 1)$
Focos: $(-2 - \sqrt{3}, 1)$, $(-2 + \sqrt{3}, 1)$



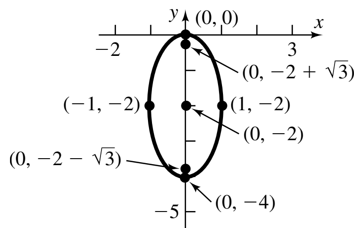
49. $\dfrac{(x-2)^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{2} = 1$
Centro: $(2, -1)$; Vértices: $(2 - \sqrt{3}, -1)$, $(2 + \sqrt{3}, -1)$; Focos: $(1, -1)$, $(3, -1)$



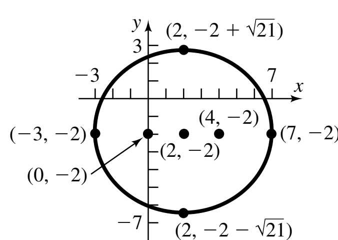
51. $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$
Centro: $(1, -2)$; Vértices: $(1, -5)$, $(1, 1)$
Focos: $(1, -2 - \sqrt{5})$, $(1, -2 + \sqrt{5})$



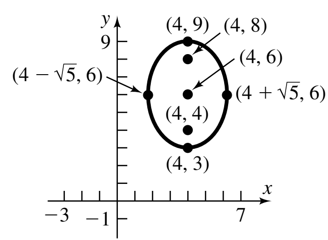
53. $x^2 + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$
Centro: $(0, -2)$; Vértices: $(0, -4)$, $(0, 0)$
Focos: $(0, -2 - \sqrt{3})$, $(0, -2 + \sqrt{3})$



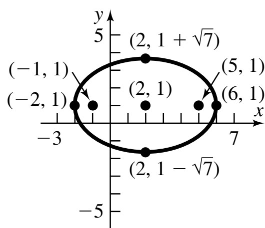
55. $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+2)^2}{21} = 1$



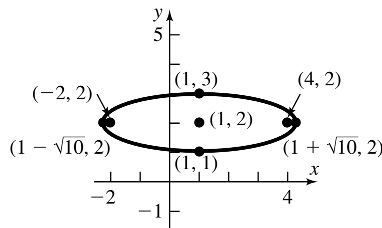
57. $\dfrac{(x-4)^2}{5} + \dfrac{(y-6)^2}{9} = 1$



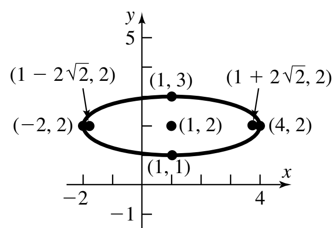
59. $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{7} = 1$



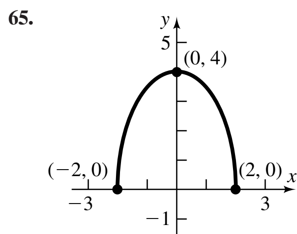
61. $\dfrac{(x-1)^2}{10} + (y-2)^2 = 1$



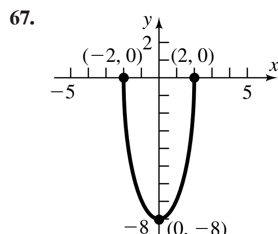
63. $\dfrac{(x-1)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$



65.



67.



69. $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ **71.** 43.3 pies **73.** 24.65 pies, 21.65 pies, 13.82 pies

75. 0 pies, 12.99 pies 15 pies, 12.99 pies, 0 pies

77. 91.5 millas; $\dfrac{x^2}{(93)^2} + \dfrac{y^2}{8646.75} = 1$

79. Perihelio: 460.6 millones de millas; distancia media: 483.8 millones de millas; $\dfrac{x^2}{(483.8)^2} + \dfrac{y^2}{233{,}524.2} = 1$ **81.** 30 pies

83. a) $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$

$Ax^2 + Cy^2 = -F$

Si A y C son iguales y F es de signo opuesto, entonces la ecuación toma la forma $\dfrac{x^2}{\left(-\dfrac{F}{A}\right)} + \dfrac{y^2}{\left(-\dfrac{F}{C}\right)} = 1$, donde $-\dfrac{F}{A}$ y $-\dfrac{F}{C}$ son positivas. Ésta es la ecuación de una elipse con centro en $(0, 0)$.

b) Si $A = C$, la ecuación se puede escribir como $x^2 + y^2 = -\dfrac{F}{A}$.

Ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(0, 0)$ y radio igual a $\sqrt{-\dfrac{F}{A}}$.

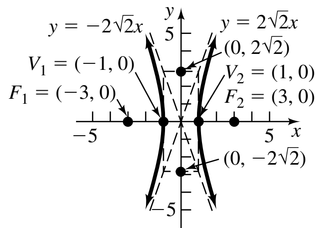
10.4 Conceptos y vocabulario *(página 803)*

7. Hipérbolas **8.** Eje transversal **9.** $3x = -2y, 3x = 2y$ **10.** Falso **11.** Verdadero **12.** Falso

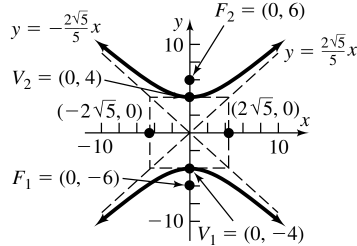
10.4 Ejercicios *(página 803)*

13. B **15.** A

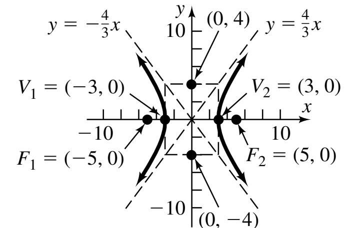
17. $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$



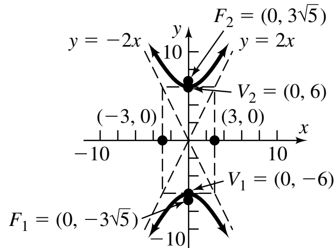
19. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{20} = 1$



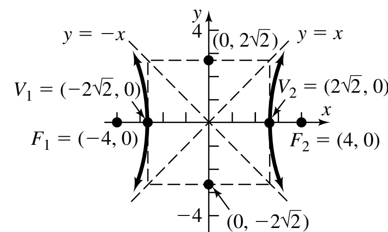
21. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$



23. $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

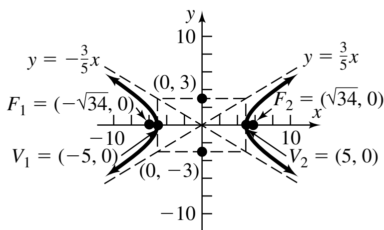


25. $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{8} = 1$



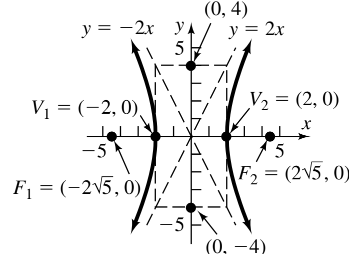
27. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Centro: $(0, 0)$
Eje transversal: eje x
Vértices: $(-5, 0)$, $(5, 0)$
Focos: $(-\sqrt{34}, 0)$, $(\sqrt{34}, 0)$
Asíntotas: $y = \pm\dfrac{3}{5}x$



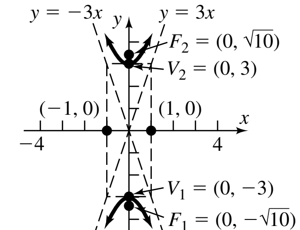
29. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Centro: $(0, 0)$
Eje transversal: eje x
Vértices: $(-2, 0)$, $(2, 0)$
Focos: $(-2\sqrt{5}, 0)$, $(2\sqrt{5}, 0)$
Asíntotas: $y = \pm 2x$

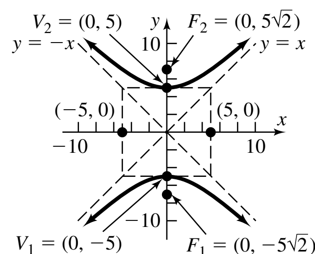


31. $\dfrac{y^2}{9} - x^2 = 1$

Centro: $(0, 0)$
Eje transversal: eje y
Vértices: $(0, -3)$, $(0, 3)$
Focos: $(0, -\sqrt{10})$, $(0, \sqrt{10})$
Asíntotas: $y = \pm 3x$



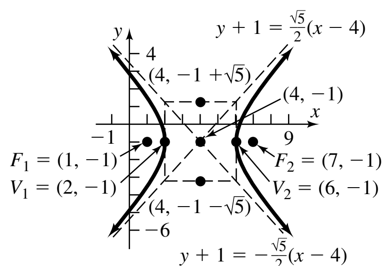
33. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{25} = 1$
Centro: $(0, 0)$
Eje transversal: eje y
Vértices: $(0, -5), (0, 5)$
Focos: $(0, -5\sqrt{2}), (0, 5\sqrt{2})$;
Asíntotas: $y = \pm x$



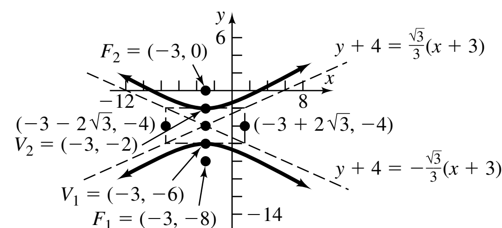
35. $x^2 - y^2 = 1$

37. $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

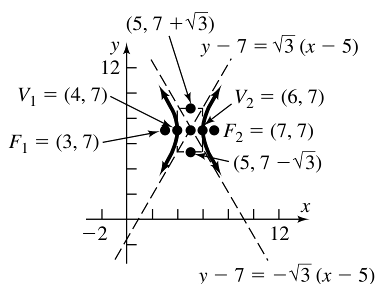
39. $\dfrac{(x-4)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{5} = 1$



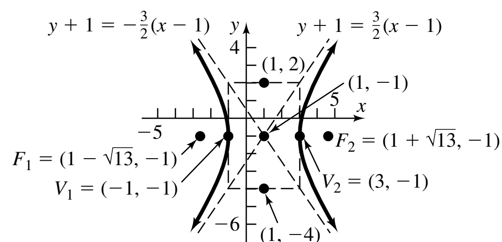
41. $\dfrac{(y+4)^2}{4} - \dfrac{(x+3)^2}{12} = 1$



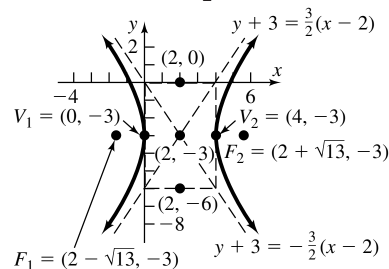
43. $(x-5)^2 - \dfrac{(y-7)^2}{3} = 1$



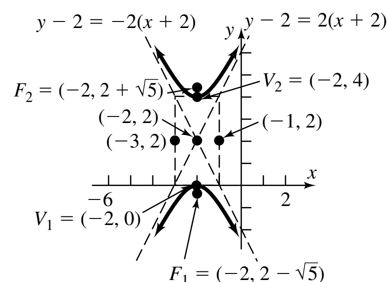
45. $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$



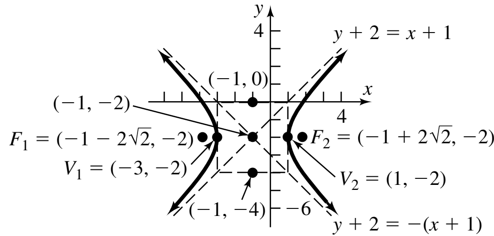
47. $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$
Centro: $(2, -3)$
Eje transversal: Paralelo al eje x
Vértices: $(0, -3), (4, -3)$
Focos: $(2 - \sqrt{13}, -3), (2 + \sqrt{13}, -3)$
Asíntotas: $y + 3 = \pm\dfrac{3}{2}(x - 2)$



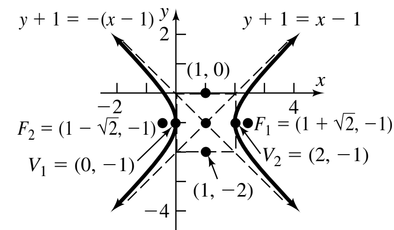
49. $\dfrac{(y-2)^2}{4} - (x+2)^2 = 1$
Centro: $(-2, 2)$
Eje transversal: Paralelo al eje y
Vértices: $(-2, 0), (-2, 4)$
Focos: $(-2, 2 - \sqrt{5}), (-2, 2 + \sqrt{5})$
Asíntotas: $y - 2 = \pm 2(x + 2)$



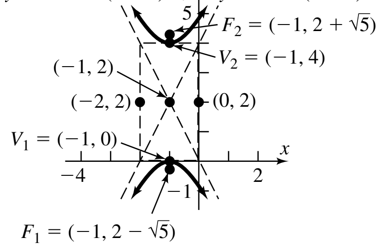
51. $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$
Centro: $(-1, -2)$
Eje transversal: Paralelo al eje x
Vértices: $(-3, -2)$, $(1, -2)$
Focos: $(-1 - 2\sqrt{2}, -2)$, $(-1 + 2\sqrt{2}, -2)$
Asíntotas: $y + 2 = \pm(x + 1)$



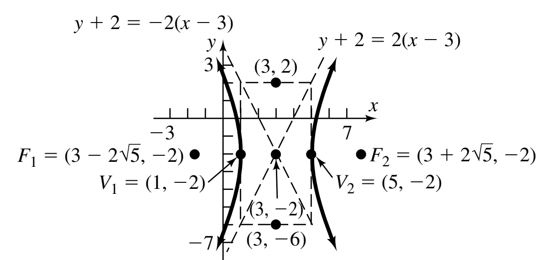
53. $(x - 1)^2 - (y + 1)^2 = 1$
Centro: $(1, -1)$
Eje transversal: Paralelo al eje x
Vértices: $(0, -1)$, $(2, -1)$
Focos: $(1 - \sqrt{2}, -1)$, $(1 + \sqrt{2}, -1)$
Asíntotas: $y + 1 = \pm(x - 1)$



55. $\dfrac{(y-2)^2}{4} - (x + 1)^2 = 1$
Centro: $(-1, 2)$
Eje transversal: Paralelo al eje y
Vértices: $(-1, 0)$, $(-1, 4)$
Focos: $(-1, 2 - \sqrt{5})$, $(-1, 2 + \sqrt{5})$
Asíntotas: $y - 2 = \pm 2(x + 1)$

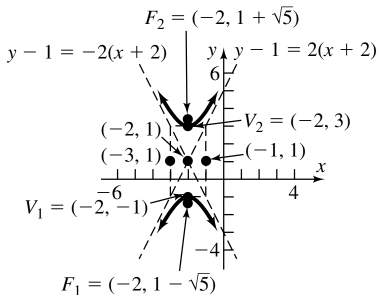


57. $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$
Centro: $(3, -2)$
Eje transversal: Paralelo al eje x
Vértices: $(1, -2)$, $(5, -2)$
Focos: $(3 - 2\sqrt{5}, -2)$, $(3 + 2\sqrt{5}, -2)$
Asíntotas: $y + 2 = \pm 2(x - 3)$

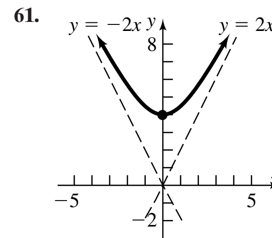


59. $\dfrac{(y-1)^2}{4} - (x + 2)^2 = 1$
Centro: $(-2, 1)$
Eje transversal: Paralelo al eje y
Vértices: $(-2, -1)$, $(-2, 3)$
Focos: $(-2, 1 - \sqrt{5})$, $(-2, 1 + \sqrt{5})$

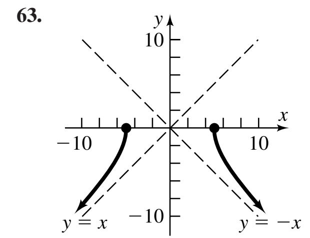
Asíntotas: $y - 1 = \pm 2(x + 2)$



61.



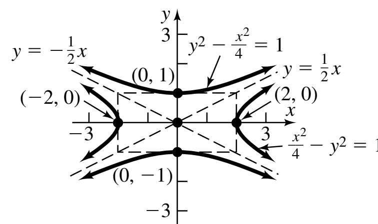
63.



65. a) El barco llegará a la costa en un punto a 64.66 millas de la estación maestra. **b)** 0.00086 seg **c)** (104, 50) **67. a)** 450 pies

69. Si e es cercana a 1, hipérbola reducida; si e es grande, hipérbola extendida

71. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$: asíntotas $y = \pm\dfrac{1}{2}x$; $y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$: asíntotas $y = \pm\dfrac{1}{2}x$



73. $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ Si A y C son de signo opuesto y $F \neq 0$, esta ecuación se puede escribir como $\dfrac{x^2}{\left(-\dfrac{F}{A}\right)} + \dfrac{y^2}{\left(-\dfrac{F}{C}\right)} = 1$,

$Ax^2 + Cy^2 = -F$ donde $-\dfrac{F}{A}$ y $-\dfrac{F}{C}$ son de signo opuesto. Ésta es la ecuación de una hipérbola con centro en $(0, 0)$.

El eje transversal es el eje x si $-\dfrac{F}{A} > 0$; y es el eje y si $-\dfrac{F}{A} < 0$.

10.5 Conceptos y vocabulario *(página 813)*

5. $\cot(2\theta) = \dfrac{A - C}{B}$ **6.** Hipérbola **7.** Elipse **8.** Verdadero **9.** Verdadero **10.** Falso

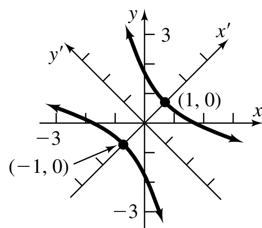
10.5 Ejercicios *(página 813)*

11. Parábola **13.** Elipse **15.** Hipérbola **17.** Hipérbola **19.** Círculo

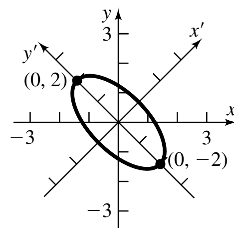
21. $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$ **23.** $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$ **25.** $x = \dfrac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y'), y = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y')$

27. $x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y'), y = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(2x' + y')$ **29.** $x = \dfrac{\sqrt{13}}{13}(3x' - 2y'), y = \dfrac{\sqrt{13}}{13}(2x' + 3y')$

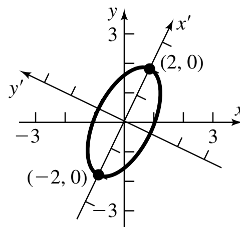
31. $\theta = 45°$ (vea el problema 21)
Hipérbola
Centro en el origen
Eje transversal es el eje x'.
Vértices en $(\pm 1, 0)$



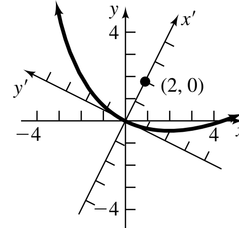
33. $\theta = 45°$ (vea el problema 23)
Elipse
Centro en $(0, 0)$
Eje transversal es el eje y'.
Vértices en $(0, \pm 2)$



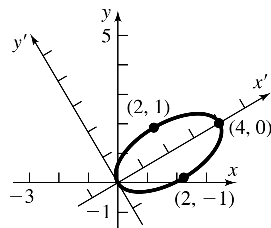
35. $\theta = 60°$ (vea el problema 25)
$\dfrac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$
Elipse
Centro en $(0, 0)$
Eje transversal es el eje x'.
Vértices en $(\pm 2, 0)$



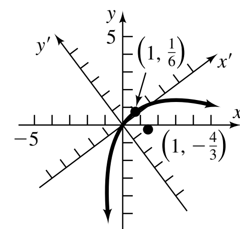
37. $\theta \approx 63°$ (vea el problema 27)
$y'^2 = 8x'$
Parábola
Vértice en $(0, 0)$
Foco en $(2, 0)$



39. $\theta \approx 34°$ (vea el problema 29)
$\dfrac{(x' - 2)^2}{4} + y'^2 = 1$
Elipse
Centro en $(2, 0)$
El eje mayor es el eje x'.
Vértices en $(4, 0)$ y $(0, 0)$



41. $\cot(2\theta) = \dfrac{7}{24}$;
$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) \approx 37°$
$(x' - 1)^2 = -6\left(y' - \dfrac{1}{6}\right)$
Parábola
Vértice en $\left(1, \dfrac{1}{6}\right)$
Foco en $\left(1, -\dfrac{4}{3}\right)$



43. Hipérbola **45.** Hipérbola
47. Parábola **49.** Elipse **51.** Elipse
53. Consulte la ecuación (6):
$A' = A\cos^2\theta + B \operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta$
$B' = B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2(C - A)(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$
$C' = A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$
$D' = D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta$
$E' = -D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta$
$F' = F$
55. Utilice el problema 53 para encontrar $B'^2 - 4A'C'$.
Después de mucha cancelación, $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$.

57. La distancia entre P_1 y P_2 en el plano $x'y'$ es igual a $\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$.
Suponiendo que $x' = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta$ y $y' = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$, entonces $(x_2' - x_1')^2 = (x_2\cos\theta - y_2\operatorname{sen}\theta - x_1\cos\theta + y_1\operatorname{sen}\theta)^2$
$= \cos^2\theta(x_2 - x_1)^2 - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \operatorname{sen}^2\theta(y_2 - y_1)^2$ y
$(y_2' - y_1')^2 = (x_2\operatorname{sen}\theta + y_2\cos\theta - x_1\operatorname{sen}\theta - y_1\cos\theta)^2 = \operatorname{sen}^2\theta(x_2 - x_1)^2 + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \cos^2\theta(y_2 - y_1)^2$.
Por lo tanto, $(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = \cos^2\theta(x_2 - x_1)^2 + \operatorname{sen}^2\theta(x_2 - x_1)^2 + \operatorname{sen}^2\theta(y_2 - y_1)^2 + \cos^2\theta(y_2 - y_1)^2$
$= (x_2 - x_1)^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + (y_2 - y_1)^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

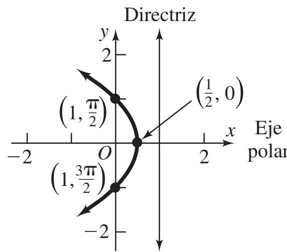
10.6 Conceptos y vocabulario *(página 819)*

3. $\frac{1}{2}$; elipse; paralela; 4; abajo **4.** 1; < 1; > 1 **5.** Verdadero **6.** Verdadero

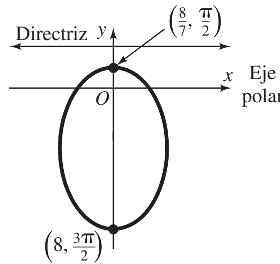
10.6 Ejercicios *(página 819)*

7. Parábola; la directriz es perpendicular al eje polar 1 unidad a la derecha del polo.
9. Hipérbola; la directriz es paralela al eje polar $\frac{4}{3}$ unidades abajo del polo.
11. Elipse; la directriz es perpendicular al eje polar $\frac{3}{2}$ unidades a la izquierda del polo.

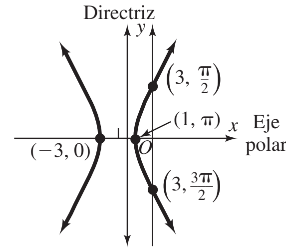
13. Parábola; la directriz es perpendicular al eje polar 1 unidad a la derecha del polo; el vértice está en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



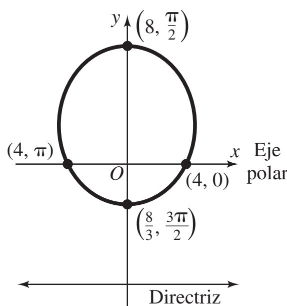
15. Elipse; la directriz es paralela al eje polar $\frac{8}{3}$ unidades arriba del polo; los vértices están en $\left(\frac{8}{7}, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(8, \frac{3\pi}{2}\right)$.



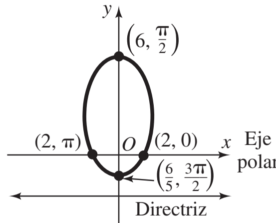
17. Hipérbola; la directriz es perpendicular al eje polar $\frac{3}{2}$ unidades a la izquierda del polo; los vértices están en $(-3, 0)$ y $(1, \pi)$.



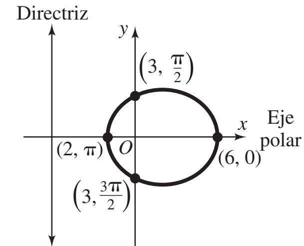
19. Elipse; la directriz es paralela al eje polar 8 unidades abajo del polo; los vértices están en $\left(8, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{8}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$.



21. Elipse; la directriz es paralela al eje polar 3 unidades abajo del polo; los vértices están en $\left(6, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{6}{5}, \frac{3\pi}{2}\right)$.



23. Elipse; la directriz es perpendicular al eje polar 3 unidades a la izquierda del polo; los vértices están en $(6, 0)$ y $(2, \pi)$.



25. $y^2 + 2x - 1 = 0$ **27.** $16x^2 + 7y^2 + 48y - 64 = 0$ **29.** $3x^2 - y^2 + 12x + 9 = 0$ **31.** $4x^2 + 3y^2 - 16y - 64 = 0$
33. $9x^2 + 5y^2 - 24y - 36 = 0$ **35.** $3x^2 + 4y^2 - 12x - 36 = 0$ **37.** $r = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta}$ **39.** $r = \frac{12}{5 - 4\cos\theta}$ **41.** $r = \frac{12}{1 - 6\operatorname{sen}\theta}$

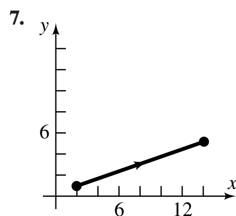
43. Usar $d(D, P) = p - r\cos\theta$ en la deducción de la ecuación a) de la tabla 5.
45. Usar $d(D, P) = p + r\operatorname{sen}\theta$ en la deducción de la ecuación a) de la tabla 5.

10.7 Conceptos y vocabulario *(página 830)*

2. Curva plana; parámetro **3.** Elipse **4.** Cicloide **5.** Falso **6.** Verdadero

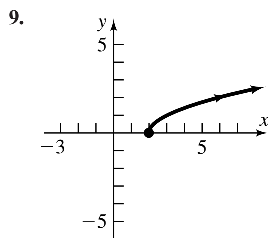
10.7 Ejercicios *(página 831)*

7.



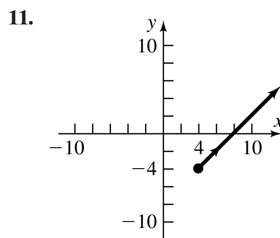
$x - 3y + 1 = 0$

9.



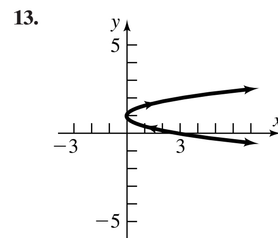
$y = \sqrt{x - 2}$

11.



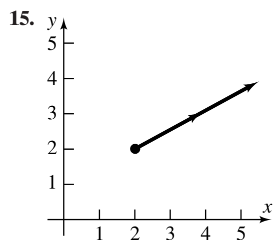
$x = y + 8$

13.



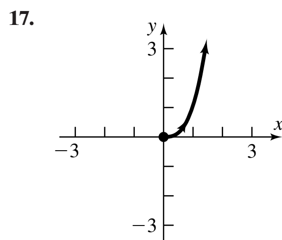
$x = 3(y - 1)^2$

15.



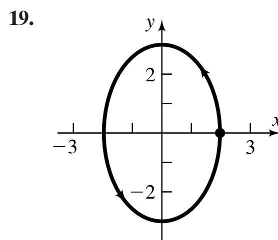
$2y = 2 + x$

17.



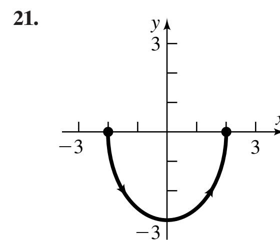
$y = x^3$

19.



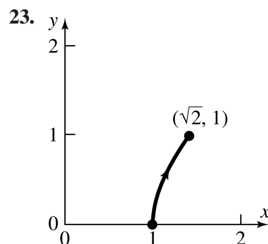
$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

21.



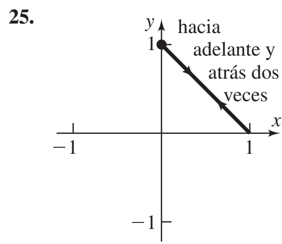
$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

23.



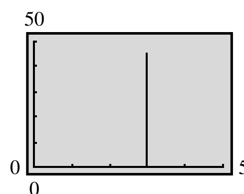
$x^2 - y^2 = 1$

25.

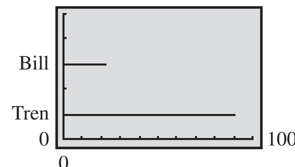


$x + y = 1$

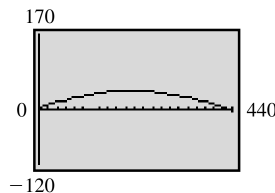
27. **a)** $x = 3$
$y = -16t^2 + 50t + 6$
b) 3.24 seg
c) 1.5625 seg; 45.0625 pies
d)



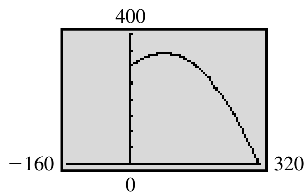
29. **a)** Tren: $x_1 = t^2, y_1 = 1$;
Bill: $x_2 = 5(t - 5), y_2 = 3$
b) Bill no alcanzará el tren.
c)



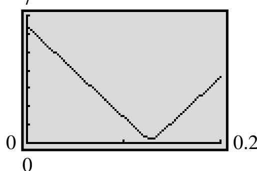
31. **a)** $x = (145 \cos 20°)t$
$y = -16t^2 + (145 \operatorname{sen} 20°)t + 5$
b) 3.197 seg
c) 1.55 seg; 43.43 pies
d) 435.61 pies
e)



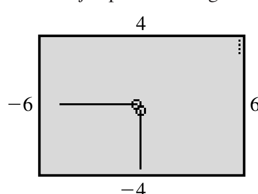
33. **a)** $x = (40 \cos 45°)t$
$y = -4.9t^2 + (40 \operatorname{sen} 45°)t + 300$
b) 11.226 seg
c) 2.886 seg; 340.8 m
d) 317.5 m
e)



35. **a)** Compacto: $x = 40t - 5, y = 0$; De lujo: $x = 0, y = 30t - 4$ **b)** $d = \sqrt{(40t - 5)^2 + (30t - 4)^2}$
c)



d) 0.2 mi; 7.68 min **e)** Gire los ejes para ver la gráfica:

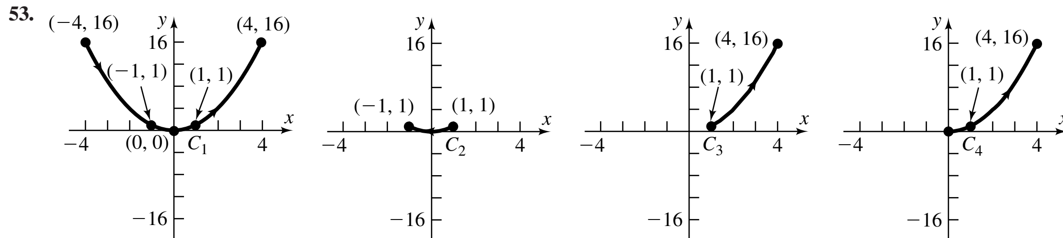


37. $x = t$, $y = 4t - 1$ o $x = \dfrac{t+1}{4}$, $y = t$ **39.** $x = t$, $y = t^2 + 1$ o $x = t^3$, $y = t^6 + 1$ **41.** $x = t$, $y = t^3$ o $x = \sqrt[3]{t}$, $y = t$

43. $x = t$, $y = t^{2/3}$ o $x = t^3$, $y = t^2, t \geq 0$ **45.** $x = t + 2, y = t, 0 \leq t \leq 5$ **47.** $x = 3\cos t, y = 2\,\mathrm{sen}\, t, 0 \leq t \leq 2\pi$

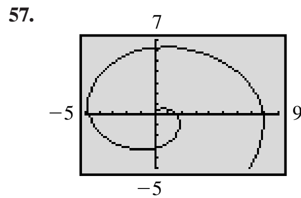
49. $x = 2\cos(\pi t), y = -3\,\mathrm{sen}(\pi t), 0 \leq t \leq 2$ **51.** $x = 2\,\mathrm{sen}(2\pi t), y = 3\cos(2\pi t), 0 \leq t \leq 1$

53.

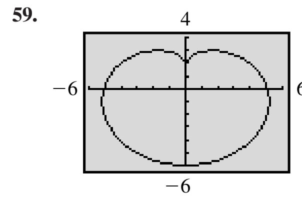


55. La orientación es de (x_1, y_1) a (x_2, y_2).

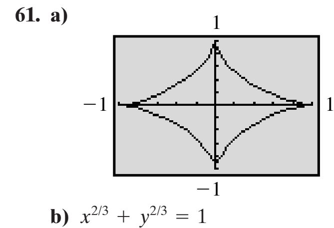
57.



59.



61. a)



b) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

Ejercicios de repaso *(página 835)*

1. Parábola; vértice $(0, 0)$, foco $(-4, 0)$, directriz $x = 4$ **3.** Hipérbola; centro $(0, 0)$, vértices $(5, 0)$ y $(-5, 0)$, focos $(\sqrt{26}, 0)$ y $(-\sqrt{26}, 0)$, asíntotas $y = \frac{1}{5}x$ y $y = -\frac{1}{5}x$ **5.** Elipse; centro $(0, 0)$, vértices $(0, 5)$ y $(0, -5)$, focos $(0, 3)$ y $(0, -3)$

7. $x^2 = -4(y - 1)$: Parábola; vértice $(0, 1)$, foco $(0, 0)$, directriz $y = 2$ **9.** $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{8} = 1$: Hipérbola; centro $(0, 0)$, vértices $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$, focos $(\sqrt{10}, 0)$ y $(-\sqrt{10}, 0)$, asíntotas $y = 2x$ y $y = -2x$

11. $(x - 2)^2 = 2(y + 2)$: Parábola; vértice $(2, -2)$, foco $\left(2, -\dfrac{3}{2}\right)$, directriz $y = -\dfrac{5}{2}$

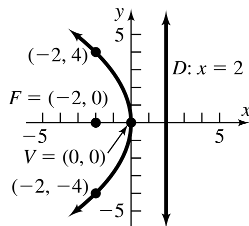
13. $\dfrac{(y - 2)^2}{4} - (x - 1)^2 = 1$: Hipérbola; centro $(1, 2)$, vértices $(1, 4)$ y $(1, 0)$, focos $(1, 2 + \sqrt{5})$ y $(1, 2 - \sqrt{5})$, asíntotas $y - 2 = \pm 2(x - 1)$

15. $\dfrac{(x - 2)^2}{9} + \dfrac{(y - 1)^2}{4} = 1$: Elipse; centro $(2, 1)$, vértices $(5, 1)$ y $(-1, 1)$, focos $(2 + \sqrt{5}, 1)$ y $(2 - \sqrt{5}, 1)$

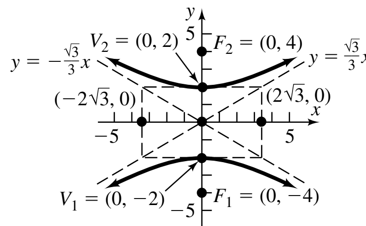
17. $(x - 2)^2 = -4(y + 1)$: Parábola; vértice $(2, -1)$, foco $(2, -2)$, directriz $y = 0$

19. $\dfrac{(x - 1)^2}{4} + \dfrac{(y + 1)^2}{9} = 1$: Elipse; centro $(1, -1)$, vértices $(1, 2)$ y $(1, -4)$, focos $(1, -1 + \sqrt{5})$ y $(1, -1 - \sqrt{5})$

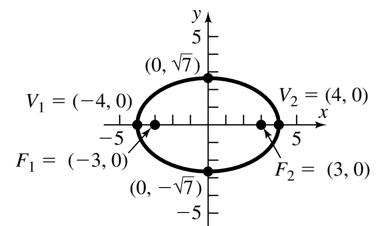
21. $y^2 = -8x$



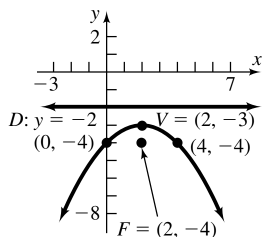
23. $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{12} = 1$



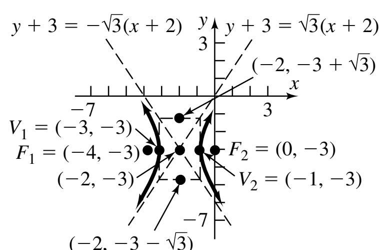
25. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$



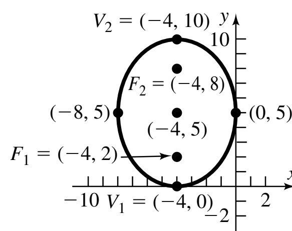
27. $(x-2)^2 = -4(y+3)$



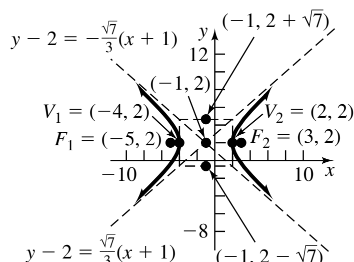
29. $(x+2)^2 - \frac{(y+3)^2}{3} = 1$



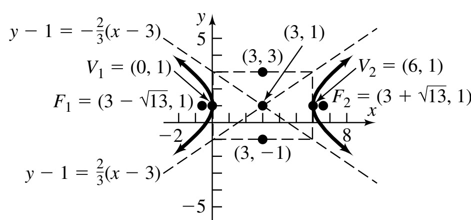
31. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$



33. $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$



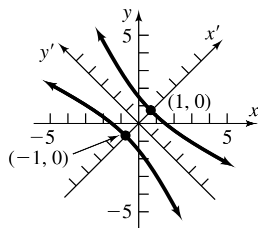
35. $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$



37. Parábola
39. Elipse
41. Parábola
43. Hipérbola
45. Elipse

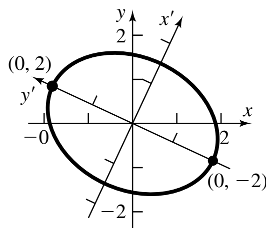
47. $x'^2 - \frac{y'^2}{9} = 1$

Hipérbola
Centro en el origen
Eje transversal el eje x'
Vértices en $(\pm 1, 0)$



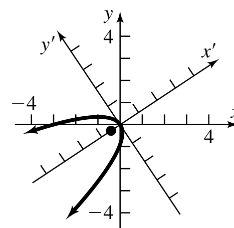
49. $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1$

Elipse
Centro en el origen
Eje mayor al eje y'
Vértices en $(0, \pm 2)$

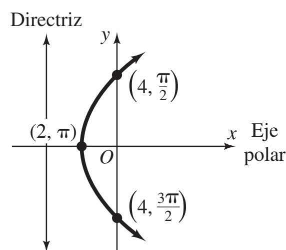


51. $y'^2 = -\frac{4\sqrt{13}}{13}x'$

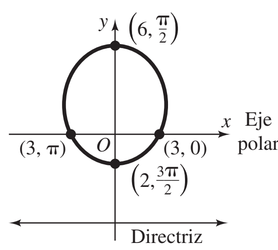
Parábola
Vértice en el origen
Foco sobre el eje x' $\left(-\frac{\sqrt{13}}{13}, 0\right)$



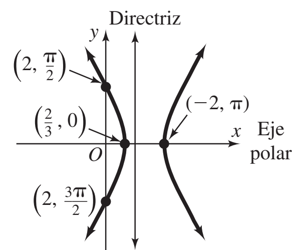
53. Parábola; la directriz es perpendicular al eje polar, 4 unidades a la izquierda del polo; el vértice es $(2, \pi)$.



55. Elipse; la directriz es paralela al eje polar, 6 unidades abajo del polo; los vértices son $a6, \frac{\pi}{2}b$ y $a2, \frac{3\pi}{2}b$.

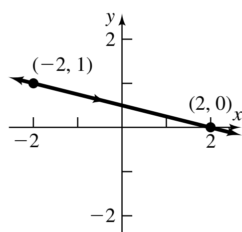


57. Hipérbola; la directriz es perpendicular al eje polar, 1 unidades a la derecha del polo; los vértices son $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ y $(-2, \pi)$.



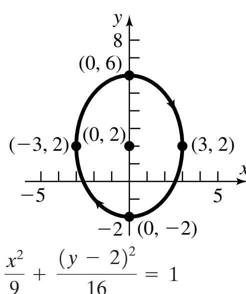
59. $y^2 - 8x - 16 = 0$ **61.** $3x^2 - y^2 - 8x + 4 = 0$

63.



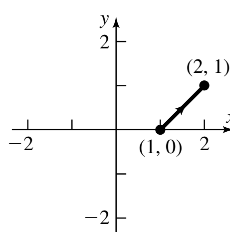
$x + 4y = 2$

65.



$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

67.



$1 + y = x$

69. $x = t, y = -2t + 4, -\infty < t < \infty$

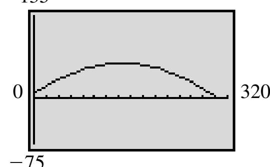
$x = \frac{t-4}{-2}, y = t, -\infty < t < \infty$

71. $x = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), y = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right), 0 \le t \le 4$

73. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ **75.** La elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ **77.** $\frac{1}{4}$ pies o 3 pulgadas **79.** 19.72 pies, 18.86 pies, 14.91 pies

81. a) 45.24 millas de la estación maestra **b)** 0.000645 seg **c)** (66, 20)

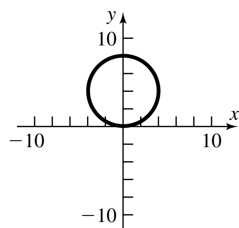
83. a) $x = (100\cos 35°)t$
$y = -16t^2 + (100\,\text{sen}\,35°)t + 6$
b) 3.6866 seg **c)** 1.7924 seg; 57.4 pies **d)** 302 pies **e)**



Repaso acumulativo *(página 838)*

1. $\theta = \frac{\pi}{12} \pm \pi k$, donde k es cualquier entero; $\theta = \frac{5\pi}{12} \pm \pi k$, donde k es cualquier entero; **2.** $\theta = \frac{\pi}{6}$

3. $r = 8\,\text{sen}\,\theta$



4. $\left\{x \middle| x \neq \frac{3\pi}{4} \pm \pi k, \text{donde } k \text{ es cualquier entero}\right\}$ **5.** $-6x + 5 - 3h$

6. a) Dominio: $(-\infty, \infty)$; Rango: $(2, \infty)$
b) $y = \log_3(x-2)$; Dominio: $(2, \infty)$; Rango: $(-\infty, \infty)$

7. $x = 2$ o $x = -\frac{1}{3}$ o $x = -5$

8. $-3 \le x \le 2$ o $[-3, 2]$ **9.** $\theta = 22.5°$

10. a) $y = 2x - 2$ **b)** $(x-2)^2 + y^2 = 4$
c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **d)** $y = 2(x-1)^2$ **e)** $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1$ **f)** $y = 4^x$

11. a) 18 **b)** (2, 18]

CAPÍTULO 11 Sistemas de ecuaciones y desigualdades

11.1 Conceptos y vocabulario *(página 852)*

3. Incongruente **4.** Congruente **5.** Falso **6.** Verdadero

11.1 Ejercicios *(página 852)*

7. $\begin{cases} 2(2) - (-1) = 5 \\ 5(2) + 2(-1) = 8 \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} 3(2) - 4\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \\ \frac{1}{2}(2) - 3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} 4 - 1 = 3 \\ \frac{1}{2}(4) + 1 = 3 \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} 3(1) + 3(-1) + 2(2) = 4 \\ 1 - (-1) - 2 = 0 \\ 2(-1) - 3(2) = -8 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3(2) + 3(-2) + 2(2) = 4 \\ 2 - 3(-2) + 2 = 10 \\ 5(2) - 2(-2) - 3(2) = 8 \end{cases}$ **17.** $x = 6, y = 2$ **19.** $x = 3, y = 2$ **21.** $x = 8, y = -4$ **23.** $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{6}$ **25.** Incongruente

27. $x = 1, y = 2$ **29.** $x = 4 - 2y$, donde y es cualquier número real **31.** $x = 1, y = 1$ **33.** $x = \frac{3}{2}, y = 1$ **35.** $x = 4, y = 3$ **37.** $x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{5}$

39. $x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{3}$ **41.** $x = 8, y = 2, z = 0$ **43.** $x = 2, y = -1, z = 1$ **45.** Incongruente **47.** $x = 5z - 2, y = 4z - 3$, donde z es cualquier número real **49.** Incongruente **51.** $x = 1, y = 3, z = -2$ **53.** $x = -3, y = \frac{1}{2}, z = 1$ **55.** Largo 30 pies; ancho 15 pies **57.** Hamburguesa con queso $1.55; malteada $0.85 **59.** 22.5 libras **61.** Velocidad promedio del viento 25 mph; velocidad promedio del aire 175 mph **63.** 80 juegos de $25 y 120 de $45 **65.** $5.56 **67.** Combinará 50 mg del primer compuesto con 75 mg del segundo.

69. $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{5}{3}, c = 1$ **71.** $I_1 = \frac{10}{71}, I_2 = \frac{65}{71}, I_3 = \frac{55}{71}$ **73.** 100 asientos de orquesta, 210 principales y 190 de gayola

75. 1.5 de pollo, 1 de maíz, 2 de leche **77.** Si x = precio de las hamburguesas, y = precio de las papas, z = precio de los refrescos, entonces $x = 2.75 - z, y = \frac{41}{60} + \frac{1}{3}z, \$0.60 \le z \le \$0.90$.

No hay información suficiente:

x	$2.13	$2.01	$1.86
y	$0.89	$0.93	$0.98
z	$0.62	$0.74	$0.89

79. Le llevará 30 horas a Beth, 24 a Bill y 40 a Edie.

11.2 Conceptos y vocabulario *(página 869)*

1. Matriz **2.** Aumentada **3.** Verdadero **4.** Falso

11.2 Ejercicios *(página 869)*

5. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{array}\right]$ **7.** $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 4 & -6 & -2 \end{array}\right]$ **9.** $\left[\begin{array}{cc|c} 0.01 & -0.03 & 0.06 \\ 0.13 & 0.10 & 0.20 \end{array}\right]$ **11.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 10 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$ **13.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$

15. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right]$ **17.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$ **19. a)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$ **b)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & 16 & 15 \end{array}\right]$

21. a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -6 & 4 & 6 \end{array}\right]$ **b)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -15 & 10 & -12 \end{array}\right]$ **23. a)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right]$ **b)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 6 & -2 \\ 0 & -8 & 7 & 0 \end{array}\right]$

25. $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$
congruente; $x = 5, y = -1$

27. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$
incongruente

29. $\begin{cases} x + 2z = -1 \\ y - 4z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$
congruente;
$x = -1 - 2z$,
$y = -2 + 4z$,
z es cualquier número real

31. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$
congruente;
$x_1 = 1, x_2 = 2 - x_4$,
$x_3 = 3 - 2x_4$,
x_4 es cualquier número real

33. $\begin{cases} x_1 + 4x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$
congruente;
$x_1 = 2 - 4x_4$,
$x_2 = 3 - x_3 - 3x_4$,
x_3, x_4 son cualesquier números reales

35. $\begin{cases} x_1 + x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$
congruente;
$x_1 = -2 - x_4$,
$x_2 = 2 - 2x_4$,
$x_3 = x_4$,
x_4 es cualquier número real

37. $x = 6, y = 2$ **39.** $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}$
41. $x = 4 - 2y$, y es cualquier número real
43. $x = \frac{3}{2}, y = 1$ **45.** $x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{5}$
47. $x = 8, y = 2, z = 0$ **49.** $x = 2, y = -1, z = 1$
51. Incongruente
53. $x = 5z - 2, y = 4z - 3$, donde z es cualesquier números reales

55. Incongruente **57.** $x = 1, y = 3, z = -2$ **59.** $x = -3, y = \frac{1}{2}, z = 1$ **61.** $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = 1$ **63.** $x = 1, y = 2, z = 0, w = 1$ **65.** $y = 0, z = 1 - x$, donde x es cualquier número real **67.** $x = 2, y = z - 3$, donde z es cualquier número real **69.** $x = \frac{13}{9}, y = \frac{7}{18}, z = \frac{19}{18}$ **71.** $x = \frac{7}{5} - \frac{3}{5}z - \frac{2}{5}w, y = -\frac{8}{5} + \frac{7}{5}z + \frac{13}{5}w$, donde z y w son cualesquier números reales **73.** $y = -2x^2 + x + 3$ **75.** $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5$ **77.** 1.5 de salmón, 2 de huevo, 1 de calabacitas **79.** $4000 en letras de la tesorería, $4000 en bonos de la tesorería, $2000 en bonos corporativos **81.** 8 deltas, 5 betas, 10 sigmas **83.** $I_1 = \frac{44}{23}, I_2 = 2, I_3 = \frac{16}{23}, I_4 = \frac{28}{23}$

85. a)

Cantidad invertida al

7%	9%	11%
0	10,000	10,000
1000	8000	11,000
2000	6000	12,000
3000	4000	13,000
4000	2000	14,000
5000	0	15,000

b)

Cantidad invertida al

7%	9%	11%
12,500	12,500	0
14,500	8500	2000
16,500	4500	4000
18,750	0	6250

c) Todo el dinero invertido al 7% rinde \$2100, que es más de lo que se necesita.

87.

Primer líquido	Segundo líquido	Tercer líquido
50 mg	75 mg	0 mg
36 mg	76 mg	8 mg
22 mg	77 mg	16 mg
8 mg	78 mg	24 mg

11.3 Conceptos y vocabulario *(página 881)*

1. Determinantes **2.** $ad - bc$ **3.** Falso **4.** Falso

11.3 Ejercicios *(página 881)*

5. 2 **7.** 22 **9.** −2 **11.** 10 **13.** −26 **15.** $x = 6, y = 2$ **17.** $x = 3, y = 2$ **19.** $x = 8, y = -4$ **21.** $x = 4, y = -2$ **23.** No es aplicable

25. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}$ **27.** $x = \frac{1}{10}, y = \frac{2}{5}$ **29.** $x = \frac{3}{2}, y = 1$ **31.** $x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{5}$ **33.** $x = 1, y = 3, z = -2$ **35.** $x = -3, y = \frac{1}{2}, z = 1$

37. No es aplicable **39.** $x = 0, y = 0, z = 0$ **41.** No es aplicable **43.** −5 **45.** $\frac{13}{11}$ **47.** 0 o −9 **49.** −4 **51.** 12 **53.** 8 **55.** 8

57.
$$\begin{aligned}(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) &= 0\\ (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y &= x_2y_1 - x_1y_2\\ (x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 &= (y_2 - y_1)x + x_2y_1 - x_1y_2 - (x_2 - x_1)y_1\\ (x_2 - x_1)(y - y_1) &= (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1\\ y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\end{aligned}$$

59.
$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1\\ y^2 & y & 1\\ z^2 & z & 1\end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} y & 1\\ z & 1\end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} y^2 & 1\\ z^2 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y^2 & y\\ z^2 & z\end{vmatrix} = x^2(y - z) - x(y^2 - z^2) + yz(y - z)$$
$$= (y - z)[x^2 - x(y + z) + yz] = (y - z)[(x^2 - xy) - (xz - yz)] = (y - z)[x(x - y) - z(x - y)]$$
$$= (y - z)(x - y)(x - z)$$

61.
$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11}\\ a_{23} & a_{22} & a_{21}\\ a_{33} & a_{32} & a_{31}\end{vmatrix} = a_{13}(a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21}) - a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}) + a_{11}(a_{23}a_{32} - a_{33}a_{22})$$
$$= -[a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})] = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

63.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\\ a_{21} & a_{22} & a_{21}\\ a_{31} & a_{32} & a_{31}\end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21}) - a_{12}(a_{21}a_{31} - a_{31}a_{21}) + a_{11}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{21} - a_{12}(0) + a_{11}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{31}a_{22} = 0$$

Problemas históricos *(página 857)*

1. a) $2 - 5i \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -5\\ 5 & 2\end{bmatrix}, 1 + 3i \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & -5\\ 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3\\ -3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1\\ -1 & 17\end{bmatrix}$ **c)** $17 + i$ **d)** $17 + i$

2. a) $x = k(ar + bs) + l(cr + ds) = r(ka + lc) + s(kb + ld)$

$y = m(ar + bs) + n(cr + ds) = r(ma + nc) + s(mb + nd)$

b) $A = \begin{bmatrix} ka + lc & kb + ld\\ ma + nc & mb + nd\end{bmatrix}$

11.4 Conceptos y vocabulario *(página 896)*

1. Inversa **2.** Cuadrada **3.** Identidad **4.** Falso **5.** Falso **6.** Falso

11.4 Ejercicios *(página 896)*

7. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -5\\ -1 & 5 & 4\end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 0 & 12 & -20\\ 4 & 8 & 24\end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -8 & 7 & -15\\ 7 & 0 & 22\end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 28 & -9\\ 4 & 23\end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 1 & 14 & -14\\ 2 & 22 & -18\\ 3 & 0 & 28\end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 15 & 21 & -16\\ 22 & 34 & -22\\ -11 & 7 & 22\end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 25 & -9 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} -13 & 7 & -12 \\ -18 & 10 & -14 \\ 17 & -7 & 34 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$ **27.** $\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 34 & 13 \\ 47 & 20 \end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **31.** $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{a} \\ -1 & \frac{2}{a} \end{bmatrix}$ **35.** $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ **37.** $\begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ **39.** $x = 3, y = 2$ **41.** $x = -5, y = 10$ **43.** $x = 2, y = -1$

45. $x = \frac{1}{2}, y = 2$ **47.** $x = -2, y = 1$ **49.** $x = \frac{2}{a}, y = \frac{3}{a}$ **51.** $x = -2, y = 3, z = 5$ **53.** $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 1$

55. $x = -\frac{34}{7}, y = \frac{85}{7}, z = \frac{12}{7}$ **57.** $x = \frac{1}{3}, y = 1, z = \frac{2}{3}$ **59.** $\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$

61. $\left[\begin{array}{cc|cc} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$

63. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 14 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{3}{7} \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{11}{42} \end{array}\right]$ **65.** $\begin{bmatrix} 0.01 & 0.05 & -0.01 \\ 0.01 & -0.02 & 0.01 \\ -0.02 & 0.01 & 0.03 \end{bmatrix}$ **67.** $\begin{bmatrix} 0.02 & -0.04 & -0.01 & 0.01 \\ -0.02 & 0.05 & 0.03 & -0.03 \\ 0.02 & 0.01 & -0.04 & 0.00 \\ -0.02 & 0.06 & 0.07 & 0.06 \end{bmatrix}$

69. $x = 4.57, y = -6.44, z = -24.07$ **71.** $x = -1.19, y = 2.46, z = 8.27$

73. a) $\begin{bmatrix} 500 & 350 & 400 \\ 700 & 500 & 850 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 500 & 700 \\ 350 & 500 \\ 400 & 850 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 11{,}500 \\ 17{,}050 \end{bmatrix}$ **d)** $[0.10 \quad 0.05]$ **e)** \$2002.50

75. Si $D = ad - bc \neq 0$, entonces $a \neq 0$ y $d \neq 0$, o $b \neq 0$ y $c \neq 0$. Suponiendo lo anterior, entonces:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{D}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{array}\right] \to \frac{1}{D}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d & -b \\ 0 & 1 & -c & a \end{array}\right]$$

$$R_1 = \frac{1}{a}r_1 \qquad R_2 = -cr_1 + r_2 \qquad R_2 = \frac{a}{D}r_2 \qquad R_1 = -\frac{b}{a}r_2 + r_1$$

11.5 Ejercicios *(página 906)*

5. Propia **7.** Impropia; $1 + \frac{9}{x^2 - 4}$ **9.** Impropia; $5x + \frac{22x - 1}{x^2 - 4}$ **11.** Impropia; $1 + \frac{-2(x - 6)}{(x + 4)(x - 3)}$ **13.** $\frac{-4}{x} + \frac{4}{x - 1}$

15. $\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2 + 1}$ **17.** $\frac{-1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2}$ **19.** $\frac{\frac{1}{4}}{x + 1} + \frac{\frac{3}{4}}{x - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x - 1)^2}$ **21.** $\frac{\frac{1}{12}}{x - 2} + \frac{-\frac{1}{12}(x + 4)}{x^2 + 2x + 4}$

23. $\frac{\frac{1}{4}}{x - 1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x - 1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x + 1)^2}$ **25.** $\frac{-5}{x + 2} + \frac{5}{x + 1} + \frac{-4}{(x + 1)^2}$ **27.** $\frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-\frac{1}{4}(x + 4)}{x^2 + 4}$

29. $\frac{\frac{2}{3}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{3}(x + 1)}{x^2 + 2x + 4}$ **31.** $\frac{\frac{2}{7}}{3x - 2} + \frac{\frac{1}{7}}{2x + 1}$ **33.** $\frac{\frac{3}{4}}{x + 3} + \frac{\frac{1}{4}}{x - 1}$ **35.** $\frac{1}{x^2 + 4} + \frac{2x - 1}{(x^2 + 4)^2}$ **37.** $\frac{-1}{x} + \frac{2}{x - 3} + \frac{-1}{x + 1}$

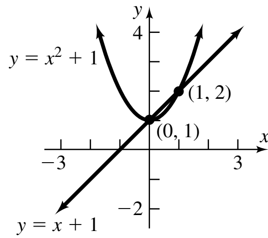
39. $\frac{4}{x - 2} + \frac{-3}{x - 1} + \frac{-1}{(x - 1)^2}$ **41.** $\frac{x}{(x^2 + 16)^2} + \frac{-16x}{(x^2 + 16)^3}$ **43.** $\frac{-\frac{8}{7}}{2x + 1} + \frac{\frac{4}{7}}{x - 3}$ **45.** $\frac{-\frac{2}{9}}{x} + \frac{-\frac{1}{3}}{x^2} + \frac{\frac{1}{6}}{x - 3} + \frac{\frac{1}{18}}{x + 3}$

Problemas históricos *(página 912)*

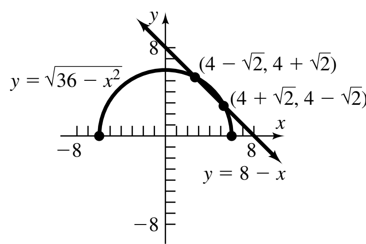
1. $x = 6$ unidades, $y = 8$ unidades

11.6 Ejercicios *(página 913)*

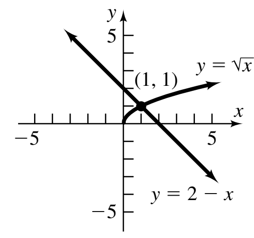
5.



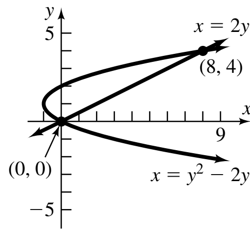
7.



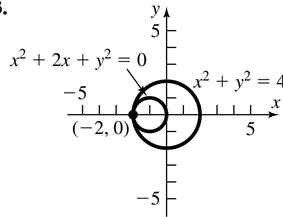
9.



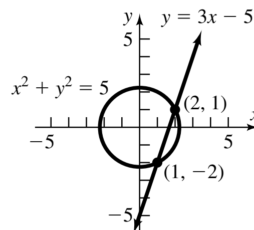
11.



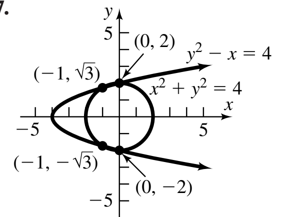
13.



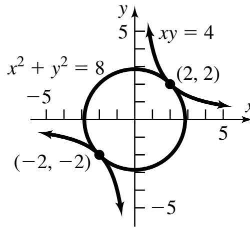
15.



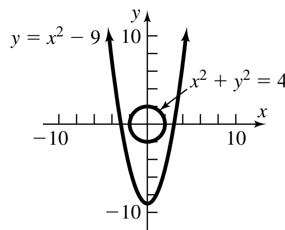
17.



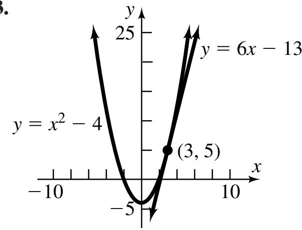
19.



21. No hay puntos de intersección



23.



25. $x = 1, y = 4; x = -1, y = -4; x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}; x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ **27.** $x = 0, y = 1; x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3}$

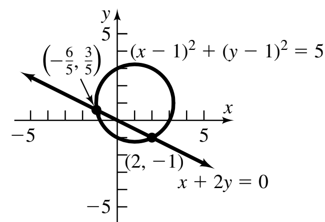
29. $x = 0, y = -1; x = \frac{5}{2}, y = -\frac{7}{2}$ **31.** $x = 2, y = \frac{1}{3}; x = \frac{1}{2}, y = \frac{4}{3}$ **33.** $x = 3, y = 2; x = 3, y = -2; x = -3, y = 2; x = -3, y = -2$

35. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}; x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}; x = -\frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}; x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}$ **37.** $x = \sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}; x = -\sqrt{2}, y = -2\sqrt{2}$

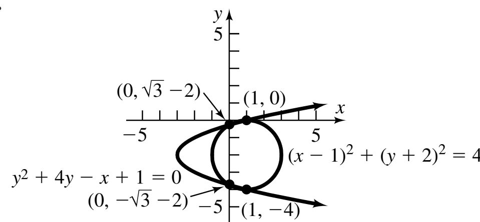
39. No existe solución real. **41.** $x = \frac{8}{3}, y = \frac{2\sqrt{10}}{3}; x = -\frac{8}{3}, y = \frac{2\sqrt{10}}{3}; x = \frac{8}{3}, y = -\frac{2\sqrt{10}}{3}; x = -\frac{8}{3}, y = -\frac{2\sqrt{10}}{3}$

43. $x = 1, y = \frac{1}{2}; x = -1, y = \frac{1}{2}; x = 1, y = -\frac{1}{2}; x = -1, y = -\frac{1}{2}$ **45.** No existe solución real. **47.** $x = \sqrt{3}, y = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3}, y = -\sqrt{3}; x = 2, y = 1; x = -2, y = -1$ **49.** $x = 0, y = -2; x = 0, y = 1; x = 2, y = -1$ **51.** $x = 2, y = 8$ **53.** $x = 81, y = 3$

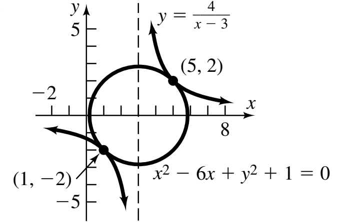
55.



57.



59.



61. $x = 0.48, y = 0.62$ **63.** $x = -1.65, y = -0.89$ **65.** $x = 0.58, y = 1.86; x = 1.81, y = 1.05; x = 0.58, y = -1.86; x = 1.81, y = -1.05$ **67.** $x = 2.35, y = 0.85$

69. 3 y 1; −3 y −1 **71.** 2 y 2; −2 y −2 **73.** $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ **75.** 5 **77.** 5 por 3 pulgadas.

79. 2 cm y 4 cm **81.** Tortuga: 7 m/h, liebre: $7\frac{1}{2}$ m/h **83.** 12 cm por 18 cm

85. $x = 60$ pies; $y = 30$ pies

87. $l = \dfrac{P + \sqrt{P^2 - 16A}}{4}$; $w = \dfrac{P - \sqrt{P^2 - 16A}}{4}$ **89.** $y = 4x - 4$ **91.** $y = 2x + 1$ **93.** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ **95.** $y = 2x - 3$

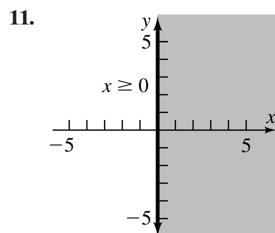
97. $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **99. a)** 4.274 por 4.274 pies o 0.093 por 0.093 pies

11.7 Conceptos y vocabulario *(página 922)*

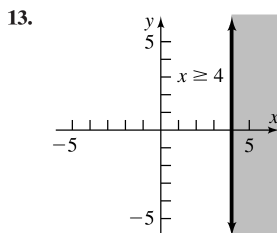
7. Se satisface **8.** Medio plano **9.** Falso **10.** Verdadero

11.7 Ejercicios *(página 922)*

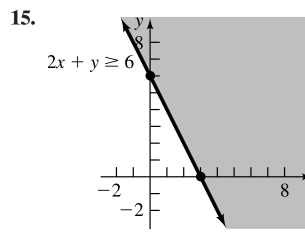
11.



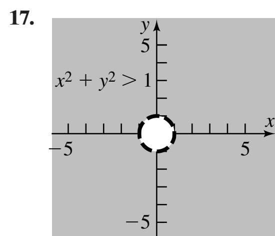
13.



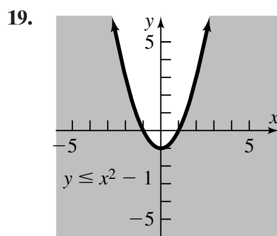
15.



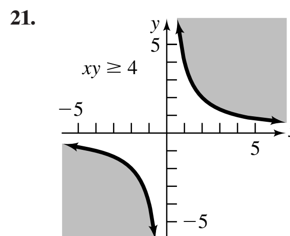
17.



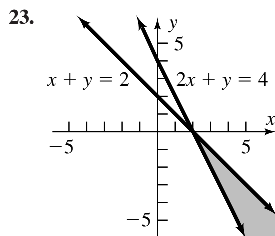
19.



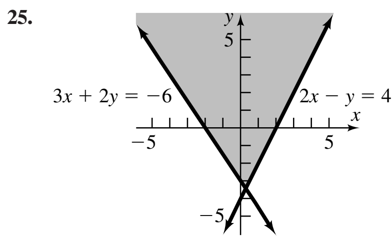
21.



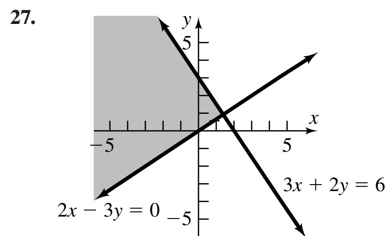
23.



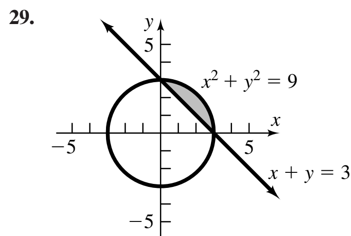
25.



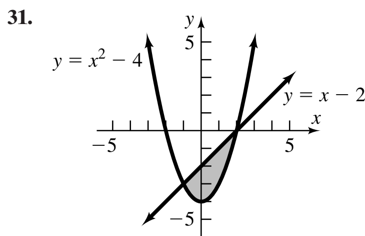
27.



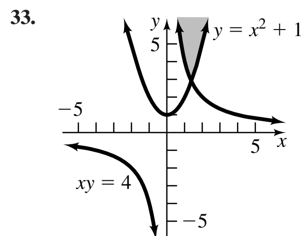
29.



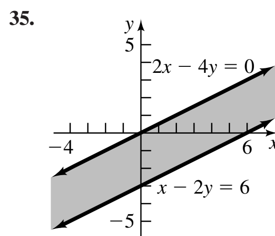
31.



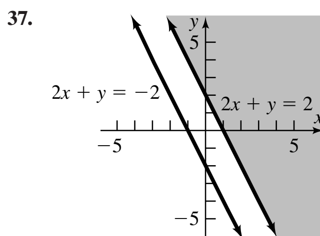
33.



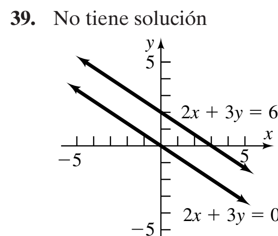
35.



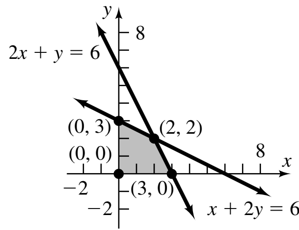
37.



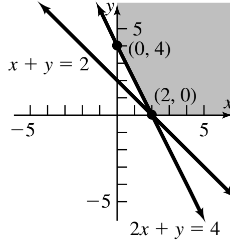
39. No tiene solución



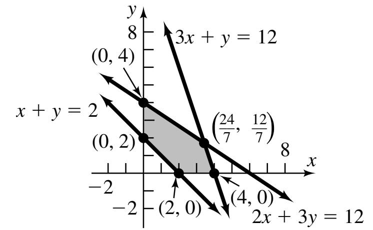
41. Acotada; esquinas (0, 0), (3, 0), (2, 2), (0, 3)



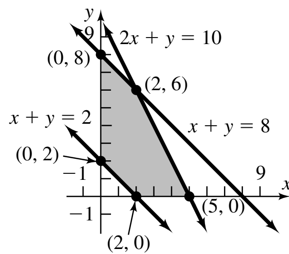
43. No acotada; esquinas (2, 0), (0, 4)



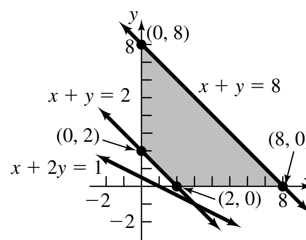
45. Acotada; esquinas (2, 0), (4, 0), $\left(\frac{24}{7}, \frac{12}{7}\right)$, (0, 4), (0, 2)



47. Acotada; esquinas (2, 0), (5, 0), (2, 6), (0, 8), (0, 2)

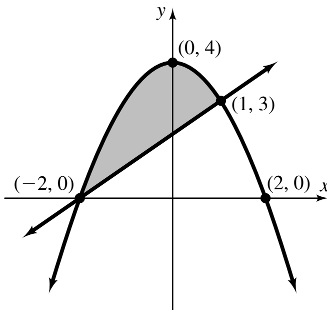


49. Acotada; esquinas (1, 0), (10, 0), (0, 5), $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

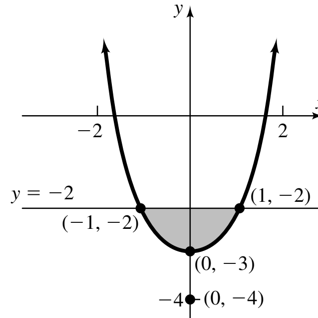


51. $\begin{cases} x \le 4 \\ x + y \le 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ **53.** $\begin{cases} x \le 20 \\ y \ge 15 \\ x + y \le 50 \\ x - y \le 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$

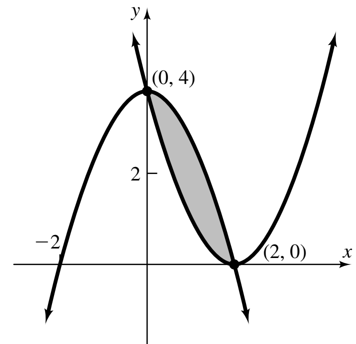
55.



57.

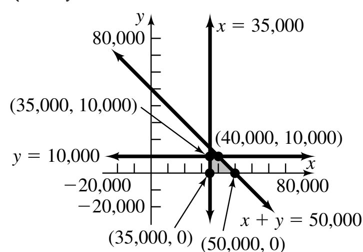


59.



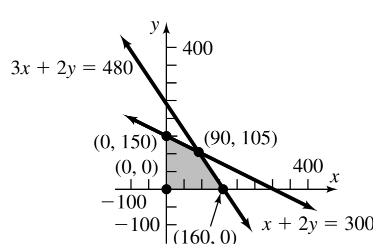
61. a) $\begin{cases} x + y \le 50{,}000 \\ x \ge 35{,}000 \\ y \le 10{,}000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

b)



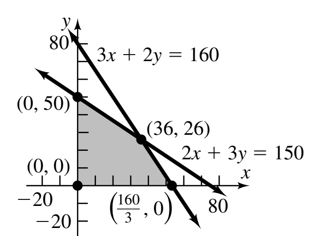
63. a) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + 2y \le 300 \\ 3x + 2y \le 480 \end{cases}$

b)



65. a) $\begin{cases} 3x + 2y \le 160 \\ 2x + 3y \le 150 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

b)



11.8 Conceptos y vocabulario *(página 930)*

1. Función objetiva **2.** Verdadero

11.8 Ejercicios *(página 930)*

3. El valor máximo es 11; el valor mínimo es 3. **5.** El valor máximo es 65; el valor mínimo es 4. **7.** El valor máximo es 67; el valor mínimo es 20. **9.** El valor máximo de z es 12, y se presenta en el punto $(6, 0)$. **11.** El valor mínimo de z es 4, y se presenta en el punto $(2, 0)$. **13.** El valor máximo de z es 20, y se presenta en el punto $(0, 4)$. **15.** El valor mínimo de z es 8, y se presenta en el punto $(0, 2)$. **17.** El valor máximo de z es 50, y se presenta en el punto $(10, 0)$. **19.** 8 colina abajo, 24 campo traviesa; \$1760; \$1920 **21.** 30 acres de soya y 10 acres de maíz **23.** $\frac{1}{2}$ hora en la máquina 1; $5\frac{1}{4}$ horas en la máquina dos **25.** 100 libras de carne de res y 50 libras de cerdo **27.** 10 patines de carreras, 15 patines de figura **29.** 2 muestras metálicas, 4 muestras de plástico; \$34 **31. a)** 10 de primera clase, 120 de clase turista **b)** 15 de primera clase, 120 de clase turista

Ejercicios de repaso *(página 934)*

1. $x = 2, y = -1$ **3.** $x = 2, y = \frac{1}{2}$ **5.** $x = 2, y = -1$ **7.** $x = \frac{11}{5}, y = -\frac{3}{5}$ **9.** Incongruente **11.** $x = 2, y = 3$ **13.** Incongruente **15.** $x = -1, y = 2, z = -3$ **17.** $x = \frac{7}{4}z + \frac{39}{4}, y = \frac{9}{8}z + \frac{69}{8}$, z es cualquier número real. **19.** $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x + 4y = -1 \end{cases}$

21. $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 24 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 12 & -2 & -8 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ **27.** $\begin{bmatrix} 8 & -13 & 8 \\ 9 & 2 & -10 \\ 22 & -13 & -4 \end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ **31.** $\begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

33. Singular **35.** $x = \frac{2}{5}, y = \frac{1}{10}$ **37.** $x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{1}{6}$ **39.** $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{2}{3}, z = -\frac{3}{4}$

41. $z = -1, x = y + 1$, y y es cualquier número real. **43.** $x = 4, y = 2, z = 3, t = -2$ **45.** 5 **47.** 108 **49.** -100

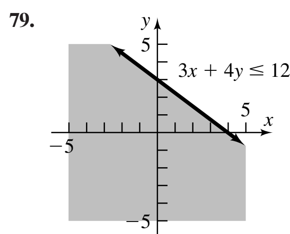
51. $x = 2, y = -1$ **53.** $x = 2, y = 3$ **55.** $x = -1, y = 2, z = -3$ **57.** 16 **59.** $\frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x - 4}$ **61.** $\frac{-3}{x - 1} + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}$

63. $\frac{-\frac{1}{10}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{10}x + \frac{9}{10}}{x^2 + 9}$ **65.** $\frac{x}{x^2 + 4} + \frac{-4x}{(x^2 + 4)^2}$ **67.** $\frac{\frac{1}{2}}{x^2 + 1} + \frac{\frac{1}{4}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x + 1}$ **69.** $x = -\frac{2}{5}, y = -\frac{11}{5}; x = -2, y = 1$

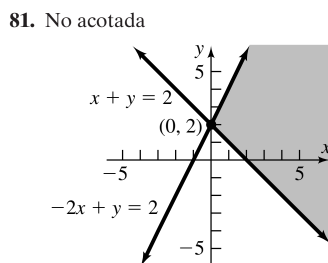
71. $x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}; x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ **73.** $x = 0, y = 0; x = -3, y = 3; x = 3, y = 3$

75. $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}; x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}; x = \frac{4}{3}\sqrt{2}, y = -\frac{2}{3}\sqrt{2}; x = -\frac{4}{3}\sqrt{2}, y = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ **77.** $x = 1, y = -1$

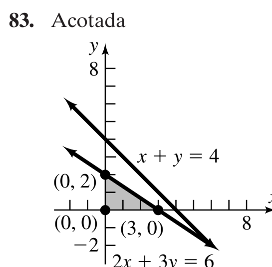
79.



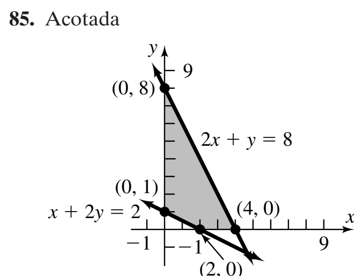
81. No acotada



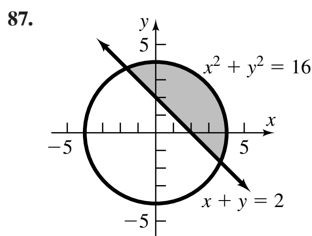
83. Acotada



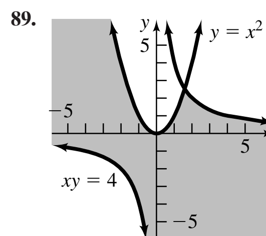
85. Acotada



87.



89.



91. El valor máximo es 32, cuando $x = 0$ y $y = 8$. **93.** El valor mínimo es 3, cuando $x = 1$ y $y = 0$ **95.** 10

97. $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ **99.** 70 libras de café de \$3 y 30 de café de \$6 **101.** 1 chico, 5 mediano, 2 grande

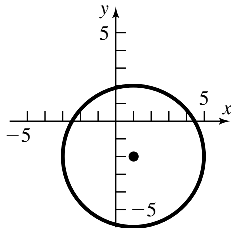
103. Lancha: 36.67 km/h; río Aguarico: 3.33 km/h **105.** Bruce: 4 horas; Bryce: 2 horas; Marty: 8 horas

107. 35 motores de gasolina, 15 de diesel; 15 motores de gasolina, 0 de diesel

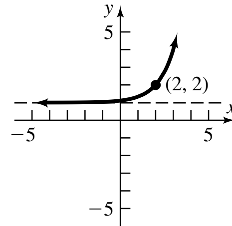
Repaso acumulativo *(página 938)*

1. $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ **2.** $\{5\}$ **3.** $\left\{-1, -\frac{1}{2}, 3\right\}$ **4.** $\{-2\}$ **5.** $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ **6.** $\left\{\frac{1}{\ln 3}\right\}$ **7.** Impar; simétrica con respecto de origen

8. Centro: $(1, -2)$; radio $= 4$

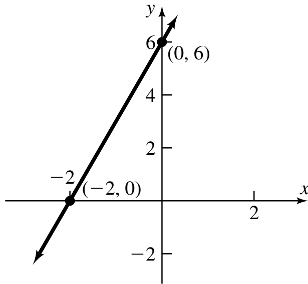


9. Dominio: todos los números reales
Rango: $\{y|y > 1\}$
Asíntota horizontal: $y = 1$

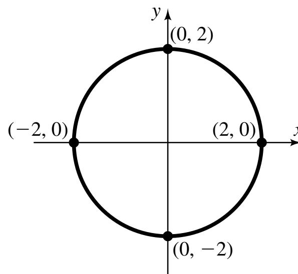


10. $f^{-1}(x) = \frac{5}{x} - 2$
Dominio de f: $\{x|x \neq -2\}$
Rango de f: $\{y|y \neq 0\}$
Dominio de f^{-1}: $\{x|x \neq 0\}$
Rango de f^{-1}: $\{y|y \neq -2\}$

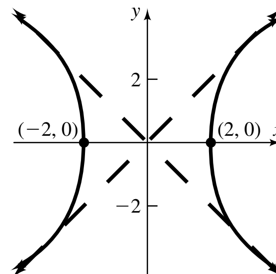
11. a)



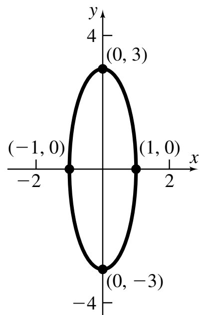
b)



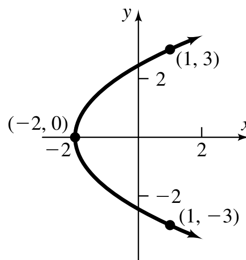
c)



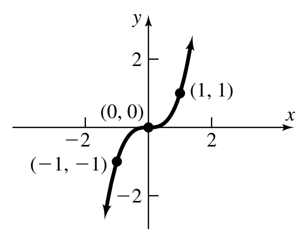
d)



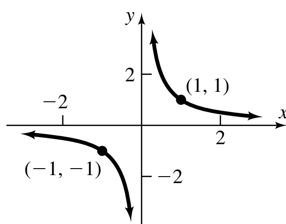
e)



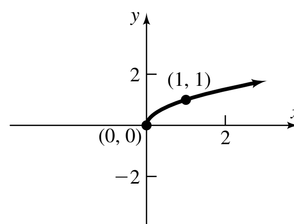
f)



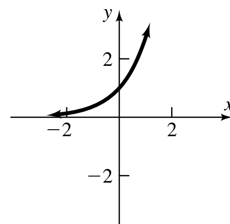
g)



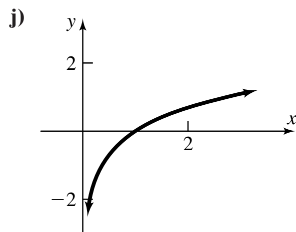
h)



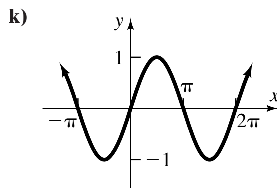
i)



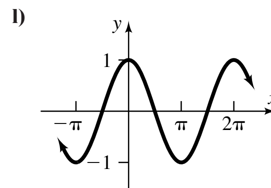
j)



k)



l)



12. **a)** $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ **b)** $\left\{\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}\right\}$

CAPÍTULO 12 Secuencias; inducción; teorema del binomio

12.1 Conceptos y vocabulario *(página 947)*

3. secuencia **4.** 3; 15 **5.** 20 **6.** Verdadero **7.** Verdadero **8.** Verdadero

12.1 Ejercicios *(página 947)*

9. 1, 2, 3, 4, 5 **11.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ **13.** 1, −4, 9, −16, 25 **15.** $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{8}{41}, \frac{8}{61}$ **17.** $-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, -\frac{1}{42}$ **19.** $\frac{1}{e}, \frac{2}{e^2}, \frac{3}{e^3}, \frac{4}{e^4}, \frac{5}{e^5}$

21. $a_n = \frac{n}{n+1}$ **23.** $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ **25.** $a_n = (-1)^{n+1}$ **27.** $a_n = (-1)^{n+1}n$ **29.** $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 8, a_4 = 11, a_5 = 14$

31. $a_1 = -2, a_2 = 0, a_3 = 3, a_4 = 7, a_5 = 12$ **33.** $a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 20, a_4 = 40, a_5 = 80$ **35.** $a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{8}, a_5 = \frac{1}{40}$

37. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 8$ **39.** $a_1 = A, a_2 = A + d, a_3 = A + 2d, a_4 = A + 3d, a_5 = A + 4d$

41. $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, a_4 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, a_5 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$

43. 50 **45.** 21 **47.** 90 **49.** 26 **51.** 42 **53.** 96 **55.** $3 + 4 + \cdots + (n + 2)$ **57.** $\frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} + \cdots + \frac{n^2}{2}$ **59.** $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

61. $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ **63.** $\ln 2 - \ln 3 + \ln 4 - \cdots + (-1)^n \ln n$ **65.** $\sum_{k=1}^{20} k$ **67.** $\sum_{k=1}^{13} \frac{k}{k+1}$ **69.** $\sum_{k=0}^{6} (-1)^k \left(\frac{1}{3^k}\right)$ **71.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k}$

73. $\sum_{k=0}^{n} (a + kd)$ or $\sum_{k=1}^{n+1} [a + (k - 1)d]$ **75.** \$2930 **77.** 2162 **79.** 21 **81.** Una secuencia de Fibonacci

83. $2S = \underbrace{(1 + n) + (1 + n) + \cdots + (n + 1)}_{n \text{ términos}} = n(n + 1)$; $S = \frac{1}{2}n(n + 1)$

12.2 Conceptos y vocabulario *(página 954)*

1. aritmética **2.** Falso

12.2 Ejercicios *(página 954)*

3. $d = 1$; 5, 6, 7, 8 **5.** $d = 2$; −3, −1, 1, 3 **7.** $d = -2$; 4, 2, 0, −2 **9.** $d = -\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}$ **11.** $d = \ln 3$; $\ln 3, 2\ln 3, 3\ln 3, 4\ln 3$

13. $a_n = 3n - 1$; $a_5 = 14$ **15.** $a_n = 8 - 3n$; $a_5 = -7$ **17.** $a_n = \frac{1}{2}(n - 1)$; $a_5 = 2$ **19.** $a_n = \sqrt{2}n$; $a_5 = 5\sqrt{2}$ **21.** $a_{12} = 24$

23. $a_{10} = -26$ **25.** $a_8 = a + 7b$ **27.** $a_1 = -13$; $d = 3$; $a_n = a_{n-1} + 3$ **29.** $a_1 = -53$; $d = 6$; $a_n = a_{n-1} + 6$

31. $a_1 = 28$; $d = -2$; $a_n = a_{n-1} - 2$ **33.** $a_1 = 25$; $d = -2$; $a_n = a_{n-1} - 2$ **35.** n^2 **37.** $\frac{n}{2}(9 + 5n)$ **39.** 1260 **41.** 324

43.
```
sum(seq(3.45n+4.
12,n,1,20,1))
           806.9
```

45.
```
sum(seq(2.4n+.4,
n,1,15,1))
             294
```

47.
```
sum(seq(2.58n+2.
32,n,1,25,1))
           896.5
```

49. $-\frac{3}{2}$ **51.** 1185 asientos

53. 210 beige y 190 azules

55. 30 filas

Problemas históricos *(página 964)*

1. $1\frac{2}{3}$ piezas, $10\frac{5}{6}$ piezas, 20 piezas, $29\frac{1}{6}$ piezas, $38\frac{1}{3}$ piezas **2. a)** 1 **b)** 2401 **c)** 2800

12.3 Conceptos y vocabulario *(página 964)*

3. Geométrica **4.** $\frac{a}{1-r}$ **5.** Renta anual **6.** Verdadero **7.** Falso **8.** Verdadero

12.3 Ejercicios *(página 964)*

9. $r = 3; 3, 9, 27, 81$ **11.** $r = \frac{1}{2}; -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, -\frac{3}{16}$ **13.** $r = 2; \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$ **15.** $r = 2^{1/3}; 2^{1/3}, 2^{2/3}, 2, 2^{4/3}$ **17.** $r = \frac{3}{2}; \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}$

19. Aritmética; $d = 1$ **21.** Ninguna **23.** Aritmética;; $d = -\frac{2}{3}$ **25.** Ninguna **27.** Geométrica; $r = \frac{2}{3}$ **29.** Geométrica; $r = 2$

31. Geométrica; $r = 3^{1/2}$ **33.** $a_5 = 162; a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ **35.** $a_5 = 5; a_n = 5 \cdot (-1)^{n-1}$ **37.** $a_5 = 0; a_n = 0$ **39.** $a_5 = 4\sqrt{2}; a_n = (\sqrt{2})^n$

41. $a_7 = \frac{1}{64}$ **43.** $a_9 = 1$ **45.** $a_8 = 0.00000004$ **47.** $-\frac{1}{4}(1 - 2^n)$ **49.** $2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ **51.** $1 - 2^n$

53.
```
(1/4)sum(seq(2^n
,n,0,14,1))
        8191.75
```

55.
```
sum(seq((2/3)^n,
n,1,15,1))
    1.995432683
```

57.
```
-1sum(seq(2^n,n,
0,14,1))
         -32767
```

59. $\frac{3}{2}$ **61.** 16 **63.** $\frac{8}{5}$ **65.** $\frac{20}{3}$ **67.** $\frac{18}{5}$ **69.** -4 **71.** $21,879.11 **73.a)** 0.775 ft **b)** 8th **c)** 15.88 ft **d)** 20 ft

75. $349,496.41 **77.** $96,885.98 **79.** $305.10 **81.** La opción *A* tiene como resultado un mayor salario en el quinto año ($25,250 contra $24,761); la opción *B* tiene como resultado un mayor total a los cinco años ($116,801 contra $112,742). **83.** La opción 2 tiene un resultado mayor: $16,038,304; la opción 1 tiene un resultado menor: $14,700,000.

85. 1.845×10^{19} **87.** 10 **89.** $72.67 por acción **91.** Sí. Una secuencia constante es tanto aritmética como geométrica. Por ejemplo, 3, 3, 3, ... es una secuencia aritmética con $a_1 = 3$ y $d = 0$ y es una secuencia geométrica con $a_1 = 3$ y $r = 1$.

12.4 Ejercicios *(página 970)*

1. I) $n = 1$: $2(1) = 2$ y $1(1 + 1) = 2$

II) Si $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)$, entonces $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) = (2 + 4 + 6 + \cdots + 2k) + 2(k + 1)$
$= k(k + 1) + 2(k + 1) = k^2 + 3k + 2 = (k + 1)(k + 2) = (k + 1)[(k + 1) + 1]$.

3. I) $n = 1$: $1 + 2 = 3$ y $\frac{1}{2}(1)(1 + 5) = \frac{1}{2}(6) = 3$

II) Si $3 + 4 + 5 + \cdots + (k + 2) = \frac{1}{2}k(k + 5)$, entonces $3 + 4 + 5 + \cdots + (k + 2) + [(k + 1) + 2]$

$= [3 + 4 + 5 + \cdots + (k + 2)] + (k + 3) = \frac{1}{2}k(k + 5) + k + 3 = \frac{1}{2}(k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{2}(k + 1)(k + 6)$

$= \frac{1}{2}(k + 1)[(k + 1) + 5]$.

5. I) $n = 1$: $3(1) - 1 = 2$ y $\frac{1}{2}(1)[3(1) + 1] = \frac{1}{2}(4) = 2$

II) Si $2 + 5 + 8 + \cdots + (3k - 1) = \frac{1}{2}k(3k + 1)$, entonces $2 + 5 + 8 + \cdots + (3k - 1) + [3(k + 1) - 1]$

$= [2 + 5 + 8 + \cdots + (3k - 1)] + (3k + 2) = \frac{1}{2}k(3k + 1) + (3k + 2) = \frac{1}{2}(3k^2 + 7k + 4) = \frac{1}{2}(k + 1)(3k + 4)$

$= \frac{1}{2}(k + 1)[3(k + 1) + 1]$.

7. I) $n = 1$: $2^{1-1} = 1$ y $2^1 - 1 = 1$

II) Si $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$, entonces $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} + 2^{(k+1)-1} = (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1}) + 2^k$
$= 2^k - 1 + 2^k = 2(2^k) - 1 = 2^{k+1} - 1$.

9. I) $n = 1$: $4^{1-1} = 1$ y $\frac{1}{3}(4^1 - 1) = \frac{1}{3}(3) = 1$

II) Si $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k-1} = \frac{1}{3}(4^k - 1)$, entonces $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k-1} + 4^{(k+1)-1} = (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k-1}) + 4^k$

$= \frac{1}{3}(4^k - 1) + 4^k = \frac{1}{3}[4^k - 1 + 3(4^k)] = \frac{1}{3}[4(4^k) - 1] = \frac{1}{3}(4^{k+1} - 1)$.

11. I) $n = 1$: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

II) Si $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$, entonces $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}$

$= \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$.

13. I) $n = 1$: $1^2 = 1$ y $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$

II) Si $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$, entonces $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(2k^3 + 9k^2 + 13k + 6)$

$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) = \frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$.

15. I) $n = 1$: $5 - 1 = 4$ y $\frac{1}{2}(1)(9-1) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

II) Si $4 + 3 + 2 + \cdots + (5-k) = \frac{1}{2}k(9-k)$, entonces $4 + 3 + 2 + \cdots + (5-k) + [5-(k+1)]$

$= [4 + 3 + 2 + \cdots + (5-k)] + 4 - k = \frac{1}{2}k(9-k) + 4 - k = \frac{1}{2}(9k - k^2 + 8 - 2k) = \frac{1}{2}(-k^2 + 7k + 8)$

$= \frac{1}{2}(k+1)(8-k) = \frac{1}{2}(k+1)[9-(k+1)]$.

17. I) $n = 1$: $1 \cdot (1+1) = 2$ y $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2$

II) Si $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$, entonces $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)$

$+ (k+1)[(k+1)+1] = [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)] + (k+1)(k+2)$

$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + \frac{1}{3} \cdot 3(k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{3}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]$.

19. I) $n = 1$: $1^2 + 1 = 2$, que es divisible entre 2.

II) Si $k^2 + k$ es divisible entre 2, entonces $(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2k + 2$. Como $k^2 + k$ es divisible entre 2y $2k + 2$ es divisible entre 2, $(k+1)^2 + (k+1)$ es divisible entre 2.

21. I) $n = 1$: $1^2 - 1 + 2 = 2$ que es divisible entre 2.

II) Si $k^2 - k + 2$ es divisible entre 2, entonces $(k+1)^2 - (k+1) + 2 = k^2 + 2k + 1 - k - 1 + 2 = (k^2 - k + 2) + 2k$.
Como $k^2 - k + 2$ es divisible entre 2 y $2k$ es divisible entre dos, $(k+1)^2 - (k+1) + 2$ es divisible entre dos.

23. I) $n = 1$: Si $x > 1$, entonces $x^1 = x > 1$.

II) Suponga que si, para un número natural arbitrario k, $x > 1$ entonces $x^k > 1$. Multiplique por x ambos lados de la desigualdad $x^k > 1$ por x. Si $x > 1$, entonces $x^{k+1} > x > 1$.

25. I) $n = 1$: $a - b$ es un factor de $a^1 - b^1 = a - b$.

II) Si $a - b$ es un factor de $a^k - b^k$, entonces $a^{k+1} - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a - b)$.
Como $a - b$ es un factor de $a^k - b^k$ y $a - b$ es un factor de $a - b$, entonces $a - b$ es un factor de $a^{k+1} - b^{k+1}$.

27. $n = 1$: $1^2 - 1 + 41 = 41$ que es un número primo.
$n = 41$: $41^2 - 41 + 41 = 1681 = 41^2$, que no es primo.

29. I) $n = 1$: $ar^{1-1} = a \cdot 1 = a$ y $a \cdot \frac{1 - r^1}{1 - r} = a$, porque $r \neq 1$.

II) Si $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1} = a \cdot \frac{1 - r^k}{1 - r}$, entonces $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1} + ar^{(k+1)-1} = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1}) + ar^k$

$= a \cdot \frac{1 - r^k}{1 - r} + ar^k = \frac{a(1 - r^k) + ar^k(1 - r)}{1 - r} = \frac{a - ar^k + ar^k - ar^{k+1}}{1 - r} = a \cdot \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$.

31. I) $n = 4$: Número diagonales en un polígono convexo de 4 lados es 2 y $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4 - 3) = 2$

II) Si el número de diagonales en un polígono convexo de k lados es $\frac{1}{2}k(k - 3)$ entonces el de $(k + 1)$ lados aumenta en

$(k + 1) - 2 = k - 1$. De esta manera, el número diagonales en un polígono convexo de $(k + 1)$ lados es $\frac{1}{2}k(k - 3) + (k - 1)$

$= \frac{1}{2}[k^2 - 3k + 2k - 2] = \frac{1}{2}[k^2 - k - 2] = \frac{1}{2}(k + 1)(k - 2) = \frac{1}{2}(k + 1)[(k + 1) - 3]$.

12.5 Conceptos y vocabulario *(página 977)*

1. Triángulo de Pascal **2.** 15 **3.** Falso **4.** Teorema del binomio

12.5 Ejercicios *(página 977)*

5. 10 **7.** 21 **9.** 50 **11.** 1 **13.** 1.8664×10^{15} **15.** 1.4834×10^{13} **17.** $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$
19. $x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$ **21.** $81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1$
23. $x^{10} + 5x^8y^2 + 10x^6y^4 + 10x^4y^6 + 5x^2y^8 + y^{10}$ **25.** $x^3 + 6\sqrt{2}x^{5/2} + 30x^2 + 40\sqrt{2}x^{3/2} + 60x + 24\sqrt{2}x^{1/2} + 8$
27. $a^5x^5 + 5a^4bx^4y + 10a^3b^2x^3y^2 + 10a^2b^3x^2y^3 + 5ab^4xy^4 + b^5y^5$ **29.** 17,010 **31.** −101,376 **33.** 41,472 **35.** $2835x^3$
37. $314{,}928x^7$ **39.** 495 **41.** 3360 **43.** 1.00501
45. $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)![n-(n-1)]!} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$; $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!} = 1$
47. $2^n = (1 + 1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}(1)^{n-1}(1) + \cdots + \binom{n}{n}1^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$ **49.** 1

Ejercicios de repaso *(página 979)*

1. $-\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{8}{7}$ **3.** $2, 1, \frac{8}{9}, 1, \frac{32}{25}$ **5.** $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}$ **7.** 2, 0, 2, 0, 2 **9.** $6 + 10 + 14 + 18 = 48$ **11.** $\sum_{k=1}^{13} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$

13. Aritmética; $d = 1$; $S_n = \frac{n}{2}(n + 11)$ **15.** Ninguna **17.** Geométrica; $r = 8$; $S_n = \frac{8}{7}(8^n - 1)$ **19.** Aritmética; $d = 4$; $S_n = 2n(n - 1)$

21. Geometrica; $r = \frac{1}{2}$; $S_n = 6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ **23.** Ninguna **25.** 115 **27.** 75 **29.** $\frac{1093}{2187} \approx 0.49977$ **31.** 35 **33.** $\frac{1}{10^{10}}$ **35.** $9\sqrt{2}$

37. $a_n = 5n - 4$ **39.** $a_n = n - 10$ **41.** $\frac{9}{2}$ **43.** $\frac{4}{3}$ **45.** 8

47. I) $n = 1$: $3 \cdot 1 = 3$ y $\frac{3 \cdot 1}{2}(1 + 1) = 3$

II) Si $3 + 6 + 9 + \cdots + 3k = \frac{3k}{2}(k + 1)$, entonces $3 + 6 + 9 + \cdots + 3k + 3(k + 1) = (3 + 6 + 9 + \cdots + 3k) + (3k + 3)$

$= \frac{3k}{2}(k + 1) + (3k + 3) = \frac{3k^2}{2} + \frac{3k}{2} + \frac{6k}{2} + \frac{6}{2} = \frac{3}{2}(k^2 + 3k + 2) = \frac{3}{2}(k + 1)(k + 2) = \frac{3(k + 1)}{2}[(k + 1) + 1]$

49. I) $n = 1$: $2 \cdot 3^{1-1} = 2$ y $3^1 - 1 = 2$

II) Si $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1} = 3^k - 1$, entonces $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{(k+1)-1} = (2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1}) + 2 \cdot 3^k$
$= 3^k - 1 + 2 \cdot 3^k = 3 \cdot 3^k - 1 = 3^{k+1} - 1$.

51. I) $n = 1$: $(3 \cdot 1 - 2)^2 = 1$ y $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot [6(1)^2 - 3(1) - 1] = 1$

II) Si $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3k - 2)^2 = \frac{1}{2}k(6k^2 - 3k - 1)$, entonces $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3k - 2)^2 + [3(k + 1) - 2]^2$

$= [1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3k - 2)^2] + (3k + 1)^2 = \frac{1}{2}k(6k^2 - 3k - 1) + (3k + 1)^2 = \frac{1}{2}(6k^3 - 3k^2 - k) + (9k^2 + 6k + 1)$

$= \frac{1}{2}(6k^3 + 15k^2 + 11k + 2) = \frac{1}{2}(k + 1)(6k^2 + 9k + 2) = \frac{1}{2}(k + 1)[6(k + 1)^2 - 3(k + 1) - 1]$.

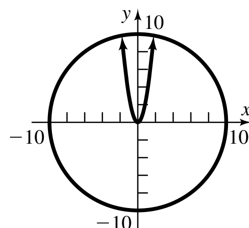
53. 10 **55.** $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$ **57.** $32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243$ **59.** 144 **61.** 84

63. **a)** 8 **b)** 1100 **65.** **a)** $20\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{135}{16}$ pies **b)** $20\left(\frac{3}{4}\right)^n$ pies **c)** 13 veces **d)** 140 pies **67.** \$244,129.08

Repaso acumulativo *(página 982)*

1. $-3, 3, -3i, 3i$

2. a)



b) $\left(\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{3601}}{18}}, \dfrac{-1+\sqrt{3601}}{6}\right), \left(-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{3601}}{18}}, \dfrac{-1+\sqrt{3601}}{6}\right)$

c) El círculo y la parábola se intersecan en:
$\left(\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{3601}}{18}}, \dfrac{-1+\sqrt{3601}}{6}\right), \left(-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{3601}}{18}}, \dfrac{-1+\sqrt{3601}}{6}\right).$

3. $\left\{\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)\right\}$ **4.** $y = 5x - 10$ **5.** $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ **6. a)** 5 **b)** 13 **c)** $\dfrac{6x+3}{2x-1}$ **d)** $\left\{x \middle| x \neq \dfrac{1}{2}\right\}$ **e)** $\dfrac{7x-2}{x-2}$
f) $\{x|x \neq 2\}$ **g)** $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)$; todos reales **h)** $f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{x-3}$; $\{x|x \neq 3\}$ **7.** $\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ **8.** $(x+1)^2 = 4(y-2)$

9. $r = 8 \operatorname{sen} \theta$; $x^2 + (y-4)^2 = 16$ **10.** $\left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}$ **11.** $\dfrac{2\pi}{3}$ **12. a)** $-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ **b)** $-\dfrac{\sqrt{15}}{15}$ **c)** $-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ **d)** $\dfrac{7}{8}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{15}}{4}}{2}}$

CAPÍTULO 13 Conteos y probabilidad

13.1 Conceptos y vocabulario *(página 989)*

1. Unión **2.** Intersección **3.** Verdadero **4.** Verdadero

13.1 Ejercicios *(página 989)*

5. {1, 3, 5, 6, 7, 9} **7.** {1, 5, 7} **9.** {1, 6, 9} **11.** {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9} **13.** {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9} **15.** {0, 2, 6, 7, 8}
17. {0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9} **19.** {0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9} **21.** {0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8} **23.** {0} **25.** ∅, {*a*}, {*b*}, {*c*}, {*d*}, {*a*, *b*}, {*a*, *c*}, {*a*, *d*}, {*b*, *c*}, {*b*, *d*}, {*c*, *d*}, {*a*, *b*, *c*}, {*b*, *c*, *d*}, {*a*, *c*, *d*}, {*a*, *b*, *d*}, {*a*, *b*, *c*, *d*} **27.** 25 **29.** 40 **31.** 25 **33.** 37 **35.** 18 **37.** 5
39. 175; 125 **41. a)** 15 **b)** 15 **c)** 15 **d)** 25 **e)** 40 **43. a)** 57,886 millas **b)** 10,894 millas **c)** 14,126 millas

13.2 Conceptos y vocabulario *(página 998)*

3. Permutación **4.** Combinación **5.** Verdadero **6.** Verdadero

13.2 Ejercicios *(página 999)*

7. 30 **9.** 24 **11.** 1 **13.** 1680 **15.** 28 **17.** 35 **19.** 1 **21.** 10,400,600 **23.** {*abc*, *abd*, *abe*, *acb*, *acd*, *ace*, *adb*, *adc*, *ade*, *aeb*, *aec*, *aed*, *bac*, *bad*, *bae*, *bca*, *bcd*, *bce*, *bda*, *bdc*, *bde*, *bea*, *bec*, *bed*, *cab*, *cad*, *cae*, *cba*, *cbd*, *cbe*, *cda*, *cdb*, *cde*, *cea*, *ceb*, *ced*, *dab*, *dac*, *dae*, *dba*, *dbc*, *dbe*, *dca*, *dcb*, *dce*, *dea*, *deb*, *dec*, *eab*, *eac*, *ead*, *eba*, *ebc*, *ebd*, *eca*, *ecb*, *ecd*, *eda*, *edb*, *edc*}; 60 **25.** {123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432}; 24 **27.** {*abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde*, *cde*}; 10
29. {123, 124, 134, 234}; 4 **31.** 15 **33.** 16 **35.** 8 **37.** 24 **39.** 60 **41.** 18,278 **43.** 35 **45.** 1024 **47.** 9000 **49.** 120 **51.** 480
53. 132,860 **55.** 336 **57.** 90,720 **59. a)** 63 **b)** 35 **c)** 1 **61.** 1.157×10^{76} **63.** 362,880 **65.** 660 **67.** 15

Problemas históricos *(página 1009)*

1. a) {*AAAA*, *AAAB*, *AABA*, *AABB*, *ABAA*, *ABAB*, *ABBA*, *ABBB*, *BAAA*, *BAAB*, *BABA*, *BABB*, *BBAA*, *BBAB*, *BBBA*, *BBBB*}

b) $P(A \text{ gana}) = \dfrac{C(4,2) + C(4,3) + C(4,4)}{2^4} = \dfrac{6+4+1}{16} = \dfrac{11}{16}$; $P(B \text{ gana}) = \dfrac{C(4,3) + C(4,4)}{2^4} = \dfrac{4+1}{16} = \dfrac{5}{16}$

2. a) $\$\dfrac{3}{2} = \$1.50$ **b)** $\$\dfrac{1}{2} = \$0.50$

13.3 Conceptos y vocabulario *(página 1009)*

1. Igualmente probables **2.** Complemento **3.** Falso **4.** Verdadero

13.3 Ejercicios *(página 1010)*

5. 0, 0.01, 0.35, 1 **7.** Modelo de probabilidad **9.** No es un modelo de probabilidad

11. $S = \{\text{KK}, \text{KQ}, \text{QK}, \text{QQ}\}$; $P(\text{KK}) = \dfrac{1}{4}$, $P(\text{KQ}) = \dfrac{1}{4}$, $P(\text{QK}) = \dfrac{1}{4}$, $P(\text{QQ}) = \dfrac{1}{4}$

13. $S = \{$KK1, KK2, KK3, KK4, KK5, KK6, KQ1, KQ2, KQ3, KQ4, KQ5, KQ6, QK1, QK2, QK3, QK4, QK5, QK6, QQ1, QQ2, QQ3, QQ4, QQ5, QQ6$\}$; cada resultado tiene una probabilidad de $\frac{1}{24}$.

15. $S = \{$KKK, KKQ, KQK, KQQ, QKK, QKQ, QQK, QQQ$\}$; cada resultado tiene una probabilidad de $\frac{1}{8}$.

17. $S = \{$1 amarillo, 1 rojo, 1 verde, 2 amarillo, 2 rojo, 2 verde, 3 amarillo, 3 rojo, 3 verde, 4 amarillo, 4 rojo, 4 verde$\}$; cada resultado tiene una probabilidad de $\frac{1}{12}$; esta manera, $P(2 \text{ rojo}) + P(4 \text{ rojo}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

19. $S = \{$1 amarillo adelante, 1 amarillo atrás, 1 rojo adelante, 1 rojo atrás, 1 verde adelante, 1 verde atrás, 2 amarillo adelante, 2 amarillo atrás, 2 rojo adelante, 2 rojo atrás, 2 verde adelante, 2 verde atrás, 3 amarillo adelante, 3 amarillo atrás, 3 rojo adelante, 3 rojo atrás, 3 verde adelante, 3 verde atrás, 4 amarillo adelante, 4 amarillo atrás, 4 rojo adelante, 4 rojo atrás, 4 verde adelante, 4 verde atrás$\}$; cada resultado tiene una probabilidad de $\frac{1}{24}$; de tal modo, $P(1 \text{ rojo atrás}) + P(1 \text{ verde atrás}) = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$.

21. $S = \{$11 rojo, 11 amarillo, 11 verde, 12 rojo, 12 amarillo, 12 verde, 13 rojo, 13 amarillo, 13 verde, 14 rojo, 14 amarillo, 14 verde, 21 rojo, 21 amarillo, 21 verde, 22 rojo, 22 amarillo, 22 verde, 23 rojo, 23 amarillo, 23 verde, 24 rojo, 24 amarillo, 24 verde, 31 rojo, 31 amarillo, 31 verde, 32 rojo, 32 amarillo, 32 verde, 33 rojo, 33 amarillo, 33 verde, 34 rojo, 34 amarillo, 34 verde, 41 rojo, 41 amarillo, 41 verde, 42 rojo, 42 amarillo, 42 verde, 43 rojo, 43 amarillo, 43 verde, 44 rojo, 44 amarillo, 44 verde$\}$; ada resultado tiene una probabilidad de $\frac{1}{48}$; de tal manera, $E = \{$22 rojo, 22 verde, 24 rojo, 24 verde$\}$; $Pe) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$.

23. A, B, C, F **25.** B **27.** $P(H) = \frac{4}{5}; P(T) = \frac{1}{5}$ **29.** $P(1) = P(3) = P(5) = \frac{2}{9}; P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{9}$ **31.** $\frac{3}{10}$ **33.** $\frac{1}{2}$ **35.** $\frac{1}{6}$ **37.** $\frac{1}{8}$ **39.** $\frac{1}{4}$ **41.** $\frac{1}{6}$ **43.** $\frac{1}{18}$ **45.** 0.55 **47.** 0.70 **49.** 0.30 **51.** 0.735 **53.** 0.7 **55.** $\frac{17}{20}$ **57.** $\frac{11}{20}$ **59.** $\frac{1}{2}$ **61.** $\frac{3}{10}$ **63.** $\frac{2}{5}$ **65. a)** 0.57 **b)** 0.95 **c)** 0.83 **d)** 0.38 **e)** 0.29 **f)** 0.05 **g)** 0.78 **h)** 0.71 **67. a)** $\frac{25}{33}$ **b)** $\frac{25}{33}$ **69.** 0.167 **71.** 0.000033069

Ejercicios de repaso *(página 1014)*

1. $\varnothing$, {Dave}, {Joanne}, {Erica}, {Dave, Joanne}, {Dave, Erica}, {Joanne, Erica}, {Dave, Joanne, Erica} **3.** $\{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$ **5.** $\{3, 7\}$ **7.** $\{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ **9.** $\{1, 2, 4, 5, 6, 9\}$ **11.** 17 **13.** 29 **15.** 7 **17.** 25 **19.** 336 **21.** 56 **23.** 60 **25.** 128 **27.** 3024 **29.** 70 **31.** 91 **33.** 1,600,000 **35.** 216,000 **37.** 1260 **39. a)** 381,024 **b)** 1260 **41. a)** $8.634628387 \times 10^{45}$ **b)** 0.6531 **c)** 0.3469 **43. a)** 0.058 **b)** 0.942 **45.** $\frac{4}{9}$ **47.** 0.2; 0.26

Repaso acumulativo *(página 1016)*

1. $\left\{\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i\right\}$

2. $x = -2$; $(-5, 0)$; $(1, 0)$; $(0, -5)$; $(-2, -9)$

3. $(-2, -2)$; $(0, -2)$; $(-1, -4)$

4. $\{x | 3.99 \le x \le 4.01\}$ o $[3.99, 4.01]$

5. $-\frac{1}{5}, 3, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$

6. $(1, 6)$; $y = 5$

Dominio: todos los números reales Rango: $\{y | y > 5\}$ Asíntota horizontal: $y = 5$

7. 2

8. $\left\{\frac{8}{3}\right\}$

9. $x = 2, y = -5, z = 3$

10. 125; 700

11. (gráfica: $-\pi$, π, 3, -3)

12. 5; 108.1°; 6.09; 40°; 31.9°; 9

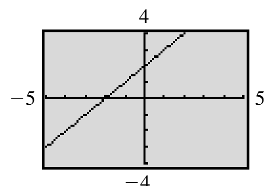
Área $\approx$ 14.46 unidades cuadradas

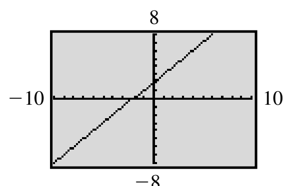
APÉNDICE Calculadoras gráficas

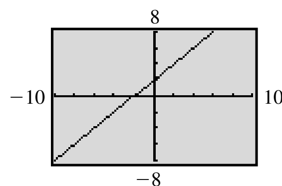
A.1 Ejercicios *(página 1019)*

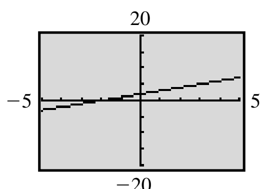
1. $(-1, 4)$; II **3.** $(3, 1)$; I **5.** Xmín $= -6$, Xmáx $= 6$, Xscl $= 2$, Ymín $= -4$, Ymáx $= 4$, Yscl $= 2$ **7.** Xmín $= -6$, Xmáx $= 6$, Xscl $= 2$, Ymín $= -1$, Ymáx $= 3$, Yscl $= 1$ **9.** Xmín $= 3$, Xmáx $= 9$, Xscl $= 1$, Ymín $= 2$, Ymáx $= 10$, Yscl $= 2$
11. Xmín $= -11$, Xmáx $= 5$, Xscl $= 1$, Ymín $= -3$, Ymáx $= 6$, Yscl $= 1$ **13.** Xmín $= -30$, Xmáx $= 50$, Xscl $= 10$, Ymín $= -90$, Ymáx $= 50$, Yscl $= 10$ **15.** Xmín $= -10$, Xmáx $= 110$, Xscl $= 10$, Ymín $= -10$, Ymáx $= 160$, Yscl $= 10$ **17.** $4\sqrt{10}$ **19.** $2\sqrt{65}$

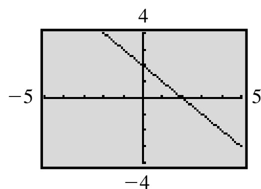
A.2 Ejercicios *(página 1022)*

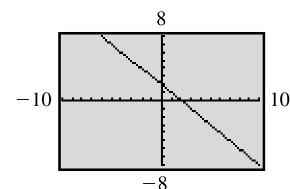
1. a)


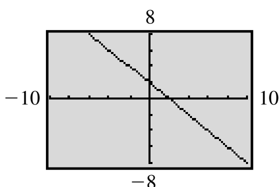
b)


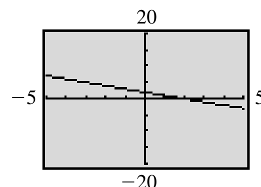
c)


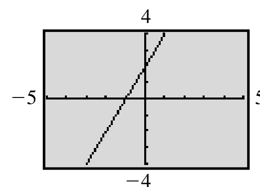
d)


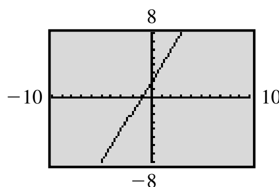
3. a)


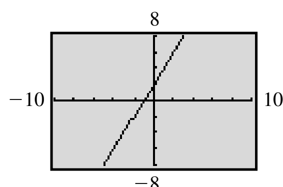
b)


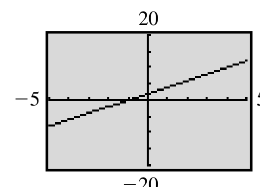
c)


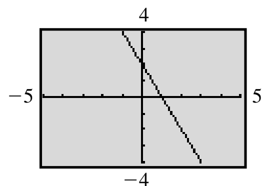
d)


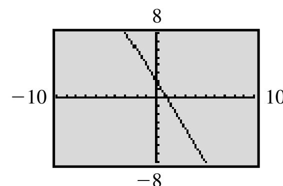
5. a)


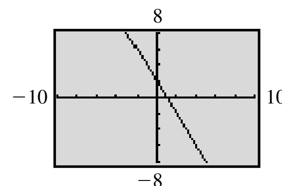
b)


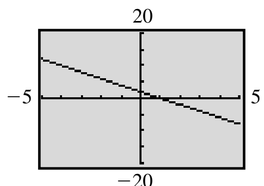
c)


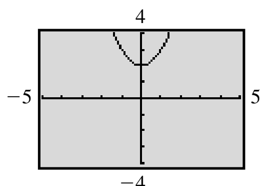
d)


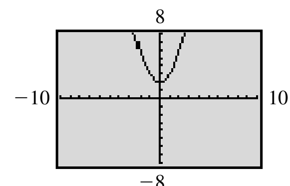
7. a)


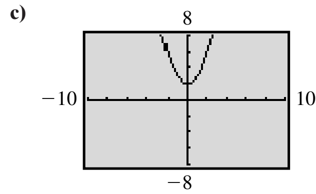
b)


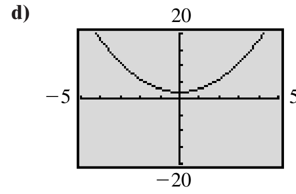
c)


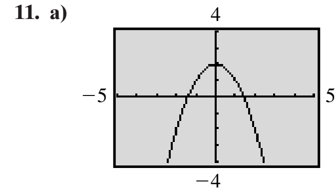
d)


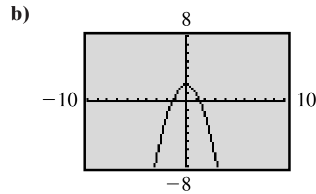
9. a)


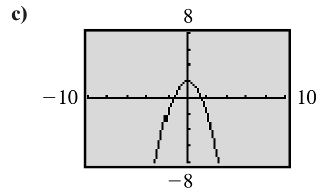
b)


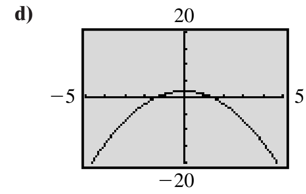
c)


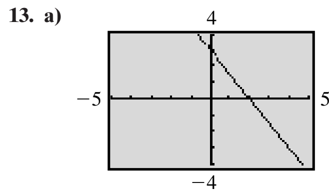
d)


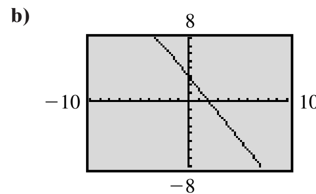
11. a)


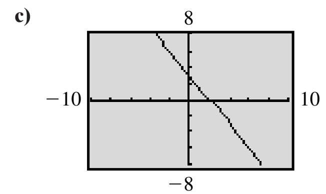
b)


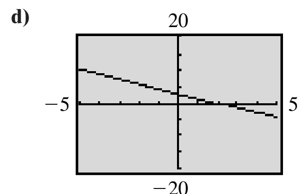
c)


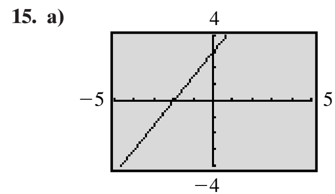
d)


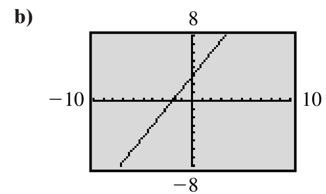
13. a)


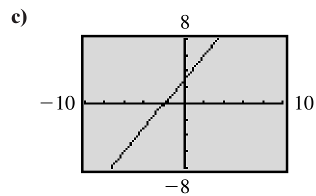
b)


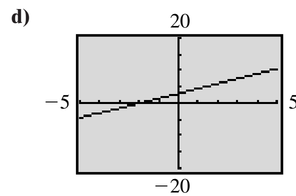
c)


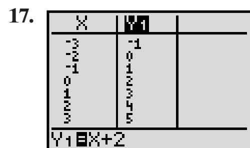
d)


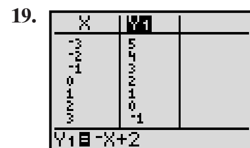
15. a)


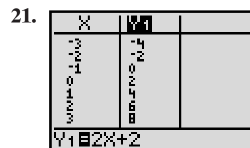
b)


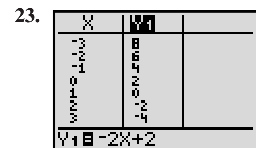
c)


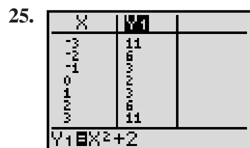
d)


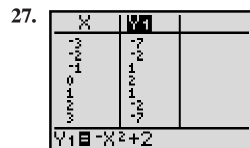
17.


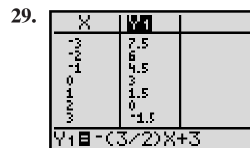
19.


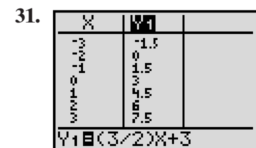
21.


23.


25.


27.


29.


31.


A.3 Ejercicios *(página 1025)*

1. −3.41 **3.** −1.71 **5.** −0.28 **7.** 3.00 **9.** 4.50 **11.** 0.32, 12.30 **13.** 1.00, 23.00

A.5 Ejercicios *(página 1028)*

1. Sí **3.** Sí **5.** No **7.** Sí **9.** Las respuestas varían. Una respuesta factible es Ymín $= 4$, Ymáx $= 12$, y Yscl $= 1$.

Índice

A

Abel, Niels, 374, 977
Abscisa (coordinada *x*), 158
Afelio, 790
Afirmaciones, usando símbolos al escribirlas, 7
Ahmes, 964
Ajuste de curvas, 201-2, 851-52
Álgebra, 17-29
  aspecto histórico, 26
  constantes y variables, 20-21
  desigualdades, 18-19
  exponentes, 21-23
  lineal, 882-83. *Vea también* Matriz/matrices
  notación científica, 24-26
  raíces cuadradas, 23-24
  recta de números reales, 17
  solución de problemas de, 161
  valor absoluto, 19-20
Algoritmo de división para polinomios, 362-63
Al-Kashi de Samarkanda, 15
Al-Khowârizimî, Mohammed ibn Mûsâ, 26
Amplitud
  de una función senoide, 553, 554-55, 556-58, 572-74
  de vibración, 693-94
Ángulo(s), 492-506. *Vea también* Trigonometría analítica; Funciones trigonométricas
  agudo, 507-8
    definición de, 507
    funciones trigonométricas, 507-8
  área de sector, 500
  central, 496
  complementarios, 512-14
  coterminal, 528-29
  cuadrantal, 493, 527-28
  de depresión, 662
  de elevación, 662
  definición de, 492
  de incidencia, 644
  de inclinación, 547
  de refracción, 644
  dibujo de, 494
  en posición estándar, 492, 493
  entre vectores, 757-58
  funciones del, 539-40
  lado inicial del, 492
  lado terminal del, 492
  longitud de arco en, 496-97
  medición del, 493-500
  movimiento circular del, 501-2
  plano, 493
  positivo y negativo, 492
  recto, 30, 493
  referencia, 531-33
Anualidad(es), 962-63
  ordinaria, 962
Aplicación(es) de gráficas
  álgebra de matrices, 885
  ceros localizados con, 373
  desigualdades lineales, 919
  ecuaciones
    graficadas usando, 186
    logarítmica y exponencial, 453-54
    paramétricas, 821
    polares, 721
  función de polinomios, 325-26
  gráfica completa usando, 167
  parábolas y, 772
  puntos de inflexión localizados con, 321
  solución de ecuaciones trigonométricas, 650
  sucesiones, 941, 943, 951, 952, 958
Aproximaciones, 5
Arabia, historia, 106
Araybhata el Mayor, 514
Área
  del círculo, 31, 226
  del rectángulo, 31
  del sector, 500
  del triángulo, 31, 687-93
    aspecto histórico del, 690
    prueba de teoremas y, 687
    LAL, 688
    LLL, 689
  de superficie, 32
Argumento
  de números complejos, 737
  de función, 222
Ars Conjectandi de Jakob Bernoulli, 1009
Ars Magna (Cardano), 374
Asíntota(s), 797-99
  de función racional, 333-38
    definición de, 333
    encontrar, 334-36
    horizontal, 333, 335-39
    oblicua, 334, 337-39
    vertical, 333, 334-35
Azimuth, 665*n*

B

Babilonios, 15, 93, 106, 964
Base y exponente, 22
Bernoulli, Jakob, 733, 1009
Bernoulli, Johann, 830
Beta (riesgo de inversión), 157, 216
Bezout, Etienne, 912
Binomio, 36, 40-41
  cuadrado de, 40
  cubo de, 40-41
  expansión, 974-75
Blunt, Matt, 659
Boole, George, 1009
Braquistócrona, 830
Briggs, Henry, 448
Bryant, Ted, 591
Bürgi, Joost, 448

C

Cadena de Markov, 937-38
Caja, volumen de una, 32
Calculadora(s), 5. *Vea también* Aplicaciones de gráficas, 159
  aritmética, 6
  científica, 6
  de gráficas, 6, 24
  exponentes en una, 24
  funciones trigonométricas inversas evaluadas en, 605-6
  solución de ecuaciones
    lineales usando, 88
    trigonométricas usando, 642
  valores de una función en, 223
Cálculo
  de variaciones, 830
  funciones compuestas, 396-97
Cantor, Georg, 15
Capacidad de mantener, 471-72
Cardano, Girolamo, 374, 742, 1009
Cardioide, 725-26, 732
Caso
  ambiguo, ley de los senos para resolverlo, 671-73
  del café hirviendo de McDonald's, 391
Catetos de un triángulo, 30, 506
Cayley, Arthur, 897
Celsius, Fahrenheit convertidos en, 90
Centro del círculo, 175
Ceros
  complejos de polinomios, 377-83
    con coeficientes reales, 378-79
    definición de, 377

teorema de pares conjugados para encontrar, 378-79
de *f* repetidos (múltiples), 319
reales de función de polinomios, 362-77
aspecto histórico, 374
cotas sobre los ceros, 371-72
número y localización, 365-66
pasos para encontrar, 368-70
teorema de ceros racionales, 366-67
teorema del factor, 364-65
teorema del residuo, 362-64
teorema del valor intermedio, 372-74
multiplicación por, 12
Ceros (soluciones)
de ecuaciones, 169-70
de funciones, 240
de polinomios, 318-19, 362-83
de multiplicidad *m* de *f*, 320
aspecto histórico, 374
ceros complejos, 377-83
ceros reales, 362-77, 377
cotas, 371-72
número y localización de, 365-66
teorema de ceros racionales, 366-67
teorema del factor, 364-65
teorema del residuo, 362-63
teorema del valor intermedio, 372-74
Chebyshëv, P.L., 628*n*
Chu Shih-chieh, 977
Ciclo de una función senoide, 548, 554
Cicloide, 829
Cielómetro, 662
Cilindro, volumen del, 32
Circuitos de corriente alterna (ca), 563
Círculo(s), 175-81, 770
área de, 31, 226
área de un sector en un, 500
centro de, 175
circunferencia de, 21,31
definición de, 175
ecuación del
forma estándar, 176
forma general, 178
gráfica de, 176-79, 720, 722-24, 732
inscrito, 692-93
intercepciones, 177-78
línea tangente en el, 199
radio del, 175
unitario, 176, 536-47
Circunferencia de un círculo, 21
Clark, William, 659
Cociente(s), 6, 11-12, 52. *Vea también* División
aritmética, 13
de diferencias, 223, 246, 427
de dos polinomios. *Vea* Expresiones racionales
de funciones, 227
de números complejos, 112-13
en forma polar, 738-39
de polinomios, 362, 363
división sintética para encontrar, 56-57
escribir una expresión como un solo, 74
log de, 443
mixtos, 65-67
Coeficiente(s)
binomiales, 974, 975
de correlación, 306
de polinomios, 36
de un monomio, 35-36
primer, 36, 377
Cofactor, 877
Cofunciones, 512-14
Combinaciones, 995-97
de *n* objetos distintos tomados *r* a la vez, 996
Combinatoria, 990
Complemento(s), 1007-8
de un conjunto, 985-86
Completamente factorizada, 43
Completar cuadrados, 99-101
identificando cónicas sin, 806-7
Componente(s)
de un vector, 747, 749
horizontal de vectores, 749
vertical de un vector, 749
Comportamiento final, 321-22
Composición, 392
continua, 459
Compresión(es), 265-68
horizontal, 267
vertical, 266
Cónicas, 770-820
círculos. *Vea* círculo(s)
definición de, 814
degeneradas, 770
directriz, 814
ecuaciones polares de, 814-20
conversión a ecuación rectangular, 818
foco en el polo; directriz paralela al eje polar, 815-16
gráfica, 814-18
elipse, 770, 781-91, 814
aplicaciones, 787-88
centro de, 781,786-87
definición de, 781
ecuación de, 782-85,786-87
eje mayor, 781
eje menor, 781
excentricidad, 791
foco de, 781
gráfica, 781-83,786-87
vértices, 781
excentricidad, 814
foco de, 814
hipérbola, 770, 791-805, 814
aplicaciones, 801-2
asíntotas, 797-99
centro, 792, 799-800
conjugada, 805
definición de, 791
ecuación, 792-93, 798-99, 800-801
eje conjugado, 792
eje transversal, 792
equilátera, 805
excentricidad, 805
foco, 791
ramas, 792
vértices, 792
identificación, 805-7
sin completar cuadrados, 806-7
sin rotar los ejes, 811-12
parábola, 294-300, 770, 771-80, 814
definición de, 771
directriz, 771
ecuación, 772-73, 772-75, 776
ejes de simetría, 294, 771
familia, 274
foco, 771
propiedad de reflexión, 776-78
vértice, 294, 771, 773, 775-76
rotación de ejes, 807-90
Conjugado, 111-12
de número complejo, 113, 737
Conjunto(s), 2, 15, 984-86
ajenos, 986
aspecto histórico, 1009
complemento, 985-86
de Mandelbrot, 767-68
de soluciones de una ecuación, 84
elementos 2, 984
finito, 986
infinito, 986
intersección y unión de, 985
subconjunto, 2, 984-85
universal, 985
vacío (nulo), 2, 984
Cono(s), 770
circular recto, 770
Constantes, 20-21
Conteos, 986-88
aspecto histórico, 1009
fórmula de, 987
principio
aditivo, 987-88
de multiplicación, 991
Coordenada(s), 17, 158-65, 710
polares, 709-44
conversión a y de coordenadas rectangulares, 713-16
de un solo punto, 712
definición de, 710
graficar puntos usando, 712-13
transformar una ecuación de forma polar a rectangular, 716-17
rectangulares, 158-65, 710
conversión entre coordenadas polares y, 713-16
distancia entre puntos, 159-61
fórmula del punto medio, 162
x (abscisa), 158
y (ordenada), 158
Copérnico, 502
Correspondencia, 199, 218
Corrida, 181

Corrimiento
de fase, 571-74
vertical, 262-73, 265
Cosenos, ley de, 681-87
aplicaciones, 683
aspecto histórico, 684
para resolver triángulos
LAL, 682
LLL, 682-83
prueba de, 681
Costos fijos y variables, 192
Cotas para ceros de funciones de polinomios, 371-72
Crecimiento
de la población, 939, 981
desinhibido, 465-66
y decaimiento, 465-74
crecimiento desinhibido, 465-66
decaimiento radioactivo, 468-69
ley de enfriamiento de Newton, 469-70
logístico, 471
Cuadrado(s)
de binomios, 40
diferencia de dos, 40
perfectos, 34
factorización de, 45
Cuadrantes, 159
Cuaterniones, 753
Cubos perfectos, 40-41
Curva(s)
de diente de sierra, 701
de vibración amortiguada, 697-98
ecuación de
paramétrica, 820-23, 827
rectangular, 822-23, 827
frontera, 697
orientación de, 821
plana, 820

D

Dantzig, George, 925*n*
De Moivre, Abraham, 739
Decaimiento radioactivo, 468-69. *Vea también* Crecimiento y decaimiento
Decimales, 3
aproximación, 5
conversión a y de notación científica, 24-25
que se repiten, 960
representación de números reales, 5
Dedkin, Richard, 15
Denominador, 3, 59
racionalización, 72-73
Dependencia, 218
Depreciación, 487
Depresión, ángulo de, 662
Desarrollo por fila o columna, 877
Descartes, René, 158*n*, 644*n*
Descomposición en fracciones parciales, 899-906
definición de, 900
de fuerzas, 760
factor cuadrático irreducible, 904-6
no repetido, 904-6
repetido, 905
factores lineales, 900-901
no repetidos, 900-901
repetidos, 902-3
Desigualdad(es), 18-19, 125-50. *Vea también* Sistemas de desigualdades 916-922
aplicación, 132-33
combinadas, 130-31
con valor absoluto, 137-39
de polinomios, 356-59
en dos variables, 919-22
en una variable, 129
equivalentes, 129, 132
escritas usando notación de intervalos, 126
estrictas, 18
gráficas, 916-25
intervalos, 125-26
lados de la, 18
no estrictas, 18
propiedades, 127-29
multiplicación, 128
no negativas, 127
recíprocas, 129, 132
suma, 127
racionales, 359-60
solución, 129-33
Desviación estándar, 135
Detector de luz, 662
Determinantes, 872-82, 873
2 por 2, 873
menores de, 876
propiedades, 879-81
regla de Cramer, 873-75
sistema de tres ecuaciones con tres variables, 878-79
3 por 3, 876-78
Diagrama(s)
de árbol, 991
de dispersión, 199-200, 575
ajuste de curvas usando, 201-2
recta de mejor ajuste y, 202-3
de Venn, 985-86
Diferencia, 6, 11-12. *Vea también* Resta
como producto, 637
común, 950
de dos cuadrados, 40
de dos cubos, 41, 44
de funciones, 226
de matrices, 884-86
de números complejos, 110, 111
de vectores, 745, 749, 749-50
Diofanto, 964
Dirección (rumbo), 664
de un vector, 744, 750, 751-52
Directamente proporcional, 206
Directriz, 771,814
Dirichlet, Lejeune, 219
Discontinuidad, 256
Discriminante
negativo, 114-16
de ecuaciones cuadráticas, 102
Distancia
entre puntos, 19
media, 790
Dividendo, 52
de polinomios, 362, 363
División, 6, 13. *Vea también* Cociente(s)
de células, 465-66
de enteros, 52
de polinomios, 52-54
sintética, 54-57
de expresiones racionales, 60
propiedades de la, 12
Divisor, 52
de polinomio, 362, 363
Dominio, 219, 225
función
compuesta, 394
constante, 253
cosecante, 541,542
coseno, 541,542
cotangente, 541, 542
cuadrada, 254
cuadrática, 292
cubo, 254
entero más grande, 256
identidad, 254
inversa, 403, 406
lineal, 253
logaritmo, 49, 430-31
recíproca, 255
secante, 541, 542
seno, 541, 542
raíz cuadrada, 254
tangente, 541, 542
trigonométrica, 541-42
valor absoluto, 255
variable, 21

E

e, 419-20, 427
Ecuación(es), 83-124
aplicaciones de, 141-50
como función, 224
compuesta, 608
condicional, 608
con dos variables, 165
conjunto de soluciones, 84
con valor absoluto, 136
cuadráticas, 96-109
aplicación, 105-6
aspecto histórico, 106
completar cuadrados, 99-101
definición de, 96
en forma estándar, 96
en sistemas de números complejos, 109-18
factorización de, 97-99
fórmula cuadrática, 101-4
método de la raíz cuadrada, 98-99

cúbica, 93
de costo, 192
fijo, 192
de demanda, 275-76
de elipse, 782-85, 786-87
de forma cuadrática, 120-22
de hipérbola, 792-93, 798-99, 800-801
de Lensmaker, 69
de parábola, 772-73, 772-75, 776
de polinomios, 370-71
de primer grado. *Vea también* Ecuaciones lineales 88, 842
deprimida, 368
de rectas, 185-90, 882
dados dos puntos, 187
forma de intercepción, 192
forma de punto-pendiente, 186
forma general, 189
forma pendiente-intercepción, 187-89
perpendicular a una recta dada, 197
recta horizontal, 186
recta vertical, 185-86
de segundo grado. *Vea también* Ecuaciones cuadráticas
de un círculo
forma estándar, 176
forma general, 178
en una variable, 84
equivalente, 84-85
exponencial, 421-23, 451-53
gráficas de, 165-75
graficando puntos, 165-69
intercepciones, 169-70
simetría, 170-73
interés, 142-43
lineales, 84-96, 189
aplicaciones, 91-92
aspecto histórico, 93
con una variable, 86-87
definición de, 86
ecuaciones que llevan a, 88-90
pasos para resolver, 93
sin solución, 89-90
solución de, 87-89
logarítmica, 434-36, 450-51
movimiento uniforme, 145-46
paramétricas, 820-33
aplicaciones a mecánica, 830
cicloide, 829
curva definida por, 820-23
definición de, 820
el tiempo como parámetro, 824-27
encontrar las, 827-29
pasos para resolver, 86
pendiente, 84, 165
polares, 719-36
aspecto histórico, 733
cálculo y, 733
clasificación, 731
de cónicas, 814-20
definición de, 719
gráfica de, 719-36
identificación, 720-24
simetría, 724-25
problemas de mezclas, 144
que se factorizan, 122-23
radical, 118-20
rectangulares
convertir ecuaciones polares de cónicas en, 818
de curvas, 822-23, 827
soluciones (ceros; raíces), 84, 169-70
trabajos de tasa constante, 146-47
traducción de descripciones verbales en expresiones matemáticas, 141-42
trigonométricas, 639-45
en forma cuadrática, 645-46
lineales, 640-41
resolver, 639-42
soluciones de, 637
Eddin, Nasfr, 502,684
Egipcios de la antigüedad, 106, 964
Eje(s)
conjugado, 792
coordenados, 158
de simetría de una parábola, 294, 771
de una elipse, 781
de una hipérbola, 792
de un cono, 770
imaginario, 736
mayor, 814
polar, 710
real, 736
e imaginario, 736
rotación de, 807-9
identificar cónica sin, 811-12
transversal, 792, 814
x, 158
proyección sobre, 694
reflexión respecto al, 268-69
simetría respecto al, 170, 725
y, 158
proyección sobre, 694
reflexiones respecto a, 268-69
simetría respecto al, 171, 725
Elementos (Euclides), 684, 964
Elementos
de un conjunto, 2, 984
diagonales, 891
Elevación, 181
Elipse, 770, 781-91, 814
aplicaciones, 787-88
centro, 781, 786-87
definición de, 781
Elipsis, 2
Enfriamiento, ley de Newton de, 469-70
Enteros, 3
división, 52
factorización sobre los, 43
Entradas de una matriz, 856, 883
diagonal, 891
Equilibrio, 693
estático, 752-53
Escala
de la recta numérica, 17
de Richter, 441
Escalares, 746
Esfera, volumen de una, 32
Espacio muestra, 1001-2
Espiral, 731
Estiramiento, 265-68
horizontal, 267
vertical, 265-66
Estrella, magnitud de, 486
Euclides, 106, 684, 964, 977
Euler, Leonardo, 428, 502, 1009
Evento(s), 1004
complemento de, 1007-8
mutuamente excluyentes, 1006
Excentricidad, 814
elipse, 781
hipérbola, 791, 805
Exponentes, 21-23
base de, 22
cambio a expresiones logarítmicas, 429
cambio de expresiones logarítmicas en, 429
en calculadoras de gráficas, 24
leyes de, 22-23, 413
logaritmos relacionados, 429
racionales, 73-75
Expresión(es)
algebraicas, 20
escritura de expresiones trigonométricas, 622-23
encontrar el valor de, 7-8
logarítmica, 444
racional, 58-70
cocientes mixtos, 65-67
definición de, 58
descomposición. *Vea también* Descomposición de fracciones parciales
impropia, 900
multiplicación y división, 60
propia, 900
reducida a términos mínimos (simplificada), 59
suma y resta, 61-62
trigonométrica, escrita como expresión algebraica, 622-23
Extremos de intervalos, 125

F

Factor(es), 6, 43
coeficiente de amortiguamiento, 697
cuadrático
irreducible, 370, 900
irreducible no repetido, 904-6
irreducibles repetidos, 905
división sintética para verificar, 57
lineales
no repetidos, 900-901
repetidos, 902-3
Factorial, 943

Factorización, 43-52
cuadrados perfectos, 45
diferencia de dos cuadrados, 44
diferencia de dos cubos, 44
expresión con exponentes racionales, 75
por agrupamiento, 48
solución de ecuaciones cuadráticas, 97-99
trinomios, 46-47, 49-50
Fahrenheit, conversión de Celsius a, 90
Familia
de parábolas, 274
de rectas, 199
Fechación por carbón, 468
Fermat, Pierre de, 428, 1009
Ferrari, Lodovico, 374
Fibonacci, 964
Finck, Thomas, 502, 514
Foco(s), 814
de elipse, 781
de hipérbola, 791
de parábola, 771
Forma
cartesiana de números complejos, 737
escalonada por fila, 860-64
reducida, 863-64
estándar
ecuación cuadrática en, 96
números complejos en, 110, 112-13
polinomios en, 37
explícita de una función, 224
general de la ecuación de la recta, 189
implícita de funciones, 224
punto-pendiente
de la ecuación de una recta, 186-89
rectangular de números complejos, 737
Fórmula(s)
cuadrática, 101-4
discriminante, 102
de ángulo doble, 626-27
establecer identidades con, 627-28, 629
valores exactos en, 626-27
variaciones en, 628-29
de Herón, 688-89
de la distancia, 159-60
de medio ángulo, 630-33
valores exactos, 630-32
de Mollweide, 680
de producto a suma, 635-36
de punto medio, 162
de Stirling, 978
de suma a producto, 637
de suma y resta, 615-25
con funciones trigonométricas inversas, 622-23
para cosenos, 616-18
para establecer la identidad, 620, 621-22
para senos, 618-20, 619-20
para tangentes, 621-22
valores exactos a partir de, 617, 619-20
para cambio de base, 447-48
para rotación de ejes, 807
recursivas, 943-44
Fracción(es)
compleja, 65*n*
parciales, 900
Frecuencia, 563,695
Frobenius, Georg, 896
Fuerza(s)
descomposición de, 760
resultante, 752
trabajo realizado por una constante, 761-62
Función(es)
ajuste de datos, 474-82
modelos exponenciales, 475-76
modelos logarítmicos, 476-77
modelos logísticos, 477-78
argumento, 222
cero, 240, 313
circular, 538
cociente de diferencias, 246
compuestas, 392-99
aplicaciones de cálculo, 396-97
componente de, 396-97
definición de, 392
dominio, 394
encontrar, 393-95
evaluación, 393
iguales, 395-96
constante, 242-43, 253, 313
construcción, 275-83
cosecante, 507, 508, 513, 514, 538, 540
dominio, 541, 542
gráfica, 568-69
inversa, 605-6
recorrido, 542
coseno, 507, 508, 513, 514, 538, 540
dominio, 541, 542
ecuaciones trigonométricas, 649-50
fórmulas de ángulo doble, 626, 628
fórmulas de ángulo medio, 630, 630-31
fórmulas de producto a suma, 635, 637
gráficas, 550-52. *Vea también* Funciones senoides
hiperbólico, 428
inverso, 596-98
propiedades, 551
recorrido, 541,542
costo promedio, 235-36
cotangente, 507, 508, 513, 514, 538, 540
dominio, 541, 542
gráficas, 564-66
inversa, 605
recorrido, 542
creciente, 242-43
cuadrada, 254
cuadráticas, 292-312, 313
ajuste a los datos, 305-4
aplicaciones, 292-93, 300-304
definición de, 292
dominio, 292
encontrar, dado un vértice y otro punto, 299
graficar, 293-300
intercepciones x de, 296
valor máximo y mínimo, 300-301
cúbica, 222, 254
de mejor ajuste, 329
de costo promedio, 235-36, 354-55
decreciente, 242-43
de dominio restringido, 408
definición de, 219
definidas por partes, 256-58
del entero más grande, 255-56
de polinomios, 312-30
ceros de, 318-19, 362-83
complejos, 377
definición de, 313
grado, 313
gráfica, 313-26
identificación, 313-14
multiplicidades, 319-20
de potencia, 314-17
de grado n, 314
diferencia de, 226
dominio, 219, 225
ecuación como, 224
ejemplo de, 221
en aplicaciones, 225-26, 235-36
entero más grande, 255-56
escalón, 256
exponenciales, 412-28
base e, 419-20
definición de, 413
evaluación, 413
gráficas, 415-28
propiedades de, 416,423
forma
explícita, 224
implícita, 224
gráficas, 231-40, 262-75
combinación de procedimientos, 270-71
compresión y estiramiento, 265-68
reflexiones en el eje x o el eje y, 268-69
traslación vertical, 262-63, 265
identidad, 253-54
impares, 240-42
inversas, 399-412. *Vea también* funciones logarítmicas
con identidades, 612-13
cosecante, 605-6
coseno, 596-98
cotangente, 605
de $y = f(x)$, 403-4
encontrar, 400-402, 405-7
fórmulas para suma y resta, 622-23
función de dominio restringido, 408
gráfica, 405
interpretación geométrica, 404-5
prueba de la recta horizontal, 402
recorrido, 406
secante, 605
seno, 592-96

tangente, 599-600
verificación, 404
límite de, 332
lineales, 253, 313
logarítmicas, 428-50
ajuste de datos, 476-77
definición de, 429
dominio de, 429, 430-31
ecuaciones logarítmicas, 434-36
gráficas, 431-34
propiedades, 432,437
logísticas, ajuste de datos, 477-78
máximo y mínimo locales, 244-46
notación, 221-22
objetivo, 925-26
operaciones con, 226-28
pares, 240-42
producto, 226
propiedades, 240-50
racionales, 330-56
aplicaciones, 352-53
asíntotas, 333-38
construcción de su gráfica, 351-52
definición de, 331
dominio, 331
en términos mínimos, 331
gráfica, 332-33, 341-52
impropias, 336
no acotadas en dirección positiva, 332
propias, 335
raíz
cuadrada, 251, 254
cúbica, 251-52
recíproca, 255, 568
recorrido, 219, 225
relaciones como, 219, 219-20
secante, 507, 508, 513, 538, 540
dominio, 541, 542
gráficas, 568-69
inversa, 605
recorrido, 542
seno, 507, 508, 513, 514, 538, 540
dominio de, 541,542
ecuaciones trigonométricas, 649-50
fórmulas de ángulo doble, 626, 628
fórmulas de medio ángulo, 630
fórmulas de producto a suma, 635
fórmulas de suma a producto, 637
gráficas, 547-50. *Vea también* Función senoide
hiperbólico, 428
inversa, 592-96
propiedades, 549
recorrido, 542
senoides, 547-64. *Vea también* Función coseno; Función seno
amplitud, 553, 554-55, 556-58, 572-74
ciclo, 554
corrimiento de fase, 571-74
encontrar a partir de datos, 575-80
graficar, 552-64, 572-75
periodo de, 554-55, 556-58, 572-74
suma, 226
tangente, 507, 508, 513, 514, 538, 540
dominio, 541-42, 542
fórmulas de ángulo doble, 627*n*, 628
fórmulas de medio ángulo, 630, 632-33
gráficas, 564-68
inversa, 599-600
método de Descartes de raíces iguales para encontrar, 915
propiedades, 566
recorrido, 542
tasa de cambio promedio, 246-48
trascendental, 428
trigonométricas, 491-590
aplicaciones de
aspecto histórico, 502
coseno hiperbólico, 428
de ángulos agudos, 507-8
de ángulos generales, 526-36
de ángulos, 539-40
dominio, 541-42
enfoque de círculo unitario, 536-47
gráficas de, 547-71
periodo de, 543-44
propiedades par-impar, 544-45
recorrido, 541-42
seno hiperbólico, 428
tangente, método de Descartes de raíces iguales para encontrar, 915
uno a uno, 401
inversa de, 405-6
valor absoluto, 252,255
valores de, 219, 221, 222-23

G

Galois, Evaristo, 374
Gauss, Karl Friedrich, 377, 742
Generadores de conos, 770
Geometría, 29-35
álgebra para resolver problemas de, 161
analítica
cónicas, *Vea también* Cónicas
curvas planas, 820
ecuaciones paramétricas, 820-33
exponentes racionales, 73-75
expresiones racionales, 58-70
cocientes mixtos, 65-67
definición de, 59
multiplicación y división, 60
reducción a términos mínimos (simplicación), 59
suma y resta, 61-62
fórmulas, 31-33
grado, 36, 41
cero, 36
de segundo grado, 46-47, 49-50
división de, 52-58
en dos variables, 41-42
en forma estándar, 37
factorización, 43-52
factorización completa, 43
multiplicación, 38-39
primos, 43, 47
resta, 38
términos, 36
trinomios, 36
polinomios, 35-58
binomios, 36, 40-41
coeficientes, 36
definición de, 36
suma, 37-38
radicales, 70-72
raíces *n*-ésima, 70-71
teorema de Pitágoras, 30-31
aplicación, 31
inverso, 30
Gibbs, Josiah Willard, 753
Googol, 943
Grado(s), 493-95
de polinomios, 36, 41, 313
de un monomio, 35, 41
radianes y, 497-99
Gráfica(s)/graficar, 157-216
completa, 167
continua, 314
de círculos, 176-79, 720, 722-24, 732
aplicación de gráficas, 179
cuya ecuación está en la forma general, 178
de coordenadas
polares, 719-36
rectangulares, 158-65
de desigualdades en dos variables, 916-25
de ecuaciones, 165-75
graficando puntos, 165-69
intercepciones, 169-70
simetría, 170-73
de elipse, 781-83, 786-87
de funciones, 231-40, 262-75
cosecante, 568-69
cotangente, 564-66
cuadráticas, 293-300
de polinomios, 313-26
de valor absoluto, 252
exponencial, 415-28
inversas, 405
racional, 332-33, 341-52
raíz cúbica, 251-52
secante, 568-69
senoidal, 552-64, 572-75
tangente, 564-68
de hipérbola, 793-94
de logaritmos, 431-34, 448
usando transformaciones, 432-34
de parábola, 772
de rectas, 184-85
de sistemas de desigualdades en dos variables, 919-22
de sistemas de ecuaciones lineales, 843
de suma de dos funciones, 699-700
determinación de función par e impar en, 2
de vectores, 746
de $y = 1/x$, 173, 332

diagrama de dispersión, 199-200
ajuste de curvas, 201-2
recta de mejor ajuste, 202-3
distancia del origen a un punto, 276
combinando procedimientos, 270-71
usando compresión y estiramiento, 265-68
usando reflexiones en los ejes *x* y *y*, 268-69
usando traslación horizontal, 263-65
usando traslación vertical, 262-63
puntos, 158
usando coordenadas polares, 712-13
suave, 314
variación, 206-11
combinada, 208-9
conjunta, 208-9
definición de, 206
directa, 206-7
inversa, 207-8
vértices (puntos esquina), 922
usando transformaciones, 418-19, 420-21
Grassmann, Hermann, 753, 762
Griegos de la antigüedad, 15

H

Hamilton, William Rowan, 753
Harlan, Jim, 659
Harnot, Thomas, 106
Hermandad de Pitágoras, 15
Herón de Alejandría, 688, 690, 964
Hipérbola, 770, 791-805, 814
aplicaciones de la, 801-2
asíntotas, 797-99
centro, 792, 799-800
conjugada, 805
definición de, 791
ecuación de, 792-93, 798-99, 800-801
análisis de, 794-97
centro en (0, 0); focos en (0, $\pm c$); vértices en (0, $\pm a$); eje transversal en el eje *y*, 795-96
encontrar y graficar, 793-94, 796-97, 800-801
eje
conjugado, 792
transversal, 792
equilátera, 805
excentricidad, 805
foco, 791
ramas, 792
vértices, 792
Hipotenusa, 30, 506, 507
"Hisâb al-jabr w'al-muqâbalah" (al-Khowârizmî), 26
Huygens, Christiaan, 830, 1009

I

Identidad(es), 84
aditiva, 10
básicas, 609
cociente, 608
con funciones inversas, 612-13
de cocientes, 508
de funciones trigonométricas, 608
de Pitágoras, 509, 609
definición de, 608
establecimiento, 608-13, 620, 627-28, 629
multiplicativa, 10
par-impar, 544-45, 609
recíprocas, 508
de funciones trigonométricas, 608
solución de ecuaciones trigonométricas con, 646-48
trigonométricas, 608-15
Igualdad
de conjuntos, 2
de números complejos, 110
India en la antigüedad, 106
Índice(s)
de columna, 856
de fila, 856
de refracción, 644
de un radical, 70
de una suma, 945
Inducción matemática, 967-71
principio de, 968
extendida, 971
uso de, 968-70
Intercepción(es) 169-70, 240
de la ecuación de una recta, 192
de un círculo, 177-78
x, 169
de función cuadrática, 296
y, 169, 188-89
Interés, 142-43
compuesto, 455-64
cálculo de, 456-57
definición de, 456
fórmula de, 457,459
simple, 142,455
tasa de, 142, 455
efectivo, 459
Intersección de conjuntos, 985
Intervalo(s), 125-26
abierto, 125
cerrado, 125
puntos extremos, 125
semiabiertos o semicerrados, 125
Inversamente proporcional, 207
Inverso del teorema de Pitágoras, 30, 33

J

Jiva, 514

K

Karmarkar, Natendra, 925*n*
Kepler, tercera ley de movimiento planetario de, 214
Khayyâm, Omar, 977
Kirchhoff, reglas de, 854, 871-72
Koukounas, Teddy, 692*n*

L

Lado(s)
de una ecuación, 84, 165
de una desigualdad, 18
inicial, 492
opuesto del triángulo rectángulo, 507
terminal, 492
Latitud, 499
Latus rectum, 772
Lemniscata, 730, 732
Lensmaker, ecuación de, 69
Lewis, Meriwether, 659
Ley
de Descartes, 644*n*
de los senos, 670-71
aplicaciones, 673-76
aspecto histórico, 684
para resolver triángulos LAA y ALA, 670-71
para resolver triángulos LLA (caso ambiguo), 671-73
prueba de, 670, 675-76
de Newton, 210
de enfriamiento, 469-70
de movimiento, 293
de Ohm, 132-33
de refracción de Snell, 644
de tangentes, 680, 684
exponencial (ley de crecimiento o decaimiento no inhibido), 465
Limaçon
con bucle interno, 728-29, 732
sin bucle interno, 726-27,732
Límites, 332
Líneas
coincidentes, 842
perpendiculares, 195-97
Logaritmo(s), 441-51
calculadora para evaluar, 446-48, 447
cambio a expresiones exponenciales, 429
cambio de expresiones exponenciales a, 429
común (log), 433, 446, 448
exponentes relacionados, 429
expresiones escritas como un solo, 445-46
gráficas, 448
natural (ln), 432, 446, 448
propiedades, 441-50, 448
Logro educativo, 839
Longitud de arco, 496-97
LORAN (Long RAnge Navigation o sistema de navegación de largo alcance), 801-2

M

Magnitud
de una estrella, 486
de un número complejo, 736
de un terremoto, 441
de un vector, 744, 747, 749, 750, 751-52
Mandelbrot, Benoit, 709

Mareas, 589
alta, 589
baja, 589
Matriz/matrices, 856-72, 882-99
aplicaciones de gráficas para, 885
arreglo de datos, 883-84
aumentada, 856-57, 859
cero, 886
coeficiente, 857
cuadrada, 884-86
de transición, 937-38
definición de, 856, 883
ejemplos, 884
entradas, 856, 883, 891
forma de filas escalonadas, 860-64
reducida, 863-64
identidad, 891
índice de columna, 856, 883
índice de fila, 856, 883
inversa, 891-95
m por *n*, 883
multiplicación, 887-93
con la matriz identidad, 891
escalar, 886-87
vector fila por vector columna, 887
no singular, 892, 893
operaciones con filas, 858-59
propiedades de, 885-86
singular, 892
solución de sistemas de ecuaciones lineales, 860-868, 895-96
en forma de fila escalonada, 860-64
suma y diferencia de dos, 884
Máximo(s)
local de funciones, 244-46
y mínimos locales, 244-46, 321
McDonald's, caso del café hirviendo en, 391
Mecánica, ecuaciones paramétricas aplicadas a, 830
Media
aritmética, 135
geométrica, 135
armónica, 135
vida, 468, 492
Medianas de un triángulo, 164
Mejor ajuste
de función cúbica, 329
de función seno, 580
Menelaus de Alejandría, 502
Menores de determinantes, 876
Método
de eliminación
sistemas de ecuaciones lineales, 844-46, 848-49
solución de ecuaciones no lineales, 908-12
de la raíz cuadrada, 98-99
de raíces iguales de Descartes, 915
de sustitución
solución de ecuaciones no lineales usando, 907-8
solución de sistemas de ecuaciones lineales con, 843-44
PEPS (primero en entrar, primero en servir), 39-40
Roster, 2
símplex, 925*n*
Métrica (Herón), 690
Milla(s)
náuticas, 506
normal, 506
Mínimo
común múltiplo (MCM), 14, 62-65
local de funciones, 244-46
Minutos, 494, 495
Miranda, Kathleen, 692*n*
Modelado matemático, 141. *Vea también* Modelo(s)
Modelo(s)
cuadráticos, 300-312
de probabilidad, 1001-4
construcción, 1003-4
determinación, 1002-3
exponencial, 475-76
logarítmico, 476-77
logístico, 471-72, 477-78
Modo
conexo, 256
de puntos, 256
Módulo de un número complejo, 736
Monaghan, Joe, 591
Monitor (choque de fierro), 291
Monomio, 35-36
coeficiente, 35-36
en dos variables, 41
factores, 43
grado, 35,41
Monter, 193
Movimiento
amortiguado, 694*n*, 696-98
armónico simple, 693-95
análisis, 696
definición de, 695
ecuación para, 695-96
movimiento circular y, 694
circular, 501-2, 694
amortiguado, 694*n*, 696-98
armónico simple y, 693-95
curvilíneo, 824
de un proyectil, 824-26
ecuación paramétrica para objeto en, 828-29
lineal, 502
segunda ley de Newton, 293
simulación, 826-27
curvilíneo, 824
de un proyectil, 293, 824-26
lineal, 502
uniforme, 145-46
Multifractales, 709
Multiplicación, 6. *Vea también* Producto(s)
de cero, 12
de cocientes, 13
de expresiones racionales, 60
de polinomios, 38-39
de vectores y números, 746
matriz, 887-93
con matriz identidad, 891
de vector fila por vector columna, 887
Multiplicador, 967

N

Napier, John, 448
Neptuno, 769
Niccolo of Brescia (Tartaglia), 374, 742
No singular, matriz, 892, 893
Notación
científica, 24-26
conversión, 24-25
de construcción del conjunto, 2
de función, 221-22
sumatoria, 944-45
Numerador, 3, 59
Número(s)
complejos, 109-14, 737-39
argumento, 737
aspecto histórico, 742
cociente, 112-13
conjugado, 113, 737
definición de, 110
diferencia, 110, 111
ecuaciones cuadráticas, 109-18
en forma estándar, 110, 112
en forma polar, 737-39
en forma rectangular o cartesiana, 737
igualdad, 110
parte imaginaria, 110
parte real, 110
potencias, 114
producto, 111-12
raíces complejas, 740-42
recíproco, 112
suma, 110, 111
teorema de De Moivre, 739-40
de Fibonacci, 944
enteros, 2
imaginario puro, 110
irracionales, 3-4, 110
naturales (conteo), 2
para contar (naturales), 2
racionales, 3, 110, 331
reales, 2-17, 4, 110
aproximaciones, 5
aspecto histórico, 15
calculadoras, 5-6
clasificación, 2-4
conjugado de, 113
conjuntos, 2
negativos, 17
operaciones, 6-8
positivos, 17
propiedades, 8-15

O

Operaciones, 6-8
orden de, 7-8

Órbitas elípticas, 769
Ordenada (coordenada *y*), 158
O'Reilly, Charles, 491
Orientación a lo largo de la curva, 821
Origen (*O*), 158
  de la recta real, 17
  simetría respecto a, 171, 725

P

Paños, 770
Pantalla, 179
Papiro Rhind, 964
Parábola(s), 294-300, 770, 771-80, 814
  definición de, 771
  directriz, 771
  ecuación, 772-75, 776
  ejes de simetría, 294, 296, 771
  familia de, 274
  foco, 771
  propiedad de reflexión, 776-78
  vértice, 294, 771, 773, 775-76
Paraboloide de revolución, 776, 776-77
Parámetro, 820
Par ordenado, 158
Parte
  imaginaria de números complejos, 110
  real de números complejos, 110
Pascal, Blaise, 830, 973, 1009
Peano, Giuseppe, 1009
Pendiente, 181-84
  de la recta secante, 247
  perpendicular a una recta dada, 196
Perihelio, 790
Perímetro de un rectángulo, 31
Periodo
  de función senoide, 554-55, 572-74
  de funciones trigonométricas, 543-44
  de pago, 455
  de vibración, 694
  fundamental, 543
Permutaciones, 992-95
  cálculo, 994-95
  con *n* objetos que no son distintos, 997-98
  de *r* objetos tomados de *n* objetos distintos sin repetición, 994
  distintas
    con repetición, 993
    sin repetición, 993-94
Planeta, distancia media al sol, 790
Plano
  complejo, 736-44
    definición de, 736
    eje imaginario, 736
    eje real, 736
    graficar un punto, 737-38
  xy, 158
Plutón, 769
Poder de ingresos, educación y, 839
Polinomio(s), 35-58
  binomio, 36, 40-41
  cero, 36
  cociente de dos. *Vea también* Expresiones racionales
  coeficientes, 36
  de Chebyshëv, 628*n*
  definición de, 36
  de segundo grado, 46-47, 49-50
  división, 52-54
  en dos variables, 41-42
  en forma estándar, 37
  factorización, 43-52
    diferencia de dos cuadrados, 44
    diferencia de dos cubos, 44
  factorizado por completo, 43
  grado, 36, 41
  multiplicación, 38-39
  primo, 43, 47
  resta, 38
  suma, 37-38
    algoritmo para, 362-63
    larga, 52-54
    sintética, 54-57
  términos de, 36
  trinomio, 36
Polo, 710. *Vea también* Origen (*O*)
  simetría respecto a, 725
Posición
  de reposo (equilibrio), 693
  estándar, ángulo en, 492, 493
Potencia(s), 22. *Vea también* Exponentes
  de 2, 413
  de *i*, 114
  de números complejos, 114
  eléctrica, 563
Primer coeficiente, 36, 377
Principal, 142, 455
Principio
  aditivo del contar, 987-88
  de multiplicación para conteo, 991
  de sustitución, 9
  general de adición para contar, 988
Probabilidad(es), 1001-11
  aspecto histórico, 1009
  complementos, 1007-8
  compuesta, 1005-6
  definición de, 1001
  de Poisson, 426
  de un evento, 1004
  exponencial, 422-23, 426
  modelos, 1001-4
    construcción, 1003-4
    determinación, 1002-3
  para resultados igualmente probables, 1004-5
  regla de la suma, 1005-6
Problemas de mezclas, 144
Proceso de modelado, 141
Producto(s), 6. *Vea también* Multiplicación
  como sumas, 636, 637
  de funciones, 227
  de números complejos, 111-12
    en forma polar, 738-39
  diferencias como, 637
  escalar, 746, 749, 750, 756
  especial, 39-42
  log de, 443
  punto, 756-64
    calcular, 756
    definición de, 756
    propiedades de, 756-57
  suma como, 637
Programación lineal, problemas, 925-32
  en dos variables, 926
  maximización, 929-30
  minimización, 928
  solución, 927-30
Progresión. *Vea también* Sucesiones aritméticas; Series geométricas
  marginal al ahorro, 205
  marginal al consumo, 204, 967
Propiedad(es)
  asociativa, 9
    de multiplicación de matrices, 890
    de suma de matrices, 885
    de suma de vectores, 745
  conmutativa
    de números reales, 9
    de producto punto, 756
    de suma de matrices, 885-86
    de suma de vectores, 745
  de cancelación, 12-13
  de identidades, 10
    de multiplicación de matrices, 891
  de las desigualdades, 127
  del inverso aditivo, 10-11
  de multiplicación
    de desigualdades, 128
    de número positivos y negativos, 17
  de producto cero, 13
  de reflexión de la parábola, 776-78
  de simetría, 9
  distributiva, 10
    de multiplicación de matrices, 890
    de números reales, 10
    de producto punto, 756
  inversa multiplicativa, 11
  no negativa de desigualdades, 127
  par-impar de funciones trigonométricas, 544-45
  recíproca de desigualdades, 129, 132
  reflexiva, 9
  transitiva, 9
Proporcionalidad, constante de, 206
Proyección sobre los ejes *x* y *y*, 694
Proyector de luz, 662
Prueba
  de la recta horizontal, 402
  de la recta vertical, 232-33
Ptolomeo, 645,684
Punto(s)
  colineales, 882
  de inflexión, 321
  de tangencia, 199
  distancia entre, 19, 159-61
  esquina (vértices) de una gráfica, 922

factibles, 926
graficar, 158, 165-69
inicial de segmento de recta dirigido, 744
terminal de segmento de recta dirigido, 744

R

Racionalización del denominador, 72-73
Radianes, 495, 496-99, 500
grados y, 497-99
Radicales, 70-72
racionalización del denominador, 72-73
semejantes, 72
Radicando, 70
Radio, 175
Raíz/raíces. *Vea también* Soluciones; Ceros (soluciones)
complejas, 740-42
cuadrada, 23-24, 70, 251, 254
compleja, 740
principal, 23, 114
cúbica, 70, 251-52
compleja, 740
de ecuaciones, 84, 169-70
de multiplicidad 2 (raíz doble), 97
doble (raíz de multiplicidad 2), 97
n-ésima, 70-71
principal, 70
perfectas, 71
Ramas de una hipérbola, 792
Rayo, 492
Razón
áurea, 949
común, 956
de cambio promedio, 182, 246-48
Recíproco, 11
de un número complejo, 112
Recorrido, 219
de un proyectil, 629
función
constante, 253
cosecante, 542
coseno, 542
cotangente, 542
cuadrada, 254
cúbica, 254
del entero mayor, 256
identidad, 254
inversa, 403, 406
logarítmica, 430
raíz cuadrada, 254
recíproca, 255
secante, 542
seno, 542
tangente, 542
valor absoluto, 255
trigonométrica, 541-42
Recta(s), 181-99
coincidente, 842
de mejor ajuste, 202-3
de números reales, 17
ecuaciones de, 185-90,882
dados dos puntos, 187
forma de intercepción, 192
forma general, 189
forma intercepción-pendiente, 187-89
forma punto-pendiente, 186
perpendicular a una recta dada, 197
recta horizontal, 186
recta vertical, 185-86
familia de, 199
gráficas, 184-85, 720-22, 732
recta horizontal, 721
recta vertical, 721-22
horizontal, ecuación de, 186
numérica, distancia en la, 19
paralela, 194-95
pendiente de, l81-84
recta secante, 247
perpendicular, 195-97
secante, 247
tangente, 199
vertical, 181, 182
ecuación, 185-86
Rectángulo, área del, 31
Rectas paralelas, 194-95
Redondeo, 5
Reducida a términos mínimos (simplificada), 59
Reflexiones sobre los ejes *x* y *y*, 268-69
Refracción
ángulo de, 644
índice de, 645
Regiomontanus, 502, 684
Regla
de Cramer, 873,8734
para tres ecuaciones con tres variables, 878-79
para dos ecuaciones con dos variables, 874-75
de la adición, 1005-6
de los signos de Descartes, 12, 365-66
de Simpson, 312
Relación(es), 199
como funciones, 219, 219-20
definición de, 218, 219
ejemplo de, 219-20
lineal, 201, 203, 306
no lineal, 201
Residuo, 52
de polinomio, 362, 363
división sintética para encontrar, 56-57
Resta, 6. *Vea también* Diferencia
cocientes, 13
expresiones racionales, 61-62
método MCM, 62-65
matriz, 884-86
polinomios, 38
Restricciones, 926
Resultados, 1001
igualmente probables, 1004-5
Retículas polares, 719
Revoluciones por unidad de tiempo, 501
Rhaeticus, 502
Rosa, 729-30, 732
Rotación de ejes, 807-9
fórmulas para, 807
identificar cónica sin, 811-12
Rubáiyát (Khayyiám), 977
Ruffini, P., 374
Rumbo (dirección), 664

S

Schroeder, E., 1009
Sector, área de, 500
Secuencia de Fibonacci, 944
Segmento de recta, 744
dirigido, 744
punto medio, 162
Segundos, 494, 495
Semilla, 767
Semiplanos, 918
Seno hiperbólico, 428
Serie geométrica, 955-67
definición de, 955
determinación, 956
infinita, 959-60, 967
n-ésimo término, 957
suma de los *n* primeros términos, 958-59
Signo(s)
de funciones trigonométricas de ángulos generales, 530-31
de radical, 23,75
iguales, 6
Símbolo(s)
de desigualdades, 18
de infinito (∞), 125-26
Simetría, 170-73
de ecuaciones polares, 724-25
respecto al
eje *x*, 170
eje *y*, 171
origen, 171, 725
Simplificación
cociente mixto, 65-67
con exponentes reales, 74
expresiones racionales, 59
radicales, 71-72
Sistema
consistente de ecuaciones lineales, 842
decimal, 15
de coordenadas cartesianas. *Vea* Coordenadas rectangulares
de desigualdades, 916
acotado 922
en dos variables 922
no acotado 922
de ecuaciones lineales, 840-82
congruentes, 842
definición de, 840
determinantes, 872-82
2 por 2, 873
en dos variables, 842-43
en tres variables, 848-52
graficar, 843

incongruente, 842, 846, 850
independientes, 842
matrices para resolver, 860-68, 895-96
menores, 876
propiedades, 879-81
regla de Cramer, 873-75
sistemas de tres ecuaciones con tres variables, 878-79
3 por 3, 876-78
no lineales, 907-16
aspecto histórico, 912
eliminación para resolver, 908-12
sustitución para resolver, 907-8
dependientes de ecuaciones lineales, 842, 847-48, 850-51
no acotados de desigualdades, 922
Snell, Willebrord, 644
Solución(es), 84. *Vea también* Raíz/raíces; Ceros (soluciones)
de desigualdad, 129
de ecuaciones trigonométricas, 637
de problemas de programación lineal, 927-30
de sistemas de ecuaciones lineales, 841, 848
extrañas, 118
repetida, 97
Sonido, volumen del, 440
Stevin, Simon, 15
Subconjunto, 2, 984-85
propio, 984
Subíndice, 36*n*
Sucesiones, 940-49
anualidades, 962-63
aritméticas, 949-55
definición de, 949
determinación, 950-51
fórmula recursiva para, 951-52
n-ésimo término, 951
suma de *n* primeros términos, 952-54
aspecto histórico, 964
definición de, 940
determinación de un patrón, 942
Fibonacci, 44
fórmulas recursivas, 943-44
geométrica, 955-67
definición de, 955
determinación, 956
infinita, 959-60, 967
n-ésimo término, 957
suma de *n* primeros términos, 958-59
notación de sumatoria, 944-45
propiedades, 946
símbolo del factorial, 943
términos de, 940-42
general, 941
suma, 946-47
Suma, 6. *Vea también* Adición
como productos, 637
de dos cubos, 42, 44
de matrices, 884-86
de polinomios, 37-38
método MCM, 62-65
de vectores, 745-46, 749, 749-50
funciones, 226
n términos de una sucesión aritmética, 952-54
n términos de una sucesión geométrica, 958-59
números complejos, 110, 111
productos como, 636, 637
series geométricas infinitas, 959-60
triangular, 976
Sustitución hacia atrás, 844
Sylvester, James J., 896

T

Tartaglia (Niccolo de Brescia), 374, 742
Tasa
constante, 146-47
de cambio promedio, 182
de una función, 246-48
de interés, 142, 455
efectiva, 459
hipoteca, 83
Tautócrona, 830
Teclas de funciones, 6
Teléfono celular, 217
Teorema
binomial, 971-78
aspecto histórico, 977
expansión binomial, 974-75
(*n* <sobre> *j*), 972-73
de ángulos complementarios, 512-14
definición de, 506
solución, 660-61
valor de funciones, 507-8
de ceros racionales, 366-67
de De Moivre, 739-40
del factor, 364-65
del residuo, 362-64
del valor intermedio, 372-74
de pares conjugados, 378-79
de Pitágoras, 30-31
aplicación, 31
inverso de, 30, 33
prueba de, 32-33
fundamental del álgebra, 377-78
Teoría de conjuntos, 15
Términos
de polinomios, 36
de sucesiones, 940-42
general, 941
suma, 946-47
mínimos, 331
semejantes, 36
Terremotos, 441
nivel cero, 441
Tiempo como parámetros, 824-27
Tiende a infinito, 332
Trabajo
de tasa constante, 146-47
realizado por una fuerza constante, 761-62
Transformaciones, 262-75
compresión y estiramiento, 265-68
de funciones
exponenciales, 420-21
logarítmicas, 432-34
definición de, 262
graficar funciones racionales usando, 332
graficar funciones trigonométricas usando
función coseno, 551-52
función seno, 549-51
función tangente, 567
graficar una función cuadrática usando, 294-95
reflexiones sobre los ejes *x* y *y*, 268-69
traslaciones verticales, 262-63, 265
Tránsito, 661
Traslaciones horizontales, 263-65
Triadas de Pitágoras, 34
Triángulo(s)
ALA, 162*n*, 671
área del, 31, 687-93
aspecto histórico, 690
catetos, 506
circunscribir, 680
congruentes, 32-33
de Pascal, 949, 973-74, 976, 977, 1009
equilátero, 164
LAA, 670
LAL, 162*n*, 682, 688
LLA, 671-73
LLL, 162*n*, 682-83, 689
medianos, 164
oblicuo, 669
semejantes, 669*n*
rectángulo, 30, 506-18
aplicaciones, 661-65
definición de, 506
teorema de ángulos complementarios, 512-14
solución de, 660-61
valor de la función, 507
Trigonometría analítica, 591-658
fórmulas
de ángulo doble, 626-27
de medio ángulo, 630-33
de producto a suma, 635-36
de suma y resta, 615-25
funciones trigonométricas inversas, 592-607
cosecante inversa, 605-6
coseno inverso, 596-98
cotangente inversa, 605
seno inverso, 592-96
tangente inversa, 599-600
valores aproximados, 594-96, 606
valores exactos, 593-96, 597-98, 600, 603-4
identidades, 608-15
básicas, 609
cociente, 608

con funciones inversas, 612-13
definición de, 608
de Pitágoras, 609
establecimiento, 608-13
pares-impares, 544-45,609
recíprocas, 608
Trinomios, 36
Factorización de, 46-47, 49-50
Truncado, 5

U

Umbra versa, 514
Unidad imaginaria (*i*), 109
potencias de, 114
Unión de conjuntos, 985

V

Valor
absoluto, 19-20, 252, 255
ecuaciones con, 136
desigualdades con, 137-39
acumulado (valor futuro), 457
de funciones, 219, 221
exacto de expresión logarítmica, 430
futuro (valor acumulado), 457
presente, 457, 460-61
Variable(s), 20-21
complejas, 377
dependientes, 199, 222
dominio, 21
independientes, 199, 222
Variación, 206-11
combinada, 208-9
conjunta, 208-9
definición de, 206
directa, 206-7
inversa, 207-8
Vector(es), 744-55
algebraicos, 747-49
ángulo entre, 757-58
aplicación, 752-53
aspecto histórico, 753, 762
cero, 745
columna, 887
componentes, 747, 749
definición de, 745
de fuerza, 751
de posición, 747-49
diferencia de, 745, 749, 749-50
dirección, 744,750
escritura, 751-52
fila, 887
fuerza, 751
geométrico, 744-45
graficar, 746
igualdad de, 748-49
magnitudes, 744, 747, 749, 751-52
multiplicación por números, 746
ortogonales, 759-60, 761
paralelos, 759-60
posición, 747-49
producto punto, 756-64
proyección sobre otro vector, 760-61
suma, 745-46, 749, 749-50
unitario, 747, 750-51
velocidad, 751
Velocidad
angular, 501
de un vector, 751
lineal, 501,502
Vértices
de cono, 770
de elipse, 781
de hipérbola, 792
de parábola, 294, 771, 773, 775-76
de rayo, 492
de una gráfica, 922
localización, sin graficar la función cuadrática, 296-97
Vibración
amplitud, 693-94
periodo, 694
Viète, Fraçois, 06, 684
Vínculo, 75
Volumen, 32
del sonido, 440
Vos Savant, Marilyn, 983

W

Wallis, John, 742
Whispering Galleries, 788

Y

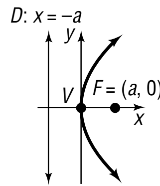
Yang Hui, 977

Notas

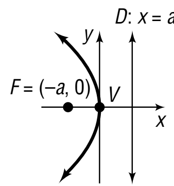
Notas

CÓNICAS

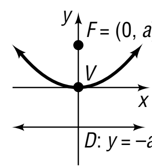
Parábola



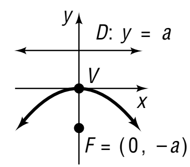
$y^2 = 4ax$



$y^2 = -4ax$

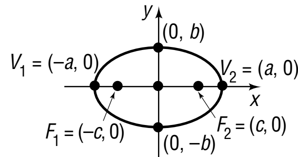


$x^2 = 4ay$

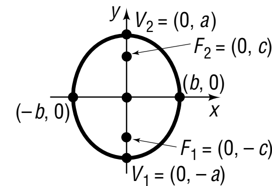


$x^2 = -4ay$

Elipse

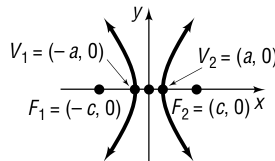


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b, \quad c^2 = a^2 - b^2$$



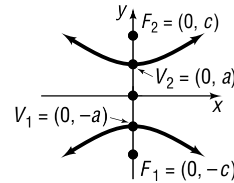
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad a > b, \quad c^2 = a^2 - b^2$$

Hipérbola



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Asíntotas: $y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Asíntotas: $y = \frac{a}{b}x, \quad y = -\frac{a}{b}x$

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^r = r\log_a M$$

$$\log_a M = \frac{\log M}{\log a} = \frac{\ln M}{\ln a}$$

COMBINACIONES/PERMUTACIONES

$0! = 1 \qquad 1! = 1$

$n! = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(3)(2)(1)$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

TEOREMA BINOMIAL

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}ba^{n-1} + \binom{n}{2}b^2a^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}b^{n-1}a + b^n$$

SECUENCIA ARITMÉTICA

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a + (n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

SECUENCIA GEOMÉTRICA

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

SERIES GEOMÉTRICAS

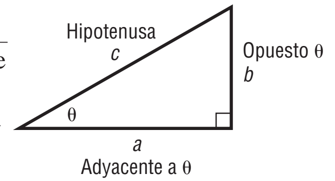
Si $|r| < 1$, $a + ar + ar^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

De un ángulo agudo

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$ $\qquad \tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}}$

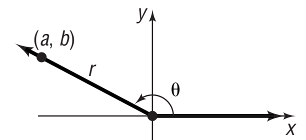
$\csc\theta = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Opuesto}}$ $\qquad \sec\theta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}}$ $\qquad \cot\theta = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}}$



De un ángulo general

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{r}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{a}{r}$ $\qquad \tan\theta = \dfrac{b}{a},\ a \neq 0$

$\csc\theta = \dfrac{r}{b},\ b \neq 0$ $\qquad \sec\theta = \dfrac{r}{a},\ a \neq 0$ $\qquad \cot\theta = \dfrac{a}{b},\ b \neq 0$



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Identidades fundamentales

$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ $\qquad \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ $\qquad \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ $\qquad \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

Fórmulas del ángulo mitad

$\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{2}}$

$\cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\theta}{2}}$

$\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

Fórmulas del ángulo doble

$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos(2\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

$\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

Identidades pares-impares

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ $\qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\qquad \sec(-\theta) = \sec\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$

Fórmulas producto a suma

$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$

$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$

$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)\right]$

Fórmulas para suma y diferencia

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Fórmulas de suma a producto

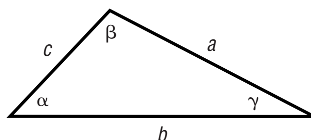
$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha - \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha + \beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS



Ley de senos

$\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$

Ley de cosenos

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

FÓRMULAS/ECUACIONES

Fórmula de la distancia

Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, la distancia de P_1 a P_2 es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ecuación estándar en un círculo

La ecuación estándar de un círculo de radio r con centro en (h, k) es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Fórmula de la pendiente

La pendiente m de la recta que pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{si } x_1 \neq x_2$$

$$m \text{ no está definida} \qquad \text{si } x_1 = x_2$$

Punto-pendiente Ecuación de una recta

La ecuación de la recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Pendiente-intercepción Ecuación de una recta

La ecuación de la recta con pendiente m y con b como intercepción b es

$$y = mx + b$$

Fórmula cuadrática

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac > 0$, hay dos soluciones reales diferentes.
Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una solución repetida.
Si $b^2 - 4ac < 0$, hay dos soluciones complejas que no son reales.

FÓRMULAS GEOMÉTRICAS

Círculo

r

r = radio, A = Área, C = Circunferencia
$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$

Triángulo

h
b

b = base, h = alto (altura), A = área
$A = \frac{1}{2}bh$

Rectángulo

w
l

l = largo, w = ancho, A = área, P = perímetro
$A = lw \qquad P = 2l + 2w$

Hexaedro rectangular

h
w
l

l = largo, w = ancho, h = altura, V = volumen, S = superficie
$V = lwh \qquad S = 2lw + 2lh + 2wh$

Esfera

r

r = radio, V = volumen, S = superficie
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S = 4\pi r^2$

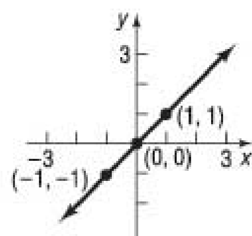
Cilindro circular recto

r
h

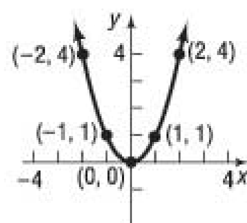
r = radio, h = altura, V = volumen, S = superficie
$V = \pi r^2 h \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

BIBLIOTECA DE FUNCIONES

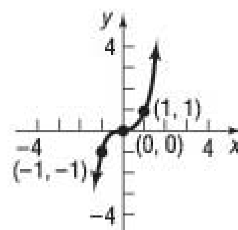
Función identidad
$f(x) = x$



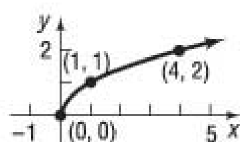
Función cuadrada
$f(x) = x^2$



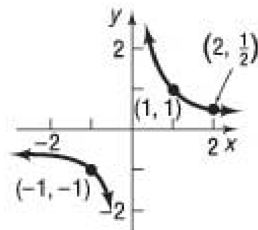
Función cúbica
$f(x) = x^3$



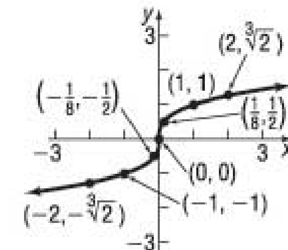
Función raíz cuadrada
$f(x) = \sqrt{x}$



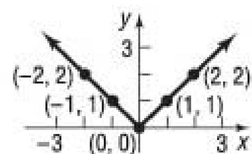
Función recíproca
$f(x) = \frac{1}{x}$



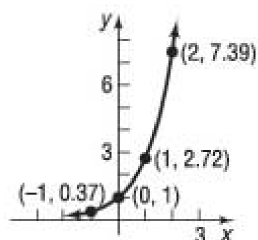
Función raíz cúbica
$f(x) = \sqrt[3]{x}$



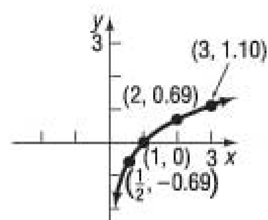
Función valor absoluto
$f(x) = |x|$



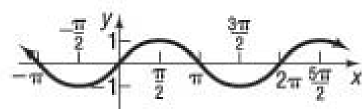
Función exponencial
$f(x) = e^x$



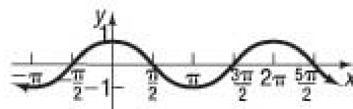
Función logaritmo natural
$f(x) = \ln x$



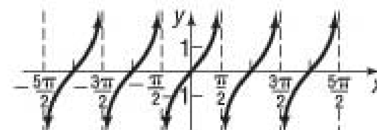
Función seno
$f(x) = \text{sen } x$



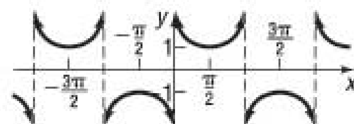
Función coseno
$f(x) = \cos x$



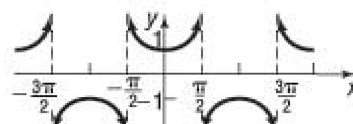
Función tangente
$f(x) = \tan x$



Función cosecante
$f(x) = \csc x$



Función secante
$f(x) = \sec x$



Función cotangente
$f(x) = \cot x$

